'가' 형

Problem #14

14. 매개변수 $t\,(t>0)$으로 나타내어진 함수

$$x=t-\frac{2}{t},\quad y=t^2+\frac{2}{t^2}$$

에서 $t=1$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [4점]

① $-\frac{2}{3}$　② -1　③ $-\frac{4}{3}$　④ $-\frac{5}{3}$　⑤ -2

Solution

매개변수로 나타난 함수의 기본적인 미분 문제입니다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2t-\frac{4}{t^3}}{1+\frac{2}{t^2}}$$

따라서 $t=1$일 때 $\frac{dy}{dx}$의 값은 $\frac{2-4}{1+2}=-\frac{2}{3}$

정답: ①

Problem #15

15. 각 자리의 수가 0이 아닌 네 자리의 자연수 중 각 자리의 수의 합이 7인 모든 자연수의 개수는? [4점]

① 11　② 14　③ 17　④ 20　⑤ 23

Solution

7을 네 자연수의 합으로 나타내는 방법은

$7=1+1+1+4=1+1+2+3=1+2+2+2$

이 세 가지 방법뿐입니다.

(제일 큰 수를 기준으로 나누면 쉽습니다.)

각 경우에 맞는 네 자리 자연수의 개수는

$i)$ $1+1+1+4$: 4(개)

$ii)$ $1+2+2+3$: $\frac{4!}{2!}=12$(개)

$iii)$ $1+2+2+2$: 4(개)

따라서 문제의 조건을 만족시키는 모든 자연수의 개수는 20개입니다.

정답: ④

Problem #16

16. 직사각형 ABCD의 내부의 점 P가

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{CA}$$

를 만족시킨다. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=2\overrightarrow{CP}$

ㄴ. $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ㄷ. 삼각형 ADP의 넓이가 3이면 직사각형 ABCD의 넓이는 8이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution

벡터의 연산과 문제의 조건에서 기하적인 특성을 잘 살펴보면, 어렵지 않게 풀 수 있습니다.

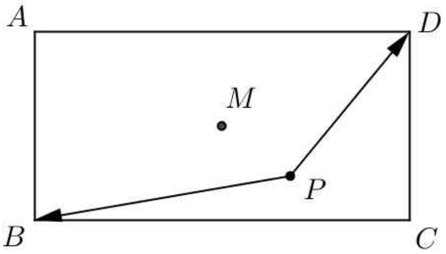
ㄱ) $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PC}$를 우변으로 이항하고, 벡터의 연산법칙에 의해 정리합시다.

$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$

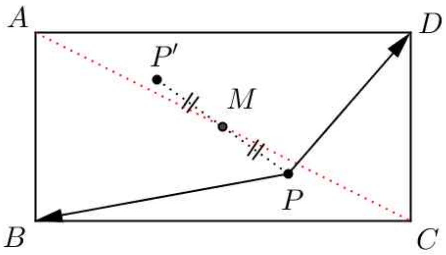
$=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{CP}-\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{CP}$

(참)

ㄴ) 직사각형 $ABCD$의 두 대각선의 교점을 M이라 하고, $\overrightarrow{PB}$, $\overrightarrow{PD}$를 표시하면 아래와 같습니다.



평행사변형의 성질에 의하여, 점 B, D, P를 세 꼭짓점으로 갖는 평행사변형의 나머지 한 점 P'은 아래와 같이 반드시 점 P의 M에 대한 대칭점이어야 합니다.

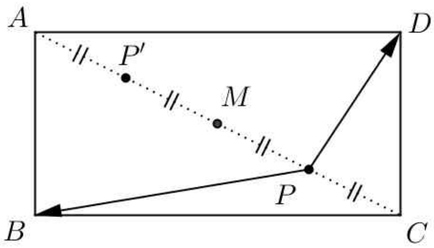


ㄱ에서, $\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}=\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{CP}$ 이므로

P', P, C는 한 직선 위에 있습니다.

즉, P, P'은 선분 AC 위에 있습니다.

$\overrightarrow{PP'}=2\overrightarrow{CP}$가 되도록 점 P, P'를 나타내면 아래와 같습니다.



위 그림에서, $\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$ 임을 알 수 있습니다.

(참)

ㄷ) ㄴ의 마지막 그림을 봅시다.

$\triangle ADP=3$ 이므로 $\triangle CDP=1$이고,

사각형 $ABCD$의 넓이는

$2\triangle ACD=2(\triangle ADP+\triangle CDP)=8$입니다.

(참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참입니다.

정답: ⑤

Problem #17

17. 1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n장의 카드가 있다. 이 카드 중에서 임의로 서로 다른 4장의 카드를 선택할 때, 선택한 카드 4장에 적힌 수 중 가장 큰 수를 확률변수 X라 하자. 다음은 $\mathrm{E}(X)$를 구하는 과정이다. (단, $n\geq 4$)

> 자연수 $k(4\leq k\leq n)$에 대하여 확률변수 X의 값이 k일 확률은 1부터 $k-1$까지의 자연수가 적혀 있는 카드 중에서 서로 다른 3장의 카드와 k가 적혀 있는 카드를 선택하는 경우의 수를 전체 경우의 수로 나누는 것이므로
>
> $\mathrm{P}(X=k)=\dfrac{\boxed{(가)}}{{}_n\mathrm{C}_4}$
>
> 이다. 자연수 $r(1\leq r\leq k)$에 대하여
>
> ${}_k\mathrm{C}_r=\dfrac{k}{r}\times{}_{k-1}\mathrm{C}_{r-1}$
>
> 이므로
>
> $k\times\boxed{(가)}=4\times\boxed{(나)}$
>
> 이다. 그러므로
>
> $\mathrm{E}(X)=\displaystyle\sum_{k=4}^{n}\{k\times\mathrm{P}(X=k)\}$
>
> $=\dfrac{1}{{}_n\mathrm{C}_4}\displaystyle\sum_{k=4}^{n}\left(k\times\boxed{(가)}\right)$
>
> $=\dfrac{4}{{}_n\mathrm{C}_4}\displaystyle\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}$
>
> 이다.
>
> $\displaystyle\sum_{k=4}^{n}\boxed{(나)}={}_{n+1}\mathrm{C}_5$
>
> 이므로
>
> $\mathrm{E}(X)=(n+1)\times\boxed{(다)}$
>
> 이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 하고, (다)에 알맞은 수를 a라 할 때, $a\times f(6)\times g(5)$의 값은? [4점]

① 40 ② 45 ③ 50 ④ 55 ⑤ 60

Solution

보통은 수열이 많이 나오는데, 가끔씩은 확률과 통계, 심지어는 미적분과 기하와 벡터에서 나오기도 합니다. 문장의 앞뒤, 문제의 조건을 잘 보는 것이 중요합니다.

(가): 이 부분에 들어갈 것은, 1부터 $k-1$까지의 자연수 중에서 3개를 고르는 방법의 수와 같습니다.

k가 적힌 카드는 그냥 들어가면 되니까, 따로 계산해줄 필요는 없습니다. $\therefore\ f(k)={}_{k-1}C_3$

(나): 잘 보면, 윗줄에는 ${}_kC_r$이 나와 있는데, (가)는 ${}_{k-1}C_3$이죠? 그대로 윗줄의 등식을 적용합시다.

$r=4$로 생각하면 되겠네요.

$\frac{k}{4}\times{}_{k-1}C_3={}_kC_4 \Rightarrow k\times{}_{k-1}C_3=4\times{}_kC_4$

$\therefore\ g(k)={}_kC_4$

(다): 여러 계산 식이 나오는데, 마지막 줄을 보면 결국 $E(X)=\frac{4}{{}_nC_4}\times{}_{n+1}C_5$입니다.

(나) 부분의 등식을 다시 이용하면

${}_{n+1}C_5=\frac{n+1}{5}\times{}_nC_4$이므로

$E(X)=\frac{4}{{}_nC_4}\times\frac{n+1}{5}\times{}_nC_4=\frac{4}{5}(n+1)$

$\therefore\ a=\frac{4}{5}$

따라서 $a\times f(6)\times g(5)=\frac{4}{5}\times10\times5=40$

정답: ①

Problem #18

18. 좌표공간에 점 P(0, 0, 4)가 있고 xy평면 위의 원 $x^2+y^2=4$ 위에 두 점 A, B가 있다. 평면 ABP의 법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ -2,\ 1)$일 때, 선분 AB의 길이는? [4점]

① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

Solution

평면 ABP는 법선벡터가 $(2,-2,1)$이고, $(0,0,4)$를 지나므로 평면 ABP의 방정식은

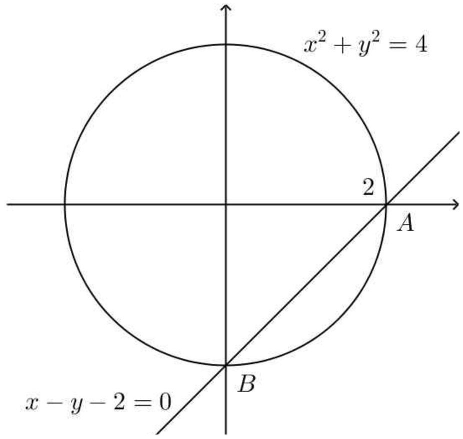
$2x-2y+z-4=0$

평면 ABP와 xy평면$(z=0)$의 교선의 방정식은

$x-y-2=0$이므로

A,B는 직선 $x-y-2=0$과 원 $x^2+y^2=4$의 두 교점입니다.

두 도형을 좌표평면에 나타내면 아래와 같습니다.



위 그림처럼, 직선의 x,y절편이 원의 반지름과 같기 때문에 AB의 길이는 $2\sqrt{2}$가 됩니다.

정답: ②

Problem #19

19. 서로 다른 과일 5개를 3개의 그릇 A, B, C에 남김없이 담으려고 할 때, 그릇 A에는 과일 2개만 담는 경우의 수는? (단, 과일을 하나도 담지 않은 그릇이 있을 수 있다.) [4점]

① 60 ② 65 ③ 70 ④ 75 ⑤ 80

Solution

B와 C에 먼저 3개의 과일을 담는다고 생각합시다. 그럼 A에는 남는 2개의 과일이 들어가겠죠?

i) B에만 3개의 과일을 넣는다.

5개 중 3개를 고르는 방법의 수이므로 ${}_5C_3=10$(가지)

ii) B에 2개, C에 1개의 과일을 넣는다.

5개 중 2개를 골라 B에 넣고, 남는 3개 중 1개를 골라 C에 넣는 방법의 수이므로 ${}_5C_2\times{}_3C_1=30$(가지)

iii) B에 1개, C에 2개의 과일을 넣는다.

$\Rightarrow$ *ii*)과 같으므로 30가지

iv) C에만 3개의 과일을 넣는다.

$\Rightarrow$ *i*)과 같으므로 10가지

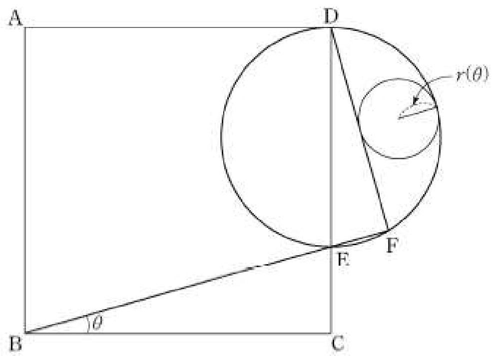
따라서 구하는 경우의 수는 총 80가지입니다.

정답: ⑤

Problem #20

20. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD가 있다. 변 CD 위의 점 E에 대하여 선분 DE를 지름으로 하는 원과 직선 BE가 만나는 점 중 E가 아닌 점을 F라 하자. $\angle EBC = \theta$라 할 때, 점 E를 포함하지 않는 호 DF를 이등분하는 점과 선분 DF의 중점을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 반지름의 길이를 $r(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \dfrac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta}$ 의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $\frac{1}{7}(2-\sqrt{2})$ ② $\frac{1}{6}(2-\sqrt{2})$ ③ $\frac{1}{5}(2-\sqrt{2})$
④ $\frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$ ⑤ $\frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$

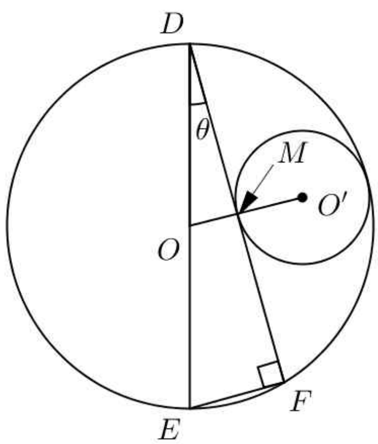
Solution

원주각의 성질에 의하여 $\angle DFE = 90^\circ$ 이고

$\angle DEF = \angle BEC$(맞꼭지각)이므로

$\triangle BCE \sim \triangle DFE$ 입니다. $\Rightarrow \angle EDF = \theta$

선분 DE를 지름으로 가지는 원 부분만 그려보면



위와 같이 큰 원과 작은 원의 중심을 각각 O, O'라 하고, 선분 DF와 작은 원의 접점을 M이라 하면 문제의 그림에서

$$\overline{DE} = 1 - \overline{CE} = 1 - \tan\theta$$

$$\overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{DE} = \frac{1}{2}(1-\tan\theta)$$

$$\Rightarrow \ \overline{OM} = \frac{1}{2}(1-\tan\theta)\sin\theta$$

한편 내접하는 두 원의 성질에 의하여

$$\overline{OM} + 2r(\theta) = \overline{DO}$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{2}(1-\tan\theta)\sin\theta + 2r(\theta) = \frac{1}{2}(1-\tan\theta)$$

$$\therefore \ r(\theta) = \frac{1}{4}(1-\tan\theta)(1-\sin\theta)$$

따라서

$$\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{r(\theta)}{\frac{\pi}{4}-\theta} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{\theta \to \frac{\pi}{4}-} \frac{1-\tan\theta}{\frac{\pi}{4}-\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{t \to 0+} \frac{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)}{t} \qquad \boxed{t = \frac{\pi}{4}-\theta}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{t \to 0+} \frac{1-\frac{1-\tan t}{1+\tan t}}{t}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\lim_{t \to 0+} \frac{2\tan t}{t(1+\tan t)} = \frac{1}{4}(2-\sqrt{2})$$

정답: ④

Problem #21

21. 양의 실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 양의 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)' = x^2 e^{-x^2}$

(나) $g(x) = \dfrac{4}{e^4}\displaystyle\int_1^x e^{t^2} f(t)\,dt$

$f(1) = \frac{1}{e}$일 때, $f(2) - g(2)$의 값은? [4점]

① $\frac{16}{3e^4}$ ② $\frac{6}{e^4}$ ③ $\frac{20}{3e^4}$ ④ $\frac{22}{3e^4}$ ⑤ $\frac{8}{e^4}$

Solution

미적분 계산 테크닉이 요구되는 문제입니다.

(나)의 우변에 $e^{x^2}f(x)$ 꼴의 식이 있음을 이용하여 (가)를 변형해봅시다.

(가)의 양변에 e^{x^2}를 곱하면

$$e^{x^2}\left(\frac{f(x)}{x}\right)' = x^2$$

양변을 구간 $(1, x)$에서 적분하면

$$\int_1^x e^{t^2}\left(\frac{f(t)}{t}\right)' dt = \int_1^x t^2 dt$$

$$\left[\frac{e^{t^2}f(t)}{t}\right]_1^x - 2\int_1^x e^{t^2}f(t)dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_1^x \leftarrow f(1) = \frac{1}{e}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{x^2}f(x)}{x} - 1 - 2\int_1^x e^{t^2}f(t)dt = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}$$

$$\therefore \int_1^x e^{t^2}f(t)dt = \frac{e^{x^2}f(x)}{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}$$

이를 (나)에 대입하면

$$g(x) = \frac{4}{e^4}\left(\frac{e^{x^2}f(x)}{2x} - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}\right)$$

양변에 $x = 2$를 대입하면

$$g(2) = \frac{4}{e^4}\left(\frac{e^4}{4}f(2) - \frac{5}{3}\right)$$

$$\therefore f(2) - g(2) = \frac{20}{3e^4}$$

정답: ③

Problem #26

26. 함수 $f(x) = 2x + \sin x$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 곡선 $y = g(x)$ 위의 점 $(4\pi, 2\pi)$에서의 접선의 기울기는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Solution

역함수의 미분법을 이용한 기본적인 문제입니다.

> ※ 역함수의 미분법
>
> 역함수가 존재하는 미분 가능한 함수 $f(x)$에 대하여
>
> 1) $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
>
> 1-1) 즉, $f(a) = b$이면 $(f^{-1})'(b) = \dfrac{1}{f'(a)}$
>
> 이는 $f(f^{-1}(x)) = x$의 양변을 미분한 결과로 볼 수 있습니다.

$f'(x) = 2 + \cos x$이고,

문제에서 구하는 값은 $g'(4\pi)$이므로

역함수의 미분법에 의하여

$$g'(4\pi) = \frac{1}{f'(2\pi)} = \frac{1}{3}, \quad \therefore p + q = 4$$

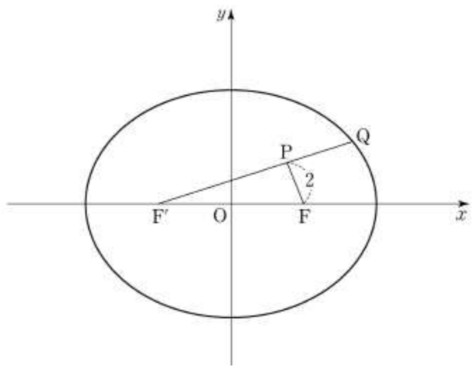
정답: 4

Problem #27

27. 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$의 두 초점은 F, F′이고, 제1사분면에 있는 두 점 P, Q는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\overline{\mathrm{PF}} = 2$
> (나) 점 Q는 직선 PF′과 타원의 교점이다.

삼각형 PFQ의 둘레의 길이와 삼각형 PF′F의 둘레의 길이의 합을 구하시오. [4점]



Solution

타원의 정의를 이용합시다.

타원의 성질에 의하여 $F(\sqrt{36-27}, 0)=(3, 0)$이고,

삼각형 PFQ의 둘레의 길이와 $PF'F$의 둘레의 길이의 합은

$\overline{PF'}+\overline{FF'}+\overline{PQ}+\overline{QF}+2\overline{PF}$

$=(\overline{PF'}+\overline{PQ})+\overline{QF}+\overline{FF'}+2\overline{PF}$

$=(\overline{F'Q}+\overline{QF})+\overline{FF'}+2\overline{PF}$

$=12+6+4=22$

정답: 22

Problem #28

28. 어느 고등학교에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율을 알아보기 위하여 이 고등학교 학생 중 n명을 임의추출하여 조사한 결과 50%의 학생이 대중교통을 이용하여 등교하는 것으로 나타났다. 이 결과를 이용하여 구한 이 고등학교 전체 학생 중에서 대중교통을 이용하여 등교하는 학생의 비율 p에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $a \le p \le b$이다. $b-a=0.14$일 때, n의 값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96)=0.95$로 계산한다.) [4점]

Solution

모비율의 추정에 관한 기본적인 문제입니다.

모비율 p를 가지는 집단에서 크기가 n인 표본들에 대한 표본비율 $\hat{p}$에 대하여

$\hat{p} \sim N\left(p, \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$이므로

$Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}}$은 $N(0, 1)$을 따릅니다.

95%의 신뢰도로 모비율을 추정한다 함은, 이 표준정규분포의 95% 면적에 해당하는 부분을 택하겠다는 것입니다. 다만, 모표준편차를 알 수 없으므로 표본표준편차를 이용합니다.

$P(|Z| \le 1.96)=0.95$이고, 문제에서 $\hat{p}=\dfrac{1}{2}$이므로

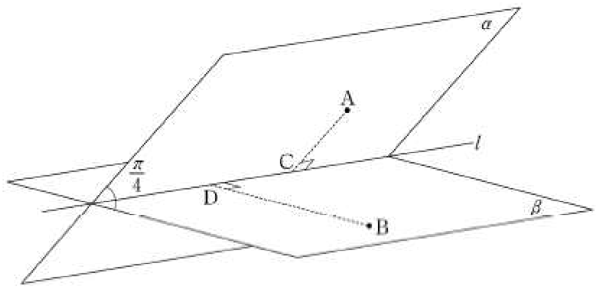
$$\frac{\left|\frac{1}{2}-p\right|}{\sqrt{\dfrac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{n}}} \le 1.96 \Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{1.96}{2\sqrt{n}} \le p \le \frac{1}{2}+\frac{1.96}{2\sqrt{n}}$$

$$b-a=2\times\frac{1.96}{2\sqrt{n}}=\frac{1.96}{\sqrt{n}}=0.14 \qquad \therefore n=196$$

정답: 196

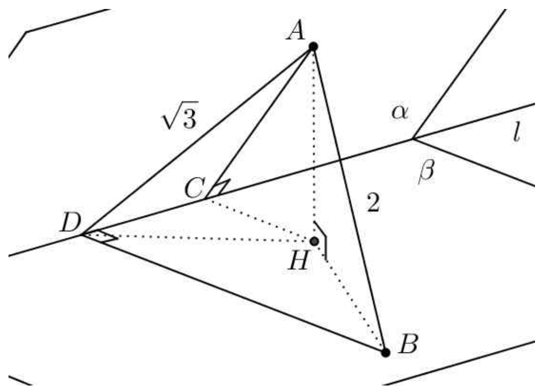
Problem #29

29. 그림과 같이 직선 l을 교선으로 하고 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$인 두 평면 α와 β가 있고, 평면 α 위의 점 A와 평면 β 위의 점 B가 있다. 두 점 A, B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{3}$이고 직선 AB와 평면 β가 이루는 각의 크기가 $\dfrac{\pi}{6}$일 때, 사면체 ABCD의 부피는 $a+b\sqrt{2}$이다. $36(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



Solution

점 A에서 평면 β로 수선의 발을 내려보면 생각보다 쉽게 실마리를 찾을 수 있습니다.



위 그림처럼 점 A에서 평면 β로 내린 수선의 발을

H라고 합시다. 그러면,

$\angle ABH$가 직선 AB와 평면 β가 이루는 각입니다.

$\therefore \angle ABH = \dfrac{\pi}{6} \Rightarrow \overline{AH}=1,\ \overline{BH}=\sqrt{3}$

직각삼각형 ADH에서

$\overline{DH} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$

삼수선의 정리에서 $\angle DCH = 90^\circ$이므로 이면각의 정의에 의하여

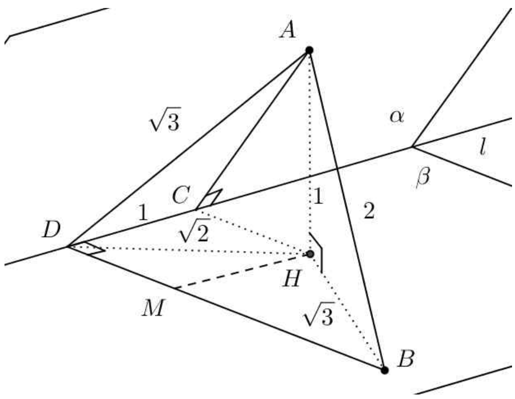
$\overline{DB} // \overline{CH} \Rightarrow \angle ACH = \dfrac{\pi}{4}$

따라서 $\overline{CH}=\overline{AH}=1,\ \overline{AC}=\sqrt{2}$이고

직각삼각형 ACD에서

$\overline{CD} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} = 1$

한편 점 H에서 직선 BD로 내린 수선의 발을 M이라 하면 사각형 $CDMH$는 한 변의 길이가 1인 정사각형이 됩니다.



두 직각삼각형 DMH, BMH에서

$\overline{DM} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2} = 1$,

$\overline{BM} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \sqrt{2}$입니다.

따라서 사면체 $ABCD$의 부피는

$\dfrac{1}{3}\triangle BCD \times \overline{AH} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{BD} \times \overline{AH}$

$= \dfrac{\sqrt{2}+1}{6} \qquad \therefore 36(a+b) = 12$

정답: 12

Problem #30

30. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x) = |2\sin(x+2|x|)+1|$$

에 대하여 함수 $h(x) = f(g(x))$는 실수 전체의 집합에서 이계도함수 $h''(x)$를 갖고, $h''(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

Solution

이계도함수가 나와서 무슨 말인가 헷갈려할 수도 있을 법한데, 사실 $h(x)$가 부드러운 곡선임을 뜻하는 말입니다.

$h''(x)$가 연속

$\Rightarrow h'(x)$가 연속이고 미분 가능

$\Rightarrow h(x)$가 연속이고 미분 가능

이 정도로만 생각해주시면 됩니다. (문제 풀다보면 이 조건을 왜 주었는지 알 수 있습니다.)

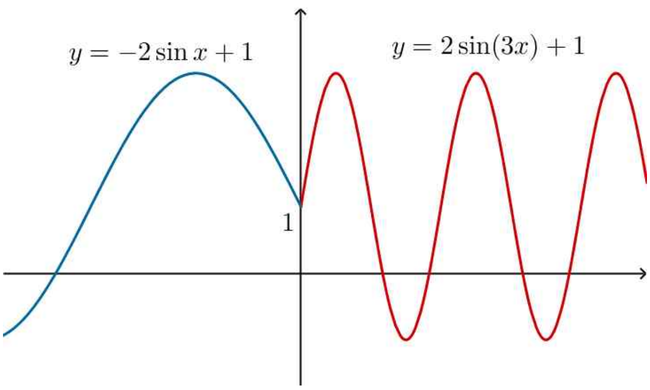
$g(x)$를 그리는 것이 관건인데,

우선 x의 범위를 나눠 생각해야겠습니다.

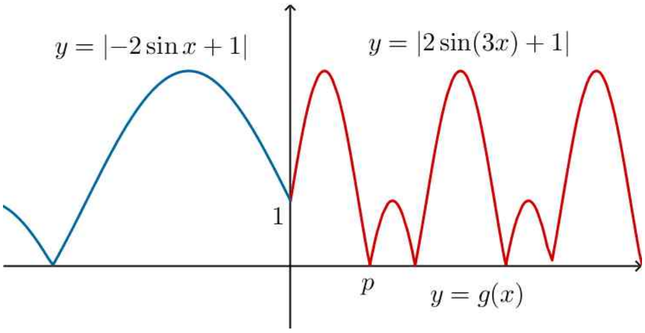
$|x| = \begin{cases} x & (x \ge 0) \\ -x & (x < 0) \end{cases}$ 이므로

$g(x) = \begin{cases} |2\sin(3x)+1| & (x \ge 0) \\ |-2\sin x+1| & (x < 0) \end{cases}$

이제 각각을 우선 맨 바깥의 절댓값 기호를 빼고 그려봅시다.



여기서 x축 아래 있는 부분을 x축에 대해 대칭하여 위로 접어올리면 $g(x)$의 그래프가 됩니다.



$h'(x)$가 연속이어야 하는데, 문제는 $x=0$과 $g(x)=0$인 모든 x입니다.

$x=p$가 $g(x)=0$의 한 근이라고 합시다.

$h'(x)=f'(g(x))g'(x)$에서

$\lim\limits_{x\to p+} h'(x)=f'(0)\lim\limits_{x\to p+} g'(x)$,

$\lim\limits_{x\to p-} h'(x)=f'(0)\lim\limits_{x\to p-} g'(x)$이고,

$h'(x)$는 연속이므로

$\lim\limits_{x\to p+} h'(x)=\lim\limits_{x\to p-} h'(x)$여야 하는데

절댓값의 성질에 의하여

$\lim\limits_{x\to p+} g'(x)=-\lim\limits_{x\to p-} g'(x)$이므로 $f'(0)=0$ … (1)

같은 방법으로,

$\lim\limits_{x\to 0+} h'(x)=f'(1)\lim\limits_{x\to 0+} g'(x)$

$\lim\limits_{x\to 0-} h'(x)=f'(1)\lim\limits_{x\to 0-} g'(x)$이고,

$\lim\limits_{x\to 0+} g'(x)\neq\lim\limits_{x\to 0-} g'(x)$이므로 $f'(1)=0$ … (2)

한편, $h''(x)=f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)$에서

$\lim\limits_{x\to 0+} h''(x)=f''(1)\lim\limits_{x\to 0+}(g'(x))^2$ $(\because f'(1)=0)$

$\lim\limits_{x\to 0+} h''(x)=f''(1)\lim\limits_{x\to 0-}(g'(x))^2$

$h''(x)$은 연속이므로

$\lim\limits_{x\to 0+} h''(x)=\lim\limits_{x\to 0-} h''(x)$인데

$\lim\limits_{x\to 0+}(g'(x))^2\neq\lim\limits_{x\to 0-}(g'(x))^2$이므로 (계산해보세요!)

$\therefore f''(1)=0$ … (3)

※ (1)에서 $\lim\limits_{x\to p+} g'(x)=-\lim\limits_{x\to p-} g'(x)$이므로

$\lim\limits_{x\to p+}(g'(x))^2=\lim\limits_{x\to p-}(g'(x))^2$입니다.

따라서 임의의 p에 대하여 항상

$\lim\limits_{x\to p+} h''(x)=\lim\limits_{x\to p-} h''(x)$가 성립합니다.

문제의 조건에서 $f'(x)$는 최고차항의 계수가 4인 삼차함수이므로

(1), (2), (3)에서

$f'(x)=4x(x-1)^2$, $\therefore f'(3)=48$

정답: 48

‘나’ 형

Problem #14

14. 첫째항이 4이고 공차가 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Solution

식의 모양이 꼭 유리화를 하고 싶게 생겼지요?

$$\sum_{k=1}^{12} \frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$$

분자와 분모에 $\times\left(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}\right)$

$$=\sum_{k=1}^{12} \frac{\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}}{a_{k+1}-a_k}$$

$$=\sum_{k=1}^{12}\left(\sqrt{a_{k+1}}-\sqrt{a_k}\right)\ (\because a_{k+1}-a_k=1)$$

$$=\left(\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_{12}}\right)+\left(\sqrt{a_{12}}-\sqrt{a_{11}}\right)$$

$$+\cdots\left(\sqrt{a_3}-\sqrt{a_2}\right)+\left(\sqrt{a_2}-\sqrt{a_1}\right)$$

$$=\sqrt{a_{13}}-\sqrt{a_1}$$

$a_n=n+3$이므로 주어진 식의 값은 2가 됩니다.

정답: ②

Problem #14

15. 어느 공항에서 처리되는 각 수하물의 무게는 평균이 18kg, 표준편차가 2kg인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공항에서 처리되는 수하물 중에서 임의로 한 개를 선택할 때, 이 수하물의 무게가 16kg 이상이고 22kg 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$P(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.5328 ② 0.6247 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

Solution

정규분포를 따르는 확률변수의 표준화에 관한 아주 기초적인 문제입니다.

수하물의 무게를 확률변수 X라고 하면

$X \sim N(18,\ 2^2)$이므로

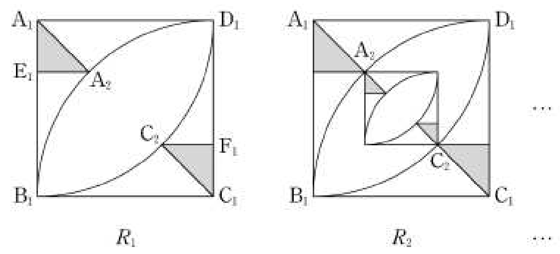
$Z=\dfrac{X-18}{2}$이 됩니다. 따라서

$$P(16 \le X \le 22)$$
$$=P\left(\frac{16-18}{2} \le Z \le \frac{22-18}{2}\right)$$
$$=P(-1 \le Z \le 2)$$
$$=P(-1 \le Z \le 0)+P(0 \le Z \le 2)$$
$$=P(0 \le Z \le 1)+P(0 \le Z \le 2)$$
$$=0.8185$$

정답: ④

Problem #16

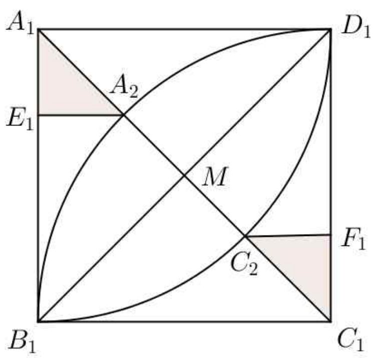
16. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$ 안에 꼭짓점 A_1, C_1을 중심으로 하고 선분 A_1B_1, C_1D_1을 반지름으로 하는 사분원을 각각 그린다. 선분 A_1C_1이 두 사분원과 만나는 점 중 점 A_1과 가까운 점을 A_2, 점 C_1과 가까운 점을 C_2라 하자. 선분 A_1D_1에 평행하고 점 A_2를 지나는 직선이 선분 A_1B_1과 만나는 점을 E_1, 선분 B_1C_1에 평행하고 점 C_2를 지나는 직선이 선분 C_1D_1과 만나는 점을 F_1이라 하자. 삼각형 $A_1E_1A_2$와 삼각형 $C_1F_1C_2$를 그린 후 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에 선분 A_2C_2를 대각선으로 하는 정사각형을 그리고, 새로 그려진 정사각형 안에 그림 R_1을 얻는 것과 같은 방법으로 두 개의 사분원과 두 개의 삼각형을 그리고 두 삼각형의 내부에 속하는 영역을 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{12}(\sqrt{2}-1)$ ② $\frac{1}{6}(\sqrt{2}-1)$ ③ $\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)$
④ $\frac{1}{3}(\sqrt{2}-1)$ ⑤ $\frac{5}{12}(\sqrt{2}-1)$

Solution

보조선을 그려봅시다.



위 그림과 같이 선분 A_1C_1와 B_1D_1의 교점을 M이라 하면

$$\overline{A_2M} = \overline{A_2C_1} - \overline{C_1M}$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \overline{A_2C_2} = 2\overline{A_2M} = 2 - \sqrt{2}$$

따라서

$$\overline{A_1A_2} = \frac{1}{2}\left(\overline{A_1C_1} - \overline{A_2C_2}\right)$$

$$= \sqrt{2} - 1 \Rightarrow \overline{A_1E_1} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore R_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{3}{2} - \sqrt{2}$$

한편 이러한 반복되는 도형으로 나타나는 무한등비급수의 공비는 반복되는 도형의 길이, 넓이의 비율로 나타나게 됩니다.

이 문제의 경우 두 반복되는 도형의 넓이의 비율이 공비가 됩니다.

넓이의 비율은 닮음비의 제곱이므로

공비 r은

$$r = \frac{\left(\overline{A_2C_2}\right)^2}{\left(\overline{A_1C_1}\right)^2} = \frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 3 - 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}{1 - \left(3 - 2\sqrt{2}\right)}$$

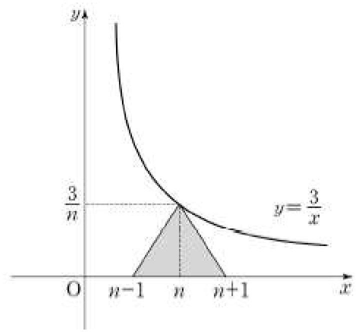
$$= \frac{\frac{3}{2} - \sqrt{2}}{2\sqrt{2} - 2} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{2} - 1\right)$$

정답: ③

Problem #17

17. 자연수 n에 대하여 곡선 $y = \frac{3}{x}\ (x > 0)$ 위의 점 $\left(n, \frac{3}{n}\right)$과 두 점 $(n-1, 0)$, $(n+1, 0)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} \frac{9}{a_n a_{n+1}}$ 의 값은? [4점]

① 410 ② 420 ③ 430 ④ 440 ⑤ 450



Solution

a_n을 쉽게 구할 수 있어 어렵지 않습니다.

$$a_n = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{3}{n} = \frac{3}{n} \text{ 이므로}$$

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{9}{a_n a_{n+1}}$$

$$= \sum_{n=1}^{10} \frac{9}{\frac{9}{n(n+1)}} = \sum_{n=1}^{10} n(n+1)$$

그냥 합 공식을 이용하여 계산하셔도 되고,

$$\sum_{n=1}^{10} n(n+1)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sum_{n=1}^{10} n(n+1)(n+2) - \sum_{n=1}^{10} n(n-1)(n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{3}(10 \times 11 \times 12) = 440$$

이렇게 계산해도 됩니다.

정답: ④

Problem #18

'가'형의 17번과 같음

Problem #19

'가'형의 15번과 같음

Problem #20

20. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $x=-2$에서 극댓값을 갖는다.
(나) $f'(-3)=f'(3)$

<보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 도함수 $f'(x)$는 $x=0$에서 최솟값을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=f(2)$는 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1, f(-1))$에서의 접선은 점 $(2, f(2))$를 지난다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution

$f'(x)$는 이차함수이므로

(가): $f'(-2)=0$

(나): y축을 축으로 가진다.

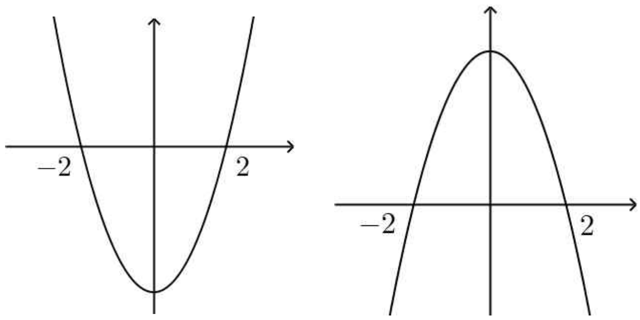
이렇게 바꾸어 생각할 수 있습니다.

대칭성에 의하여 $f'(2)=0$이므로

$f'(x)=k(x-2)(x+2)$입니다. (k는 실수)

ㄱ) k의 부호를 묻는 문제입니다.

위 조건을 만족하는 $f'(x)$는 아래 2가지가 있습니다.



그런데 $f(x)$가 $x=-2$에서 극대이므로

$x=-2$ 좌우에서 $f'(x)$의 값이 (+)→(−)로 변화해야 합니다.

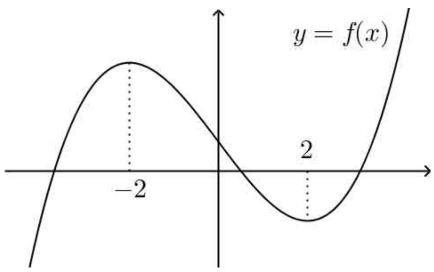
이를 만족시키는 경우는 왼쪽의 경우($k>0$)이고,

$x=0$에서 최솟값을 가지는 것을 알 수 있습니다.

(참)

ㄴ) $f'(x)$의 그래프를 토대로

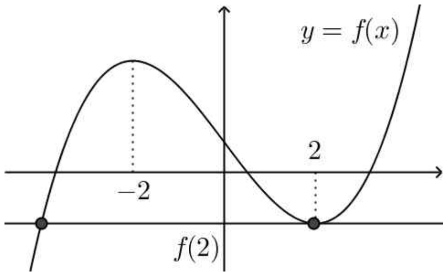
$f(x)$의 그래프의 개형을 그리면 아래와 같습니다.



$x=2$에서 극소이므로

아래 그림과 같이 $y=f(2)$를 그려보면

$f(x)=f(2)$가 두 교점을 가짐을 알 수 있습니다.



따라서 $f(x)=f(2)$는 두 개의 실근을 갖습니다.

(참)

ㄷ) $(-1, f(-1))$에서의 접선이 $(2, f(2))$를 지나면,
$(-1, f(-1))$에서의 접선의 기울기와
두 점 $(-1, f(-1))$, $(2, f(2))$를 이은 직선의 기울기가 서로 같아야 합니다.

$f'(x)=k(x-2)(x+2)$라 하면

$f'(-1)=-3k$

$f(x)=\frac{k}{3}x^3-4kx+a$ (a는 실수)이므로

$f(-1)=\frac{11k}{3}+a$, $f(2)=-\frac{16k}{3}+a$

두 점 $(-1, f(-1))$, $(2, f(2))$를 이은 직선의 기울기는

$\frac{f(2)-f(-1)}{3}=\frac{-\frac{27}{3}k}{3}=-3k$입니다.

상기한 두 값이 서로 같으므로
$(-1, f(-1))$에서의 접선은 $(2, f(2))$를 지납니다.

(참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참입니다.

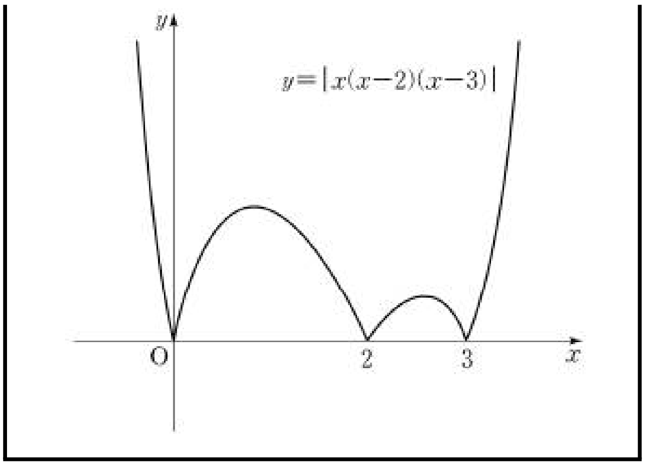
정답: ⑤

Problem #21

21. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? [4점]

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



Solution

4차방정식은 최대 4개의 실근을 가질 수 있는데, 실근을 3개만 갖는다는 것은, 하나를 중근으로 갖는다는 것과 같습니다.

(실근 3, 허근 1? ⇒ 실계수가 나오지 않음)

따라서 (가) 조건을 만족하는 경우는

1) $f(x)=kx^2(x-2)(x-3)$

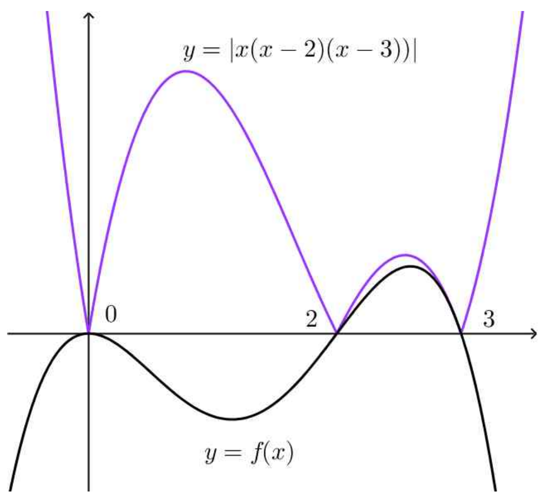
2) $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$

3) $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$

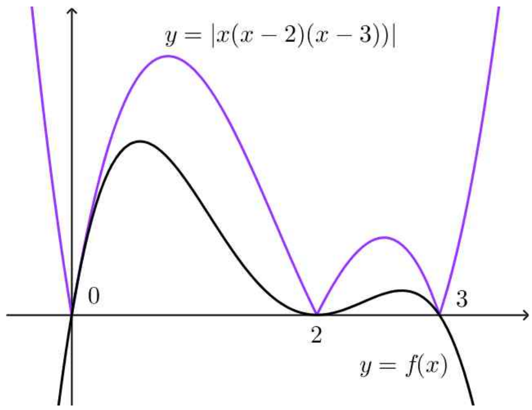
위의 세 가지 경우입니다. (k는 음수)

각 경우를 그려보면

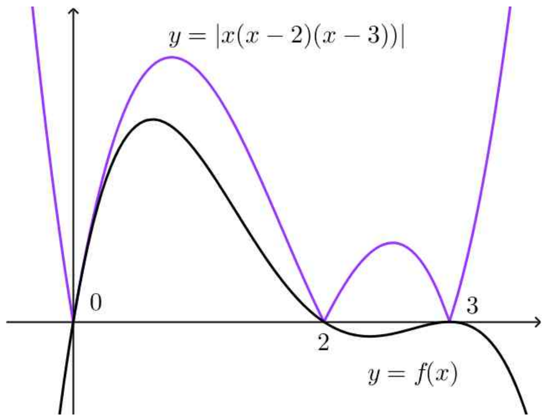
1) $f(x)=kx^2(x-2)(x-3)$



2) $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$



3) $f(x)=kx(x-2)(x-3)^2$



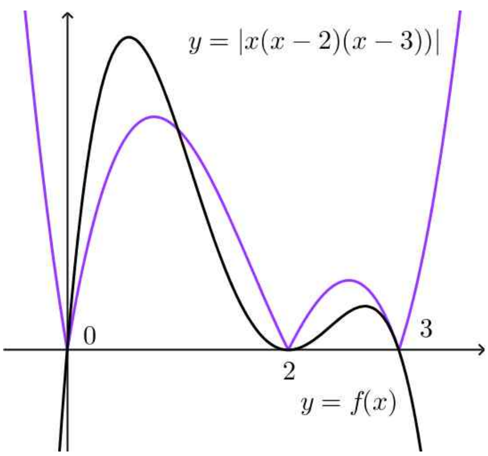
$f(1)$의 최댓값을 구해야 하므로

1)의 경우는 제외해도 되겠습니다.

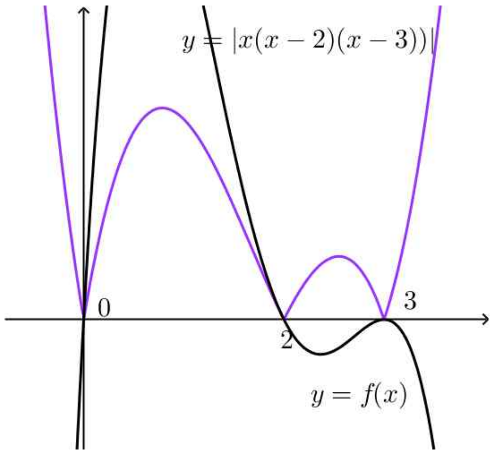
2), 3)의 경우에서 k의 절댓값을 증가시켜

구간 $(0,2)$에서의 $f(x)$의 값이 커지도록 만들어봅시다.

2-1)

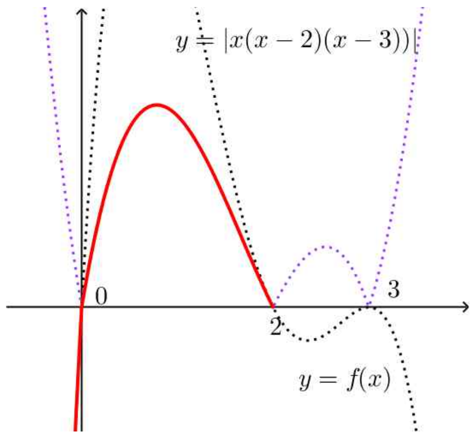


3-1)



두 경우 모두 $g'(0)$이 존재하지 않는다는 문제가 있습니다.

$g(x)$는 두 함수 중에 작은 값을 택한 값을 취하기 때문에 $x=0$의 좌측에서는 $y=f(x)$의 값과 같고 $x=0$의 우측에서는 $y=|x(x-2)(x-3)|$의 값과 같습니다. 당연히 미분이 되지 않겠지요.



위 그림에서 빨간색으로 표시한 부분이 $y=g(x)$의 그래프입니다.

$x=0$에서 미분 불가능하다는 게 보이시나요?

따라서 가능한 경우는 2), 3)의 경우뿐입니다.

$h(x)=x(x-2)(x-3)$으로 두면

$h'(0)=6$이고,

$f'(0)\le h'(0)$이어야 합니다.

2) $f(x)=kx(x-2)^2(x-3)$

$f'(0)=-12k\le 6 \quad \therefore\ -\frac{1}{2}\le k<0$

$\Rightarrow f(1) = -2k \le 1$

이 경우 사실 $x=3$ 근방의 대소 비교도 해야 합니다. 즉, $f'(3) \ge -h'(3)$과 $f'(0) \le h'(0)$의 공통 부분을 구해야 하지만, 계산하면 결국 $f'(0) \le h'(0)$의 범위만 남게 됩니다.

3) $f(x) = kx(x-2)(x-3)^2$

$f'(0) = -18k \le 6, \quad \therefore -\frac{1}{3} \le k < 0$

$\Rightarrow f(1) = -4k \le \frac{4}{3}$

위와 같은 방법으로 이 경우에도 $x=2$ 근방의 대소 비교도 해야 하지만, 계산해보면 $f'(0) \le h'(0)$의 결과로 나온 범위가 공통 범위가 됩니다.

따라서 $f(1)$의 최댓값은 $\frac{4}{3}$입니다.

정답: ②

Problem #26

26. 흰 공 2개, 빨간 공 4개가 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 2개의 공이 모두 흰 공일 확률이 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Solution

이건 도대체 왜... 4점이나 줬지?

확률의 정의만 이용하면 됩니다.

요즘 나형의 4점 문제는 어중간한 게 없네요... 쉬운 4점이랑 어려운 4점으로 나누어 내는 게 추세인 듯?

전체 경우의 수는 6개의 공 중 2개를 고르는 방법의 수이므로 ${}_6C_2 = 15$이고,

흰 공 2개를 뽑는 방법의 수는 1이므로

구하는 확률은 $\frac{1}{15}$이 됩니다. $\therefore p+q=16$

정답: 16

Problem #27

27. 전체집합 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$의 두 부분집합 $A=\{1, 2\}$, $B=\{3, 4, 5\}$에 대하여

$$X \cup A = X, \quad X \cap B^C = X$$

를 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

Solution

이건 도대체 왜... 4점이나 줬지? (2)

조건을 눈에 보이게 바꿔 써볼까요?

$\{1, 2\} \subset X \subset \{1, 2, 6, 7, 8\}$

이러한 집합 X의 개수를 구하는 것이 문제인데, $\{6, 7, 8\}$의 부분집합에 원소 $1, 2$만 넣어주면 위의 조건을 만족하겠죠?

따라서 조건을 만족하는 모든 집합 X의 개수는

$2^3 = 8$(개)

정답: 8

Problem #28

28. 함수 $f(x) = 4x^2 + 6x + 32$에 대하여

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

의 값을 구하시오. [4점]

Solution

정적분의 정의를 이용하면 됩니다.

$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$임을 이용하면,

(주어진 식)

$= \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n} \cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$

$= \int_0^1 xf(x)dx$

$= \int_0^1 (4x^3 + 6x^2 + 32x)dx$

$= \left[x^4 + 2x^3 + 16x^2\right]_0^1$

$= 19$

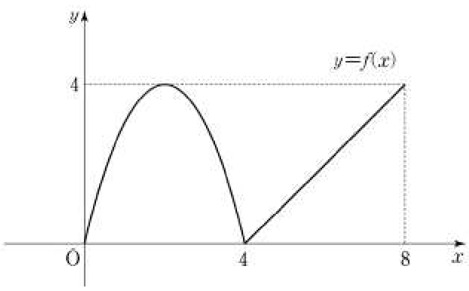
정답: 19

Problem #29

29. 구간 $[0, 8]$에서 정의된 함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} -x(x-4) & (0 \le x < 4) \\ x-4 & (4 \le x \le 8) \end{cases}$$

이다. 실수 $a\,(0 \le a \le 4)$에 대하여 $\int_a^{a+4} f(x)dx$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Solution

구간을 나눠야할 수도 있는 문제라 귀찮을 수도 있었는데, 다행히 여기서는 구간의 길이를 적당히 주어서 계산하기 편하겠습니다.

$0 \le a \le 4$에서

닫힌 구간 $[a, a+4]$에 대하여 $4 \in [a, a+4]$이기 때문입니다.

$\therefore \int_a^{a+4} f(x)dx$

$= \int_a^4 (-x(x-4))dx + \int_4^{a+4} (x-4)dx$

$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_a^4 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_4^{a+4}$

$= \frac{56}{3} + \frac{1}{3}a^3 - 2a^2 + \frac{1}{2}(a+4)^2 - 4(a+4)$

$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{32}{3}$

$\Rightarrow \frac{d}{da}\int_a^{a+4} f(x)dx$

$= a^2 - 3a$

에서 $\int_a^{a+4} f(x)dx$는 $a = 0$에서 극대, $a = 3$에서 극소입니다.

따라서 $0 \le a \le 4$인 a에 대하여

$a = 3$일 때 $\int_a^{a+4} f(x)dx$의 값이 최소가 되고,

그 값은 $\frac{37}{6}$입니다. $\therefore\ p + q = 43$

정답: 43

Problem #30

30. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역

$$\left\{(x, y) \,\middle|\, 0 \le x \le n,\ 0 \le y \le \frac{\sqrt{x+3}}{2}\right\}$$

에 포함되는 정사각형 중에서 다음 조건을 만족시키는 모든 정사각형의 개수를 $f(n)$이라 하자.

(가) 각 꼭짓점의 x좌표, y좌표가 모두 정수이다. (나) 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$ 이하이다.

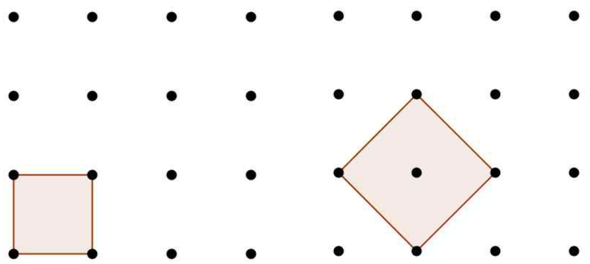
예를 들어 $f(14) = 15$이다. $f(n) \le 400$을 만족시키는 자연수 n의 최댓값을 구하시오. [4점]

Solution

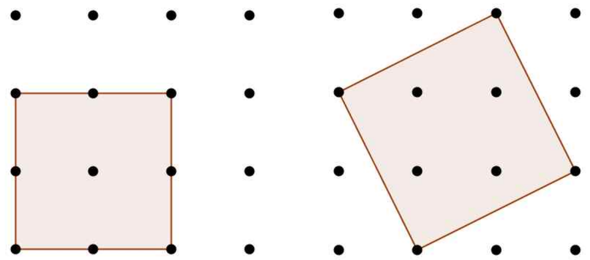
이걸 과연 시험 시간에 몇 명이나 풀어냈을까요?

우선 (가), (나)를 만족하는 정사각형의 종류를 살펴보도록 합시다.

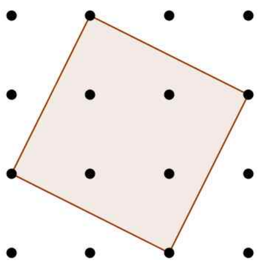
아래와 같은 다섯 종류가 가능하겠습니다.



(1) (2)



(3) (4)



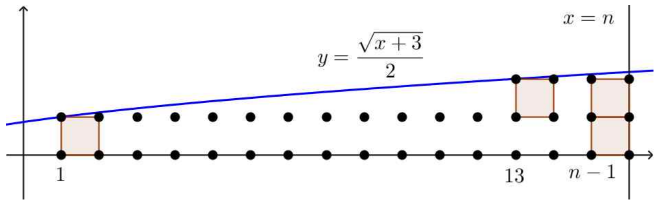
(5)

이제 각 경우의 사각형을 문제에서 주어진 영역에 몇 개나 집어넣을 수 있는지 살펴봅시다.

$y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$이 격자점을 가지는 경우를 생각하면서 풀어야 합니다.

$(1,1)$, $(13,\,2)$, $(33,\,3)$, $\cdots$, $(4k^2-3,\,k)$ (i) 등이 있겠지요?

(1) 정사각형의 한 변의 길이가 1



아랫변이 $y=0$에 놓인 정사각형들의 개수는 1부터 $n-1$까지의 자연수의 개수이므로 $n-1$,

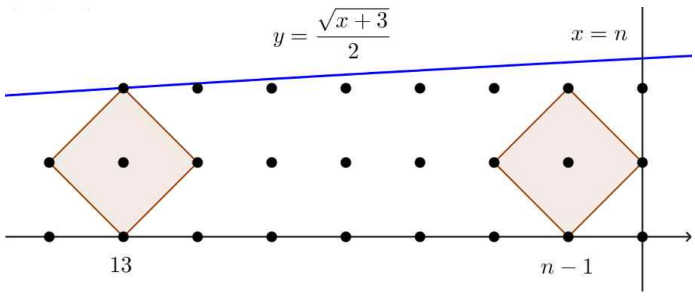
아랫변이 $y=1$에 놓인 정사각형들의 개수는 13부터 $n-1$까지의 자연수의 개수이므로 $n-13$

아랫변이 $y=2$에 놓인 정사각형들의 개수는 $n-33$이 되겠죠?

<u>잘 보면 n에서 빠지는 수가 $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{2}$의 격자점의 x좌표와 같음</u>을 알 수 있습니다.

이를 유념하면서 문제를 풀도록 합시다.

(2) 정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$



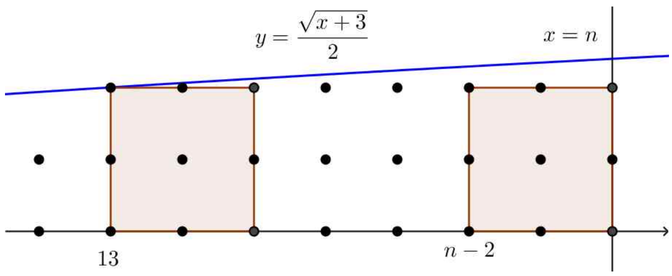
이 경우 대각선을 기준으로 살펴봐주면 됩니다.

한 대각선이 $y=1$ 위에 있는 정사각형의 개수는 13부터 $n-1$까지의 자연수의 개수이므로 $n-13$

위와 같은 방법으로,

한 대각선이 $y=2$ 위에 있는 정사각형의 개수는 $n-33$이 되겠죠? 이런 식으로 세면 됩니다.

(3) 정사각형의 한 변의 길이가 2



(1)과 같은 방법으로

아랫변이 $y=0$ 위에 놓인 정사각형들의 개수는 13부터 $n-2$까지의 자연수의 개수이므로 $n-14$

아랫변이 $y=1$ 위에 놓인 정사각형들의 개수는 $n-34$가 되겠죠?

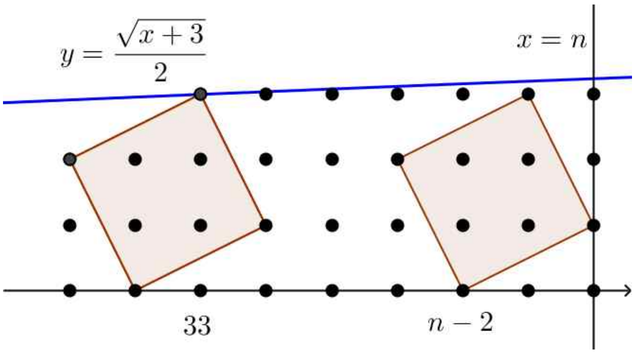
이 경우, 정사각형의 개수는 (2)의 정사각형의 개수보다 1개가 적다는 것을 기억해두면 되겠습니다.

단 여기서 n은 어느 경우이든지 항상 빼는 숫자보다

작지 않다는 것을 기억해주셔야 합시다.

즉, 위에서 $y=0$ 위에 놓인 정사각형의 개수는 $n-14$ $(n \geq 14)$이라는 말입니다.

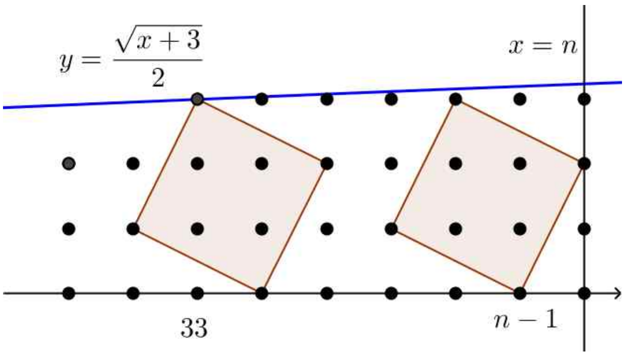
(4) 정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$



한 꼭짓점이 $y=0$ 위에 있는 정사각형의 개수는 32부터 $n-2$까지의 자연수의 개수이므로 $n-33$

한 꼭짓점이 $y=1$ 위에 있는 정사각형의 개수는 $n-61$이 되겠죠?

(5) 정사각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{5}$



한 꼭짓점이 $y=0$ 위에 있는 정사각형의 개수는 34부터 $n-1$까지의 자연수의 개수이므로 $n-34$

(4)의 경우보다 1개 적음을 알 수 있습니다.

이를 정리하면 아래와 같습니다.

n	≤ 13	≤ 33	≤ 61	≤ 97
(1)	$n-1$	$n-13$	$n-33$	$n-61$
(2)	0	$n-13$	$n-33$	$n-61$
(3)	0	$n-14$	$n-34$	$n-62$
(4)	0	0	$n-33$	$n-61$
(5)	0	0	$n-34$	$n-62$

이는 n의 범위에 따라 새로 추가되는 정사각형의 개수를 나타낸 것입니다.

이를 모두 더하면 $f(n)$이 됩니다.

$f(n)$이 400에 가까워야하기 때문에

다섯 가지 경우의 사각형이 모두 들어가는

$n \geq 34$인 경우만 살펴봐주면 되겠습니다.

그런데 눈으로 대강 봐도

$f(61)=60+(48+48+47)+(28+28+27+28+27)$

$=341<400$이므로

$61<n \leq 97$인 n 중에 답이 있겠습니다.

$61<n \leq 97$

$\Rightarrow$ $f(n)=14n-515 \leq 400$

$\Rightarrow$ $14n \leq 915$, $n \leq 65.3xxx$

따라서 자연수 n의 최댓값은 65입니다.

정답: 65

※ NOTICE

1) 해당 모의고사의 문제에 대한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

2) 본 해설은 필자가 단독으로 다른 해설을 참고하지 않고 만들어낸 것이므로 다소 매끄럽지 않은 부분이 있을 수도 있습니다. 양해 부탁드립니다.

3) 이 문서는 재가공하여 판매하는 등의 **영리를 취할 목적으로 이용하지 않는 한** 누구나 자유롭게 열람, 배포, 이용할 수 있습니다. (교육 등 여러 사람에게 배포되는 경우 저작자만 명시해주시면 됩니다.)

4) 이 문서를 통해 많은 분들이 도움을 받으셨으면 좋겠습니다.