9 모 분 석 서

설문철의 9평박스

Team SEOL:NAME

Representatively Analysed by

K.M. Lee

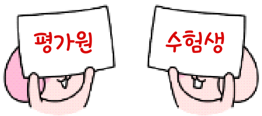
S.W. Kim

LIVE 설문철 9평 블랙박스 분석

돌아온 9평 분석서... 자, 평가원과 당신의 과실 비율은 어떻게 될 것인가...

칼럼 작성자
김상우 서울대 수학교육과 23
이경민 서울대 수학교육과 23

통합 수능 사상 최저(低)난도 시험지?



2 : 8

인터뷰를 먼저 듣고 오겠습니다.

평가원 이번 모의고사는 공교육의 정상화를 위해 평이하게 출제하였으며, 열심히 공부한 수험생이라면 좋은 성적을 받을 수 있을 것입니다.
수험생 아니 공교육 정상화는 둘째 치고 이렇게 쉽게 내면 등급컷은 어찌하란 말입니까?
평가원 1컷.. 88은 너무 적소. 93쯤으로 합시다.
수험생 .....

확인해보겠습니다. 과연 '이번 시험지가 과연 1컷 92 이상의 시험지인가?'

공통 15번

15. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\int_{1}^{x} tf(t)dt + \int_{-1}^{x} tg(t)dt = 3x^4 + 8x^3 - 3x^2$
>
> (나) $f(x) = xg'(x)$

$\int_{0}^{3} g(x)dx$의 값은? [4점]

① 72 ② 76 ③ 80 ④ 84 ⑤ 88

공통 22번

22. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $a_2 \times a_3 < 0$
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여
> $\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0$이다.

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

어느 때이든, '겉모습'만 대강 훑고서는 해당 시험지의 난도를 판단할 수 없었습니다. 그러나 이번 시험지는 대강 보더라도 기존의 '초고난도 문항'으로 불리었던 15번 문항과 22번 문항의 위상이 **대폭** 하강하였음을 알 수 있었습니다. 사실, 이는 그렇게 신선한 시그널은 아니었습니다.
당장, 2409, 2411(공통)에서도 역시 꽤나 쉽게 나온 공통문항이라는 큰 특징을 띄었습니다. 그러나, 후술하겠지만 2411(수능)의 경우 선택 '미적분'에서 꽤 힘을 실으며 등급컷을 조정하였지만 이번 2509에서는 **그러한 힘조차 없었다**는 것이 큰 특징입니다.

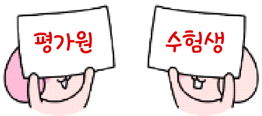
답이 나왔습니다.

평가원은 이번 시험에서, 더더욱 확실히 **'더이상 번호와 난도는 비례하지 않음'**을 보였습니다. 당장 작년 수능에서도 뒷 번호라고 해서 더 어려운 문항이 있는 것이 아니었으며, 여러 입시 사이트의 정답률 분포가 이를 말해주고 있습니다.
또, 오히려 **'비주얼은 다소 무섭지만 차근차근 풀어가면 어렵지 않은'** 문항들을 넣어두기도 했습니다. 공통 13번, 공통 20번, 확통 29번, 미적 24번, 미적 28번, 기하 29번은 모두 '껍데기가 무서운' 문항들이었습니다. 긴 조건, 많은 설명은 학생들을 지레 겁먹게 하지만, **'오히려 많은 조건들을 얻어갈 수 있는'** 중요한 힌트가 되기도 하니, '전화위복'의 자세를 잃지 말아야겠습니다.

잘못한 거 알겠는데 그럼 어떻게 대비하죠?

감히 말씀드리면, '급격한 사회적 분위기의 변화'가 없는 이상, **이번 수능 역시 공통의 난도는 그다지 높지 않은 수준이 될 것**으로 예상됩니다. 대신, '포장이 거대하여' 조건 해석을 차근차근 해나가야 하는 문항들이 더러 있을 것 같습니다. 앞부분 문항이 어렵다고 해서 **뒷부분 문항이 어려울 것이라는 생각은 거두고**, 내가 이 발문에서 뽑아낼 수 있는 **모든 조건을 하나하나씩 차근차근** 뽑아나가는 연습을 해봅시다.

수능 연계교재와의 연계와 기출의 흔적?



4 : 6

인터뷰를 먼저 듣고 오겠습니다.

평가원 사교육의 영향력을 줄이기 위해 수능 연계 교재의 체감 연계를 높여봤습니다.
수험생 수험생 입장에서 이 문항이 연계된건지, 안된건지 어떻게 아나요?
평가원 당신이 수특/수완을 한번이라도 들여다봤다면...

올해 들어, 정확힌 24학년도 수능 들어서 EBS 수능 연계 교재에 있는 문항의 체감 연계가 굉장히 많이 되고 있습니다. 그것도, 앞의 쉬운 문항이 아닌 **'맨 뒷부분' 문항**이 말이지요.

공통 22번

22. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$ (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)\left(a_{n+1} + k a_n\right) = 0$이다.

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

위 문항의 '(나)' 조건은 2025학년도 수능완성 [수학I] 34p. 30번의 조건 형태와 매우 유사합니다. 수능완성 문항을 한번 정도 들여다보았다면 '어디서 많이 봤다'는 안정감이 들어 잘 해결할 수 있었을 것입니다. 별 것 아닌 것 같아도 **'어디서 본 것 같은데?'**라는 생각이 꽤 큰 힘이 될 경우가 많습니다. 하지만, 이 생각에 너무 의존하여 풀이를 '기억해내려고'하는 것은 **반드시 독이 되니**, 지양해야합니다.
또한, 공통 21번 문항의 경우 '우리가 왜 기출문제를 풀어봐야하는가?'를 보여주는 문항이었습니다.

공통 21번

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k - 8 \le \frac{f(k+2) - f(k)}{2} \le 4k^2 + 14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

1509나21 기출 문항

21. 최고차항의 계수가 1인 다항함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [4점]

(가) $f(0) = -3$ (나) 모든 양의 실수 x에 대하여 $6x - 6 \le f(x) \le 2x^3 - 2$이다.

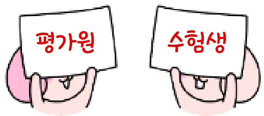
① 36 ② 38 ③ 40 ④ 42 ⑤ 44

'양 옆에 있는 식이 같은 경우를 잘 따져봐야한다'는 Key Point만 사용하면 바로 문항을 해결할 수 있다는 점에서, 사실상 위 기출과 이번 21번의 문항이 **'같은 문항이나 다름없다'**는 것을 알 수 있습니다. EBS 기준, 이번 21번 문항의 정답률을 8.2%로 예측하고 있는데, 그만큼 기출 문항에 대한 연습과 분석이 얼마나 절실히 필요한지를 나타내어주고 있다는 생각이 듭니다.

아직 연계 교재도 못풀고, 기출도 다 못봤어요 ㅠㅠ

원론적인 이야기일 수도 있겠지만, **'늦었다고 생각 할 때가 실제로 정말 늦었을 때입니다.'** 그러니 더 늦어버리기 전에 당장 시작해야합니다. 여러분 곁의 누군가는 **'어차피 지금 해도 안되니 N수 준비나 해라'**라 이야기할지도 모릅니다. 이 말에 반박을 하진 않겠습니다.
지금까지 수능 기출 문항 풀이는 고사하고 수능 연계 교재 공부 조차 마무리되지 못하였다는 것은
첫째로 아직 수능 수학 개념이 머릿속에 자리잡지 못하였거나,
둘째로 양심에 손을 얹고 지금까지 성실하지 못하였거나
이기 때문입니다. 그러나, 사범대생으로서 도저히 **'지금 해봤자 안된다'**는 말은 할 수가 없습니다. 그저, 오늘을 살아가십시오. 오늘 내게 주어진 일을 반드시 **'살려내고'** 주무십시오. 그들을 죽은 채로 두지 않고, **오늘을 살리는 것**입니다.

계산, 사교육, 그리고 선택 과목의 이해(利害)



5 : 5

인터뷰를 먼저 듣고 오겠습니다.

평가원 사교육의 영향을 최소화하기 위해 정말 노력했습니다.
수험생 아하, 계산하는 걸 늘렸다는 거죠?
평가원 네?

이번 모의고사는 다른 모의고사 회차에 비해, '계산 센스에 따른 계산량의 변화'가 매우 심하게 드러나는 모의고사였습니다.

9. 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여

$$5\int_0^1 f(x)\,dx-\int_0^1 (5x+f(x))\,dx$$

의 값은? [4점]

14. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

15. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\int_1^x tf(t)\,dt+\int_{-1}^x tg(t)\,dt=3x^4+8x^3-3x^2$
(나) $f(x)=xg'(x)$

$\int_0^3 g(x)\,dx$의 값은? [4점]

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8\le\frac{f(k+2)-f(k)}{2}\le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

네, 옆에 올려둔 문항들은 어떤 어려운 아이디어가 필요하다기보다는, '꺾이지 않고 계산'하는 것이 매우 중요한 문항들이었습니다. 달리 말해, **'그냥 계산으로 밀고 가면 쉽게 풀리는'** 문항들이었습니다.

시험이 끝나면 각종 커뮤니티에서 특정 문항을 굉장히 창의적으로 풀이해서 올리는 경우가 있습니다. 이 풀이들이 잘못된 건 아니지만, 우리에게 주어진 시간은 **오직 100분이 전부입니다.** 우리들이 실제 시험에서 문제를 만났을 때, 다음 선택지가 있다 생각해봅시다.

① 조금 돌아가는 풀이지만 계산으로 밀고 가면 무조건 풀린다.
② 뭔가 깔끔하게 풀릴 것 같은데 확실하지 않아서 고민해봐야 한다.

결국 실전에서 대부분의 학생들은 자신의 점수를 '보호'하는 방어적인 태도를 취하게 됩니다. 다시 말해, 학생들은 풀릴지 여부조차 모르는 ②의 방법보다는 ①을 선호합니다.

원래의 내용으로 돌아가봅시다.
우리가 커뮤니티에서 아무리 좋은 풀이, 스킬을 많이 봐도 그것을 긴장감 넘치는 실전에서 적용할 자신이 없다면 그 풀이는 자신의 것이 될 수 없습니다.
즉, **너무 화려한 풀이에만 현혹되지 말고** 자신이 할 수 있는 풀이법 내에서 최대한 활성화시킬 수 있어야 합니다.
자신이 알고 있는 풀이법 내에서 도저히 안 풀리면,
그때 비로소 새로운 풀이법을 학습하는 것이죠.

저조차도 과거에 그랬지만, 가끔씩 '계산으로 밀고가는 풀이'를 '죄악시'하는 친구들을 볼 수 있습니다. 그런데, **'계산으로 밀고 나가는 것 외에 길이 안보인다고, 미련하게 포기할겁니까?'**
물론 계산량을 쉽게 줄일 수 있는 방법이 있다면 줄일 수 있도록 연습하고, 또 연습해야 합니다.
하지만 그것은 **'시험장 밖'**에서 할 일이지, **'시험장 안'**에서 할 일이 아닙니다.

9번에서의 '적분 합치기', 14번에서의 '간단한 지수방정식', 15번에서의 '다항식의 차수와 계수 추정', 21번에서의 '기함수(원점대칭함수) 식 계산' 등, 함수를 일일이 'ax^3+bx^2+cx+d'와 같이 두지 않아도 풀 수 있다는, 지수끼리의 연산에서 밑이 다르지 않으면 풀 수 있다는, **'어느정도 문제 풀다보면 이해할 수 있는'** 것들만 알아가서 계산으로 밀어붙이든, 좀 더 식을 해석하든 하면 되지, 그 이상의 너무 과도한 것까지 숙지하고 가려고 할 필요 없습니다. 요즘 들어 **'계산으로 정면돌파'**와 같은 문항이 **유의미하게 늘어나고 있으니**, 자신감을 잃지 맙시다.

지금부터는 선택과목의 유불리에 대해 살펴보겠습니다.

확통 30번

30. 흰 공 4개와 검은 공 4개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
> (나) 학생 B가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

미적 30번

30. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=(k-|x|)e^{-x}$$

이라 하자. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $F(x)$에 대하여 $F(0)$의 최솟값을 $g(k)$라 하자.

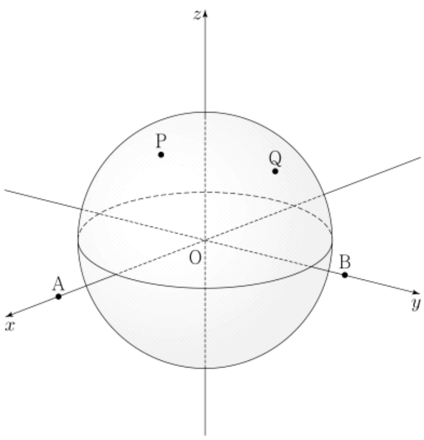
> 모든 실수 x에 대하여 $F'(x)=f(x)$이고 $F(x)\geq f(x)$이다.

$g\left(\frac{1}{4}\right)+g\left(\frac{3}{2}\right)=pe+q$일 때, $100(p+q)$의 값을 구하시오. (단, $\lim_{x\to\infty} xe^{-x}=0$이고, p와 q는 유리수이다.) [4점]

기하 28번

28. 좌표공간에 두 점 $\mathrm{A}(a, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 10\sqrt{2}, 0)$과 구 $S: x^2+y^2+z^2=100$이 있다. $\angle\mathrm{APO}=\frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 P가 나타내는 도형을 C_1, $\angle\mathrm{BQO}=\frac{\pi}{2}$인 구 S 위의 모든 점 Q가 나타내는 도형을 C_2라 하자. C_1과 C_2가 서로 다른 두 점 N_1, N_2에서 만나고 $\cos(\angle\mathrm{N}_1\mathrm{ON}_2)=\frac{3}{5}$일 때, a의 값은? (단, $a>10\sqrt{2}$이고, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{10}{3}\sqrt{30}$ ② $\frac{15}{4}\sqrt{30}$ ③ $\frac{25}{6}\sqrt{30}$
④ $\frac{55}{12}\sqrt{30}$ ⑤ $5\sqrt{30}$



수험생 입장에서 가장 어려웠을 것으로 예상되는 문항들을 가져와 보았습니다. 평년에 비해 매우 쉽게 출제된 공통 문항과는 달리, 선택과목은 그래도 **나름(?) 난도가 있게** 출제되었습니다. 이는 2024학년도 수능에서 공통은 쉽게, [미적분]이 어렵게 출제된 것과는 조금 양상이 다른 것이, 이번에는 선택 과목이 '그다지 어렵지는 않았다'는 것입니다. 또, 앞에서의 설명에 이어, **'보기에만 괴팍하고 막상 조건을 해석하다보면 쉽게 풀리는'** 문항들이 (특히 [미적분]에) 많았습니다.

이번 수능 난이도는?

이러한 측면에서, 계속해서 평가원이 **'공통 문항은 쉽게, 선택 문항은 공통 문항보다는 어렵게'** 출제하려는 경향을 내보이고 있습니다. 물론 이러다 갑자기 수능에서 공통 문항을 매우 어렵게 출제할 가능성 역시 없는 것은 아니지만, **주목해보아야 할** 흐름인 것 같습니다. 수능에서의 절대적인 난도는 아마도 이번 9월 모의고사보다는 오를 것 같습니다. 그 오름의 정도는, 아마도 선택 과목보다는 공통 과목의 문항이 더 크지 않을까, 하지만 절대적인 난도는 공통 과목보다 선택 과목이 조금 더 높지 않을까 하고 조심스레 생각해봅니다.

논란이 있을 만한 문항 Comment

009

함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여

$$5\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1\{5x+f(x)\}dx$$

의 값은? [4점]

Comment. 적분하는 함수를 하나로 합치는 것 이외에는 그다지 계산함에 있어 유리함이 없을 것으로 보인다. 또한, 단순 계산이라 4점 문항으로 나올만 한 것이 아닌 것으로 여겨진다.

014

자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> **(가)** 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
>
> **(나)** $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

Comment. $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}$의 길이를 위와 같이 줌으로써 '기울기를 반드시 이용해 풀으라'는 간곡한 목소리가 들린다. 이 부분은 좋으나, 굳이 지수방정식 풀이를 세번이나? 혹은 세번만?

015

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$는 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다. [4점]

> **(가)** $\int_1^x tf(t)dt+\int_{-1}^x tg(t)dt=3x^4+8x^3-3x^2$
>
> **(나)** $f(x)=xg'(x)$

Comment. 문항의 아이디어 자체는 기출 문항에도 많이 나왔던 것이고, 퀄리티 자체도 나쁘지 않다. 놀라운 것은 이정도 난도의 문항이 '15번에' 출제되었다는 것.

021

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8\le\frac{f(k+2)-f(k)}{2}\le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

Comment. '삼차함수 $f(x)$가 하나로 결정되지 않는다.' 물론, 상수의 차이이기 때문에 $f'(3)$만 구하면 되는 해당 문항에서는 큰 의미가 없지만, 그럼에도 불구하고, 함수의 특정한 값을 구하라고 했는데 주어진 함수가 정해지지 않는 경우는 이례적이다.

미적

024

양의 실수 전체의 집합에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 양수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$에서의 접선의 기울기는 $\frac{1}{t}+4e^{2t}$이다. $f(1)=2e^2+1$일 때, $f(e)$의 값은? [3점]

Comment. 2024학년도 수능 25번에 이어, 또 겉보기 등급이 괴랄한 3점 초반 문항이 나왔다. 물론 당시 25번 문항은 실제로 난도가 다소 높은 편이었지만, 이 문항은 단순한 24번 수준의 문항이다.

주요 문항별 분석과 출제방향성

010

$\angle A > \frac{\pi}{2}$ 인 삼각형 ABC 의 꼭짓점 A 에서 선분 BC 에 내린 수선의 발을 H 라 하자.

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1, \ \overline{AH} = 2$$

이고, 삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 50π 일 때, 선분 BH 의 길이는? [4점]

[주목할만한 점] 사인값에 꼭 미지수가 없으리라는 법은 없다. 계산만 잘 되면 Good.

[실전 풀이]

① $\overline{AB} = \sqrt{2}k$, $\overline{AC} = k$ 로 설정 $\Rightarrow \sin(\angle ACH) = \frac{2}{k}$

② $\triangle ABC$ 의 외접원의 넓이가 $50\pi \Rightarrow$ 반지름 $R = 5\sqrt{2}$

③ $\triangle ABC$ 사인법칙 활용 $\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle ACH)} = \frac{\sqrt{2}k}{\frac{2}{k}} = 2R = 10\sqrt{2} \Rightarrow k = 2\sqrt{5}$

④ $\overline{AB} = \sqrt{2}k = \sqrt{40} \Rightarrow$ 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{BH} = \sqrt{(\sqrt{40})^2 - 2^2} = 6$

SEOL's TIP : 외접원의 넓이를 줬다? 사인법칙을 어떻게든 쓸 방법을 찾으라는 것이다. 심지어 그 상황에서 수선의 발을 그었다? 빗변과 다른 변을 이용해 삼각비를 구하라는 것이다. 이유는 간단하다. 그 값들을 '쉽게' 찾을 수 있으니까. 이정도의 알고리즘은 수능 전에 알아두는 것이 좋다.

012

수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은? [4점]

[주목할만한 점] a_n이 등차수열인 데다가, b_n을 정의할 때 'a_n의 앞에 교대로 $+$와 $-$가 붙는다.' 등차수열의 이웃한 두 항의 차는 공차임을 기억하고, b_n의 설계에도 아마 a_n 공차가 관련되어있지 않을까 의심해보자.

[실전 풀이]

① $b_2 = a_1 - a_2 = -2 \Rightarrow$ 등차수열 $\{a_n\}$의 공차 $d = 2$

② $b_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$ 에서

(i) n이 짝수 : $b_n = a_1 - a_2 + \cdots + a_{n-1} - a_n$ (ii) n이 홀수 : $b_n = a_1 - a_2 + \cdots + a_{n-2} - a_{n-1} + a_n$

이때, $a_1 - a_2 = a_3 - a_4 = \cdots = -d$이므로

(i) n이 짝수 $\Rightarrow b_n = -d \times \dfrac{n}{2}$ (ii) n이 홀수 : $b_n = -d \times \dfrac{n-1}{2} + a_n$

③ $b_3 + b_7 = 0 \Rightarrow -4d + a_3 + a_7 = a_3 + (a_7 - 4d) = 2a_3 = 0 \Rightarrow a_n = 2n - 6$

④ $\displaystyle\sum_{n=1}^{9} b_n = \sum_{n=1}^{5} b_{2n-1} + \sum_{n=1}^{4} b_{2n}$

$= (-10d + a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) + (-10d) = 5a_5 - 20d = 20 - 40 = -20$ ($\because$ $a_5 = 4$)

SEOL's TIP : **시그마가 좀 복잡한 식과 함께 나와있으면 무작정 계산을 해내려는 마음보다는, 제1항부터 제n항까지를 쭉 나열해보며 '어떤 규칙성이 있는지'를 판단해보는 것 또한 좋은 방법이다.**
또, n이 홀수일 때 $(a_1 - a_2) + \cdots + (a_{n-2} - a_{n-1})$에서 괄호 묶음의 개수를 세는 게 헷갈리다면, 그냥 '전체 개수를 2로 나눈 것'이 괄호의 개수이므로 간단히 생각하자. 그냥 $\dfrac{n-1}{2}$이다. 전체 개수가 $n-1$이니..

013

함수

$$f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+6 & (x<0) \\ -x^2+2x+6 & (x \geq 0) \end{cases}$$

의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점을 P, Q라 하고, 상수 $k(k>4)$에 대하여 직선 $x=k$가 x축과 만나는 점을 R이라 하자. 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 선분 QR로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $A=2B$일 때, k의 값은? (단, 점 P의 x좌표는 음수이다.) [4점]

[주목할만한 점] 가려져있어 못 찾을 수 있지만, 차분히 생각하면 이 문항은 231110과 '한 치의 오차 없이 똑같은' 문항이다.
즉, '(정적분)$=0$'이도록 하는 구간만 찾으면 끝!

[실전 풀이]

① 함수 $f(x)$가 $x=0$에 대하여 대칭이다. ($\because$ $f(x)=f(-x)$)

② 곧, 곡선 $y=f(x)$, $\overline{\mathrm{PQ}}$, y축으로 둘러싸인 부분 중 제1사분면에 있는 부분 S의 넓이는 $\dfrac{A}{2}$

③ $A=2B$이므로 (S의 넓이)=(B의 넓이)

$\Rightarrow$ 영역 S의 y좌표가 모두 양수이고, 곡선 $y=f(x)$와 직선 $x=k$ 및 $\overline{\mathrm{QR}}$로 둘러싸인 부분의 y좌표가 모두 음수이므로 $\displaystyle\int_0^k f(x)dx=0$이다.

④ $\displaystyle\int_0^k(-x^2+2x+6)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+6x\right]_0^k=-\frac{k}{3}(k^2-3k-18)=0 \Rightarrow k=6 \quad (\because\ k>4)$

SEOL's TIP : **6평에 이어 9평에서도 동일하게 13번에 정적분의 넓이가 출제되었다. 중요한 신호이니, 넓이 관련 고난도 문제도 연습해두는 편이 좋을 것이라 생각된다.**

014

자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> **(가)** 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.
> **(나)** $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은? [4점]

[주목할만한 점] 지수함수/로그함수에서는 직선의 '기울기'를 이용해 좌표를 잡는 경우가 상당히 많다.

[실전 풀이]

① 점 A_n, B_n의 x좌표를 각각 α_n, $\beta_n(\beta_n>\alpha_n)$이라 하자.
직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기가 3이므로 두 점 A_n, B_n의 y좌표 차는 x좌표 차의 3배
$\Rightarrow$ 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=\sqrt{10}(\beta_n-\alpha_n)$

② 조건 (나)에 의해

$$\overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1}=\sqrt{10}\ \Rightarrow\ \beta_1-\alpha_1=1,\quad \overline{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2}=2\sqrt{10}\ \Rightarrow\ \beta_2-\alpha_2=2,\quad \overline{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3}=3\sqrt{10}\ \Rightarrow\ \beta_3-\alpha_3=3$$

이때, 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$, 그리고 중심이 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n를 지나는 원은 모두 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 이 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점은 두 점 A_n, B_n을 각각 $y=x$에 대하여 대칭이동시킨 점이다. 그 점 중 x좌표가 큰 점의 x좌표는 A_n, B_n 중 y좌표가 큰 점의 y좌표와 같으므로 B_n의 y좌표가 곧 x_n이다.

③ $n=1$이면 : $\mathrm{A}_1\left(\alpha_1, 2^{\alpha_1}\right)$, $\mathrm{B}_1\left(\alpha_1+1, 2^{\alpha_1+1}\right)$ $\Rightarrow$ 두 점의 y좌표의 차는 $2^{\alpha_1+1}-2^{\alpha_1}=1\times3=3$이다.

$$\Rightarrow\ 2^{\alpha_1}=3\ \Rightarrow\ \alpha_1=\log_2 3$$

$n=2$이면 : 같은 방식으로 $2^{\alpha_2+2}-2^{\alpha_2}=6\ \Rightarrow\ 2^{\alpha_2}=2\ \Rightarrow\ \alpha_2=1$

$n=3$이면 : 같은 방식으로 $2^{\alpha_3+3}-2^{\alpha_3}=9\ \Rightarrow\ 2^{\alpha_3}=\frac{9}{7}\ \Rightarrow\ \alpha_3=\log_2\frac{9}{7}$

④ 구하는 값은 $\beta_1+\beta_2+\beta_3=2^{\log_2 3+1}+2^{1+2}+2^{\log_2\frac{9}{7}+3}=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}=x_1+x_2+x_3$

SEOL's TIP : **지수식과 다항식이 섞인 방정식은 찍기가 아닌 이상, '그 어떤 방법을 써도' 풀 수 없다. 이를 반대로 생각하면, '밑이 같아 풀수 있는 지수 방정식이 도출되면 한번쯤 풀어볼 가치가 있다'는 것!**

021

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 정수 k에 대하여

$$2k-8 \le \frac{f(k+2)-f(k)}{2} \le 4k^2+14k$$

를 만족시킬 때, $f'(3)$의 값을 구하시오. [4점]

[주목할만한 점] 어떤 함수식을 가운데에 두고 부등식을 통해 범위를 제한했을 경우, '제한된 범위의 상한/하한이 같아지는 경우'를 반드시 살펴야 한다.

[실전 풀이]

① 방정식 $2k-8=4k^2+14k$ 풀면 $k^2+3k+2=0 \Rightarrow k=-1$ 또는 -2

② 즉,

$$k=-1 \text{일 때 } \frac{f(1)-f(-1)}{2}=-10,\ k=-2 \text{일 때 } \frac{f(0)-f(-2)}{2}=-12$$

이다. 일단 최고차항 계수를 알고, 미분한 식의 함숫값을 구하면 되니 미지수는 두 개, 주어진 식도 두 개 일단 더 이상 어떻게 해야할 지 모르겠으니 대입하면 나온다. 대입을 해보자.

③ $f'(x)=3x^2+ax+b$라 할 때

$$f(1)-f(-1)=\int_{-1}^{1} f'(t)dt=-20,\quad f(0)-f(-2)=\int_{-2}^{0} f'(t)dt=-24$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}(3x^2+ax+b)dx=\int_{-1}^{1}(3x^2+b)dx=2\left[x^3+bx\right]_0^1=2+2b=-20 \Rightarrow b=-11$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{0}(3x^2+ax-11)dx=\left[x^3+\frac{a}{2}x^2-11x\right]_{-2}^{0}=-(-8+2a+22)=-2a-14=-24 \Rightarrow a=5$$

따라서 $f'(3)=27+15-11=31$이다.

SEOL's TIP : **아주 사소한 차이이긴 하지만, 두 함숫값의 차를 보고 '도함수의 정적분값'으로 바라봤을 때 수식적인 간편함을 추구할 수 있는 여지는 있다. 물론 그대로 넣어서 쌩계산을 하여도 무리는 없다.**

022

양수 k에 대하여 $a_1=k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> **(가)** $a_2\times a_3<0$
> **(나)** 모든 자연수 n에 대하여
> $\left(a_{n+1}-a_n+\dfrac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$이다.

$a_5=0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오. [4점]

[주목할만한 점] a_2, a_3의 조건에서 '부호를 판단할 수 있다'는 생각을 할 수 있다. 또, $a_5=0$이기 위해 a_2, a_3의 부호에 따라 어떤 조건($a_{n+1}=a_n-\dfrac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1}=-ka_n$ 중 하나)이 적용되어야 하는지 나누어 따져봐야 한다.
분명, '상당수의 케이스'가 '부호'에 의해 걸러질 것이다.

[실전 풀이]

① (가)에 의해 a_2와 a_3의 부호가 반대

(나)에 의해 $a_{n+1}=a_n-\dfrac{2}{3}k$ 또는 $a_{n+1}=-ka_n$ $\Rightarrow$ $a_2=\dfrac{1}{3}k\,(\because\ a_1=k)$ 또는 $a_2=-k^2$

② a_2의 양상에 따라 관찰

(i) $a_2=\dfrac{1}{3}k$이면

$k>0\ \Rightarrow\ a_2>0,\ a_3<0\ \Rightarrow\ a_3=-\dfrac{1}{3}k$ 또는 $-\dfrac{1}{3}k^2$

$\Rightarrow\ a_4=-k$ 또는 $\dfrac{1}{3}k^2$ 또는 $-\dfrac{1}{3}k^2-\dfrac{2}{3}k$ 또는 $\dfrac{1}{3}k^3$

$\Rightarrow\ a_4=-k$이면 $a_5\neq 0$이므로 조건 만족 ×

- $a_4=\dfrac{1}{3}k^2$인 경우 : $a_5=a_4-\dfrac{2}{3}k$일 때만 가능 $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{3}k^2-\dfrac{2}{3}k=0$ $\Rightarrow$ $k=2$
- $a_4=-\dfrac{1}{3}k^2-\dfrac{2}{3}k$인 경우 : $a_5=a_4-\dfrac{2}{3}k$일 때만 가능 $\Rightarrow$ $-\dfrac{1}{3}k^2-\dfrac{4}{3}k=0$ $\Rightarrow$ $k<0$이므로 모순,
  $a_5=-ka_4=\dfrac{1}{3}k^3+\dfrac{2}{3}k^2$일 때 역시 $k<0$이므로 모순.
- $a_4=\dfrac{1}{3}k^3$인 경우 : $a_5=a_4-\dfrac{2}{3}k$일 때에만 가능하며, $\dfrac{1}{3}k^3-\dfrac{2}{3}k=0$, $k^2=2$임을 알 수 있다.

(ii) $a_2=-k^2$인 경우

$k^2>0\ \Rightarrow\ a_2<0,\ a_3>0\ \Rightarrow\ a_3=k^3$

$\Rightarrow\ a_4=-k^4$ 또는 $a_4=k^3-\dfrac{2}{3}k$

$\Rightarrow\ a_4=-k^4$이면 k가 양수이므로 $a_5\neq 0$이기에 조건 만족 ×

- $a_4=k^3-\dfrac{2}{3}k$일 때 $a_5=-ka_4$인 경우 : $a_4=0$ $\Rightarrow$ $k^2=\dfrac{2}{3}$
- $a_4=k^3-\dfrac{2}{3}k$일 때 $a_5=a_4-\dfrac{2}{3}k$인 경우 : $a_5=k^3-\dfrac{4}{3}k$ $\Rightarrow$ $k^2=\dfrac{4}{3}$

$\Rightarrow$ 모든 k^2의 값의 합은 $2^2+2+\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{3}=8$

SEOL's TIP : **케이스를 두 방법으로 나눌 수 있다. 단순히 a_2의 부호에 따라 나누거나, a_2의 식에 따라 나누거나. 그런데, a_2의 식에 따라 나누었더니 자연스레 부호까지 나누어진다. 그렇다면 당연히 후자를 고르는 편이 좋을 것이다.**

확통

027

이산확률변수 X가 가지는 값이 0부터 4까지의 정수이고

$$\mathrm{P}(X=k)=\mathrm{P}(X=k+2) \quad (k=0,\ 1,\ 2)$$

이다. $\mathrm{E}(X^2)=\frac{35}{6}$ 일 때, $\mathrm{P}(X=0)$ 의 값은? [3점]

[주목할만한 점] $\mathrm{E}(X^2)$ 을 구하려면 $\mathrm{E}(X)$ 와 $\mathrm{V}(X)$ 를 알거나, 모든 $\mathrm{P}(X=k)$ 를 알면 된다.
그런데, 어차피 지금 상황에서 $\mathrm{E}(X)$ 를 알기 위해선 모든 $\mathrm{P}(X=k)$ 를 알아야 한다.

[실전 풀이]

① $\mathrm{P}(X=0)=\mathrm{P}(X=2)=\mathrm{P}(X=4)=a$, $\mathrm{P}(X=1)=\mathrm{P}(X=3)=b$ 라 하자.
이때, $3a+2b=1$ (모든 경우의 대한 확률의 합은 1)이고,

② $\mathrm{E}(X^2)=\frac{35}{6} \Rightarrow 0^2\times a+1^2\times b+2^2\times a+3^2\times b+4^2\times a=20a+10b=\frac{35}{6} \Rightarrow 4a+2b=\frac{7}{6}$

$\Rightarrow a=\frac{1}{6},\ b=\frac{1}{4} \Rightarrow \mathrm{P}(X=0)=a=\frac{1}{6}$

확통

028

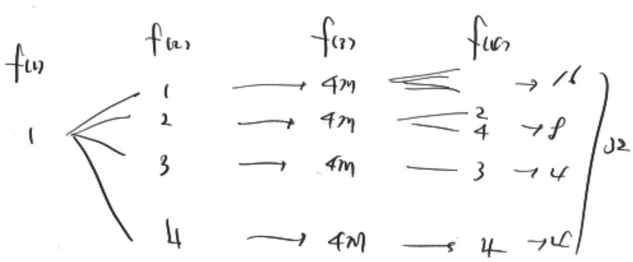
집합 $X=\{1,2,3,4\}$에 대하여 $f:X\rightarrow X$인 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택하는 시행을 한다. 이 시행에서 선택한 함수 f가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$가 짝수일 확률은? [4점]

> $a\in X$, $b\in X$에 대하여
> a가 b의 약수이면 $f(a)$는 $f(b)$의 약수이다.

[주목할만한 점] '약수'에 대한 성질을 사용하도록 하였다. 다른 이상한(?) 수들 보다, '1이 모든 수의 약수'임을 활용하면 좋지 않을까?

[실전 풀이]

1은 모든 수의 약수이므로 $f(1)$은 나머지 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$의 약수이다.
따라서 $f(1)$의 값이 무엇이냐에 따라 나머지 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 될 수 있는 값이 달라진다.
(i) $f(1)=1$인 경우



다음과 같이, $f(2)$가 1 또는 2 또는 3 또는 4인 경우로 나눌 수 있고,
각각의 경우에 대하여 $f(3)$은 1의 배수이기만 하면 되므로 $f(3)$을 결정하는 경우의 수는 4이다.
$f(2)=1$일 때에는 $f(4)$를 결정하는 경우의 수가 4, $f(2)=2$일 때에는 $f(4)$를 결정하는 경우의 수가 2,
$f(2)$가 3 또는 4일 때에는 $f(4)$를 결정하는 경우의 수가 1 $\Rightarrow$ 전체 경우의 수는 $4\times4+2\times4+1\times4\times2=32$
$f(4)$가 짝수인 경우의 수는 $2\times4+2\times4+1\times4=20$이다.

(ii) $f(1)=2$인 경우 :
$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 무조건 2 또는 4이고, $f(4)$가 $f(2)$의 배수이므로 $f(2)=2$일 때에는 상관이 없지만,
$f(2)=4$일 때에는 무조건 $f(4)=4$이다.
$\Rightarrow$ 가능한 경우의 수는 $f(2)=2$일 때 $2^2=4$, $f(2)=4$일 때 $2^1=2$이고, 전체 경우의 수는 6이고,
$f(4)$가 짝수인 경우의 수는 6이다.

(iii) $f(1)=3$ 또는 $f(1)=4$인 경우 :
$f(1)$이 3 또는 4이면 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$가 무조건 3 또는 4의 배수이고, 공역이 아무리 커봐야 4이므로 $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$는 무조건 $f(1)$과 같다. $\Rightarrow$ 가능한 경우의 수는 2, $f(4)$가 짝수인 경우의 수는 1이다.

따라서, 구하고자 하는 확률은 $\dfrac{20+6+1}{32+6+2}=\dfrac{27}{40}$

SEOL's TIP : **수형도를 그리는 데 너무 주저할 필요가 없다. 어줍잖은 계산보다 훨씬 정확한 것이 일일이 세어보는 것 아니던가? 수형도만큼 정확히 경우의 수를 셀 수 있는 툴이 없다. 또, 항상 케이스를 구분할 때에는 '아무리 많아도 4개 이하이도록' 하자. 5개 이상이 되어버리면 머리만 아프고 문제는 안풀린다.**

확통
029

수직선의 원점에 점 A가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 4 이하이면 점 A를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고, 5 이상이면 점 A를 음의 방향으로 1만큼 이동시킨다.

이 시행을 16200번 반복하여 이동된 점 A의 위치가 5700 이하일 확률을 아래 표준정규분포표를 이용하여 구한 값을 k라 하자. $1000\times k$의 값을 구하시오. [4점]

[주목할만한 점] 확률변수를 '새롭게 재정의'하는 것도 할 줄 알아야 한다. 또, '16200번'과 같이 엄청나게 많은 횟수를 반복하는 경우, 십이면 십 백이면 백 '이항분포'에 대한 문항임을 명심하자.

[실전 풀이]

① 주사위 던져 나온 눈의 수가 4 이하인 횟수를 X라 할 때, X는 이항분포 $\mathrm{B}\left(16200,\ \dfrac{2}{3}\right)$를 따른다.

$\Rightarrow\ \mathrm{E}(X)=10800,\ \mathrm{V}(X)=3600,\ \sigma(X)=60$

② 점 A의 위치를 Y라 할 때, $Y=X-(16200-X)=2X-16200$

$\Rightarrow\ \mathrm{E}(Y)=\mathrm{E}(2X-16200)=2\times10800-16200=5400,\ \sigma(Y)=2\sigma(X)=120$

n이 충분히 크므로$(n\gg30)$ X는 평균이 10800, 표준편차가 60인 정규분포를 따르고, 이에 따라 Y는 정규분포 $\mathrm{N}\left(5400,\ 120^2\right)$를 따른다.

$\Rightarrow\ \mathrm{P}(Y\le5700)=\mathrm{P}\left(\dfrac{Y-5400}{120}=Z\le2.5\right)=0.5+0.494=0.994$ $\Rightarrow$ 따라서 $k=0.994,\ 1000\times k=994$

확통
030

흰 공 4개와 검은 공 4개를 세 명의 학생 A, B, C에게 다음 규칙에 따라 남김없이 나누어 주는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색 공끼리는 서로 구별하지 않고, 공을 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [4점]

> (가) 학생 A가 받는 공의 개수는 0 이상 2 이하이다.
> (나) 학생 B가 받는 공의 개수는 2 이상이다.

[주목할만한 점] (나)보다는 (가)를 '케이스 구분'에 사용하기 좋을 것 같다. A가 0개, 1개, 또는 2개!

[실전 풀이]

A가 받는 공의 개수에 따라 나누어 살펴보자.

(i) A가 받는 공의 개수가 0인 경우 :

전체 경우의 수에서 학생 B가 받는 공의 개수가 1 이하연 경우를 제외하면 된다.

공 8개를 B, C에게 나누는 경우의 수는 ${}_2H_4 \times {}_2H_4 = 5 \times 5 = 25$이고, B에게 공을 1개만 주는 경우의 수 2, 공을 주지 않는 경우의 수 1을 빼면, 구하는 경우의 수가 22임을 알 수 있다.

(ii) A가 받는 공의 개수가 1인 경우 :

A가 흰 공 하나를 받으면, 나머지 공 7개를 B, C에게 나누는 경우의 수는 ${}_2H_3 \times {}_2H_4 = 4 \times 5 = 20$이고, B에게 공을 1개만 주는 경우의 수 2, 공을 주지 않는 경우의 수 1을 빼면, 구하고자 하는 경우의 수가 17임을 알 수 있다. A가 검은 공 하나를 받아도 경우의 수는 같으므로 전체 경우의 수는 $17 \times 2 = 34$임을 알 수 있다.

(iii) A가 받는 공의 개수가 2인 경우 :

A가 흰 공 하나, 검은 공 하나를 받으면, 나머지 공 6개를 B, C에게 나누는 경우의 수는 ${}_2H_3 \times {}_2H_3 = 4 \times 4 = 16$이고, B에게 공을 1개만 주는 경우의 수 2, 공을 주지 않는 경우의 수 1을 빼면, 구하는 경우의 수가 13임을 알 수 있다.

또, A가 흰 공 2개, 또는 검은 공 2개를 받는 경우의 수는 2이고, 나머지 공 6개를 B, C에게 나누는 경우의 수는 ${}_2H_2 \times {}_2H_4 = 3 \times 5 = 15$이며, B에게 공을 1개만 주는 경우의 수 2, 공을 주지 않는 경우의 수 1을 빼면, 구하는 경우의 수가 $2 \times 12 = 24$임을 알 수 있다.

(i) ~ (iii)에 의해 구하는 모든 경우의 수는 $22 + 34 + 13 + 24 = 93$

SEOL's TIP : **항상 케이스를 구분할 때에는 '아무리 많아도 4개 이하이도록' 하자. 5개 이상이 되어버리면 머리만 아프고 문제는 안풀린다.**

미적

028

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속인 이계도함수를 갖고, 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f'(2x)\sin\pi x+x$$

라 하자. 함수 $g(x)$는 역함수 $g^{-1}(x)$를 갖고,

$$\int_0^1 g^{-1}(x)dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx+\frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때, $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x dx$의 값은? [4점]

[주목할만한 점] 모양새에 기죽지 말고, 우리가 해나가야하는 것을 하면 된다. 역함수가 나온다면 $x=g(t)$로 치환적분을 해보자. 또, $f'(2x)\sin\pi x$를 어떻게 해야 $f(x)\cos\frac{\pi}{2}x$로 만들 수 있겠는가? 우리가 배운건 '치환적분'과 '부분적분' 이 둘 뿐이다!

[실전 풀이]

① $x=g(t)$로 치환 $\Rightarrow$ $\frac{dx}{dt}=g'(t)$, $g(0)=0$, $g(1)=1$ $\Rightarrow$ $g^{-1}(0)=0$, $g^{-1}(1)=1$

② $\int_0^1 g^{-1}(x)dx=\int_0^1 tg'(t)dt=[tg(t)]_0^1-\int_0^1 g(t)dt=1-\left(\int_0^1\{f'(2x)\sin\pi x+x\}dx\right)=\frac{1}{2}-\int_0^1\{f'(2x)\sin\pi x\}dx$

$\Rightarrow$ $\frac{1}{2}-\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx=2\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx+\frac{1}{4}$, $\int_0^1 f'(2x)\sin\pi x dx=\frac{1}{12}$

③ $2x=u$로 치환 $\Rightarrow$ $2\frac{dx}{du}=1$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}\int_0^2 f'(u)\sin\frac{\pi}{2}u du=\frac{1}{12}$, $\int_0^2 f'(u)\sin\frac{\pi}{2}u du=\frac{1}{6}$

부분적분에 의해 $\int_0^2 f'(u)\sin\frac{\pi}{2}u du=\left[f(u)\sin\frac{\pi}{2}u\right]_0^2-\frac{\pi}{2}\int_0^2 f(u)\cos\frac{\pi}{2}u du=-\frac{\pi}{2}\int_0^2 f(u)\cos\frac{\pi}{2}u du=\frac{1}{6}$

$\Rightarrow$ $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi}{2}x dx=-\frac{1}{3\pi}$

미적

029

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제m항까지의 합을 S_m이라 하자. 모든 자연수 m에 대하여

$$S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m+1}{n(n+m+1)}$$

일 때, $a_1+a_{10}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[주목할만한 점] 흔히 보던 '부분분수 꼴로의 변형'이 가능한 형태이다. 일단, 보이는 대로 해보고 안되면 다시 돌아와도 좋다.
또, '수열의 귀납적 정의' 단원의 파생이니 만큼, '한번 나열해보는 mindset'역시 매우 중요하다.

[실전 풀이]

① $S_m=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+m+1}\right) \Rightarrow S_m=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{m+2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{m+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m+1}-\frac{1}{2m+2}\right)+\left(\frac{1}{m+2}-\frac{1}{2m+3}\right)+\cdots$

$\frac{1}{m+2}$, $\frac{1}{m+3}$, …들은 모두 소거되므로 결과적으로 $S_m=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m+1}$

② $a_1=S_1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2} \Rightarrow a_m=S_m-S_{m-1}=\frac{1}{m+1}\ (m\geq 2) \Rightarrow a_{10}=\frac{1}{11}$

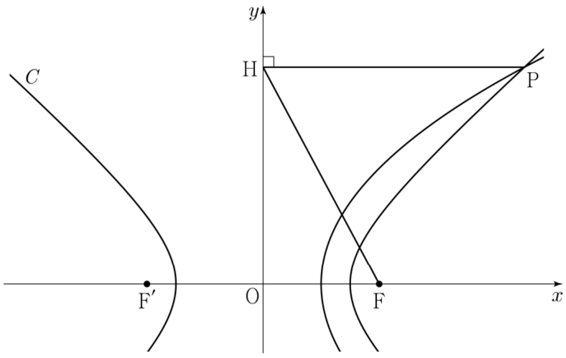
$\Rightarrow \frac{q}{p}=\frac{3}{2}+\frac{1}{11}=\frac{35}{22} \Rightarrow p+q=57$

**SEOL's TIP : 이렇게, '미적분' 단원에서도 [수학1]에서 학습한 '수열' 단원의 문항 패턴을 닮아 오는 경우가 간혹 있으니,
시그마가 나왔는 데 구조가 잘 파악되지 않으면 '한번 나열해보자!'의 마인드셋을 장착하자.**

기하

029

그림과 같이 두 점 $\mathrm{F}(4,0)$, $\mathrm{F}'(-4,0)$을 초점으로 하는 쌍곡선 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$이 있다. 점 F를 초점으로 하고 y축을 준선으로 하는 포물선이 쌍곡선 C와 만나는 점 중 제1사분면 위의 점을 P라 하자. 점 P에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, $\overline{\mathrm{PH}}:\overline{\mathrm{HF}}=3:2\sqrt{2}$이다. $a^2\times b^2$의 값을 구하시오. (단, $a>b>0$) [4점]



[주목할만한 점] 역시나 '이차곡선의 정의'의 선에서 결코 벗어나지 않는다. 추가적으로 이차곡선의 간단한 접선의 방정식 정도만 추가해주면 끝.

[실전 풀이]

① 양수 k에 대하여 $\overline{\mathrm{PH}}=3k$, $\overline{\mathrm{HF}}=2\sqrt{2}k$ $\Rightarrow$ 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{OH}}=\sqrt{\overline{\mathrm{HF}}^2-\overline{\mathrm{OF}}^2}=\sqrt{8k^2-16}$

② 포물선 $y^2=4p(x+a)$가 준선을 y축으로 잡고 있으므로 포물선과 x축이 만나는 점이 선분 OF의 중점

$\Rightarrow$ $a=-2$, $p=2$ $\Rightarrow$ 포물선의 방정식이 $y^2=8x-16$

③ 점 P의 좌표를 $(3k,\sqrt{24k-16})$ $\Rightarrow$ $\sqrt{24k-16}=\sqrt{8k^2-16}$ $\Rightarrow$ $k^2-3k=0$ $\Rightarrow$ $k=3\,(k>0)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{P}(9,2\sqrt{14})$ $\Rightarrow$ $\overline{\mathrm{PF}'}=\sqrt{13^2+(2\sqrt{14})^2}=15$, $\overline{\mathrm{PF}}=\sqrt{5^2+(2\sqrt{14})^2}=9$

$\Rightarrow$ 포물선의 축의 길이는 $15-9=6$, $a=3$이다. 또, $a^2+b^2=c^2=16$이므로 $b^2=7$

$\Rightarrow$ $a^2\times b^2=9\times7=63$

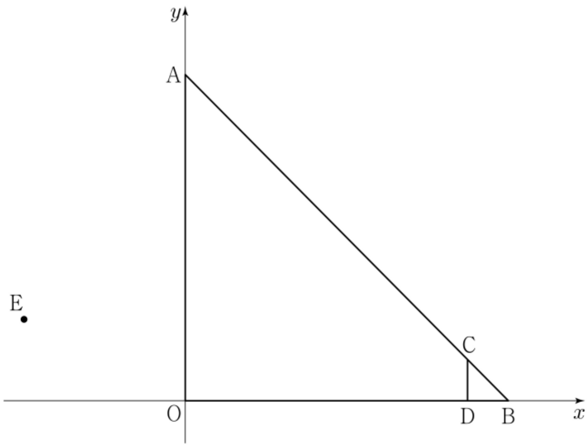
기하

030

좌표평면 위에 다섯 점

$\mathrm{A}(0, 8)$, $\mathrm{B}(8, 0)$, $\mathrm{C}(7, 1)$, $\mathrm{D}(7, 0)$, $\mathrm{E}(-4, 2)$

가 있다. 삼각형 AOB의 변 위를 움직이는 점 P와 삼각형 CDB의 변 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}|^2$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



[주목할만한 점] 벡터의 내적을 묻는 심화된 문항이 아닌, 그냥 벡터의 위치 관계를 따져가며 벡터의 크기의 최대/최소를 구하는 문항이 30번으로 출제되었다. 게다가, 벡터 하나가 고정되어있다!

[실전 풀이]

① 점 Q를 x축 -4, y축 2만큼 평행이동시킨 점 Q′에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+\overrightarrow{\mathrm{QQ'}}=\overrightarrow{\mathrm{PQ'}}$

$\Rightarrow$ △CDB의 각 꼭짓점을 x축 -4, y축 2만큼 평행이동시켜 만든 삼각형을 △C′D′B′라 할 때,

△C′D′B′의 변 위를 움직이는 점 R에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$의 최댓값이 M, 최솟값이 m

② △C′D′B′의 세 변과 △AOB의 세 변 에서 각각 평행한 한 쌍의 변을 고를 때,

두 변 사이 거리의 최솟값은 $\sqrt{2}$ ($\overline{\mathrm{C'B'}}$과 $\overline{\mathrm{AB}}$)이고, 두 변 위의 각 점 사이 거리가 두 변 사이 거리의 최솟값이 아닌 값을 가지면 항상 두 변 사이 거리의 최솟값보다 크므로, $|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$의 최솟값은 $(\sqrt{2})^2=2$

③ 반대로, 두 변 위의 각 점 사이 거리가 최대가 되도록 하려면 최솟값을 갖는 지점에서 되도록 멀어져야 하므로 꼭짓점 사이의 거리가 그 후보가 된다. 세 꼭짓점 C′, D′, B′ 중 하나와 A, O, B 중 하나를 골라 선분을 만들 때, 가장 긴 선분은 AB′이고, 그 길이는 $\sqrt{4^2+6^2}=\sqrt{52}$ $\Rightarrow$ $|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2$의 최댓값은 $(\sqrt{52})^2=52$이다.

$\Rightarrow$ $M+m=52+2=54$

SEOL's TIP : **구하고자 하는 벡터의 합을 구성하는 벡터 중 '고정되어있는 벡터'가 있다면, 그대로 놔두지 말고 '다른 움직이는 벡터의 끝에 붙이자.'**

2·3점 문항 및 선택 문항 총평(무난한 경우 별 3개)

문항 번호	체감 난이도	총 평
1	1번	무난하게 출제된 지수법칙. 너무 어렵지도, 너무 단순하지도 않다. ★★★☆☆
2	2번	역시 무난하게 출제된 미분계수의 정의. ★★★☆☆
3	3번	등비수열의 일반항을 쓸 줄 알면 바로 해결할 수 있는 간단한 등비수열 문항. ★★★☆☆
4	4번	함수의 극한이 무엇인지 아시나요? ★★★☆☆
5	5번	꼼수 금지! 곱의 미분을 사용해야만 합니다. ★★★☆☆
6	6번	트릭조차 없는 평이한 삼각함수 각변환 문항. ★★☆☆☆
7	7번	역시 잔기술을 쓰지 않아도 되는 간단한 연속의 정의. ★★★☆☆
8	8번	각변환을 쓰게 하였으나 아이디어의 큰 의미는 없었던. ★★☆☆☆
문항 번호	체감 난이도	총 평
16	16번	‘단답형 답이 음수일 수 없어서’가 아니라, 진수조건을 잘 따지자. ★★★★☆
17	17번	아주 간단한 도함수의 부정적분 문항. 이정도는 .. ★★★☆☆
18	18번	시그마로 나타내어진 수열의 합은 직접 나열해 보는 것도 좋다. ★★★★☆
19	19번	다항함수의 극대/극소를 이용한 계산, 계산, 계산. ★★★☆☆

[확률과 통계]

확통	난이도	완성도
23	23번	★★★☆☆
24	24번	★★★☆☆
25	25번	★★★☆☆
26	27번	★★★★★
27	27번	★★★★☆
28	28번	★★★★☆
29	29번	★★★★★
30	30번	★★★★☆

[미적분]

미적	난이도	완성도
23	23번	★★★☆☆
24	25번	★★★☆☆
25	25번	★★★☆☆
26	27번	★★★★☆
27	26번	★★★★☆
28	28번	★★★★☆
29	29번	★★★★★
30	30번	★☆☆☆☆

[기하]

미적	난이도	완성도
23	23번	★★★☆☆
24	24번	★★★☆☆
25	24번	★★★★☆
26	27번	★★★★☆
27	27번	★★★☆☆
28	28번	★★★☆☆
29	29번	★★★★☆
30	29번	★★★★☆