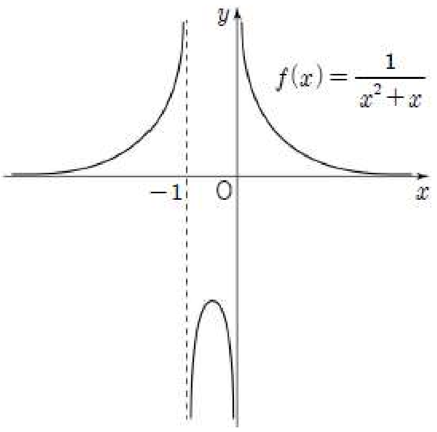
‘가’ 형

Problem #14

[13~14] 함수 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ 의 그래프는 그림과 같다.

<u>13번과 14번</u>의 두 물음에 답하시오.



14. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)$ 의 값은? [4점]

① $\ln\frac{9}{8}$ ② $\ln\frac{5}{4}$ ③ $\ln\frac{11}{8}$ ④ $\ln\frac{3}{2}$ ⑤ $\ln\frac{13}{8}$

Solution //

솔직히 그래프는 왜 그려줬는지 모르겠습니다.

어쨌든 정적분의 정의를 이용합시다.

기본적인 정적분 형식에 속하니 따로 설명하지 않아도 되겠죠?

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)=\int_1^3 f(x)dx$$

$$=\int_1^3\frac{1}{x^2+x}dx$$

$$=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=[\ln x-\ln(x+1)]_1^3$$

$$=\ln3-\ln4+\ln2=\ln3-\ln2=\ln\frac{3}{2}$$

정답: ④

Problem #15

15. 두 곡선 $y=2^x$, $y=-4^{x-2}$이 y축과 평행한 한 직선과 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}$일 때, 삼각형 AOB의 넓이는? (단, O는 원점이다.) [4점]

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

Solution //

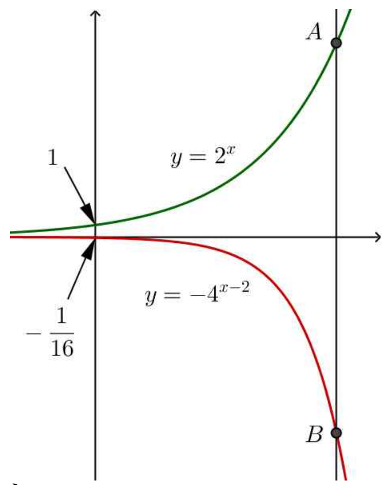
두 곡선의 그래프를 그려봅시다.

y절편 정도는 표시해두는 것이 좋겠지요?

오른쪽 그림에서

$\overline{OA}=\overline{OB}$이려면

점 A와 B의 y좌표의 **절댓값이 같으면** 됩니다.



$2^x=4^{x-2}$

$\Rightarrow\ 2^x=2^{2x-4}$

$\Rightarrow\ x=2x-4$

$\therefore\ x=4$

즉, 점 A의 좌표는 $(4,16)$이므로

$\therefore\ \triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times4\times32=64$

정답: ①

Problem #16

16. 닫힌 구간 $[0,2\pi]$에서 x에 대한 방정식 $\sin x-x\cos x-k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은? [4점]

① -6 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 6

Solution //

이 방정식의 실근의 개수는

$y=\sin x-x\cos x$와 $y=k$의 **교점의 개수**와 같습니다.

즉 함수 $y=\sin x-x\cos x$의 그래프를 그리면 됩니다.

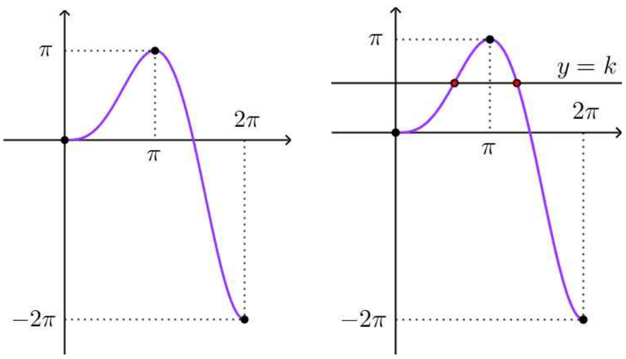
$f(x)=\sin x - x\cos x$라 하면

$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x = x\sin x$이므로

$x=0,\ \pi,\ 2\pi$에서 $f'(x)=0$입니다.

$f(0)=0,\ f(\pi)=\pi,\ f(2\pi)=-2\pi$이므로

$f(x)=\sin x - x\cos x$의 그래프의 개형을 그리면,



따라서 위의 오른쪽 그림과 같이 $0 \le k \le \pi$이면

직선과 곡선의 교점이 2개 생기게 됩니다.

$\pi < 4$이므로 조건을 만족하는 정수 k의 합은

$0+1+2+3=6$입니다.

정답: ⑤

Problem #17

17. 미분가능한 함수 $f(x)$와 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가

$g\left(3f(x)-\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$를 만족시킬 때,

다음은 $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)$의 값을 구하는 과정이다.

> $g\left(3f(x)-\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}\right)=x$에서
>
> $3f(x)-\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}=g^{-1}(x)$이므로
>
> $f(x)=\dfrac{1}{\boxed{(가)}}$
>
> 이다.
>
> $f(x)$의 도함수를 구하면
>
> $f'(x)=\dfrac{-e^x-2e^{2x}}{\left(\boxed{(가)}\right)^2}$
>
> 이다. $f(0)=\dfrac{1}{2}$이므로 $g\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$이다.
>
> 그러므로 $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\boxed{(나)}$
>
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $h(x)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $p\times h(\ln 2)$의 값은? [4점]

① -8 ② -4 ③ 0 ④ 4 ⑤ 8

Solution //

> ※ 역함수의 성질
>
> 1) 어떤 함수와 그 함수의 역함수의 합성함수는 항등함수입니다. 즉, $f(f^{-1}(x))=x$
>
> 2) $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
>
> 즉 $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$이면 $(f^{-1})'(b)=\dfrac{1}{f'(a)}$

(가)만 살짝 헷갈리지 않으면 어렵지 않습니다.

두 번째 줄에서

$3f(x)-\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}=g^{-1}(x)=f(x)$ 임에 주목합니다.

$\Rightarrow 2f(x)=\dfrac{2}{e^x+e^{2x}}$ $\quad\therefore\ f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{2x}}$

(가): e^x+e^{2x}

이를 미분하면

$f'(x)=\dfrac{-e^x-2e^{2x}}{(e^x+e^{2x})^2}$

상기한 '역함수의 성질'에서

$g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{f'(0)}=-\dfrac{4}{3}$ $\longrightarrow$ (나): $-\dfrac{4}{3}$

$\therefore\ p\times h(\ln 2)=-\dfrac{4}{3}\times(2+2^2)=-8$

정답: ①

Problem #18

18. 다음 조건을 만족시키는 세 자연수 $a,\ b,\ c$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c)$의 개수는? [4점]

> (가) 세 수 $a,\ b,\ c$의 합은 짝수이다.
>
> (나) $a \le b \le c \le 15$

① 320 ② 324 ③ 328 ④ 332 ⑤ 336

Solution //

세 자연수의 합이 짝수인 경우는 세 자연수가 모두 짝수이거나, 셋 중 하나만 짝수인 경우뿐입니다.

<u>$i)$ a, b, c 모두 짝수인 경우</u>

15 이하의 자연수 중 짝수는 7개이므로

순서쌍 (a, b, c)의 개수는 7개의 수 중 **중복을 허락하여** 3개를 뽑는 방법의 수와 같습니다.

세 수의 대소가 정해져 있기 때문입니다.

예를 들어 $2, 4, 6$을 뽑으면 $(a, b, c) = (2, 4, 6)$이고,

$6, 6, 10$을 뽑으면 $(a, b, c) = (6, 6, 10)$입니다.

따라서 이 경우 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

${}_7H_3 = {}_9C_3 = 84$

<u>$ii)$ a, b, c 셋 중 하나만 짝수인 경우</u>

$i)$과 비슷한 방법으로, 15 이하의 자연수 중에서 **중복을 허락하여** 짝수 1개, 홀수 2개를 뽑는 방법의 수가 순서쌍 (a, b, c)의 개수와 같습니다.

따라서 이때 순서쌍 (a, b, c)의 개수는

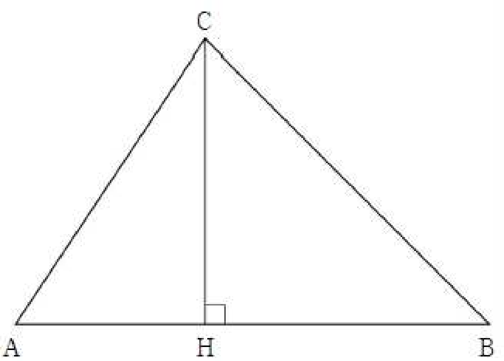
$7 \times {}_8H_2 = 7 \times {}_9C_2 = 252$

$i), ii)$에서 문제의 조건을 만족시하는 모든 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $84 + 252 = 336$

정답: ⑤

Problem #19

19. 그림과 같이 삼각형 ABC 에 대하여 꼭짓점 C 에서 선분 AB 에 내린 수선의 발을 H라 하자. 삼각형 ABC 가 다음 조건을 만족시킬 때, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}$ 의 값은? [4점]



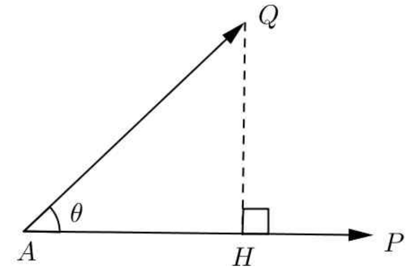
(가) 점 H가 선분 AB를 $2:3$으로 내분한다.
(나) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 40$
(다) 삼각형 ABC 의 넓이는 30 이다.

① 36 ② 37 ③ 38 ④ 39 ⑤ 40

Solution //

계산하려면 복잡해보이지만... 벡터의 기하학적인 성질을 이용하면 좀 더 간단하게 풀 수 있습니다.

※ 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AQ}$에 대하여, 아래 그림에서



$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{AQ}|\cos\theta = \overline{AP} \cdot \overline{AH}$$

(단, $0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$)

위 벡터의 성질을 이용하면,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$

$= \overline{AB} \times \frac{2}{5}\overline{AB}$ [$\because$ (가)]

$= \frac{2}{5}\overline{AB}^2 = 40 \quad \therefore \overline{AB} = 10$

(다)에서 $\triangle ABC = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CH} = 30 \Rightarrow \overline{CH} = 6$

$\therefore \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH} = \overline{CH}^2 = 36$

정답: ①

Problem #20

20. 두 함수 $f(x) = \ln x$, $g(x) = \ln\frac{1}{x}$ 의 그래프가 만나는 점을 P라 할 때 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. 점 P의 좌표는 $(1,\ 0)$이다.
ㄴ. 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 위의 점 P에서의 각각의 접선은 서로 수직이다.
ㄷ. $t>1$일 때, $-1<\dfrac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}<0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution //

그래프를 굳이 그릴 필요는 없을 것 같죠? 다만

$\ln\dfrac{1}{x}=-\ln x$로 생각하여 푸는 게 더 간단할 것입니다.

ㄱ. 대입해봅시다. (참)

ㄴ. 두 접선의 **기울기의 곱이 -1이면 수직**입니다.

$f'(x)=\dfrac{1}{x}$, $g'(x)=-\dfrac{1}{x}$에서

$f'(1)=1$, $g'(1)=-1$이므로 두 접선은 서로 직교합니다. (참)

ㄷ. 이게 좀 어려워 보일 수도 있는데 분수 형태는 **변화율**을 염두에 두면 좋습니다.

$$\frac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}=\frac{f(t)}{t-1}\cdot\frac{g(t)}{t-1}=\frac{f(t)-f(1)}{t-1}\cdot\frac{g(t)-g(1)}{t-1}$$

평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(t)-f(1)}{t-1}=f'(c_1)$, $\dfrac{g(t)-g(1)}{t-1}=g'(c_2)$인

실수 c_1, c_2가 구간 $(1,\ t)$에 적어도 하나씩 존재합니다.
(사실은 $c_1=c_2$이지만 크게 상관은 없습니다.)

한편 $f'(x)=\dfrac{1}{x}$이므로 $c_1>1 \Rightarrow 0<f'(c_1)<1$

$g'(x)=-\dfrac{1}{x}$이므로 $c_2>1 \Rightarrow -1<g'(c_2)<0$

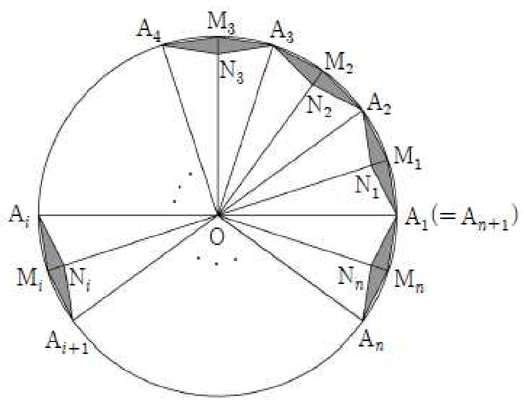
$\therefore\ -1<\dfrac{f(t)g(t)}{(t-1)^2}=f'(c_1)g'(c_2)<0$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참입니다.

정답: ⑤

Problem #21

21. 그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 $n\ (n\geq 4)$등분한 점을 $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,\ \cdots,\ \mathrm{A}_n$이라 하자. 호 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$을 이등분한 점을 M_i라 하고 사각형 $\mathrm{A}_i\mathrm{M}_i\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{N}_i$가 마름모가 되도록 하는 선분 OM_i 위의 점을 N_i라 하자. n개의 사각형
$\mathrm{A}_1\mathrm{M}_1\mathrm{A}_2\mathrm{N}_1,\ \mathrm{A}_2\mathrm{M}_2\mathrm{A}_3\mathrm{N}_2,\ \mathrm{A}_3\mathrm{M}_3\mathrm{A}_4\mathrm{N}_3,\ \cdots,\ \mathrm{A}_n\mathrm{M}_n\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{N}_n$의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2\times S_n)$의 값은?
(단, $\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{A}_1$) [4점]

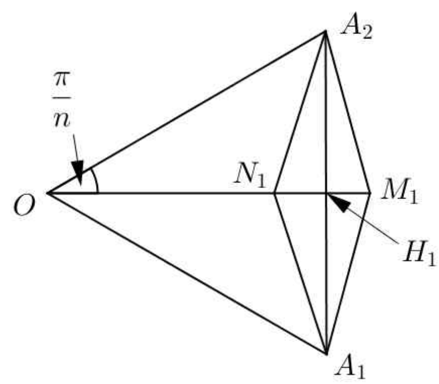


① π^3 ② $2\pi^3$ ③ $3\pi^3$ ④ $4\pi^3$ ⑤ $5\pi^3$

Solution //

n개의 마름모가 합동이므로 $S_n=n\times\square A_1M_1A_2N_1$

사각형 $A_1M_1A_2N_1$을 크게 그려보면 아래와 같습니다.



위와 같이 사각형 $A_1M_1A_2N_1$의 두 대각선의 교점을 H_1이라고 하면

$\overline{A_1H_1}=\sin\dfrac{\pi}{n}$, $\overline{M_1H_1}=\overline{OM_1}-\overline{OH_1}=1-\cos\dfrac{\pi}{n}$

따라서 사각형 $A_1M_1A_2N_1$의 넓이는

$$2\times 2\times \overline{A_1H_1}\times \overline{M_1H_1}=2\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(n^2S_n\right)=\lim_{n\to\infty}\left(2n^3\sin\frac{\pi}{n}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2\times\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n}}\times\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2\pi^3\times\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\times\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{\pi}{n}=t \Rightarrow t\to 0}$$

$$=\lim_{t\to 0}\left(2\pi^3\times\underbrace{\frac{\sin t}{t}}_{1}\times\underbrace{\frac{1-\cos t}{t^2}}_{\frac{1}{2}}\right)=\pi^3$$

정답: ①

Problem #26

26. 상자에는 딸기 맛 사탕 6개와 포도 맛 사탕 9개가 들어 있다. 두 사람 A와 B가 이 순서대로 이 상자에서 임의로 1개의 사탕을 각각 1번 꺼낼 때, A가 꺼낸 사탕이 딸기 맛 사탕이고, B가 꺼낸 사탕이 포도 맛 사탕일 확률을 p라 하자. $70p$의 값을 구하시오. (단, 꺼낸 사탕은 상자에 다시 넣지 않는다.) [4점]

Solution //

조건부 확률의 아~주 기본적인 문제입니다. 그런데 왜 이 문제가 4점이죠?

A가 딸기맛 사탕을 꺼낼 확률은 $\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$,

A가 딸기맛 사탕을 꺼냈으므로 B는 총 14개의 사탕 중 하나를 고르는 것입니다.

문제에서 '순서대로'라는 말을 쓴 것에 유념해야 합니다.

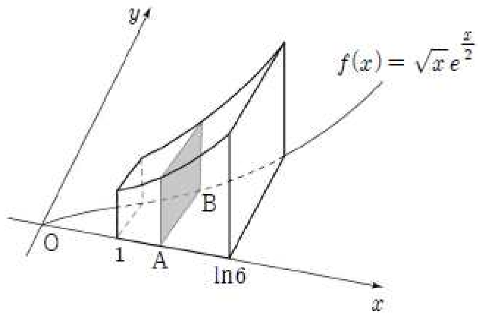
이때 포도맛 사탕을 고를 확률은 $\frac{9}{14}$이므로

구하는 확률은 $\frac{2}{5}\times\frac{9}{14}=\frac{9}{35}$ $\quad\therefore 70p=18$

정답: 18

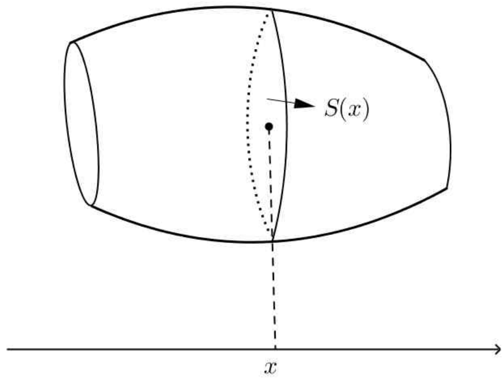
Problem #27

27. 그림과 같이 함수 $f(x)=\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}$에 대하여 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x,\,0)$, $\mathrm{B}(x,\,f(x))$를 이은 선분을 한 변으로 하는 정사각형을 x축에 수직인 평면 위에 그린다. 점 A의 x좌표가 $x=1$에서 $x=\ln 6$까지 변할 때, 이 정사각형이 만드는 입체도형의 부피는 $-a+b\ln 6$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 자연수이다.) [4점]



Solution //

※ 아래와 같이 입체의 단면의 면적을 항상 x에 대한 함수$(=S(x))$로 나타낼 수 있을 때,



이 $x=a$에서부터 $x=b$까지에 대응되는 이 입체도형의 부피는 $\int_a^b S(x)dx$

회전체의 부피 대신 정적분을 이용한 부피 구하기 문제가 많이 나오는 것 같습니다.

내용만 알면 풀이는 어렵지 않습니다.

선분 AB를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이가 위의 $S(x)$에 해당합니다.

따라서 구하는 입체도형의 부피는

$$\int_1^{\ln 6}\left(\sqrt{x}\,e^{\frac{x}{2}}\right)^2 dx$$

$$=\int_1^{\ln 6} xe^x dx = \left[xe^x\right]_1^{\ln 6} - \int_1^{\ln 6} e^x dx \quad (\text{부분적분법})$$

$$=6\ln 6 - e - \left[e^x\right]_1^{\ln 6} = -6 + 6\ln 6 \qquad \therefore\ a+b=12$$

정답: 12

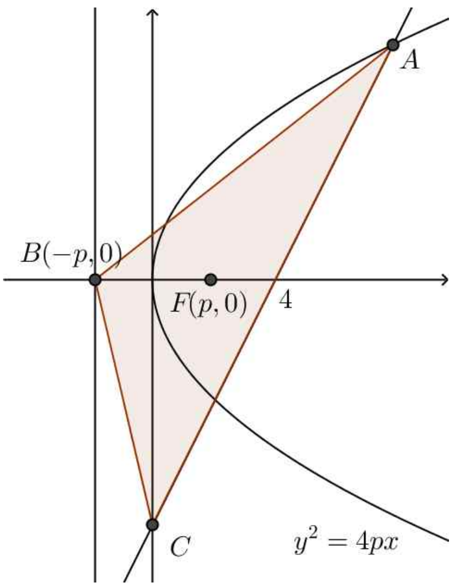
Problem #28

28. 두 양수 m, p에 대하여 포물선 $y^2=4px$와 직선 $y=m(x-4)$가 만나는 두 점 중 제1사분면 위의 점을 A, 포물선의 준선과 x축이 만나는 점을 B, 직선 $y=m(x-4)$와 y축이 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 ABC의 무게중심이 포물선의 초점 F와 일치할 때, $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}$의 값을 구하시오. [4점]

Solution //

그래프를 그리고 조금만 생각해봅시다.

포물선과 그 준선, 직선 $y=m(x-4)$의 그래프를 그리면 아래와 같습니다.



삼각형 ABC의 무게중심이 x축 위에 있어야 하므로

반드시 선분 AC의 중점이 $(4,0)$이어야 합니다. $\cdots(i)$

한편 무게중심의 성질에서

$2p : 4-p = 2:1 \ \Rightarrow\ p=2$

점 A의 x좌표는 8이므로 $[\because (i)]$

점 A에서 포물선의 준선에 내린 수선의 발을 H라 하면

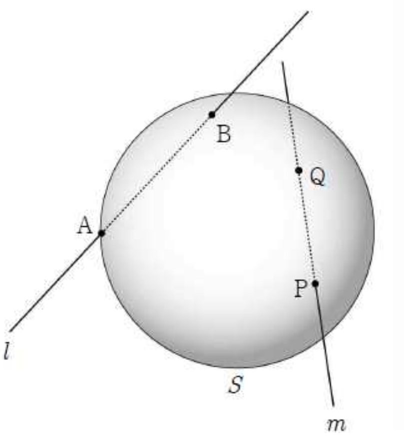
포물선의 성질에 의하여

$\therefore\ \overline{AF}+\overline{BF}=\overline{AH}+\overline{BF}=8+p+2p=14$

정답: 14

Problem #29

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 2인 구 S와 서로 다른 두 직선 l, m이 있다. 구 S와 직선 l이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A, B, 구 S와 직선 m이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 P, Q라 하자. 삼각형 APQ는 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{ABQ}=\frac{\pi}{2}$일 때 평면 APB와 평면 APQ가 이루는 각의 크기 θ에 대하여 $100\cos^2\theta$의 값을 구하시오. [4점]



Solution //

아마 이 문제가 가장 어려운 문제일 것 같은데요.

항상 공간도형은 어떤 문제이든 어려운 것 같습니다!

우선 삼각형 APQ의 위치를 찾는 것부터 시작해야 합니다.

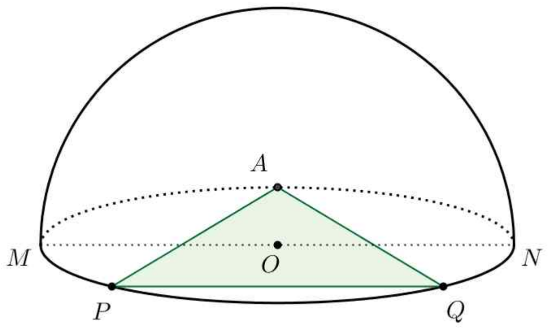
조금 눈치가 빠르신 분들은 쉽게 알 수 있겠지만,

한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형의 외접원의 반지름은 2라는 것을 알 수 있습니다.

구를 평면으로 자르면 항상 원이 나오기 때문에 외접원을 생각해야 하는 것이지요.

그런데 마침 구의 반지름이 2이기 때문에 **삼각형 APQ**

는 아래와 같이 **구의 중심(O)을 포함**하게 됩니다.

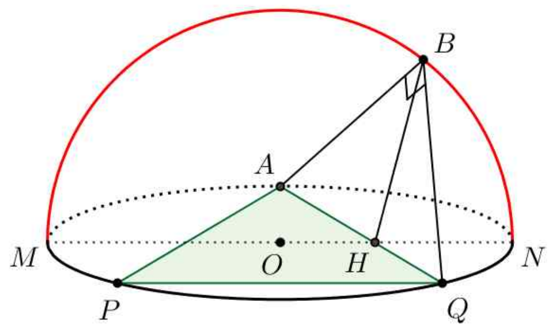


문제는 B의 위치인데,

$\overline{OA}=\overline{OB}=2$, $\overline{AB}=2\sqrt{2}$ 이므로

삼각형 OAB는 $\angle AOB=90^\circ$ 인 직각삼각형입니다.

따라서 **점 B는 직선 AO와 수직인 평면 위에 있어야** 합니다. 그 평면은 위 그림에서 **선분 MN을 지름으로 하는 원을 포함**하므로, 점 B는 아래와 같이 빨간 색으로 표시된 반원 위에 있어야 합니다.



위처럼 선분 AQ와 MN의 교점을 H라 합시다.

직각삼각형 ABQ에서

$\overline{BQ}=\sqrt{(\overline{AQ})^2-(\overline{AB})^2}=\sqrt{(2\sqrt{3})^2-(2\sqrt{2})^2}=2$

이므로

B에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$\overline{AB}\times\overline{BQ}=\overline{AQ}\times\overline{BH'} \Rightarrow \overline{BH'}=\dfrac{2\sqrt{2}\times 2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow \overline{AH'}=\sqrt{(\overline{AB})^2-(\overline{BH'})^2}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \quad \cdots(i)$

한편, 구의 중심 O는 삼각형 APQ의 무게중심이고,

$\overline{MN}\,//\,\overline{PQ}$ 이므로

$\overline{AH}:\overline{HQ}=2:1 \Rightarrow \overline{AH}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3} \quad \cdots(ii)$

(i), (ii)에서 $H=H'$ $\quad \therefore\ \overline{AQ}\perp\overline{BH} \quad \cdots(iii)$

한편 삼각형 OHB에서

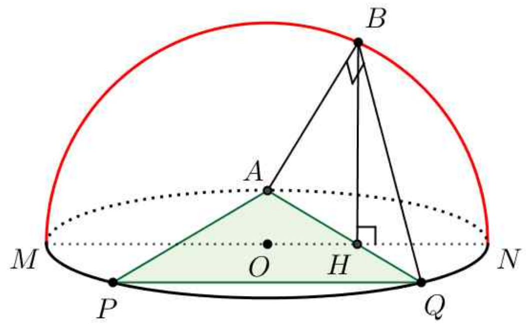
$\overline{OB}=2$, $\overline{OH}=\dfrac{1}{2}\overline{AH}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $\overline{BH'}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$ 이므로

$\mathbf{\overline{OB}^2=\overline{OH}^2+\overline{BH}^2}$이 성립함을 알 수 있습니다.

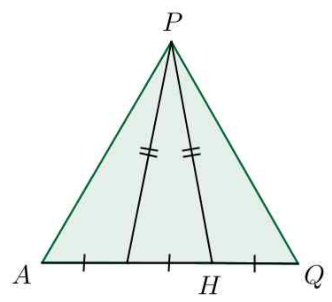
$\therefore\ \angle OHB=90^\circ \Rightarrow \overline{OH}\perp\overline{BH} \quad \cdots(iv)$

(iii), (iv)에서 $\mathbf{\overline{BH}\perp}$**(평면 APQ)** $\cdots(v)$

이를 그림으로 나타내면 아래와 같습니다.



선분 PH의 길이는 아래 그림에서



$\overline{PH}=x$라 하면 중선 정리에 의하여

$\overline{PA}^2+\overline{PH}^2=2\left(\left(\dfrac{1}{2}\overline{AH}\right)^2+\overline{PH}^2\right)$

$\Rightarrow x^2=(2\sqrt{3})^2-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{84}{9}$

(v)에서 $\angle PHB=90^\circ$ 이므로

$\overline{PB}=\sqrt{(\overline{PH})^2+(\overline{BH})^2}=2\sqrt{3}$

따라서 삼각형 APB는 세 변의 길이가 각각

$2\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $2\sqrt{2}$ 인 이등변삼각형이고 그 넓이는

$2\sqrt{5}$ 입니다.

한편 **삼각형 APB의 평면 APQ 위로의 정사영은 삼각형 APH**이고,

$\triangle APH = \frac{2}{3} \triangle APQ = 2\sqrt{3}$ 이므로

$\therefore \cos\theta = \frac{\triangle APH}{\triangle APB} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$, $100\cos^2\theta = 60$

정답: 60

Problem #30

30. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ 인 θ에 대하여 좌표평면 위의 두 직선 l, m은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 두 직선 l, m은 서로 평행하고 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 각각 θ이다.
(나) 두 직선 l, m은 곡선 $y = \sqrt{2 - x^2}\ (-1 \le x \le 1)$과 각각 만난다.

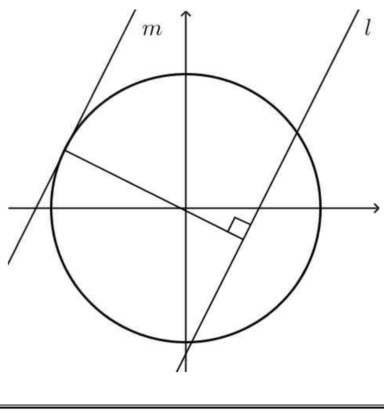
두 직선 l과 m 사이의 거리의 최댓값을 $f(\theta)$라 할 때, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\theta)d\theta = a + b\sqrt{2}\pi$이다. $20(a+b)$의 값을 구하시오.
(단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

Solution //

29번도 그렇고 이번 모의고사 문제가 괜찮은 것 같네요.

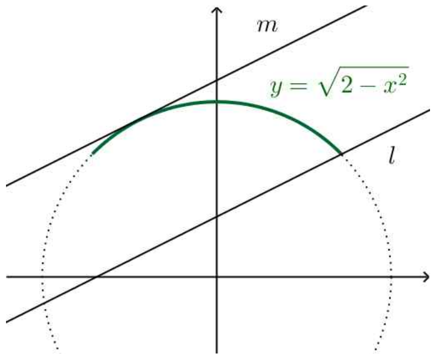
곡선 $y = \sqrt{2 - x^2}\ (-1 \le x \le 1)$은 반지름이 $\sqrt{2}$이고 중심이 원점인 원의 일부입니다. 먼저, 곡선이 원의 일부가 아니라 전체라고 가정하고 생각해봅시다.

직선 l, m 중 하나가 고정되어 있고(l), 원과 만난다고 하면, 나머지 직선은 반드시 아래 그림과 같이 원과 접해야 두 직선의 거리가 최대가 됩니다.

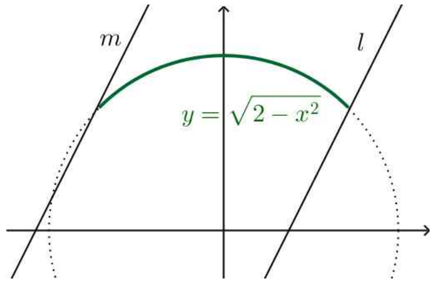


그런데 문제 안의 곡선은 원의 일부이므로, l, m 중 한 직선은 곡선의 끝점인 $(1, 1)$을 지나고, 나머지 하나는 **곡선에 접하거나, 접하는 게 불가능한 경우 $(-1, 1)$을 지날 때 두 직선 사이의 거리가 최대**입니다.

l이 $(1, 1)$을 지난다고 합시다.



case 1) 접하는 경우



case 2) 접하는 게 불가능한 경우

위 그림처럼, 기울기가 **어느 수준 이상 커지게 되면 접하는 게 불가능**해지는데, 곡선 위의 점 $(-1, 1)$ 위에서의 접선이 최대 기울기를 가집니다. 그 이상 두 직선의 기울기가 커지면 접할 수 없죠.

$(-1, 1)$에서의 접선의 기울기는 1이므로

다음과 같이 두 경우로 나누어 $f(\theta)$를 구합니다.

$i)\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}$

직선 m의 기울기는 $\tan\theta$이므로

$m: y = (\tan\theta)x + \sqrt{2}\sqrt{1 + \tan^2\theta}$

$\Rightarrow (\tan\theta)x - y + \sqrt{2}\sec\theta = 0$

기울기가 알려진 원의 접선의 방정식을 구하는 방법은 아래 내용을 참고하면 됩니다! 기본적인 내용이죠.

※ 원과 접선의 방정식
원점을 중심으로 하는 원 $x^2+y^2=r^2$에 대하여
1) 기울기가 m인 접선의 방정식
$\Rightarrow\ y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$
2) 원 위의 점 (a,b)에서 접하는 접선의 방정식
$\Rightarrow\ ax+by=r^2$

직선 l은 $(1,1)$을 지나므로
두 직선 사이의 거리는 **점 (1,1)과 직선 m 사이의 거리**와 같습니다. 그 거리가 바로 $f(\theta)$입니다. 그 값은,

$$f(\theta)=\frac{\tan\theta-1+\sqrt{2}\sec\theta}{\sqrt{(\tan\theta)^2+1}}=\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2}$$

$ii)\ \frac{\pi}{4}\le\theta<\frac{\pi}{2}$

직선 m의 기울기는 $\tan\theta$이고 $(-1,1)$을 지나므로
$m : y=(\tan\theta)x+\tan\theta+1$
$\Rightarrow\ (\tan\theta)x-y+\tan\theta+1=0$
$i)$과 같은 방법으로,

$$f(\theta)=\frac{\tan\theta-1+\tan\theta+1}{\sqrt{(\tan\theta)^2+1}}=\frac{2\tan\theta}{\sec\theta}=2\sin\theta$$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\theta)d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin\theta-\cos\theta+\sqrt{2})d\theta+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2\sin\theta)d\theta$$

$$=\left[-\cos\theta-\sin\theta+\sqrt{2}\,\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}+\left[-2\cos\theta\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

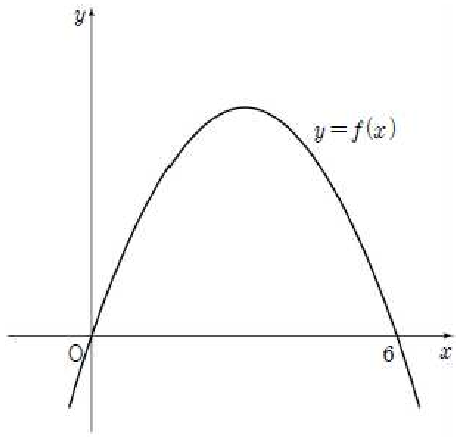
$$=1+\frac{\sqrt{2}}{4}\pi\quad\Rightarrow\ a=1,\ b=\frac{1}{4}\ //\ 20(a+b)=25$$

정답: 25

‘나’ 형

Problem #14

[13~14] 이차함수 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3x$ 에 대하여
13번과 14번의 두 물음에 답하시오.



14. 주머니 A와 B에는 1, 2, 3, 4, 5의 숫자가 하나씩 적혀 있는 5개의 공이 각각 들어 있다. 주머니 A와 B에서 각각 공을 임의로 한 개씩 꺼내어 주머니 A에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 a, 주머니 B에서 꺼낸 공에 적혀 있는 수를 b라 할 때, 직선 $y=ax+b$가 곡선 $y=f(x)$와 만나지 않을 확률은? [4점]

① $\frac{17}{25}$ ② $\frac{18}{25}$ ③ $\frac{19}{25}$ ④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{21}{25}$

주머니 A 주머니 B

Solution //

우선 $y=ax+b$와 $y=f(x)$가 만나지 않을 조건을 먼저 구해봅시다.
직선과 곡선의 방정식을 연립하면

$$-\frac{1}{2}x^2+3x=ax+b$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}x^2+(a-3)x+b=0$$

두 직선과 곡선이 서로 만나지 않으려면, 위 방정식이 실근을 갖지 않아야 하므로

$D=(a-3)^2-2b<0$

따라서 $(a-3)^2<2b$여야 직선 $y=ax+b$가 곡선 $y=f(x)$와 만나지 않습니다.

그런데 $0 \le (a-3)^2 \le 4$이므로 **반대로(여사건)** $(a-3)^2 \ge 2b$인 경우를 구하는 편이 더 빠르겠네요.

$a=2, 3, 4$일 때엔 항상 $(a-3)^2<2b$이므로

$a=1, 5$인 경우만 생각합시다.

$a=1$ or $5 \Rightarrow (a-3)^2=4$,

따라서 $b=1, 2$일 때에만 $(a-3)^2 \ge 2b$이 성립합니다.

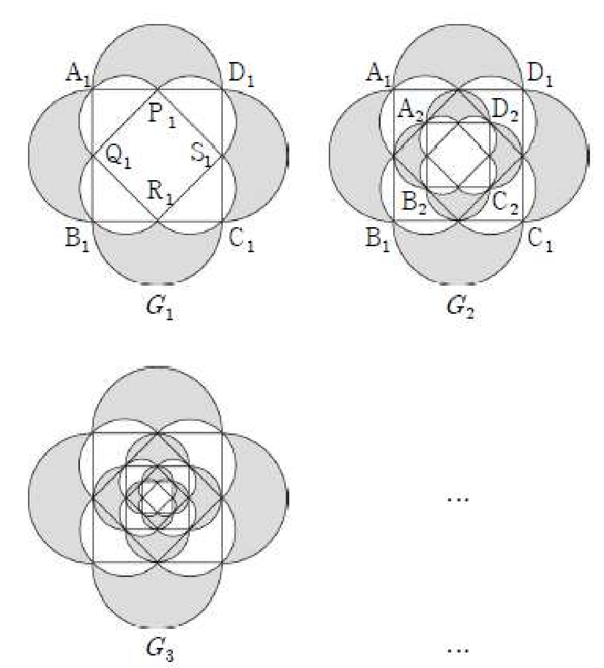
즉, $(a-3)^2 \ge 2b$를 만족하는 순서쌍 (a, b)의 개수는 $2\times2=4$이고,

$(a-3)^2<2b$일 확률은 $1-\dfrac{4}{25}=\dfrac{21}{25}$

정답: ⑤

Problem #15

15. 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$이 있다. 네 변 A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1A_1을 각각 지름으로 하는 반원을 정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 외부에 그려 만들어진 4개의 호로 둘러싸인 ◌ 모양의 도형을 E_1이라 하자. 네 변 D_1A_1, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1의 중점 P_1, Q_1, R_1, S_1을 꼭짓점으로 하는 정사각형에 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 ◌ 모양의 도형을 F_1이라 하자. 도형 E_1의 내부와 도형 F_1의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_1이라 하자.
그림 G_1에 네 변 P_1Q_1, Q_1R_1, R_1S_1, S_1P_1의 중점 A_2, B_2, C_2, D_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어지는 ◌ 모양의 도형을 E_2라 하자. 네 변 D_2A_2, A_2B_2, B_2C_2, C_2D_2의 중점 P_2, Q_2, R_2, S_2를 꼭짓점으로 하는 정사각형을 그리고 도형 E_1을 얻는 것과 같은 방법으로 새로 만들어지는 ◌ 모양의 도형을 F_2라 하자. 그림 G_1에 도형 E_2의 내부와 도형 F_2의 외부의 공통부분에 색칠하여 얻은 그림을 G_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 G_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 T_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}T_n$의 값은? [4점]



① $\frac{4}{3}(\pi+2)$ ② $\frac{3}{2}(\pi+2)$ ③ $\frac{5}{3}(\pi+2)$
④ $\frac{4}{3}(\pi+4)$ ⑤ $\frac{5}{3}(\pi+4)$

Solution //

무한등비급수는 **초항**과 **공비**가 중요한데,

초항은 G_1에서 색칠된 부분의 넓이가 되겠습니다.

그 넓이는 '정사각형 $A_1B_1C_1D_1$의 한 변을 지름으로 가지는 반원 4개의 넓이 …(1)'에서 '활꼴 A_1P_1 8개의 넓이 …(2)'를 뺀 것과 같습니다.

(1)의 넓이는 $4\times\left(\dfrac{1}{2}\pi\times1^2\right)=2\pi$

(2)의 넓이는 $4\times\{(\text{반원 } P_1Q_1\text{의 넓이})-\triangle A_1P_1Q_1\}$

$=4\times\left(\dfrac{1}{2}\pi\times\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{1}{2}\right)=\pi-2$

따라서 $T_1=2\pi-(\pi-2)=\pi+2$

공비를 구할 때엔, T_1과 T_2-T_1의 값의 비율을 구해도 되지만, 각 도형들 안에 내접하는 사각형 $A_1B_1C_1D_1$과 $A_2B_2C_2D_2$의 넓이의 비율을 구해도 같은 값을 구할 수 있습니다. 이런 식으로 넓이나 길이를

구하기 쉬운 **주변 도형을 이용**하도록 합시다.

$\overline{A_2B_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{P_1Q_1} = \frac{1}{2}\overline{A_1B_1}$ 이므로

두 사각형의 닮음비는 $\frac{1}{2}$, **넓이비**는 $\frac{1}{4}$가 됩니다.

따라서 공비는 $\frac{1}{4}$입니다. 넓이에 관한 문제이므로 닮음비를 이용하지 않도록 주의합시다.

$$\therefore \lim_{n\to\infty} T_n = \frac{\pi+2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}(\pi+2)$$

정답: ①

Problem #16

16. 어느 공장에서 생산되는 휴대전화 1 대의 무게는 평균이 153g 이고 표준편차가 2g 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산된 휴대전화 중에서 임의로 선택한 휴대전화 1 대의 무게가 151g 이상이고 154g 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

① 0.3830 ② 0.5328 ③ 0.7745
④ 0.8185 ⑤ 0.9104

Solution //

휴대전화의 무게를 확률변수 $X(\mathrm{g})$라고 하면

X는 정규분포 $N(153,\ 2^2)$를 따릅니다.

문제에서 구하는 값은 $P(151 \le X \le 154)$이고

이를 표준화해서 구하면

$$P(151 \le X \le 154)$$
$$= P\left(\frac{151-153}{2} \le Z \le \frac{154-153}{2}\right)$$
$$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 0.5)$$
$$= P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 0.5)$$
$$= P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le 0.5)$$
$$= 0.3413 + 0.1915 = 0.5328$$

정답: ②

Problem #17

17. 다음 조건을 만족시키는 자연수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는? [4점]

> (가) $a,\ b,\ c,\ d$ 중에서 홀수의 개수는 2이다.
> (나) $a+b+c+d=12$

① 108 ② 120 ③ 132 ④ 144 ⑤ 156

Solution //

네 자연수의 합이 짝수가 되는 경우는

네 수가 모두 짝수이거나, **네 수 중 2개만 짝수**이거나

네 수 모두 홀수인 경우뿐입니다.

우선 (나)를 만족하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$a'+b'+c'+d'=8$을 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (a', b', c', d')의 개수와 같습니다.

$\Rightarrow {}_4H_8 = {}_{11}C_3 = 165$(가지)

<u>$i)$ 네 수가 모두 짝수인 경우</u>

$a=2p+2,\ b=2q+2,\ c=2r+2,\ d=2s+2$로 두면

$a+b+c+d=12 \Leftrightarrow p+q+r+s=2$이고

$p \ge 0,\ q \ge 0,\ r \ge 0,\ s \ge 0$이므로

이를 만족하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는

$p+q+r+s=2$를 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (p, q, r, s)의 개수와 같습니다. $\Rightarrow {}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$(가지)

<u>$ii)$ 네 수가 모두 홀수인 경우</u>

$a=2x+1,\ b=2y+1,\ c=2z+1,\ d=2w+1$로 두면

$i)$과 같은 방법으로

순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $x+y+z+w=4$를 만족하는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (x, y, z, w)와 같습니다.

$\Rightarrow {}_4H_4 = {}_7C_3 = 35$(가지)

따라서 (가), (나)를 동시에 만족하는 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는 $165-10-35=120$(가지)

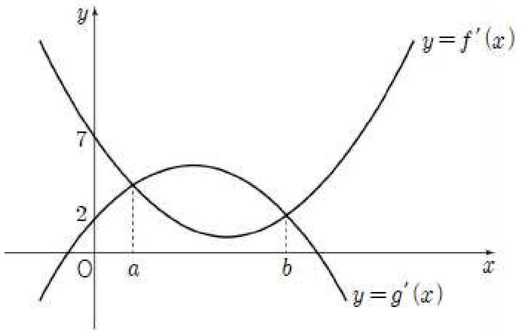
정답: ②

Problem #18

18. 그림과 같이 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$의 도함수 $y=f'(x)$, $y=g'(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표는 a, $b\,(0<a<b)$이다. 함수 $h(x)$를

$$h(x)=f(x)-g(x)$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $f'(0)=7$, $g'(0)=2$) [4점]



<보 기>

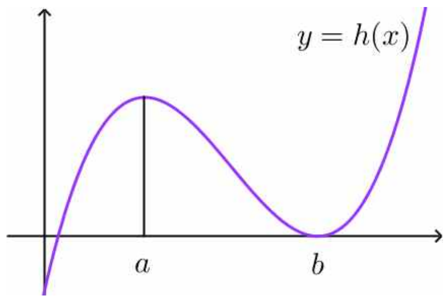
ㄱ. 함수 $h(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖는다.
ㄴ. $h(b)=0$이면 방정식 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. $0<\alpha<\beta<b$인 두 실수 α, β에 대하여 $h(\beta)-h(\alpha)<5(\beta-\alpha)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

Solution //

ㄱ. $h'(x)=f'(x)-g'(x)$의 부호가 $x=a$ 좌우에서 $(+)\to 0\to(-)$로 변하는 걸 그래프로 확인할 수 있죠? 따라서 $h(x)$는 $x=a$에서 극대입니다. (참)

ㄴ. $h(x)$는 $x=a$에서 극대, $x=b$에서 극소이므로 $h(b)=0$임을 이용하여 $y=h(x)$의 그래프를 그리면



따라서 $h(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수(=$y=h(x)$와 x의 교점의 개수)는 2개가 됩니다. (참)

ㄷ. 주어진 부등식은 $\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}<5$와 동치입니다.

여기서, **평균값의 정리**에 의하여 (insight)

$\dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(c)$인 실수 c가 구간 (α,β)에 적어도 하나 존재합니다.

그런데 $h'(x)$는 구간 $(0,\,b)$에서, $x=0$일 때 최대이므로 (문제의 그래프에서 $f'(x)-g'(x)$의 값을 관찰하세요!)

$\therefore\ \dfrac{h(\beta)-h(\alpha)}{\beta-\alpha}=h'(c)<h'(0)=7-2=5$ (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 참입니다.

정답: ⑤

Problem #19

19. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(2n+1-2k)^2=\frac{n^2(2n^2+1)}{3}$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=1$, (우변)$=1$ 이므로 주어진 등식은 성립한다.
(ⅱ) $n=m$일 때, 등식

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2=\frac{m^2(2m^2+1)}{3}$$

이 성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)(2m+3-2k)^2$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2+\boxed{(가)}$$
$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2$$
$$+\boxed{(나)}\times\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(m+1-k)+\boxed{(가)}$$
$$=\frac{(m+1)^2\{2(m+1)^2+1\}}{3}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 주어진 등식이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 식을 $f(m)$, (나)에 알맞은 수를 p라 할 때, $f(3)+p$의 값은? [4점]

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

Solution //

수학적 귀납법은 앞뒤를 보고 잘 맞춰주기만 하면 됩니다.

(가) 식이 등장하는 부분의 앞뒤를 봅시다.

앞의 식은 $\sum_{k=1}^{m+1}(2k-1)(2m+3-2k)^2$

뒤의 식은 $\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2+$(가)

달라진 부분은 항의 개수죠. 뒤의 식에서 $m+1$항이 빠져있으니 (가)는 시그마 안 식의 $m+1$항이 됩니다.

$\therefore\ f(m)=(2(m+1)-1)(2m+3-2(m+1))=2m+1$

(나) 부분은 약간 까다로운데,

(가): $2m+1$

(나)의 앞뒤의 시그마 안의 식 부분이 $2m+3-2k$에서 $2m+1-2k$로 변한 것을 보고 식을 변형해야 합니다.

$$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+3-2k)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k+2)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)\{(2m+1-2k)^2+2(2m+1-2k)\cdot 2+2^2\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(8m+4-8k+4)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(2m+1-2k)^2+8\sum_{k=1}^{m}(2k-1)(m+1-k)$$

(나): 8

$\therefore\ f(3)+p=7+8=15$

정답: ③

Problem #20

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\int xg(x)dx\ ,\quad \frac{d}{dx}\{f(x)-g(x)\}=4x^3+2x$$

를 만족시킬 때, $g(1)$의 값은? [4점]

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

Solution //

$g(x)$에 대하여 식을 정리합시다.

$f(x)=\int xg(x)dx \Rightarrow \frac{d}{dx}f(x)=xg(x)$

$\Rightarrow\ xg(x)-g'(x)=4x^3+2x$

좌항과 우항의 차수를 비교하면,

$g(x)$가 이차식이어야 함을 알 수 있습니다.

$g(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$ax^3+bx^2+(c-2a)x-b=4x^3+2x$

$\therefore\ a=4,\ b=0,\ c=10,\quad g(1)=a+b+c=14$

정답: ⑤

Problem #21

21. 세 수 0, 1, 2 중에서 중복을 허락하여 다섯 개의 수를 택해 다음 조건을 만족시키도록 일렬로 배열하여 자연수를 만든다.

(가) 다섯 자리의 자연수가 되도록 배열한다.
(나) 1끼리는 서로 이웃하지 않도록 배열한다.

예를 들어 20200, 12201은 조건을 만족시키는 자연수이고 11020은 조건을 만족시키지 않는 자연수이다. 만들 수 있는 모든 자연수의 개수는? [4점]

① 88 ② 92 ③ 96 ④ 100 ⑤ 104

Solution //

심오한 내용이 이용되는 건 아니지만, 가장 효율적인 카운팅 방법을 찾는 게 중요합니다.

각 자리수가 $0,1,2$ 중 하나인 다섯 자리 자연수 $abcde$

중에 조건 (나)를 만족시키는 경우는 아래와 같습니다.

단, 아래에서 문자로 표시된 자리수는 0 또는 2입니다.

$2bcde \rightarrow 2^4 = 16$(가지)

$1bcde \rightarrow 2^4 = 16$(가지)

$21cde\ 2b1de\ 2bc1e\ 2bcd1 \rightarrow$ 각 $2^3 = 8$(가지)

$1b1de\ 1bc1e\ 1bcd1 \rightarrow$ 각 $2^3 = 8$(가지)

$21c1e\ 21cd1\ 2b1d1 \rightarrow$ 각 $2^2 = 4$(가지)

$1b1d1 \rightarrow 2^2 = 4$(가지)

배열 규칙은

위에서 아래로 다섯 자리 수 중 1의 개수가 0개부터 3개까지 같은 것들을 한 줄로 쓰고, 만의 자리 수가 1일 때와 2일 때를 다른 줄로 구분한 것입니다.

따라서 구하는 방법의 수는

$16+16+32+24+12+4 = 104$(가지)입니다.

정답: ⑤

Problem #26

26. 첫째항이 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{n=1}^{10}(a_{5n}-a_n)=440$일 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값을 구하시오. [4점]

Solution //

공차를 d라고 합시다. $a_{n+1}-a_n = d$이므로

$a_{5n}-a_n = (5n-n)d = 4nd$

$$\sum_{n=1}^{10}(a_{5n}-a_n) = \sum_{n=1}^{10}(4nd)$$

$$= 4d\sum_{n=1}^{10}n = 220d = 440 \Rightarrow d = 2$$

$\therefore\ a_n = 2n+1$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_n$$

$$= \sum_{n=1}^{10}(2n+1) = 110+10 = 120$$

정답: 120

Problem #27

27. 함수 $f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(8)$의 값을 구하시오. [4점]

Solution //

어디서 많이 본 것 같은 문제인데...

$f(x)$는 x의 범위에 따라 다른 값을 가지기 때문에 범위를 $x=-1, 1$을 기준으로 나누어 구해줘야 합니다.

$$r^{2n} = \begin{cases} \infty & (r>1) \\ 1 & (r=1) \\ 0 & (-1<r<1) \\ 1 & (r=-1) \\ \infty & (r<-1) \end{cases}$$

임을 이용하여 $f(x)$를 구하면

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x>1) \\ \frac{1}{2} & (x=1) \\ 0 & (-1<x<1) \\ \frac{1}{2} & (x=-1) \\ 1 & (x<-1) \end{cases}$$

따라서 $f(x)$는 $x=-1, 1$에서 불연속입니다.

(사실 $f(x)$를 **직접 구하지 않아도** 알 수 있죠...)

$f(x)g(x)$가 $x=-1, 1$에서 연속이려면

$g(-1)=g(1)=0$이어야 합니다.

$\therefore\ g(x)=(x+1)(x-1), \quad g(8)=63$

정답: 63

Problem #28

28. $f(1)=1$인 이차함수 $f(x)$와 함수 $g(x)=x^2$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.
(나) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k}{n}\right)-g\left(\frac{k}{n}\right)\right\}=27$

두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [4점]

(나)는 정적분의 정의에 의하여

$\int_0^1 (f(x)-g(x))dx = 27 \ \cdots(i)$

한편 $f(1)=g(1)=1$이고,

$f(x)=f(-x),\ g(x)=g(-x)=x^2$이므로 $\cdots(ii)$

$f(1)=g(1) \Leftrightarrow f(-1)=g(-1)$

따라서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 두 교점의 좌표는

$(1,1),\ (-1,1)$입니다. $\cdots(iii)$

$(i), (ii), (iii)$에서 구간 $(-1,1)$에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)>g(x)$임을 알 수 있습니다.

따라서 $y=f(x)$와 $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^1 (f(x)-g(x))dx$$

$$=\int_0^1 (f(x)-g(x))dx + \int_{-1}^0 (f(x)-g(x))dx$$

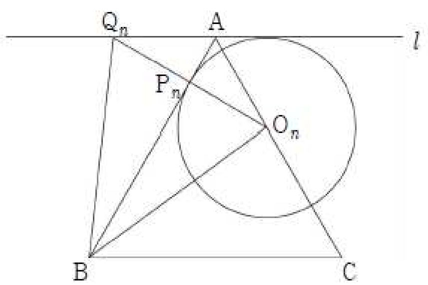
$$=\int_0^1 (f(x)-g(x))dx + \int_{-1}^0 (f(-x)-g(-x))dx$$

$$=2\int_0^1 (f(x)-g(x))dx = 54$$

정답: 54

Problem #29

29. 그림과 같이 한 변의 길이가 4인 정삼각형 ABC와 점 A를 지나고 직선 BC와 평행한 직선 l이 있다. 자연수 n에 대하여 중심 O_n이 변 AC 위에 있고 반지름의 길이가 $\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$인 원이 직선 AB와 직선 l에 모두 접한다. 이 원과 직선 AB가 접하는 점을 P_n, 직선 $\mathrm{O}_n\mathrm{P}_n$과 직선 l이 만나는 점을 Q_n이라 하자. 삼각형 $\mathrm{BO}_n\mathrm{Q}_n$의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} 2^n S_n = k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



Solution //

$\angle AP_nO_n = 90^\circ$ 이고, $\angle O_nAP_n = 60^\circ$,

$\overline{O_nP_n} = \sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로

$\overline{AP_n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{O_nP_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow \overline{BP_n} = \overline{AB} - \overline{AP_n} = 4 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

삼각형 AP_nO_n과 AP_nQ_n은 합동이므로

($\because\ \angle P_nAQ_n = \angle P_nAO_n = 60^\circ$, $\overline{AP_n}$은 공통, $\angle AP_nO_n = 90^\circ$)

$\overline{O_nQ_n} = 2\overline{O_nP_n} = 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore\ \triangle BO_nQ_n = \frac{1}{2}\times 2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\times\left(4-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$

$= 4\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sqrt{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2^n S_n = 8\sqrt{3},\quad k^2 = 192$

정답: 192

Problem #30

30. 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^4}=1$
(나) $f(1)=f'(1)=1$

$-1 \le n \le 4$인 정수 n에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x-n)+n \ (n \le x < n+1)$$

이라 하자. 함수 $g(x)$가 열린구간 $(-1,\ 5)$에서 미분가능할 때, $\int_0^4 g(x)dx = \frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

Solution //

$g'(x)=f'(x-n)\ (n \le x < n+1)$,

$g'(x)=f'(x-(n+1))\ (n+1 \le x < n+2)$이므로

$g(x)$가 미분 가능하려면

분할 구간의 양 끝점의 미분계수가 같아야 합니다.

$\therefore\ f'(0)=f'(1)=1$ ($\because$ (나)) $\cdots(i)$

$g(x)=f(x-n)+n\ (n \le x < n+1)$,

$g(x)=f(x-(n+1))+n+1\ (n+1 \le x < n+2)$에서

$g(x)$는 미분 가능하므로 연속입니다.

즉 분할 구간의 양 끝점에서 연속이어야 하므로

$f(1)+n=f(0)+n+1 \Rightarrow f(1)=f(0)+1$

$\therefore f(0)=0$ ($\because$ (나)) $\cdots(ii)$

(가)에서 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이고,

(ii)에서 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$로 둘 수 있습니다.

$f(1)=1$이므로 $a+b+c=0 \quad \cdots(1)$

$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$에서

$f'(0)=1$이므로 $c=1 \quad \cdots(2)$

$f'(1)=1$이므로 $3a+2b+c=-3 \quad \cdots(3)$

(1), (2), (3)을 연립하여 풀면

$a=-2,\ b=1,\ c=1 \Rightarrow f(x)=x^4-2x^3+x^2+x$

한편

$$\int_n^{n+1} g(x)dx$$

$$=\int_n^{n+1}(f(x-n)+n)dx=\int_0^1 f(x)+n$$ 이므로

$$\therefore \int_0^4 g(x)dx$$

$$=4\int_0^1 f(x)dx+0+1+2+3=\frac{122}{15},\quad p+q=137$$

정답: 137

※ NOTICE

1) 해당 모의고사의 문제에 대한 저작권은 인천특별시 교육청에 있습니다.

2) 본 해설은 필자 혼자서 다른 해설을 참고하지 않고 만들어낸 것이므로 매끄럽지 않은 부분이 있을 수도 있습니다... ㅠㅠ

3) 이 문서는 재가공하여 판매하는 등 **누가 봐도 부당하게 영리를 취할 목적으로 이용하지 않는 한** 누구나 자유롭게 열람, 배포, 이용할 수 있습니다. (개인적 용도가 아닌 교육 등 다른 목적으로 여러 사람에게 배포되는 경우 저작자만 명시해주시면 됩니다.)

4) 이왕 만든 거 많은 분들이 보고 도움을 받았으면 좋겠습니다. ^_^