2017학년도 수능 수학 나형 해설

01

[풀이1]

지수법칙에 의하여

$8\times 2^{-2}=2^3\times 2^{-2}=2^{3-2}=2$

답 ②

[풀이2]

음의 정수인 지수의 정의에 의하여

$8\times 2^{-2}=8\times\dfrac{1}{2^2}=8\times\dfrac{1}{4}=2$

답 ②

02

[풀이]

집합 A에 속하거나 집합 B에 속하는 원소는

1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10

이므로

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10\}$

$\therefore\ n(A\cup B)=8$

답 ③

03

[풀이]

로그의 성질과 로그의 정의에 의하여

$\log_{15}3+\log_{15}5=\log_{15}(3\times 5)=\log_{15}15=1$

답 ①

04

[풀이]

두 집합 $A\cap B^C$, $A\cap B$에 대하여 다음의 두 식이 성립한다.

$(A\cap B^C)\cup(A\cap B)=A$

$(A\cap B^C)\cap(A\cap B)=\varnothing$

두 사건 $A\cap B^C$, $A\cap B$가 서로 배반사건이므로

확률의 덧셈정리에 의하여

$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B^C)+\mathrm{P}(A\cap B)=\dfrac{3}{16}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{16}$

답 ⑤

05

[풀이1]

등비수열의 정의에 의하여

$\dfrac{a}{\frac{9}{4}}=\dfrac{4}{a}$ 즉, $a^2=4\times\dfrac{9}{4}$

a에 대한 이차방정식을 풀면

$a=3(\because a>0)$

답 ②

[풀이2]

등비중앙의 정의에 의하여

$a^2=\dfrac{9}{4}\times 4$

a에 대한 이차방정식을 풀면

$a=3(\because a>0)$

답 ②

06

[풀이]

정의역 X의 원소 2에 공역 X의 원소 4가 대응되므로

$f(2)=4$

$f^{-1}(2)=a$로 두면 역함수의 성질에 의하여

$f(a)=2$

정의역 X의 원소 3에 공역 X의 원소 2가 대응되므로

$a=3$

$\therefore\ f(2)+f^{-1}(2)=4+3=7$

답 ⑤

07

[풀이]

조건 p에서 주어진 부등식을 풀면

$-3\le x-1\le 3$에서 $-2\le x\le 4$

조건 p의 진리집합을 P라고 하면

$P=\{x|-2\le x\le 4\}$

조건 q에서 주어진 부등식을 풀면

$-a\le x\le a$

조건 q의 진리집합을 Q라고 하면

$Q=\{x|-a\le x\le a\}$

p가 q이기 위한 충분조건이므로

$P\subset Q$

$-a\le -2$이고 $a\ge 4$

a는 자연수이므로 $a\ge 4$이다.

자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

08

[풀이]

$x \to 0-$일 때, $f(x)$는 0보다 큰 값을 가지면서 0에 한없이 가까워진다.

$$\lim_{x \to 0-} f(x) = 0$$

$x \to 1+$일 때, $f(x)$는 -3보다 큰 값을 가지면서 -3에 한없이 가까워진다.

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = -3$$

$$\therefore \lim_{x \to 0-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x) = 0 + (-3) = -3$$

답 ③

09

[풀이]

정적분의 기본 정리에 의하여

$$\int_0^2 (6x^2 - x)dx = \left[2x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_0^2 = 14$$

답 ②

10

[풀이]

문제에서 주어진 함수

$$y = \frac{3}{x-5} + k \qquad \cdots ㉠$$

의 방정식을 x에 대하여 풀면

$xy - 5y = 3 + kx - 5k$, $(y-k)x = 5y + 3 - 5k$

$$x = \frac{5y + 3 - 5k}{y - k}$$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$$y = \frac{5x + 3 - 5k}{x - k}$$

정리하면

$$y = \frac{3}{x-k} + 5 \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡(㉠의 역함수)의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 서로 대칭이므로 ㉠, ㉡의 그래프가 서로 일치하면 ㉠은 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ k = 5$

답 ⑤

[참고]

문제에서 주어진 함수의 두 점근선이 만나는 교점 $(5,\ k)$가 직선 $y = x$ 위에 있으면 문제에서 주어진 함수의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ k = 5$

11

[풀이]

주사위를 한 번 던질 때, 4의 눈이 나오는 사건을 A라고 하자.

수학적 확률의 정의에 의하여

$$\mathrm{P}(A) = \frac{1}{6}$$

여사건의 확률의 정의에 의하여

$$\mathrm{P}(A^C) = 1 - \mathrm{P}(A) = \frac{5}{6}$$

구하는 확률을 p라고 하자.

독립시행의 확률의 정의에 의하여

$$p = {}_3\mathrm{C}_1 (\mathrm{P}(A))^1 (\mathrm{P}(A^C))^2 = 3 \times \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

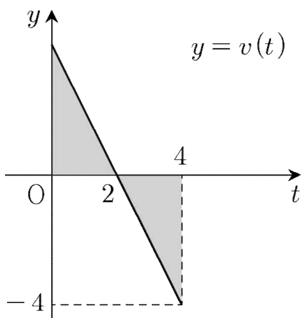
답 ①

12

[풀이]

$0 \le t \le 2$일 때 $v(t) \ge 0$이고,

$2 \le t \le 4$일 때 $v(t) \le 0$이다.



$t = 0$에서 $t = 4$까지 점 P가 움직인 거리를 s라고 하면

$$s = \int_0^4 |v(t)|dt = \int_0^2 (-2t+4)dt + \int_2^4 (2t-4)dt$$

$$= \left[-t^2 + 4t\right]_0^2 + \left[t^2 - 4t\right]_2^4 = 4 + 4 = 8$$

답 ①

13

[풀이]

이 학교의 여학생의 수를 x라고 두자.

	남학생	여학생	합
체험 학습A	90	70	160
체험 학습B	$270 - x$	$x - 70$	200
합	$360 - x$	x	360

이 학교의 학생 중 임의로 뽑은 1명의 학생이 체험 학습 A를 선택하는 사건을 A, 남학생인 사건을 B라고 하자.

조건부 확률의 정의에 의하여

$$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)}=\frac{\frac{270-x}{360}}{\frac{200}{360}}$$

$$=\frac{270-x}{200}=\frac{2}{5}$$

x에 대한 일차방정식을 풀면

$\therefore\ x=190$

답 ③

[참고]

조건부 확률의 정의와 수학적 확률의 정의에 의하여

$$\mathrm{P}(B|A^C)=\frac{n(B\cap A^C)}{n(A^C)}=\frac{270-x}{200}$$

14

[풀이]

$x^2-4x+6=(x-2)^2+2\geq 2$이고, $1\neq 0$이므로 실수 전체의 집합에서 $f(x)\neq 0$이다.

$$\frac{g(x)}{f(x)}=\begin{cases}\frac{ax+1}{x^2-4x+6} & (x<2)\\ ax+1 & (x\geq 2)\end{cases}$$

$x<2$일 때, 두 함수

$f(x)=x^2-4x+6$, $g(x)=ax+1$

은 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 연속이다. 이때, $f(x)\neq 0$이다.

$x\geq 2$일 때, 두 함수

$f(x)=1$, $g(x)=ax+1$

은 연속이므로 연속함수의 성질에 의하여

함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 연속이다. 이때, $f(x)\neq 0$이다.

따라서 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$가 $x=2$에서 연속이면 함수 $\frac{g(x)}{f(x)}$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2+}(ax+1)=2a+1$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{ax+1}{x^2-4x+6}=\frac{2a+1}{2}$$

$$\frac{g(2)}{f(2)}=2a+1$$

함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$$\lim_{x\to 2+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{g(2)}{f(2)}$$

이므로

$$2a+1=\frac{2a+1}{2}$$

a에 대한 일차방정식을 풀면

$\therefore\ a=-\frac{1}{2}$

답 ④

15

[풀이1]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(>0)$라고 하자.

조건 (가)에서 등차중앙의 정의에 의하여

$a_6+a_8=2a_7=0$ 즉, $a_7=0$

이를 조건 (나)에서 주어진 등식에 대입하면

$|a_6|=3$ 풀면 $a_6=3$ 또는 $a_6=-3$

만약 $a_6=3$이면 $d=a_7-a_6=0-3=-3<0$이므로

문제에서 주어진 조건에 모순이다.

따라서 $a_6=-3$이다.

공차가 양수인지를 확인해보면

$d=a_7-a_6=0-(-3)=3>0$

등차수열의 정의에 의하여

$\therefore\ a_2=a_7-5d=0-5\times 3=-15$

답 ①

[풀이2]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(>0)$라고 하자.

일반항 a_n은

$a_n=a_1+(n-1)d\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이므로

$a_6=a_1+5d$, $a_7=a_1+6d$, $a_8=a_1+7d$

이를 조건 (가), (나)에 대입하면

(가): $2a_1+12d=0$ 즉, $a_1+6d=0$ ⋯㉠

(나): $|a_1+5d|=|a_1+6d|+3$

위의 두 식을 연립하면 $|a_1+5d|=3$이므로

$a_1+5d=3$ 또는 $a_1+5d=-3$

$a_1+5d=3$과 ㉠을 연립하면 $d=-3<0$

$a_1+5d=-3$과 ㉠을 연립하면 $d=3>0$

d는 양수이므로 $d=3$이다.

이를 ㉠에 대입하면 $a_1=-18$

일반항 a_n은

$a_n=3n-21\,(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$\therefore\ a_2 = -15$

답 ①

16

[풀이]

$n = 64$, $\sigma = 40$이므로 모평균 m의 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$\overline{x} - 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{64}} \le m \le \overline{x} + 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{64}}$$

$$\therefore\ c = 2.58 \times \frac{40}{\sqrt{64}} = 2.58 \times \frac{40}{8} = 2.58 \times 5 = 12.9$$

답 ④

17

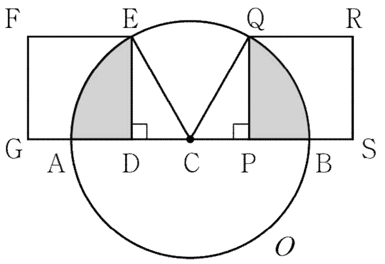
[풀이]

자연수 n에 대하여 그림 R_n에서 새롭게 그려진 모양의 도형과 모양의 도형은 모두 합동이다.

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음과 같다고 하자.

$a_n =$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 () 모양의 도형 한 개의 넓이)

$b_n =$(그림 R_n에서 새롭게 그려진 모양의 도형의 개수와 모양의 도형의 개수의 합)



직각삼각형 QCP에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{PQ}} = \sqrt{\overline{\mathrm{QC}}^2 - \overline{\mathrm{CP}}^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

이므로 특수각의 삼각비에 의하여

$\angle \mathrm{QCP} = 60^\circ$

부채꼴의 넓이를 구하는 공식과 삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$a_1 =$(부채꼴 CBQ의 넓이)$-$(삼각형 QCP의 넓이)

$$= \pi \times \overline{\mathrm{CB}}^2 \times \frac{60}{360} - \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{CP}} \times \overline{\mathrm{PQ}} = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

두 원 O, $O_1(O_2)$의 지름의 길이의 비는

$\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{DE}} = 4 : \sqrt{3}$

이므로 그림 R_2에서 새롭게 그려진 () 모양의 도형 한 개의 넓이와 그림 R_1에서 새롭게 그려진 () 모양의 도형 한 개의 넓이의 비는 16 : 3이다.

즉, $a_2 = \dfrac{3}{16}a_1$

마찬가지의 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \frac{3}{16}a_n$$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$$a_1 = \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2},\ a_{n+1} = \frac{3}{16}a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

수열 $\{b_n\}$의 귀납적 정의는

$$b_1 = 2,\ b_{n+1} = 2b_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n$은 첫째항이 $\dfrac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ $(= a_1 b_1)$이고 공비가 $\dfrac{3}{8}\left(= \dfrac{3}{16} \times 2\right)$인 등비급수이다.

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}{1 - \frac{3}{8}} = \frac{32\pi - 24\sqrt{3}}{15}$$

답 ③

18

[풀이1]

$\alpha \le \beta$로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

방정식 $f(x) = 0$의 두 근이 각각 α, β이므로

$f(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\{f(x) - (x - a)\}$$
$$= \lim_{x\to a}\{(x - \alpha)(x - \beta) - (x - a)\}$$
$$= (a - \alpha)(a - \beta) = f(a) \qquad \cdots ㉠$$
$$\lim_{x\to a}\{f(x) - (x - a)\}$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x) - (x - a)}{f(x) + (x - a)} \times \{f(x) + (x - a)\}$$
$$= \frac{3}{5} \times f(a) \qquad \cdots ㉡$$

㉠=㉡: $f(a) = \dfrac{3}{5} \times f(a)$

풀면 $f(a) = 0$이므로 인수정리에 의하여

$\alpha = a$ 또는 $\beta = a$

(1) $\alpha = a$인 경우

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = (x - a)(x - \beta)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x) - (x - a)}{f(x) + (x - a)} = \lim_{x\to a}\frac{(x - a)(x - \beta - 1)}{(x - a)(x - \beta + 1)}$$

$=\lim_{x\to a}\frac{x-\beta-1}{x-\beta+1}=\frac{a-\beta-1}{a-\beta+1}=\frac{3}{5}$

정리하면

$\beta=a-4$

이므로

$|\alpha-\beta|=4$

(2) $\beta=a$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 아래의 결과를 얻는다.

$|\alpha-\beta|=4$

(1), (2)에서

$\therefore\ |\alpha-\beta|=4$

답 ④

[풀이2]

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}=f(a)$ $\cdots$㉠

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}$

$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}\times\{f(x)+(x-a)\}$

$=\frac{3}{5}\times f(a)$ $\cdots$㉡

㉠=㉡: $f(a)=\frac{3}{5}\times f(a)$

풀면 $f(a)=0$이므로

인수정리에 의하여 함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=(x-a)(x-b)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x-b-1)}{(x-a)(x-b+1)}$

$=\lim_{x\to a}\frac{x-b-1}{x-b+1}=\frac{a-b-1}{a-b+1}=\frac{3}{5}$

정리하면

$b=a-4$

이므로 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는

$(a,\ a-4)$ 또는 $(a-4,\ a)$

이다. 두 경우 모두에 대하여

$\therefore\ |\alpha-\beta|=4$

답 ④

[풀이3]

함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x)=x^2+bx+c$ $\cdots(*)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}=f(a)$ $\cdots$㉠

$\lim_{x\to a}\{f(x)-(x-a)\}$

$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}\times\{f(x)+(x-a)\}$

$=\frac{3}{5}\times f(a)$ $\cdots$㉡

㉠=㉡: $f(a)=\frac{3}{5}\times f(a)$

풀면 $f(a)=0$이므로

$f(a)=a^2+ab+c=0$ 즉, $c=-a^2-ab$

이를 (*)에 대입하여 정리하면

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-a)(x+a+b)$

함수의 극한에 대한 성질에 의하여

$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)}{f(x)+(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a+b-1)}{(x-a)(x+a+b+1)}$

$=\lim_{x\to a}\frac{x+a+b-1}{x+a+b+1}=\frac{2a+b-1}{2a+b+1}=\frac{3}{5}$

정리하면

$b=4-2a$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=(x-a)(x-a+4)$

이므로 순서쌍 $(\alpha,\ \beta)$는

$(a,\ a-4)$ 또는 $(a-4,\ a)$

이다. 두 경우 모두에 대하여

$\therefore\ |\alpha-\beta|=4$

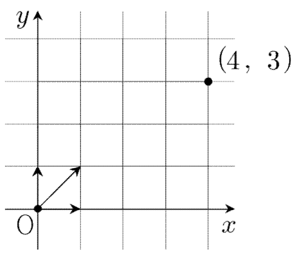
답 ④

19

[풀이]

<과정>

원점에서 한 번 점프하여 이동할 수 있는 점은 아래 그림과 같다.

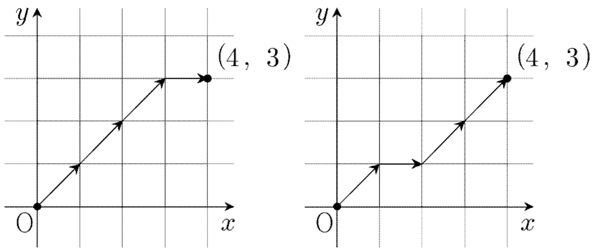


만약 이동 과정에서 ↗ 방향으로의 점프가 4회 이상이면 도착한 점의 y좌표가 4 이상이므로 문제에서 주어진 조건에 모순이다. 따라서 이동 과정에서 ↗ 방향으로의 점프는 3회 이하여야 한다.

↗ 방향으로의 점프가 3회인 경우

: ↗, ↗, ↗, → (4번 이동)

예를 들어



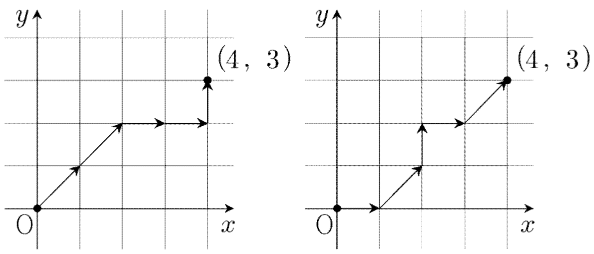
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

$\dfrac{4!}{3!}$

↗ 방향으로의 점프가 2회인 경우

: ↗, ↗, →, →, ↑ (5번 이동)

예를 들어



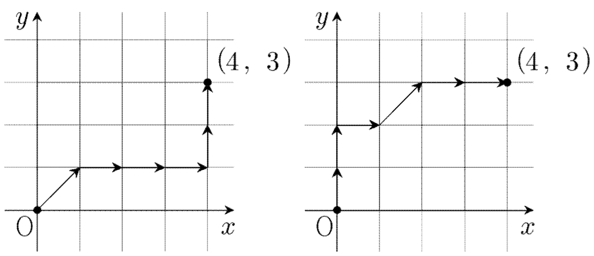
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

$\dfrac{5!}{2!2!}$

↗ 방향으로의 점프가 1회인 경우

: ↗, →, →, →, ↑, ↑ (6번 이동)

예를 들어



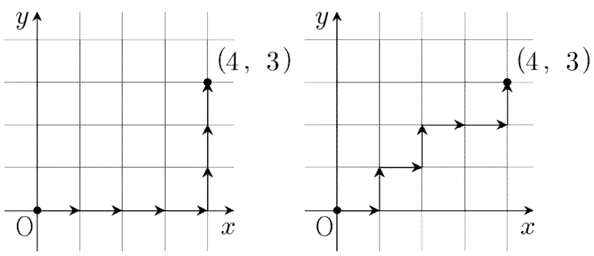
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

$\dfrac{6!}{3!2!}$

↗ 방향으로의 점프가 0회인 경우

: →, →, →, →, ↑, ↑, ↑ (7번 이동)

예를 들어



같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 경우의 수는

$\dfrac{7!}{4!3!}$

점프를 반복하여 점 $(0,\ 0)$에서 점 $(4,\ 3)$까지 이동하는 모든 경우의 수를 N이라 하자. 확률변수 X가 가질 수 있는 값 중 가장 작은 값을 k라 하면 $k=\boxed{4}$이고, 가장 큰 값은 7이다.

$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=4)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{4!}{3!}=\dfrac{4}{N}$

$\mathrm{P}(X=k+1)=\mathrm{P}(X=5)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{5!}{2!2!}=\dfrac{30}{N}$

$\mathrm{P}(X=k+2)=\mathrm{P}(X=6)=\dfrac{1}{N}\times\boxed{\dfrac{6!}{3!2!}}$

$\mathrm{P}(X=k+3)=\mathrm{P}(X=7)=\dfrac{1}{N}\times\dfrac{7!}{3!4!}=\dfrac{35}{N}$

이고

$\displaystyle\sum_{i=k}^{k+3}\mathrm{P}(X=i)=\dfrac{4}{N}+\dfrac{30}{N}+\dfrac{60}{N}+\dfrac{35}{N}=\dfrac{129}{N}=1$

이므로 $N=\boxed{129}$이다.

따라서 확률변수 X의 평균 $\mathrm{E}(X)$는 다음과 같다.

$\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{i=k}^{k+3}\{i\times P(X=i)\}=\dfrac{257}{43}$

(가): $a=4$ (나): $b=\dfrac{6!}{3!2!}=60$ (다): $c=129$

$\therefore\ a+b+c=193$

답 ②

20

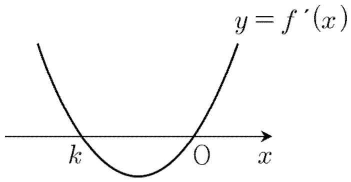
[풀이]

함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 양수이므로

도함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 양수이다.

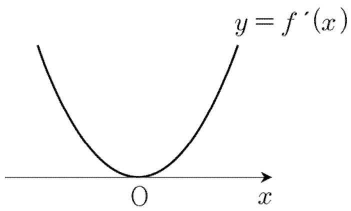
$k\le 0$이라고 가정하자.

k가 음수일 때, 함수 $y=f'(x)$의 그래프는



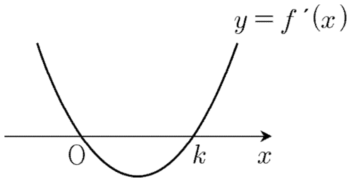
$x=k$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극댓값을 갖는다. 이는 조건 (가)에 모순이다.

k가 0일 때, 함수 $y=f'(x)$의 그래프는

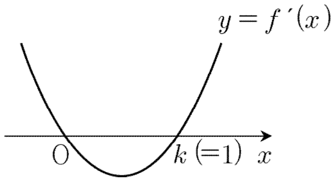


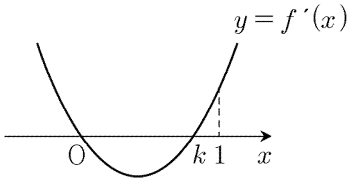
$x=k$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 바뀌지 않으므로

$x=k$에서 함수 $f(x)$는 극값을 갖지 않는다. 이는 조건 (가)에 모순이다.
따라서 $k>0$이므로 함수 $y=f'(x)$의 그래프는



$x=k$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=k$에서 극솟값을 갖는다. 이는 조건 (가)를 만족시킨다.
ㄱ. (참)
구간 $[0,\ k]$에서 $f'(x)\le 0$이므로
$$\int_0^k f'(x)dx<0$$
ㄴ. (참)
조건 (나)에서 적분과 미분의 관계에 의하여
$t>1$일 때, $|f'(t)|=f'(t)$
즉, $t>1$일 때, $f'(t)\ge 0$이다.
이 부등식이 성립하기 위해서는 아래 그림처럼 $k\le 1$이어야 한다.

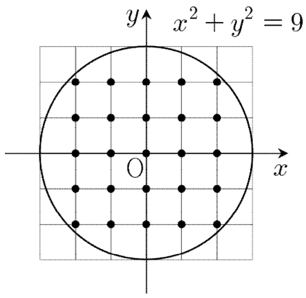




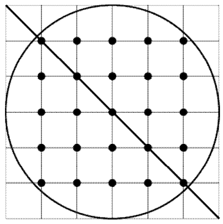
ㄷ. (참)
정적분의 성질과 미적분의 기본 정리에 의하여
$$\int_0^t |f'(x)|dx=\int_0^k |f'(x)|dx+\int_k^t |f'(x)|dx$$
$$=\int_0^k \{-f'(x)\}dx+\int_k^t f'(x)dx$$
$$=[-f(x)]_0^k+[f(x)]_k^t=f(t)+f(0)-2f(k)$$
이므로 $t>1$일 때, 아래의 등식은 항상 성립한다.
$f(t)+f(0)-2f(k)=f(t)+f(0)$
정리하면
$f(k)=0$
따라서 함수 $f(x)$의 극솟값은 0이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

21

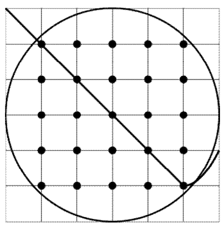
[풀이]
x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점 중에서 원 $x^2+y^2=9$의 내부에 있는 점은 아래 그림과 같이 25개다.



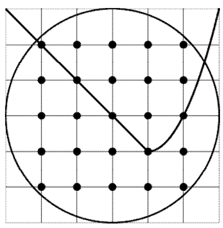
○ $n\le 7$인 경우



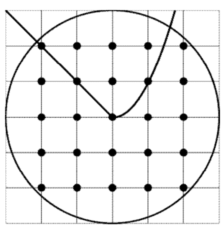
위의 그림에서 $A_n-B_n=0$이다.
○ $n=8$인 경우



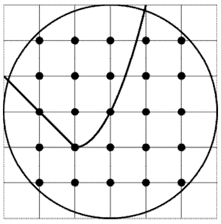
위의 그림에서 $A_n-B_n=0$이다.
○ $n=9$인 경우



위의 그림에서 $A_n-B_n=12-8=4$이다.
○ $n=10$인 경우

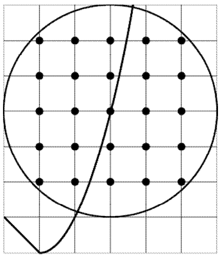


위의 그림에서 $A_n-B_n=17-4=13$이다.
○ $n=11$인 경우



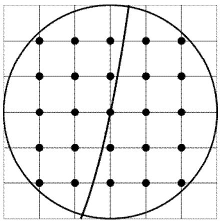
위의 그림에서 $A_n - B_n = 15 - 7 = 8$이다.

○ $n = 12$인 경우



위의 그림에서 $A_n - B_n = 0$이다.

○ $n \geq 13$인 경우



위의 그림에서 $A_n - B_n = 0$이다.

시그마의 정의에 의하여

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{20}(A_n - B_n) = 4 + 13 + 8 + 0 \times 17 = 25$

답 ④

22

[풀이]

순열의 수와 조합의 수에 의하여

${}_5\mathrm{P}_2 = 5 \times 4 = 20$, ${}_5\mathrm{C}_2 = \dfrac{{}_5\mathrm{P}_2}{2!} = 10$

$\therefore$ ${}_5\mathrm{P}_2 + {}_5\mathrm{C}_2 = 20 + 10 = 30$

답 30

23

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 3x^2 + 6x$

$\therefore$ $f'(2) = 24$

답 24

24

[풀이]

차집합의 성질에 의하여

$A - B = A \cap B^C$

이므로 집합 B는 3을 원소로 가져야 한다.

$a - 4 = 3$

$\therefore$ $a = 7$

답 7

25

[풀이1]

시그마의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15} f(2k) = \sum_{k=1}^{15}(k+2) = \sum_{k=1}^{15}k + \sum_{k=1}^{15}2$

$= \dfrac{15 \times 16}{2} + 2 \times 15 = 120 + 30 = 150$

답 150

[풀이2]

시그마의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15} f(2k) = \sum_{k=1}^{15}(k+2) = \sum_{k=3}^{17}k = \sum_{k=1}^{17}k - \sum_{k=1}^{2}k$

$\displaystyle= \sum_{k=1}^{17}k - (1+2) = \frac{17 \times 18}{2} - 3 = 150$

답 150

[풀이3]

시그마의 정의와 등차수열의 합의 공식에 의하여

$\displaystyle\sum_{k=1}^{15} f(2k) = \sum_{k=1}^{15}(k+2) = 3 + 4 + 5 + \cdots + 17$

$= \dfrac{3+17}{2} \times 15 = 150$

답 150

26

[풀이]

점 (1, 1)은 문제에서 주어진 곡선 위의 점이므로

$1 = 1^3 - a \times 1 + b$ 즉, $a = b$ …㉠

주어진 함수의 도함수는

$y' = 3x^2 - a$

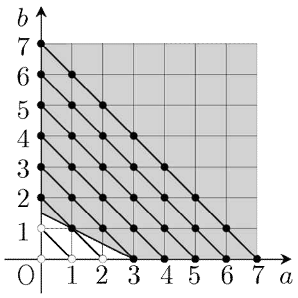
주어진 곡선 위의 점 (1, 1)에서의 접선의 기울기는

$3-a$이므로
두 직선의 수직 관계에 의하여
$(3-a)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-1$
풀면
$a=1$
이를 ㉠에 대입하면
$b=1$
$\therefore\ a+b=2$
답 2

27

[풀이1]
지수법칙에 의하여
$2^a\times4^b=2^a\times2^{2b}=2^{a+2b}$
조건 (나)에 의하여 2^{a+2b}은 8의 배수이므로
$a+2b\geq3$
이제 a, b, c에 대한 식을 모두 쓰면
$a+b+c=7$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$) …㉠
$a+2b\geq3$ …㉡
㉠을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는 a, b, c 중에서 중복을 허용하여 7개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
$${}_3\mathrm{H}_7={}_{3+7-1}\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_7={}_9\mathrm{C}_2=\frac{9\times8}{1\times2}=36$$
㉠은 만족시키지만, ㉡을 만족시키지 않는
즉, $a+2b<3$인 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$는
$(2,\ 0,\ 5)$, $(1,\ 0,\ 6)$, $(0,\ 1,\ 6)$, $(0,\ 0,\ 7)$
이므로 구하는 경우의 수는
$36-4=32$
답 32

[참고1]
부등식의 영역의 관점에서 순서쌍의 개수를 구할 수도 있다.
$a+b=7-c$ (단, $0\leq c\leq7$)
$a\geq0$, $b\geq0$, $a+2b\geq3$
이를 좌표평면에 나타내면



위의 그림에서 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
$\frac{1+8}{2}\times8-4=32$

[풀이2]
지수법칙에 의하여
$2^a\times4^b=2^a\times2^{2b}=2^{a+2b}$
조건 (나)에 의하여 2^{a+2b}은 8의 배수이므로
$a+2b\geq3$
이제 a, b, c에 대한 식을 모두 쓰면
$a+b+c=7$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$) …㉠
$a+2b\geq3$ …㉡
(1) $b=0$인 경우
㉠, ㉡을 다시 쓰면
$a+c=7$ (단, $a\geq3$, $c\geq0$)
$a-3=a'$로 두면
$a'+c=4$ (단, $a'\geq0$, $c\geq0$)
순서쌍 $(a',\ 0,\ c)$의 개수는 a', c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2\mathrm{H}_4={}_{2+4-1}\mathrm{C}_4={}_5\mathrm{C}_4=5$
(2) $b=1$인 경우
㉠, ㉡을 다시 쓰면
$a+c=6$ (단, $a\geq1$, $c\geq0$)
$a-1=a'$로 두면
$a'+c=5$ (단, $a'\geq0$, $c\geq0$)
순서쌍 $(a',\ 1,\ c)$의 개수는 a', c 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2\mathrm{H}_5={}_{2+5-1}\mathrm{C}_5={}_6\mathrm{C}_5={}_6\mathrm{C}_1=6$
(3) $b=k(2\leq k\leq7)$인 경우
㉠, ㉡을 다시 쓰면
$a+c=7-k$ (단, $a\geq0$, $c\geq0$)
순서쌍 $(a,\ k,\ c)$의 개수는 a, c 중에서 중복을 허용하여 $7-k$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2\mathrm{H}_{7-k}={}_{2+7-k-1}\mathrm{C}_{7-k}={}_{8-k}\mathrm{C}_{7-k}={}_{8-k}\mathrm{C}_1=8-k$
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는
$$5+6+\sum_{k=2}^{7}(8-k)=5+6+\frac{1+6}{2}\times6=32$$
답 32

[참고2]
a의 값을 기준으로 순서쌍의 개수를 구할 수도 있다.
$a+b+c=7$ (단, $a\geq0$, $b\geq0$, $c\geq0$) …㉠
$a+2b\geq3$ …㉡
(1) $a=0$인 경우
㉠, ㉡을 다시 쓰면

$b+c=7$ (단, $b \geq 2$, $c \geq 0$)
$b-2=b'$로 두면
$b'+c=5$ (단, $b' \geq 0$, $c \geq 0$)
순서쌍 $(0, b', c)$의 개수는 b', c 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$
(2) $a=1$인 경우
㉠, ㉡을 다시 쓰면
$b+c=6$ (단, $b \geq 1$, $c \geq 0$)
$b-1=b'$로 두면
$b'+c=5$ (단, $b' \geq 0$, $c \geq 0$)
순서쌍 $(1, b', c)$의 개수는 b', c 중에서 중복을 허용하여 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_5={}_{2+5-1}C_5={}_6C_5={}_6C_1=6$
(3) $a=2$인 경우
㉠, ㉡을 다시 쓰면
$b+c=5$ (단, $b \geq 1$, $c \geq 0$)
$b-1=b'$로 두면
$b'+c=4$ (단, $b' \geq 0$, $c \geq 0$)
순서쌍 $(2, b', c)$의 개수는 b', c 중에서 중복을 허용하여 4개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_4={}_{2+4-1}C_4={}_5C_4={}_5C_1=5$
(4) $a=k(3 \leq k \leq 7)$인 경우
㉠, ㉡을 다시 쓰면
$b+c=7-k$ (단, $b \geq 0$, $c \geq 0$)
순서쌍 (k, b, c)의 개수는 b, c 중에서 중복을 허용하여 $7-k$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_{7-k}={}_{2+7-k-1}C_{7-k}={}_{8-k}C_{7-k}={}_{8-k}C_1=8-k$
(1)~(4)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$6+6+5+\sum_{k=3}^{7}(8-k)=6+6+5+\frac{1+5}{2}\times 5=32$$

답 32

[참고3]
c의 값을 기준으로 순서쌍의 개수를 구할 수도 있다.
$a+b+c=7$ (단, $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$) $\cdots$㉠
$a+2b \geq 3$ $\cdots$㉡
$c=7$을 ㉠에 대입하면 $a=b=0$이다.
그런데 이는 ㉡을 만족시키지 않으므로 c는 7이 아니다.
$c=6$을 ㉠에 대입하면
$a=1$, $b=0$ 또는 $a=0$, $b=1$이다.
그런데 이는 ㉡을 만족시키지 않으므로 c는 6이 아니다.
(1) $c=5$인 경우
㉠, ㉡을 다시 쓰면
$a+b=2$ (단, $a \geq 0$, $b \geq 0$)
$a+2b \geq 3$
순서쌍 (a, b, c)는 $(1, 1, 5)$, $(0, 2, 5)$이다.
(2) $c=k(0 \leq k \leq 4)$인 경우
㉠, ㉡을 다시 쓰면
$a+b=7-k$ (단, $a \geq 0$, $b \geq 0$)
$a+2b \geq 3$
위의 두 식을 연립하면
$a+b=7-k$ (단, $a \geq 0$, $b \geq 0$)
순서쌍 (a, b, k)의 개수는 a, b 중에서 중복을 허용하여 $7-k$개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_2H_{7-k}={}_{2+7-k-1}C_{7-k}={}_{8-k}C_{7-k}$
$={}_{8-k}C_1=8-k$
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

$$2+\sum_{k=0}^{4}(8-k)=2+\frac{4+8}{2}\times 5=32$$

답 32

28

[풀이]
직선 $x=4^n$과 곡선 $y=\sqrt{x}$의 방정식을 연립하면
$y=\sqrt{4^n}=2^n$
점 P_n의 좌표는 $P_n(4^n, 2^n)$이고,
점 P_{n+1}의 좌표는 $P_{n+1}(4^{n+1}, 2^{n+1})$이다.
두 점 사이의 거리 공식에 의하여
$L_n=\overline{P_nP_{n+1}}=\sqrt{(4^{n+1}-4^n)^2+(2^{n+1}-2^n)^2}$
$=\sqrt{(3\times 4^n)^2+(2^n)^2}=\sqrt{9\times 16^n+4^n}$
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여

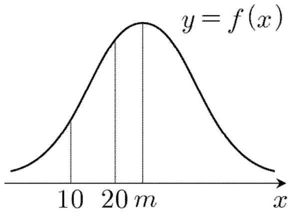
$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{L_{n+1}}{L_n}\right)^2=\lim_{n\to\infty}\frac{9\times 16^{n+1}+4^{n+1}}{9\times 16^n+4^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{9+\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{9\times\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}=\frac{9}{9\times\frac{1}{16}}=16$$

답 16

29

[풀이]
○ $m \geq 20$이라고 가정하자.

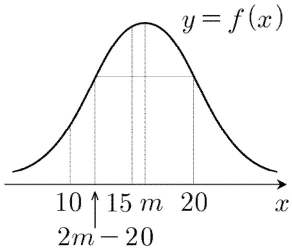


$x \le m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$f(10) < f(20)$

이는 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

○ $15 \le m < 20$이라고 가정하자.



확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$f(2m-20)=f(20)$

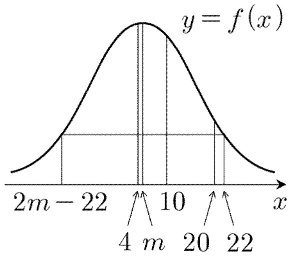
그런데 $10 \le 2m-20 < 20$이고,

$x \le m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$f(10) \le f(20) = f(2m-20)$

이는 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

○ $m \le 10$이라고 가정하자.



$x \ge m$일 때, $f(x)$는 감소하므로

$f(10) > f(20)$

이는 조건 (가)를 만족시킨다.

확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$f(2m-22)=f(22)$

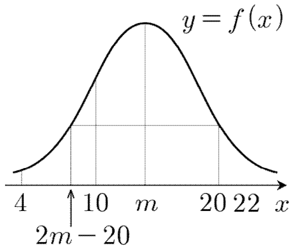
그런데 $2m-22 \le -2 < 0 < 4$이고,

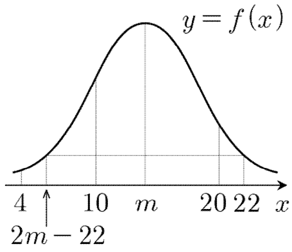
$x \le m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$f(2m-22) = f(22) < f(4)$

이는 조건 (나)를 만족시키지 않으므로 가정에 모순이다.

따라서 $10 < m < 15$이다.





확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$f(2m-20)=f(20)$

그런데 $0 < 2m-20 < 10$이고,

$x \le m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$f(2m-20)=f(20)<f(10)$

이는 조건 (가)를 만족시킨다.

확률밀도함수 $f(x)$는 직선 $x=m$에 대하여 대칭이므로

$f(2m-22)=f(22)$

조건 (나)에 의하여

$f(4) < f(22) = f(2m-22)$

$x \le m$일 때, $f(x)$는 증가하므로

$4 < 2m-22$ 풀면 $m > 13$

m의 범위는 $13 < m < 15$이고, m은 자연수이므로

$m=14$

(※ 10과 20의 평균은 15, 4와 22의 평균은 13이므로

m의 범위는 $13 < m < 15$이다.)

확률변수 X는 정규분포 $\mathrm{N}(14,\ 5^2)$을 따르므로

$Z=\dfrac{X-14}{5}$로 두면

확률변수 Z는 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1^2)$을 따른다.

$\therefore\ a = \mathrm{P}(17 \le X \le 18) = \mathrm{P}(0.6 \le Z \le 0.8)$

$= \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.8) - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6)$

$= 0.288 - 0.226 = 0.062$

$\therefore\ 1000a = 62$

답 62 ※ 가형 답은 ③

30

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 6$

이므로

$4f'(x) + 12x - 18 = 12x^2 - 12x + 6$

$(f' \circ g)(x) = 3\{g(x)\}^2 - 6g(x) + 6$

문제에서 주어진 방정식에 대입하여 정리하면

$4x^2 - 4x = \{g(x)\}^2 - 2g(x)$

좌변을 우변으로 이항하여 정리하면

$g(x)^2-(2x)^2-2\{g(x)-2x\}=0$
곱셈공식에 의하여
$\{g(x)+2x\}\{g(x)-2x\}-2\{g(x)-2x\}=0$
좌변을 인수분해하면
$\{g(x)+2x-2\}\{g(x)-2x\}=0$
풀면
$g(x)=-2x+2$ 또는 $g(x)=2x$
(1) 방정식 $g(x)=-2x+2$의 경우
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는
직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고
두 직선 $y=-2x+2$, $y=-\dfrac{1}{2}x+1$은
직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로
$(x,\ y)=(\alpha,\ \beta)$가
방정식 $g(x)=-2x+2$의 해이면
$(x,\ y)=(\beta,\ \alpha)$는
방정식 $f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$의 해이다.
이때, $0\le\alpha\le1$이면 $0\le\beta\le2$이므로
닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 방정식
$f(x)=-\dfrac{1}{2}x+1$
이 실근을 가질 k의 범위를 구하자.
방정식을 정리하면
$-x^3+3x^2-\dfrac{13}{2}x+1=k$
$h_1(x)=-x^3+3x^2-\dfrac{13}{2}x+1$으로 두자.
함수 $h_1(x)$의 도함수는
$h_1{}'(x)=-3x^2+6x-\dfrac{13}{2}=-3(x-1)^2-\dfrac{7}{2}$
$h_1{}'(x)<0$이므로 함수 $h_1(x)$는 감소함수이다.
곡선 $y=h_1(x)$가 직선 $y=k$와 만날 k의 범위는
$h_1(2)\le k\le h_1(0)$ 즉, $-8\le k\le1$
(2) 방정식 $g(x)=2x$의 경우
두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는
직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이고
두 직선 $y=2x$, $y=\dfrac{1}{2}x$는
직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로
$(x,\ y)=(\gamma,\ \delta)$가
방정식 $g(x)=2x$의 해이면
$(x,\ y)=(\delta,\ \gamma)$는
방정식 $f(x)=\dfrac{1}{2}x$의 해이다.
이때, $0\le\gamma\le1$이면 $0\le\delta\le2$이므로
닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 방정식
$f(x)=\dfrac{1}{2}x$
이 실근을 가질 k의 범위를 구하자.
방정식을 정리하면
$-x^3+3x^2-\dfrac{11}{2}x=k$
$h_2(x)=-x^3+3x^2-\dfrac{11}{2}x$로 두자.
함수 $h_2(x)$의 도함수는
$h_2{}'(x)=-3x^2+6x-\dfrac{11}{2}=-3(x-1)^2-\dfrac{5}{2}$
$h_2{}'(x)<0$이므로 함수 $h_2(x)$는 감소함수이다.
곡선 $y=h_2(x)$가 직선 $y=k$와 만날 k의 범위는
$h_2(2)\le k\le h_2(0)$ 즉, $-7\le k\le0$
(1), (2)에서 k의 범위는
$-8\le k\le1$ 또는 $-7\le k\le0$
이므로
$-8\le k\le1$, $m=-8$, $M=1$
$m^2+M^2=65$
답 65

[참고]
다음과 같이 k의 범위를 구해도 좋다.
역함수의 성질에 의하여
$g(x)=-2x+2$이면
$f(-2x+2)=x$(단, $0\le x\le1$) …㉠
$g(x)=2x$이면
$f(2x)=x$(단, $0\le x\le1$) …㉡
㉠을 정리하면
$8x^3-12x^2+13x-8=k$(단, $0\le x\le1$)
$h_3(x)=8x^3-12x^2+13x-8$로 두자.
함수 $h_3(x)$의 도함수는
$h_3{}'(x)=24x^2-24x+13=24\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+7$
$h_3{}'(x)>0$이므로 함수 $h_3(x)$는 증가함수이다.
곡선 $y=h_3(x)$가 직선 $y=k$와 만날 k의 범위는
$h_3(0)\le k\le h_3(1)$ 즉, $-8\le k\le1$
㉡을 정리하면
$-8x^3+12x^2-11x=k$(단, $0\le x\le1$)
$h_4(x)=-8x^3+12x^2-11x$로 두자.
함수 $h_4(x)$의 도함수는
$h_4{}'(x)=-24x^2+24x-11=-24\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-5$
$h_4{}'(x)<0$이므로 함수 $h_4(x)$는 감소함수이다.
곡선 $y=h_4(x)$가 직선 $y=k$와 만날 k의 범위는

$h_4(1) \le k \le h_4(0)$ 즉, $-7 \le k \le 0$

이상에서 k의 범위는 $-8 \le k \le 1$이다.