1회수학 가형 정답

1	④	2	⑤	3	④	4	①	5	②
6	②	7	②	8	③	9	②	10	②
11	①	12	③	13	④	14	⑤	15	②
16	③	17	⑤	18	④	19	②	20	①
21	④	22	21	23	14	24	18	25	12
26	12	27	17	28	150	29	450	30	7

해 설

1. [출제의도] 로그 계산을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\log_4 2 + \log_4 8 = \log_4 16 = 2$

2. [출제의도] 함수의 극한값을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{x^2+x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{(x+1)(\sqrt{2x+1}+1)} = 1$

3. 출제의도] 삼각함수의 덧셈정리를 이용하여 값을 계산한다.

$\cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = \dfrac{8}{9}$

$0 < 2x < \dfrac{\pi}{2}$이므로 $\cos 2x > 0$

$\therefore\ \cos 2x = \sqrt{\dfrac{8}{9}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

4. [출제의도] 확률의 덧셈정리를 이용하여 조건부확률을 계산한다.

$\mathrm{P}(A\cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cap B)$이므로

$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A\cup B)$

$= \dfrac{9}{16} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{16}$

$\therefore\ \mathrm{P}(B|A) = \dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{9}{16}} = \dfrac{1}{9}$

5. [출제의도] 정규분포의 확률을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

물고기 한 마리의 무게를 확률변수 X라 하면

$\mathrm{P}(X \ge 830) = \mathrm{P}\left(Z \ge \dfrac{830-800}{50}\right) = \mathrm{P}(Z \ge 0.6)$

$= 0.5 - \mathrm{P}(0 \le Z \le 0.6) = 0.5 - 0.2257 = 0.2743$

6. [출제의도] 무한급수와 정적분의 관계 이해하기

$F'(x) = f(x)$ 이므로

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ 이다.

따라서 $\mathrm{A}(a,\ F(a))$, $\mathrm{B}(a+c,\ F(a+c))$를 지나는 직선의 기울기는

$$\frac{F(a+c)-F(a)}{(a+c)-a} = \frac{1}{c}\{F(a+c)-F(a)\}$$
$$= \frac{1}{c}\int_a^{a+c} f(x)dx$$
$$= \frac{1}{c}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{c}{n}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{ck}{n}\right)\frac{1}{n}$$

7. [출제의도] 정적분의 성질을 이해하고 함숫값을 구한다.

$\int_0^0 f(t)dt = 0$이므로 주어진 식에 $x=0$을 대입하면

$\cos 0 + a\times 0^2 + a = 0$

$\therefore\ a = -1$

$\int_0^x f(t)\,dt = \cos 2x - x^2 - 1$의 양변을 x에 대하여 미분하면 $f(x) = -2\sin 2x - 2x$

$\therefore\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -2\sin\pi - \pi = -\pi$

8.[출제의도] 중복조합을 이해하고 경우의 수를 구한다.

세 개의 주머니 A, B, C에 넣은 공의 수를 각각 a, b, c라 하면 $a+b+c=5$이므로 가능한 모든 경우의 수는 ${}_3\mathrm{H}_5 = {}_{3+5-1}\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = 21$

(ⅰ) 2개의 주머니에 다섯 개의 공을 1개와 4개로 나누어 넣는 경우의 수 ${}_3\mathrm{P}_2 = 6$

(ⅱ) 한 개의 주머니에 다섯 개의 공을 모두 넣는 경 우의 수 ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$

따라서 구하는 경우의 수는 $21-(6+3)=12$이다.

[다른 풀이]

한 주머니에 네 개 이상의 공을 넣을 수 없으므로 세 개의 주머니에 넣는 공의 수에 따라 경우를 나누면

(ⅰ) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 다른 주머니에 공을 두 개 넣는 경우는 3, 2, 0을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $3! = 6$

(ⅱ) 한 개의 주머니에 공을 세 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 한 개씩 넣는 경우는 3, 1, 1을 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!} = 3$

(ⅲ) 한 개의 주머니에 공을 한 개 넣고 나머지 두 개의 주머니에 공을 두 개씩 넣는 경우는 1, 2, 2를 일렬로 나열하는 경우와 같으므로 $\dfrac{3!}{2!} = 3$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 경우의 수는 $6+3+3=12$이다.

9. [출제의도] 좌표로 표시된 벡터의 크기의 최솟값을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

삼각형 ABC의 무게중심 G는 $\mathrm{G}(4,5,6)$이다.

$\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{3}\right| = |\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$이다.

이때, $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 값이 최소이려면 점 G에서 xy평면에 내린 수선의 발이 점 P일 때이므로 $\mathrm{P}(4,5,0)$일 때 $|\overrightarrow{\mathrm{PG}}|$의 최솟값은 6이다.

10.[출제의도] 공간좌표를 이용하여 문제를 해결할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{A}(1,3,2)$, $\mathrm{B}(1,-3,-2)$, $\mathrm{C}(1,3,-2)$이므로 삼각형 ABC는 $\angle\mathrm{C} = 90^\circ$인 직각삼각형이다.

따라서 구하는 원의 반지름의 길이는

$\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{13}$

11. 정답 ① 이차곡선

$\dfrac{x^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - \dfrac{y^2}{40} = 1$이므로

ⅰ. 주축길이는 3

ⅱ. 초점F의 좌표 $\left(\dfrac{13}{2}, 0\right)$

$\left(\because \sqrt{\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 + 40} = \sqrt{\dfrac{169}{4}} = \dfrac{13}{2}\right)$

ⅲ 원의 반지름 5 $\left(\because \dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2} = 5\right)$

$\overline{FQ} = 5\ (\because r = 5)$

$\overline{F'Q} = 5+3 = 8$ (∵쌍곡선의 정의)

$\triangle PQF$은 직각삼각형 ($\because \overleftrightarrow{PQ}$는 접선)

$\therefore \overline{PF} = \sqrt{12^2+5^2} = 13$

$\therefore \overline{PF'} = 13-3 = 10$

12.$\lim\limits_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)$에서 $s = \dfrac{t-1}{t+1}$로 놓으면

$s = 1 + \dfrac{-2}{t+1}$

이므로 $t\to\infty$일 때, $s\to 1-0$

$\therefore \lim\limits_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right) = \lim\limits_{s\to 1-0} f(s) = 2$ ----㉠

또, $\lim\limits_{t\to-\infty} f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)$에서 $s = \dfrac{4t-1}{t+1}$로 놓으면

$s = 4 + \dfrac{-5}{t+1}$

이므로 $t\to-\infty$일 때, $s\to 4+0$

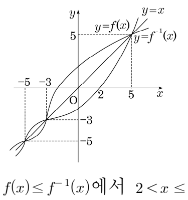
$\therefore \lim\limits_{t\to-\infty} f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right) = \lim\limits_{s\to 4+0} f(s) = 3$ ---㉡

따라서, ㉠과 ㉡에서

$\lim\limits_{t\to\infty} f\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right) + \lim\limits_{t\to-\infty} f\left(\dfrac{4t-1}{t+1}\right)$

$= 2+3 = 5$

13. [출제의도] 분수부등식의 해를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.



(ⅰ) $f(x) > 0$, $f(x) \le f^{-1}(x)$에서 $2 < x \le 5$

(ⅱ) $f(x) < 0$, $f(x) \ge f^{-1}(x)$에서 $-5 \le x \le -3$

따라서 구하는 정수 x의 개수는 6이다.

14. [출제의도] 정적분의 뜻을 알고 추론하기

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx = \left[e^x - x\right]_0^1 = e-2$ (참)

ㄴ. $g(x) = f(x) - x$라 하자.

$x > 0$에서 $g'(x) = e^x - 1 > 0$이므로

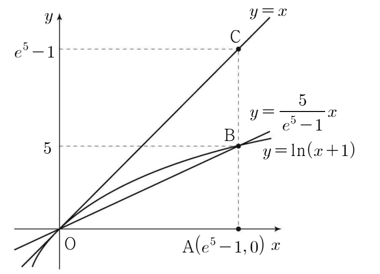
함수 $g(x)$는 구간 $(0,\infty)$에서 증가한다.

따라서 $g(0) = 0$이므로 $x > 0$에서 $f(x) > x$이다. (참)

ㄷ. $f^{-1}(x) = \ln(x+1)$이므로

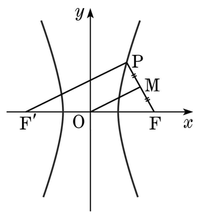
$\triangle\mathrm{OAB} = \dfrac{5(e^5-1)}{2} < \displaystyle\int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx$,

$\displaystyle\int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx < \dfrac{(e^5-1)^2}{2} = \triangle\mathrm{OAC}$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ

15. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해하고 선분의 길이를 구한다.



쌍곡선의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,\ \ b>0)$이라 하면 점근선의 방정식이 $y=2x,\ y=-2x$이므로

$\dfrac{b}{a}=2,\ b=2a$

쌍곡선의 또 다른 초점을 점 F′이라 하면 삼각형 PF′F에서 점 O는 변 F′F의 중점이고 점 M은 변 PF의 중점이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=2\overline{\mathrm{OM}}=12$

$\overline{\mathrm{PF}}=2\overline{\mathrm{MF}}=6$

$|\overline{\mathrm{PF'}}-\overline{\mathrm{PF}}|=12-6=6=2a$

$\therefore\ a=3,\ b=2a=6$

$\therefore\ \overline{\mathrm{OF}}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+36}=3\sqrt{5}$

16. [출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AB}}=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$

에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$가 성립하므로 점 P는 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 평면과 구의 교선인 원 위에 있다.

이때, 이 원의 반지름의 길이는 구의 중심과 직선 AB 사이의 거리와 같다.

한편, 원점 O에서 직선 $x+1=2-y=z$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(t-1,\,2-t,\,t)$라 하면

$(t-1,\,2-t,\,t)\bullet(1,\,-1,\,1)=0$에서 $t=1$이다.

이때, $\mathrm{H}(0,1,1)$이므로 $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{2}$이다.

따라서 구하는 도형의 길이는 $2\sqrt{2}\pi$이다.

17. [출제의도] 함수의 연속성을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\lim\limits_{x\to0}(f\circ g)(x)=1,\ (f\circ g)(0)=0\ \therefore$ 불연속

ㄴ. $\lim\limits_{x\to0}(f\circ h)(x)=(f\circ h)(0)=1\ \therefore$ 연속

ㄷ. $\lim\limits_{x\to0}(h\circ f)(x)=(h\circ f)(0)=\dfrac{1}{4}\ \therefore$ 연속

18. [출제의도] 미분과 적분을 이용하여 속도, 가속도, 운동거리를 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

ㄱ. $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)=\left(\dfrac{e^t-e^{-t}}{2},\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\right)$

$t=1$일 때 $\vec{v}\cdot\vec{p}=\dfrac{e^2-e^{-2}}{2}\neq0$ (거짓)

ㄴ. $\vec{a}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=\left(\dfrac{e^t+e^{-t}}{2},\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}\right)=\vec{p}$ (참)

ㄷ. $\displaystyle\int_0^1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$

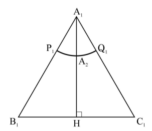
$=\displaystyle\int_0^1\sqrt{\frac{e^{2t}+e^{-2t}}{2}}\,dt\geqq\int_0^1 1dt=1$ (참)

19. [출제의도] 삼각함수의 극한을 활용하여 수학내적문제 해결하기

$\overline{\mathrm{AP}}=2\cos\dfrac{\theta}{2}\quad\therefore S(\theta)=4\cos^2\dfrac{\theta}{2}\times\sin\dfrac{\theta}{2}$

따라서 $\lim\limits_{\theta\to0}\dfrac{S(\theta)}{\tan\theta}=2$

20. [출제의도] 도형에서 무한등비급수의 합을 활용할 수 있는지 묻는 문제이다.



$\overline{\mathrm{A_1P_1}}=\overline{\mathrm{A_1A_2}}=2$이므로 $l_1=\dfrac{2}{3}\pi$이다.

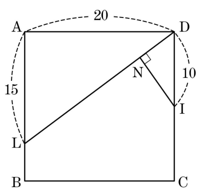
한편, 꼭짓점 $\mathrm{A_1}$에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$에 내린 수선의 발을 H로 놓으면 $\overline{\mathrm{A_1H}}=3\sqrt{3}$

$\overline{\mathrm{A_2H}}=\overline{\mathrm{A_1H}}-\overline{\mathrm{A_1A_2}}=3\sqrt{3}-2$

그러므로 수열 $\{l_n\}$은 첫째항이 $\dfrac{2}{3}\pi$이고 공비가 $1-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$인 등비수열을 이룬다.

$\therefore\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}l_n=\frac{\frac{2}{3}\pi}{1-\left(1-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)}=\sqrt{3}\,\pi$

21. [출제의도] 삼수선의 정리를 이해하고 선분의 길이를 구한다.



점 M에서 모서리 CD에 내린 수선의 발을 I라 하면 삼수선의 정리에 의해서 $\overline{\mathrm{LD}}\perp\overline{\mathrm{NI}}$이다.

$\overline{\mathrm{AL}}=\dfrac{3}{4}\overline{\mathrm{AB}}=15,\ \ \overline{\mathrm{DI}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{CD}}=10,$

$\overline{\mathrm{LD}}=\sqrt{20^2+15^2}=25$

이고, 두 삼각형 NDI, ALD는 서로 닮은 도형이므로

$\overline{\mathrm{NI}}:\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{DI}}:\overline{\mathrm{LD}}$

$\overline{\mathrm{NI}}=\dfrac{\overline{\mathrm{AD}}\cdot\overline{\mathrm{DI}}}{\overline{\mathrm{LD}}}=\dfrac{20\times10}{25}=8$

삼각형 MIN은 직각삼각형이므로

$\overline{\mathrm{MN}}=\sqrt{20^2+8^2}=4\sqrt{29}$

22. [출제의도] 이항분포를 이해하고 확률변수의 평균을 구한다.

확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(n,\ \dfrac{1}{7}\right)$을 따르므로

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{n}{7}=3$

$\therefore\ n=21$

23. [출제의도] 미분계수의 값을 계산한다.

$f'(x)=14xe^{x^2-1}$이므로 $f'(1)=14$

24. [출제의도] 쌍곡선의 정의를 이해할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\mathrm{F'}(-3,0),\ \mathrm{F}(3,0)$이고 주축의 길이는 4이므로

$\overline{\mathrm{PF'}}=a,\ \overline{\mathrm{PF}}=b$라 하면 $a-b=4$

$\angle\mathrm{F'PA}=\angle\mathrm{FPA}$이므로 $a:b=2:1$

$\therefore\ a=8,\ b=4$

따라서 삼각형 PFF′의 둘레의 길이는 $8+4+6=18$이다.

25. [출제의도] 벡터의 내적을 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\overrightarrow{\mathrm{ED}}$이므로 $|\overrightarrow{\mathrm{ED}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2=4$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AE}}+|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2=4$ 이므로

$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{AE}}=12$

26. [출제의도] 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\displaystyle\int_0^a 2e^{-x}dx=\left[-2e^{-x}\right]_0^a=1$에서 $a=\ln2$이다.

$\mathrm{E}(X)=\displaystyle\int_0^{\ln2}2xe^{-x}dx=\left[-2xe^{-x}\right]_0^{\ln2}+\int_0^{\ln2}2e^{-x}dx$

$=1-\ln2$

$\therefore\ 10p+q=12$

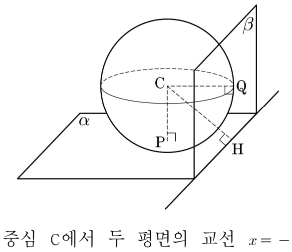
27. [출제의도] 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

$\mathrm{A}(1,\ 0)$이고 $S_1=S_2$이므로

$\displaystyle\int_0^1\{-(x+1)^3+8-k\}dx=0$

$\therefore\ 4k=4\times\dfrac{17}{4}=17$

28. [출제의도] 공간벡터의 성질을 이용하여 문제를 해결한다.



구의 중심 C에서 두 평면의 교선 $x=-y=z$에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\mathrm{H}(t,\ -t,\ t)$이고 $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$는 교선의 방향벡터 $\vec{u}=(1,\,-1,\,1)$과 수직이다. 따라서

$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\bullet\vec{u}=(t-1,\ -t-2,\ t-1)\bullet(1,\ -1,\ 1)$

$=(t-1)-(-t-2)+(t-1)$

$=3t=0$

$t=0$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(-1,\ -2,\ -1)$

$\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

직각삼각형 CQH에서 $\cos(\angle\mathrm{QCH})=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \angle\mathrm{QCH}=\dfrac{\pi}{4}$

$\angle PCH = \angle QCH = \frac{\pi}{4}$이므로 $\angle QCP = \frac{\pi}{2}$가 되어 삼각형 CPQ는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$인 직각이등변삼각형이다.

$S = \frac{1}{2} \times (\sqrt{3})^2 = \frac{3}{2}$

$\therefore$ $100S = 150$

29. 정답 450 **무한등비급수+상용로그**

$\log a_n$과 $\log a_{n+1}$의 가수가 같으므로

$\log a_n - \log a_{n+1} =$ 정수

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 10^{\text{정수}}$ 이고, $1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < 100$이므로 정수는 1이다.

$\therefore a_{n+1} = \left(\frac{1}{10}\right)^1 a_n$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-\frac{1}{10}} = 500 \ \therefore a_1 = 450$

30. [출제의도] 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는지 묻는 문제이다.

선분 AN의 중점을 P라 하면 두 직선 CN, MP가 서로 평행하므로 두 직선 BM, CN이 이루는 각의 크기는 두 직선 BM, MP가 이루는 각의 크기와 같다.

이때, $\overline{AB} = 4$라 하면 $\overline{BM} = 2\sqrt{3}$, $\overline{MP} = \sqrt{3}$이고,

직각삼각형 BNP에서 $\overline{BP} = \sqrt{13}$이다.

따라서 삼각형 BMP에서 코사인법칙에 의해

$\cos\theta = \left| \frac{\overline{BM}^2 + \overline{MP}^2 - \overline{BP}^2}{2\overline{BM} \cdot \overline{MP}} \right| = \frac{1}{6}$

$\therefore$ $p+q = 6+1 = 7$