2025학년도 6월 모평 수학 풀이 (1~14번)

2024년 6월 15일 토요일 오후 7:43

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{25}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ 1 ④ $\sqrt{5}$ ⑤ 5

$\sqrt[3]{25} = \sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$ 이므로

$$\frac{5}{\sqrt[3]{25}} = \frac{5^1}{5^{\frac{2}{3}}} = 5^{1-\frac{2}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}$$

따라서 구하려고 하는 값은

$$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$$

2. 함수 $f(x)=x^2+x+2$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2)$$

$f'(x) = 2x+1$ 이므로 $f'(2)=5$

3. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_k+1)=9$이고 $a_6=4$일 때, $\sum_{k=1}^{6}a_k$의 값은? [3점]

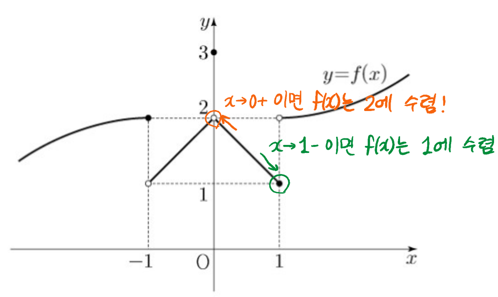
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+1) = \sum_{k=1}^{5}a_k + \underbrace{\sum_{k=1}^{5}1}_{5} = 9$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{5}a_k = 4$$

$$\sum_{k=1}^{6}a_k = \sum_{k=1}^{5}a_k + a_6 = 4+4=8$$

4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 1-}f(x)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

그림에 표시한 것처럼 $\lim_{x\to 0+}f(x)=2$, $\lim_{x\to 1-}f(x)=1$이다.

둘을 합하면 3

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

5. 함수 $f(x)=(x^2-1)(x^2+2x+2)$에 대하여 $f'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$$f'(x) = (x^2-1)'(x^2+2x+2) + (x^2-1)(x^2+2x+2)'$$
$$= 2x(x^2+2x+2) + (x^2-1)(2x+2)$$

$$f'(1) = 2\times5 + 0\times4$$
$$= 10$$

6. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{3}{5}$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

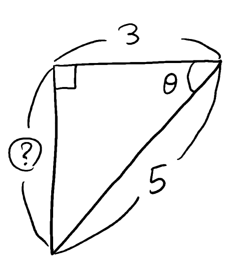
$\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$이므로 θ는 제3사분면의 각이다.

따라서 $\sin\theta$는 음수이다. (③, ④, ⑤ 탈락)

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)$를 간단히 하면

$\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\cos\theta$이다.

$-\cos\theta = \frac{3}{5}$이므로 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$



피타고라스의 정리에 의해 ? $= 4$이고 $\sin\theta<0$이므로

$$\sin\theta = -\frac{4}{5}$$

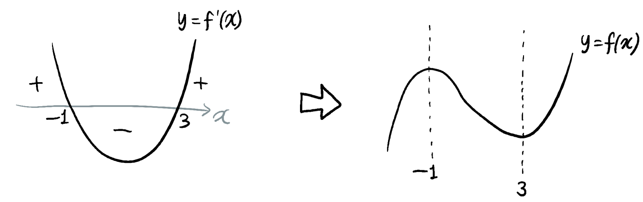
7. x에 대한 방정식 $x^3-3x^2-9x+k=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 합은? [3점]

① 13 ② 16 ③ 19 ④ 22 ⑤ 25

좌변을 $f(x)$로 두고 미분하면

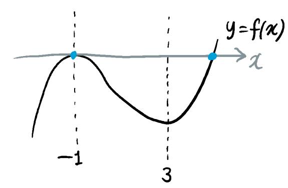
$f'(x) = 3x^2-6x-9 = 3(x+1)(x-3)$

따라서 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



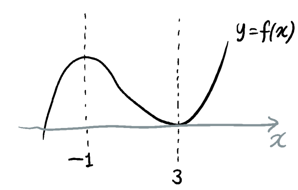
주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수가 2인 경우는 다음과 같이 두 가지이다.

(i) $f(-1)=0$



$5+k=0$이므로 $k=-5$

(ii) $f(3)=0$



$(-27)+k=0$이므로 $k=27$

$\therefore (-5)+27=22$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

8. $a_1a_2<0$인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6=16,\quad 2a_8-3a_7=32$$

일 때, a_9+a_{11}의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$a_1a_2<0 \rightarrow a_1$과 a_2의 부호가 다름 → 공비 음수

공비를 r이라 하면

$$2a_8-3a_7 = 2\underbrace{a_6}_{16}r^2-3\underbrace{a_6}_{16}r = 32r^2-48r$$

따라서 $32r^2-48r=32$이므로 $r=-\frac{1}{2}$ ($\because r<0$)

$$a_9=a_6r^3=16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^3=-2$$

$$a_{11}=a_9r^2=(-2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{2}$$

$$\therefore a_9+a_{11}=(-2)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{5}{2}$$

9. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x-\frac{1}{2} & (x<0) \\ -x^2+3 & (x\geq 0)\end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f(x)+a)^2$이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $-\frac{9}{4}$ ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{5}{4}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to0-}\{f(x)+a\}^2=\lim_{x\to0-}\left(x-\frac{1}{2}+a\right)^2=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\lim_{x\to0+}\{f(x)+a\}^2=\{f(0)+a\}^2=(a+3)^2$$

함수 $\{f(x)+a\}^2$은 $x=0$에서 연속이므로 $\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=(a+3)^2$ 이다.

방정식을 풀면 $a=-\frac{5}{4}$

10. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는? [4점]

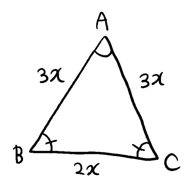
(가) $3\sin A=2\sin B$
(나) $\cos B=\cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ ④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

외접원의 넓이 9π → 외접원의 반지름 길이 3

(가)에서 $\sin A : \sin B = 2:3$

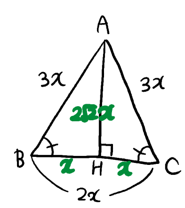
(나)에서 $0<B<\pi$, $0<C<\pi$이므로 $\cos B=\cos C$이면 $B=C$이다.



위 그림에서 $\sin A : \sin B : \sin C = 2:3:3$이므로

사인법칙에 의해 $\overline{BC} : \overline{CA} : \overline{AB} = 2:3:3$이다.

따라서 어떤 양수 x에 대해 $\overline{BC}=2x$, $\overline{CA}=\overline{AB}=3x$이다.



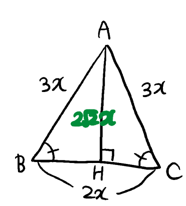
위 그림처럼 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

피타고라스의 정리에 의해 $\overline{AH}=2\sqrt{2}x$이므로

$$\sin B=\frac{\overline{AH}}{\overline{AB}}=\frac{2\sqrt{2}x}{3x}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

사인법칙에 의해 $\underbrace{2R}_{\text{외접원 반지름 길이}}=\frac{\overline{CA}}{\sin B}$이므로

$$\overline{CA}=2R\sin B \rightarrow 3x=2\times3\times\frac{2\sqrt{2}}{3} \qquad \therefore x=\frac{4\sqrt{2}}{3}$$



삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}=\frac{1}{2}\times2x\times2\sqrt{2}x$$
$$=2\sqrt{2}x^2=2\sqrt{2}\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2$$
$$=\frac{64\sqrt{2}}{9}$$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

11. 최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$인 삼차함수 $f(x)$가

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-1}{x-a}=3$$

을 만족시킨다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 y절편이 4일 때, $f(1)$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

극한값 존재하고 (분모) → 0 이므로 (분자) → 0

$\therefore f(a)=1$

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-1}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$ 이므로

$\therefore f'(a)=3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$ 에서의 접선의 방정식은

$y=f'(a)(x-a)+f(a) \rightarrow y=3(x-a)+1$

이 직선의 y절편이 4이므로 $-3a+1=4$

$\therefore a=-1$

$f(x)=x^3+px^2+qx$ 라 하자.

$f(-1)=1$이므로 $(-1)+p-q=1$ $\therefore p-q=2 \cdots ㉠$

$f'(x)=3x^2+2px+q$ 이고 $f'(-1)=3$이므로

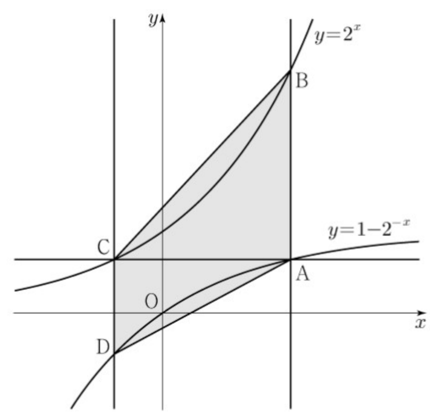
$3-2p+q=3$ $\therefore 2p-q=0 \cdots ㉡$

㉠과 ㉡을 연립하여 풀면 $p=-2,\ q=-4$ 이므로

$f(x)=x^3-2x^2-4x$이다.

$\therefore f(1)=-5$

12. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는? [4점]



① $\frac{5}{2}\log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}\log_2 3-\frac{9}{4}$

점 A의 좌표를 $(a,\ 1-2^{-a})$라 하면

$$\overline{AB}=2^a-(1-2^{-a})=2^a-1+2^{-a}$$

점 C의 좌표를 $(c,\ 1-2^{-a})$라 하자. 이는 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로

$2^c=1-2^{-a}$이다. $c=\log_2(1-2^{-a})$ 이고, 점 D의 y좌표는

$1-2^{-c}=1-\dfrac{1}{2^c}=1-\dfrac{1}{1-2^{-a}}=\dfrac{-2^{-a}}{1-2^{-a}}$ 이다.

따라서 $\overline{CD}=(1-2^{-a})-\dfrac{-2^{-a}}{1-2^{-a}}=(1-2^{-a})+\dfrac{2^{-a}}{1-2^{-a}}$ 이다.

$\overline{AB}=2\overline{CD}$이므로 $2^a+2^{-a}-1=2\left(1-2^{-a}+\dfrac{2^{-a}}{1-2^{-a}}\right)$

$(2^a-1+2^{-a})(1-2^{-a})=2\{\underbrace{(1-2^{-a})^2}_{1-2^{-a}+2^{-2a}}+2^{-a}\}$

$2^a-1+2^{-a}-1+2^{-a}-2^{-2a}=2-2\cdot2^{-a}+2\cdot2^{-2a}$

$t=2^a$로 치환 후 정리하면 $t^3-4t^2+4t-3=0$

$t=3$이므로 $2^a=3$ $\therefore a=\log_2 3$

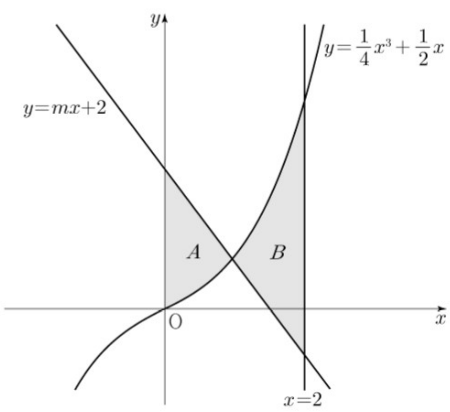
$\square ABCD=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{CD})\times\overline{AC}$

$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{7}{3}+\frac{7}{6}\right)\times\underbrace{\log_2\frac{9}{2}}_{\log_2 9-\log_2 2=2\log_2 3-1}$

$=\frac{7}{2}\log_2 3-\frac{7}{4}$

13. 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 직선 $y=mx+2$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 A, 곡선 $y=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x$와 두 직선 $y=mx+2$, $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 B라 하자. $B-A=\frac{2}{3}$일 때, 상수 m의 값은? (단, $m<-1$) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{17}{12}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ $-\frac{7}{6}$



$B-A=\frac{2}{3}$이므로

$$\int_0^2 \left\{\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{2}x\right)-(mx+2)\right\}dx = \frac{2}{3}$$

↳ $\left[\frac{1}{16}x^4+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}m\right)x^2-2x\right]_0^2 = \frac{2}{3}$

↳ $(-2)-2m=\frac{2}{3}$ ∴ $m=-\frac{4}{3}$

14. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]

> $\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75} = \log_4(-n^2+10n+75)$

따라서 $\log_4(-n^2+10n+75)-\log_4(75-kn)>0$이 되도록 하는 n의 범위를 구하면 된다. 로그의 진수는 양수이므로

$\underbrace{-5<n<15}_{-n^2+10n+75>0}$ 그리고 $\underbrace{n<\frac{75}{k}}_{75-kn>0}$ ··· ㉠

$\log_4(-n^2+10n+75)-\log_4(75-kn)>0$이 되기 위해서는

$-n^2+10n+75>75-kn \rightarrow n^2-(k+10)n<0$

∴ $0<n<k+10$ ··· ㉡

㉠과 ㉡을 동시에 만족시키는 자연수 n의 범위는

$0<n<\left(15, \frac{75}{k}, k+10\right.$ 중 최솟값$\left.\right)$

위 범위에 해당되는 자연수 n의 개수가 12가 되는 경우는

(i) $12<\frac{75}{k}\le 13$일 때, 즉 $\frac{75}{13}\le k<\frac{75}{12}$일 때 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 12이며, 이때 자연수 k의 값은 6이다.

(ii) $12<k+10\le 13$일 때, 즉 $2<k\le 3$일 때 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 12이며, 이때 자연수 k의 값은 3이다.

이상으로 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은 $6+3=9$이다.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

2025학년도 6월 모평 수학 풀이 (15~22번)

2024년 6월 15일 토요일 오후 7:57

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 상수 $k\,(k \geq 0)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} 2x-k & (x \leq k) \\ f(x) & (x > k) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능하다.
(나) 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}\,dt \geq 0 \text{이고}$$ 조건Ⓐ

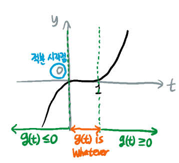
$$\int_3^x g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}\,dt \geq 0 \text{이다.}$$ 조건Ⓑ

$g(k+1)$의 최솟값은? [4점]

① $4-\sqrt{6}$ ② $5-\sqrt{6}$ ③ $6-\sqrt{6}$ ④ $7-\sqrt{6}$ ⑤ $8-\sqrt{6}$

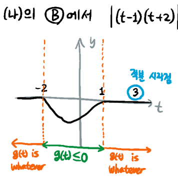
(가) 조건에 의해 $f(k)=k$ 이고 $f'(k)=2$

(나)의 Ⓐ에서 $|t(t-1)| + t(t-1) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq 1) \\ \text{양수} & (t<0 \text{ 또는 } t>1) \end{cases}$



조건 Ⓐ를 만족시키는 $y=g(t)\{|t(t-1)|+t(t-1)\}$의 그래프의 개형은 왼쪽 그림과 같다.

(나)의 Ⓑ에서 $|(t-1)(t+2)| - (t-1)(t+2) = \begin{cases} 0 & (t \leq -2 \text{ 또는 } t \geq 1) \\ \text{양수} & (-2<t<1) \end{cases}$



조건 Ⓑ를 만족시키는 $y=g(t)\{|(t-1)(t+2)|-(t-1)(t+2)\}$의 그래프의 개형은 왼쪽 그림과 같다.

따라서 조건 Ⓐ와 조건 Ⓑ를 모두 만족시키려면

$t \geq 1$일 때 $g(t) \geq 0$, $t \leq 1$일 때 $g(t) \leq 0$

을 만족시키면 된다. 따라서 $g(1)=0$ 이다.

$g(1)=0$을 만족시키는 경우는 다음과 같이 두 가지로 볼 수 있다.

(i) $k=2$ 이면 $x<2$일 때 $g(x)=2x-2$이므로 $g(1)=0$
(ii) $k<0$ 인 대신에 $f(1)=0$ 이면 $g(1)=0$ 이다. ✕

그런데 $k \geq 0$ 이라고 문제 조건에 나와있으므로 (ii)는 탈락 → (i)을 택하면 된다.

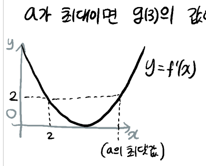
$k=2$이므로 이를 풀이 첫 줄에 언급한 조건에 대입하면 $f(2)=2$, $f'(2)=2$

따라서 어떤 상수 a에 대해 $f'(x)=3(x-2)(x-a)+2 \rightarrow f'(x)=3x^2-3(a+2)x+6a+2$

이므로 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}(a+2)x^2+(6a+2)x\underbrace{-6a+2}_{f(2)=2\text{ 조건}}$ 이다.

따라서 $g(k+1)=g(3)=f(3)=8-\frac{3}{2}a$ 이다.

a가 최대이면 $g(3)$의 값이 최소가 되는데, a의 최댓값은 다음과 같이 구할 수 있다.



왼쪽 그림과 같이 $y=f'(x)$의 그래프가 x축과 접하도록 하는 $a\,(a>2)$를 찾으면 된다.

판별식 $D=\{3(a+2)\}^2-4\cdot3\cdot(6a+2)=9a^2-36a+12$ 이므로

$D=0$을 만족시키는 a의 값은 $\frac{6+2\sqrt{6}}{3}$ ($\because a>2$) 이다.

이것이 a의 최댓값이므로, $g(3)$의 최솟값은 $8-\frac{3}{2}\cdot\frac{6+2\sqrt{6}}{3}=5-\sqrt{6}$ 이다.

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+1)-5=\log_{\frac{1}{2}}(x-3)$을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 7

＊ 진수 조건 유의 : $x+1>0$ and $x-3>0$이므로 $x>3$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x-3) = \log_2\frac{1}{x-3} = -\log_2(x-3)$$

$$\log_2(x+1)-5 = -\log_2(x-3)$$

$$\log_2(x+1)+\log_2(x-3) = 5$$

$$\log_2(x+1)(x-3) = \log_2 32$$

$$(x+1)(x-3) = 32$$

$$x^2-2x-35=0 \qquad \therefore x=7 \ (\because x>3)$$

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=6x^2+2$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점] 23

$$f(x)=\int f'(x)\,dx = 2x^3+2x+C$$

이때, $f(0)=3$이므로 $C=3$

$f(x)=2x^3+2x+3$이므로 $f(2)=23$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

18. $\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k)=120$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

2

$$\sum_{k=1}^{9}(ak^2-10k) = a\underbrace{\sum_{k=1}^{9}k^2}_{285} - 10\underbrace{\sum_{k=1}^{9}k}_{45}$$

$$= 285a - 450$$

따라서 $285a - 450 = 120$ $\therefore a=2$

(참고) $\sum_{k=1}^{9}k = \frac{9\times10}{2} = 45$

$\sum_{k=1}^{9}k^2 = \frac{9\times10\times19}{6} = 285$

19. 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\geq0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=\begin{cases} -t^2+t+2 & (0\leq t\leq3) \\ k(t-3)-4 & (t>3) \end{cases}$$

이다. 출발한 후 점 P의 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각에서의 점 P의 위치가 1일 때, 양수 k의 값을 구하시오. [3점]

16

$t\leq3$일 때, $v(2)=0$이므로 $t=2$에서 방향이 바뀐다.

$t>3$일 때, $v\left(3+\frac{4}{k}\right)=0$이므로 $t=3+\frac{4}{k}$에서 방향이 바뀐다.

따라서 운동 방향이 두 번째로 바뀌는 시각은 $t=3+\frac{4}{k}$이다.

이 시각에서 P의 위치가 1임을 이용하자.

$t=3$일 때 P의 위치는

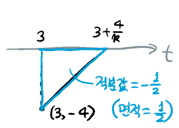
$$\int_0^3 v(t)\,dt = \int_0^3(-t^2+t+2)\,dt = \left[-\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+2t\right]_0^3 = \frac{3}{2}$$

$t=3+\frac{4}{k}$일 때 P의 위치는

$$\int_0^{3+\frac{4}{k}} v(t)\,dt = \int_0^3 v(t)\,dt + \int_3^{3+\frac{4}{k}} v(t)\,dt$$

$$= \frac{3}{2} + \underline{\int_3^{3+\frac{4}{k}}\{k(t-3)-4\}\,dt}$$

이 값이 1이므로 초록색 밑줄 친 적분값이 $-\frac{1}{2}$이면 된다.

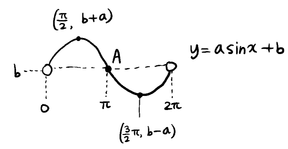


왼쪽에 파란색으로 표시한 삼각형의 넓이가 $\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{k}\cdot4=\frac{1}{2}$ $\therefore k=16$

20. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0, 2\pi)$에서 정의된 함수 $y=a\sin x+b$의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 (a, b)에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오. [4점]

24



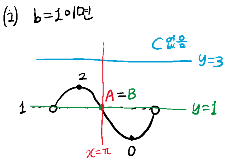
$y=a\sin x+b$의 그래프는 왼쪽 그림과 같다.

먼저, $a+b$의 최솟값부터 구하자.

이후의 그래프에서는 편의상 y좌표만 표시함

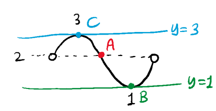
∗ $a=1$일 때

(i) $b=1$이면



$n(A\cup B\cup C)=1$ (x)

(ii) $b=2$이면



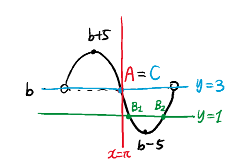
$n(A\cup B\cup C)=3$ (o)

$a=1$, $b=1$이면 조건을 만족시키지 않고, $a=1$, $b=2$이면 조건을 만족시킨다.

따라서 $a+b$의 최솟값은 3이다. $\therefore m=3$

다음은 $a+b$의 최댓값을 구해야 하기 때문에 a를 최대한 크게 잡아보자.

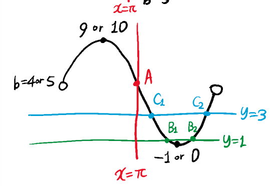
∗ $a=5$일 때



왼쪽 그림과 같이 $A=C$이고 B의 원소가 2개인 경우에 $n(A\cup B\cup C)=3$이므로 조건을 만족시킨다.

이때 $b=3$이므로 $\underline{a+b=8}$이다.

혹시 $a+b$가 9이거나 10이면 안되는지 검증해보자.

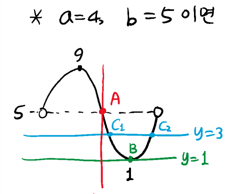


$a=5$이면서 $b=4\sim5$이면

왼쪽 그림과 같이 $n(A\cup B\cup C)=5$가 된다.

따라서 이 경우는 배제한다.

∗ $a=4$, $b=5$이면 안되는가?



왼쪽 그림을 보면 $n(A\cup B\cup C)=4$이므로 안된다는 것을 알 수 있다.

따라서 조건을 만족시키는 $a+b$의 최댓값은 8이다($a=5$, $b=3$). $\therefore M=8$

이상으로 $M\times m = 8\times3 = 24$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

21. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

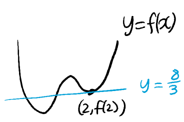
> (가) $f'(a) \le 0$인 실수 a의 최댓값은 2이다.
> (나) 집합 $\{x \mid f(x)=k\}$의 원소의 개수가 3 이상이 되도록 하는 실수 k의 최솟값은 $\frac{8}{3}$이다.

$f(0)=0$, $f'(1)=0$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

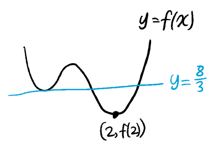
15

(가) 조건에 의해 $f'(2)=0$ 임을 알 수 있다.

(i)



(ii)



방정식 $f'(x)=0$의 세 실근 중 두 개는 $x=1$ 또는 $x=2$이고, 이 외의 실근을 $x=\alpha$라 하자.

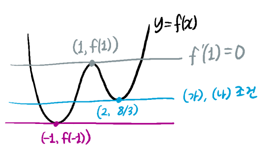
그렇다면 $f'(x) = 4(x-1)(x-2)(x-\alpha) = 4x^3 - 4(\alpha+3)x^2 + 4(3\alpha+2)x - 8\alpha$

이를 적분하면 $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}(\alpha+3)x^3 + 2(3\alpha+2)x^2 - 8\alpha x$ ($f(0)=0$이므로 적분상수 0)

위에 그린 그림대로 케이스를 나눠보자.

(i) W 모양일 때 (얘가 더 쉬우니까 얘부터 보기)

$f(2)=\frac{8}{3}$이므로 $-\frac{8}{3}\alpha = \frac{8}{3}$ $\therefore \alpha=-1$



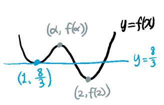
$y=f(x)$의 그래프는 왼쪽 그림과 같고,

이때 $f(x)= x^4 - \frac{8}{3}x^3 - 2x^2 + 8x$ 이다.

따라서 $f(3) = 15$

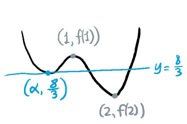
실전이면 그냥 조건 만족시키는거 확인하고 넘어가면 된다.

(ii) W 모양일때 (참고)



$f(1)=\frac{8}{3}$이라고 가정하면 $-\frac{10}{3}\alpha+1=\frac{8}{3}$이므로 $\alpha=-\frac{1}{2}$이다.

하지만 왼쪽 그림에 따르면 $\alpha>1$이어야 하는데, $\alpha=-\frac{1}{2}$이 나왔으므로 모순이다.



$f(\alpha)=\frac{8}{3}$이라고 가정하면 $-\frac{1}{3}\alpha^4+2\alpha^3-4\alpha^2=\frac{8}{3}$ 이므로

$\alpha^4-6\alpha^3+12\alpha^2+8=0$

그런데 좌변의 최솟값은 8이다. 따라서 등식을 만족시키는 α가 없다

22. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15}=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오. [4점]

231

$a_{15} = a_{14}+1 = a_{13}+2 = \cdots = a_{10}+5$

따라서 $a_{15}=1$이면 $a_{10}=-4$ 이다.

여기서부터 케이스 분류를 해야하는데, 케이스 분류가 필요한 것은 다음과 같이 두 가지이다.

$$a_{10} = \begin{cases} ⓐ\ a_9 - 3a_3 & (a_9>0) \\ ⓑ\ a_9+1 & (a_9\le 0) \end{cases}, \quad a_5 = \begin{cases} ⓒ\ a_4-2a_2 & (a_4>0) \\ ⓓ\ a_4+1 & (a_4\le 0) \end{cases}$$

(i) ⓐ, ⓒ인 경우

$a_9 = a_8+1 = a_7+2 = a_6+3 = a_5+4 = (\underbrace{a_4}_{a_4=a_2+2}-2a_2)+4 = -a_2+6$

$a_3 = a_2+1$이므로

$a_{10} = (-a_2+6)-3(a_2+1) = -4a_2+3$

따라서 $a_{10}=-4$이면 $a_2=\frac{7}{4}$이다. 이때, $a_4=\frac{15}{4}$, $a_9=\frac{17}{4}$이므로

$a_5>0$, $a_9>0$ 이라는 가정에 모순되지 않는다. $\therefore a_1=-\frac{7}{4}$ ($\because a_1=-a_2$)

(ii) ⓐ, ⓓ 인 경우

$a_9 = a_8+1 = \cdots = a_2+7$ 이고 $a_3 = a_2+1$이므로

$a_{10} = (a_2+7)-3(a_2+1) = -2a_2+4$ 이다.

따라서 $a_{10}=-4$이면 $a_2=4$이다. 그런데 이때 $a_4=6$이므로 $a_4\le 0$ 이라는 가정에 모순된다.

(iii) ⓑ, ⓒ 인 경우

$a_{10} = a_9+1 = \cdots = a_5+5 = (\underbrace{a_4}_{a_4=a_2+2}-2a_2)+5 = -a_2+7$ 이다.

따라서 $a_{10}=-4$이면 $a_2=11$이다. $a_4=13$, $a_9=-5$이므로

$a_4>0$, $a_9\le 0$ 이라는 가정에 모순되지 않는다. $\therefore a_1=-11$

(iv) ⓑ, ⓓ 인 경우

$a_{10} = a_9+1 = a_8+2 = \cdots = a_2+8$ 이므로 $a_{10}=-4$이면 $a_2=-12$이다.

이때, $a_4=-10$, $a_9=-5$이므로 $a_4\le 0$, $a_9\le 0$이라는 조건에 위배되지 않는다.

$\therefore a_1=12$

이상으로 구하는 답은 $\left(-\frac{7}{4}\right)\times(-11)\times 12 = 231$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

2025학년도 6월 모평 수학 풀이 (확률과 통계)

2024년 6월 15일 토요일 오후 7:57

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 네 개의 숫자 1, 1, 2, 3을 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$\frac{4!}{2!} = 12$

24. 두 사건 A, B는 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A^C) = \frac{5}{6}, \quad \mathrm{P}(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

일 때, $\mathrm{P}(B^C)$의 값은? [3점]

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{5}{12}$ ③ $\frac{11}{24}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{13}{24}$

A $\frac{1}{6}$ B $\frac{7}{12}$

$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

A와 B는 배반사건이므로

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\hookrightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) = \frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}$

$\therefore P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{5}{12}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 다항식 $(x^2-2)^5$의 전개식에서 x^6의 계수는? [3점]

① -50 ② -20 ③ 10 ④ 40 ⑤ 70

전개 시 일반항 : ${}_5C_r \cdot (x^2)^r \cdot (-2)^{5-r}$

$r=3$이면 ${}_5C_3 \cdot x^6 \cdot (-2)^2 = 40x^6$

26. 문자 a, b, c, d 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 문자열 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 문자 a가 한 개만 포함되거나 문자 b가 한 개만 포함된 문자열이 선택될 확률은? [3점]

① $\frac{5}{8}$ ② $\frac{41}{64}$ ③ $\frac{21}{32}$ ④ $\frac{43}{64}$ ⑤ $\frac{11}{16}$

전체 경우의 수 $= 4^4 = 256$

구하는 경우의 수

$=$ (a가 하나만 포함) $+$ (b가 하나만 포함)

$-$ (a와 b가 하나씩 포함)

$\square\ \square\ \square\ \square$

- a가 하나만 포함되는 경우의 수는 4개의 자리 중 한 자리에 a를 배치하고 나머지 세 자리에 b, c, d를 중복을 허락하여 나열하는 방법의 수와 같으므로

$4\times 3^3 = \underline{108\text{가지}}$

- b가 하나만 포함되는 경우의 수도 같음

$4\times 3^3 = \underline{108\text{가지}}$

- a와 b가 하나씩 포함되는 경우의 수는 4개의 자리 중 두 자리에 a와 b를 하나씩 배치하고 나머지 두 자리에 c, d를 중복을 허락하여 배치하는 경우의 수이므로 ${}_4P_2 \times 2^2 = \underline{48\text{가지}}$

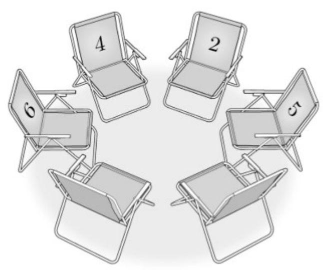
이상으로 구하는 경우의 수는 $108+108-48=168$가지

이므로 구하는 확률은 $\frac{168}{256}=\frac{21}{32}$

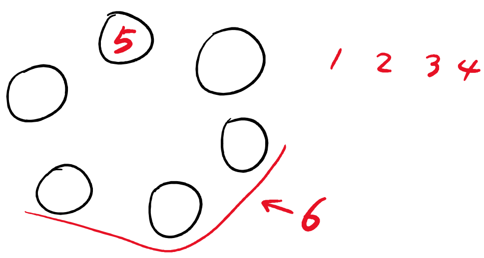
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 합이 11이 되지 않도록 배열하는 경우의 수는?
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96



5와 6이 이웃하지 않으면 됨



- 5를 아무데나 배치 → 1가지
- 6을 5와 이웃하지 않도록 배치 → 3가지
- 1, 2, 3, 4를 아무렇게나 배치 → $4! = 24$가지

$\therefore 1 \times 3 \times 24 = 72$

28. 탁자 위에 놓인 4개의 동전에 대하여 다음 시행을 한다.

4개의 동전 중 임의로 한 개의 동전을 택하여 한 번 뒤집는다.

처음에 3개의 동전은 앞면이 보이도록, 1개의 동전은 뒷면이 보이도록 놓여 있다. 위의 시행을 5번 반복한 후 4개의 동전이 모두 같은 면이 보이도록 놓여 있을 때, 모두 앞면이 보이도록 놓여 있을 확률은? [4점]

① $\frac{17}{32}$ ② $\frac{35}{64}$ ③ $\frac{9}{16}$ ④ $\frac{37}{64}$ ⑤ $\frac{19}{32}$

(1) 모두 앞면이 보이도록 놓이는 경우의 수

A, B, C는 각각 짝수 번(또는 0번), D는 홀수 번 뒤집는다.

(i) D를 한 번만 뒤집는 경우

– A, B, C 중 하나만 4번 뒤집는 경우의 수 : $\underbrace{{}_3C_1}_{\text{A, B, C중 하나만 선택}} \times \underbrace{\frac{5!}{4!}}_{\text{ex) AAAAD 나열하는 방법의수}} = 15$

– A, B, C 중 두 동전이 2번씩 뒤집는 경우의 수 : $\underbrace{{}_3C_2}_{\text{A, B, C중 두 개 선택}} \times \underbrace{\frac{5!}{2!2!}}_{\text{ex) AABBD 나열하는 방법의 수}} = 90$

(ii) D를 3번 뒤집는 경우

– A, B, C 중 하나만 2번 뒤집는 경우의 수 : ${}_3C_1 \times \frac{5!}{3!2!} = 30$

(iii) D를 5번 뒤집는 경우

– A, B, C를 뒤집지 않는 경우의 수 : 1가지

이상으로 모두 앞면이 보이도록 뒤집는 경우의 수는

$15 + 90 + 30 + 1 = \boxed{136}$

(2) 모두 뒷면이 보이도록 놓이는 경우의 수

(1)과 반대로 A, B, C는 홀수 번씩, D는 짝수번(또는 0번) 뒤집는다.

(i) D를 안 뒤집는 경우

– A, B, C 중 하나는 3번, 나머지 둘은 1번만 뒤집는 경우의 수

: ${}_3C_1 \times \frac{5!}{3!} = 60$

(ii) D를 2번 뒤집는 경우

– A, B, C를 각각 1번씩 뒤집는 경우의 수 : $\frac{5!}{2!} = 60$

(iii) D를 4번 뒤집는 경우

– A, B, C를 적어도 한 번 뒤집어야 하는데 그럴 수 없음 : 0 가지

이상으로 모두 뒷면이 보이도록 뒤집는 경우의 수는 $60 + 60 = \boxed{120}$

따라서 구하는 확률은 $\frac{136}{136 + 120} = \frac{17}{32}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

단답형

29. 40개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 각각의 공은 흰 공 또는 검은 공 중 하나이다.
이 주머니에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낼 때, 흰 공 2개를 꺼낼 확률을 p, 흰 공 1개와 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 q, 검은 공 2개를 꺼낼 확률을 r이라 하자. $p=q$일 때, $60r$의 값을 구하시오. (단, $p>0$) [4점] 6

흰 공의 개수를 n이라 하자.

$p=\dfrac{{}_nC_2}{{}_{40}C_2}$ 이고 $q=\dfrac{{}_nC_1\times{}_{40-n}C_1}{{}_{40}C_2}$

이므로 $p=q$이면

$${}_nC_2={}_nC_1\times{}_{40-n}C_1$$

$$\frac{\cancel{n}(n-1)}{2}=\cancel{n}(40-n) \qquad \therefore n=27$$

따라서 검은 공은 $40-27=13$개이므로

$$r=\frac{{}_{13}C_2}{{}_{40}C_2}=\frac{\cancel{13}\times\cancel{12}}{\cancel{40}\times\cancel{39}}=\frac{1}{10} \text{ 이다.}$$

$$\therefore 60r=6$$

30. 집합 $X=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f: X\to X$의 개수를 구하시오. [4점] 108

(가) X의 모든 원소 x에 대하여 $x+f(x)\in X$이다.
(나) $x=-2,\ -1,\ 0,\ 1$일 때 $f(x)\geq f(x+1)$이다.

(가) 조건에 의해

x	가능한 $f(x)$ 값
-2	$0,\ 1,\ 2$
-1	$-1,\ 0,\ 1,\ 2$
0	$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$
1	$-2,\ -1,\ 0,\ 1$
2	$-2,\ -1,\ 0$

(나) 조건에 대해 케이스 분류를 시행하자.

(i) $f(-2)=2$일 때

(나) 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_5H_4=70$

그러나 (가) 조건에 의해 다음과 같은 경우는 제외해야 한다.

$\underbrace{2,\ \overset{\times}{-2},\ -2,\ -2,\ -2}_{1가지}$ $\quad$ $\underbrace{2,\ 2,\ 2,\ \overset{\times}{2},\ \square}_{5가지}$

$\underbrace{2,\ (1\text{또는 }2),\ (1\text{또는 }2),\ 1,\ 1}_{3가지}$ $\quad$ 9가지

$\Rightarrow 70-9=61$ 가지

(ii) $f(-2)=1$일 때

(나) 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_4H_4=35$

그러나 (가) 조건에 의해 다음과 같은 경우는 제외해야 한다.

$\underbrace{1,\ \overset{\times}{-2},\ -2,\ -2,\ -2}_{1가지}$ $\quad$ $\underbrace{1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \overset{\times}{1}}_{1가지}$ $\rightarrow$ 2가지

$\Rightarrow 35-2=33$가지

(iii) $f(-2)=0$일 때

(나) 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는 ${}_3H_4=15$

그러나 (가) 조건에 의해 다음과 같은 경우는 제외해야 한다.

$\underbrace{0,\ \overset{\times}{-2},\ -2,\ -2,\ -2}_{1가지}$ $\rightarrow$ 1가지

$\Rightarrow 15-1=14$가지

이상으로 조건을 만족시키는 함수의 개수는

$$61+33+14=108$$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

2025학년도 6월 모평 수학 풀이 (미적분)

2024년 6월 15일 토요일 오후 7:58

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

분자·분모에 2^n을 곱하면

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1 + \cancel{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n} \to 0}{\frac{1}{2} + \cancel{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \to 0} = 2$$

24. 곡선 $x\sin 2y + 3x = 3$ 위의 점 $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

양변을 x에 대하여 미분하면

$$\sin 2y + 2x\cos 2y \cdot \frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

이 등식에 $x=1$, $y=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$$\sin\pi + 2\cos\pi \cdot \frac{dy}{dx} + 3 = 0$$

$$-2\frac{dy}{dx} + 3 = 0 \qquad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}$$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=2$$

를 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2+2a_n\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{17}{4}$ ② $\frac{19}{4}$ ③ $\frac{21}{4}$ ④ $\frac{23}{4}$ ⑤ $\frac{25}{4}$

주어진 급수가 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-\frac{3n^2-n}{2n^2+1}\right)=0$ 이다.

$\lim_{n\to\infty}a_n-\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n}{2n^2+1}}_{\frac{3}{2}}=0$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$ 이다.

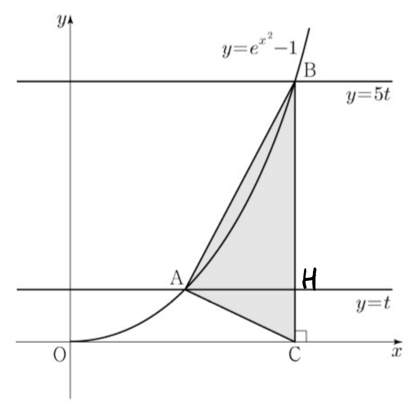
따라서 $\lim_{n\to\infty}\left(a_n^2+2a_n\right)$

$=\left(\frac{3}{2}\right)^2+2\cdot\frac{3}{2}=\frac{21}{4}$

26. 양수 t에 대하여 곡선 $y=e^{x^2}-1\ (x\geq 0)$이 두 직선 $y=t$, $y=5t$와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 $S(t)$라 할 때, $\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{4}(\sqrt{5}-1)$ ② $\frac{5}{2}(\sqrt{5}-1)$ ③ $5(\sqrt{5}-1)$

④ $\frac{5}{4}(\sqrt{5}+1)$ ⑤ $\frac{5}{2}(\sqrt{5}+1)$



점 A의 x좌표를 a라 하면

$e^{a^2}-1=t$ 이므로 $a=\sqrt{\ln(1+t)}$

점 B의 x좌표를 b라 하면

$e^{b^2}-1=5t$ 이므로 $b=\sqrt{\ln(1+5t)}$

따라서

$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 5t\cdot(b-a)$

$=\frac{5t}{2}\cdot\left(\sqrt{\ln(1+5t)}-\sqrt{\ln(1+t)}\right)$ 이므로

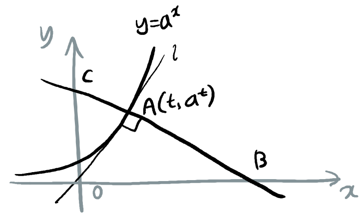
$\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}=\frac{5}{2}\left(\sqrt{\frac{\ln(1+5t)}{t}}-\sqrt{\frac{\ln(1+t)}{t}}\right)$ 이다.

따라서 $\lim_{t\to 0+}\frac{S(t)}{t\sqrt{t}}=\frac{5}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 상수 $a\,(a>1)$과 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 곡선 $y=a^x$ 위의 점 $\mathrm{A}(t,\,a^t)$에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 직선 l에 수직인 직선이 x축과 만나는 점을 B, y축과 만나는 점을 C라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값이 $t=1$에서 최대일 때, a의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{e}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2e}$ ⑤ e



직선 l의 기울기는 $a^t \ln a$ 이므로

이에 수직이고 점 A를 지나는 직선의 방정식은

$$y = -\frac{1}{a^t \ln a}(x-t) + a^t$$

따라서 점 B의 x좌표는 $t + a^{2t}\ln a$ 이다.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{A와 C의 } x\text{좌표 차}}{\text{A와 B의 } x\text{좌표 차}} = \frac{t}{a^{2t}\ln a}$$

이다. $t=1$에서 이 값이 최대라고 했으니, $t=1$에서 미분계수가 0임을 추론할 수 있다. 미분해보면

$$\frac{a^{2t}\ln a - t\cdot 2a^{2t}(\ln a)^2}{(a^{2t}\ln a)^2}$$

이고, $t=1$일 때 이 값이 0이므로

$$a^2\ln a - 2a^2(\ln a)^2 = 0$$

$$1 - 2\ln a = 0$$

$$\ln a = \frac{1}{2} \qquad \therefore a = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

28. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases}(x-a-2)^2e^x & (x\ge a)\\ e^{2a}(x-a)+4e^a & (x<a)\end{cases}$$

일 때, 실수 t에 대하여 $f(x)=t$를 만족시키는 x의 최솟값을 $g(t)$라 하자.

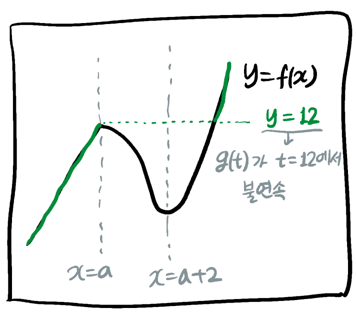
함수 $g(t)$가 $t=12$에서만 불연속일 때, $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))}$의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $6e^4$ ② $9e^4$ ③ $12e^4$ ④ $8e^6$ ⑤ $10e^6$

$\lim_{x\to a-} f(x) = \lim_{x\to a+} f(x) = 4e^a$ 이므로 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다.

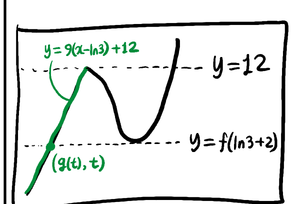
$$f'(x) = \begin{cases}(x-a-2)(x-a)e^x & (x\ge a)\\ e^{2a} & (x<a)\end{cases}$$

위 미분 결과에 따르면, 함수 $f(x)$는 구간 $(a, a+2)$ 에서만 감소하고 그 외에서는 증가한다.



$y=f(x)$의 그래프의 개형은 왼쪽 그림과 같다. 그림에 따르면 $f(a)=12$이므로 $4e^a=12$이다.
따라서 $a=\ln 3$이다.

$$f(x) = \begin{cases}(x-\ln3-2)^2e^x & (x\ge \ln3)\\ 9(x-\ln3)+12 & (x<\ln3)\end{cases}$$

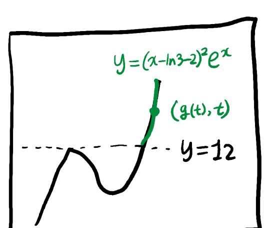


$f_1(x) = 9(x-\ln3)+12$라 하면

$t<12$일 때 $g(t)$는 $f_1(t)$의 역함수이다.

따라서 $g'(t) = \dfrac{1}{f_1'(g(t))} = \dfrac{1}{9}$ $(t<12)$이다.

$f(\ln3+2)<12$이므로 $g'(f(\ln3+2)) = \frac{1}{9}$ 이다.



$f_2(x) = (x-\ln3-2)^2e^x$라 하면

$t>12$일 때 $g(t)$는 $f_2(t)$의 역함수이다.

따라서 $g'(t) = \dfrac{1}{f_2'(g(t))}$ $(t>12)$이다.

$f(\ln3+6)>12$이므로 $g'(f(\ln3+6))$을 계산하면

$$g'(f(\ln3+6)) = \frac{1}{f_2'(g(\ln3+6))} = \frac{1}{\underbrace{f_2'(\ln3+6)}} = \frac{1}{72e^6}$$

* $f_2'(x) = (x-\ln3-2)(x-\ln3)e^x$

$$\therefore g'(f(a+6)) = \frac{1}{72e^6}$$

따라서 $\dfrac{g'(f(a+2))}{g'(f(a+6))} = \dfrac{1}{9}\times 72e^6 = 8e^6$

단답형

29. 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+\ln(1+x^2)+a$ (a는 상수)와 두 양수 b, c에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \ge b) \\ -f(x-c) & (x < b) \end{cases}$$

는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다. $a+b+c=p+q\ln 2$일 때, $30(p+q)$의 값을 구하시오. (단, p, q는 유리수이고, $\ln 2$는 무리수이다.) [4점] 55

$$f'(x)=x^2-2x+\frac{2x}{1+x^2}=\frac{x^4-2x^3+x^2}{1+x^2}$$

$$=\frac{x^2(x-1)^2}{1+x^2}$$

이므로 모든 실수 x에 대해 $f'(x)\ge 0$ 이다.

따라서 $g(x)$가 $x=b$ 에서 미분가능하려면

$$f'(b)=-f'(b-c)=0$$

을 만족시켜야 한다.

$f'(x)=0$ 의 해는 $x=0$ 또는 $x=1$이고

b와 c는 모두 양수이므로 $b=1$, $c=1$이면 주어진 조건을 모두 만족시킬 수 있다.

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면 $f(1)=-f(0)$을 만족시켜야 하므로 $-\frac{2}{3}+\ln 2+a=-a$ 이다.

$$\therefore a=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2$$

따라서 $a+b+c=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 2\right)+1+1$

$=\frac{7}{3}-\frac{1}{2}\ln 2$ 이다.

$p=\frac{7}{3}$, $q=-\frac{1}{2}$이므로 $30(p+q)=70-15=55$

30. 함수 $y=\frac{\sqrt{x}}{10}$의 그래프와 함수 $y=\tan x$의 그래프가 만나는 모든 점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자.

$$\frac{1}{\pi^2}\times\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)$$

의 값을 구하시오. [4점] 25

$$\tan(a_{n+1}-a_n)=\frac{\tan a_{n+1}-\tan a_n}{1+\tan a_{n+1}\tan a_n}$$

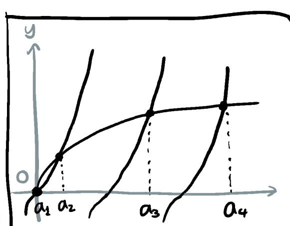
$$=\frac{\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}-\frac{\sqrt{a_n}}{10}}{1+\frac{\sqrt{a_{n+1}}}{10}\cdot\frac{\sqrt{a_n}}{10}}$$

$$=\frac{10(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})}{100+\sqrt{a_{n+1}}\sqrt{a_n}}$$

$$=\frac{10(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})}{(100+\sqrt{a_{n+1}}\sqrt{a_n})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})}$$

$$=\frac{10(a_{n+1}-a_n)}{(100+\sqrt{a_{n+1}}\sqrt{a_n})(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{100(a_{n+1}-a_n)^2a_n^3}{(100+\sqrt{a_{n+1}}\sqrt{a_n})^2(\sqrt{a_{n+1}}+\sqrt{a_n})^2}$$



$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\pi$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{100(\overset{\to\pi}{a_{n+1}-a_n})^2}{\left(\underset{\to 0}{\frac{100}{a_n}}+\underset{\to 1}{\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}}\right)^2\left(\underset{\to 1}{\sqrt{\frac{a_{n+1}}{a_n}}}+1\right)^2}$$

$$=\frac{100\pi^2}{(0+1)^2(1+1)^2}=25\pi^2$$

$$\therefore\frac{1}{\pi^2}\lim_{n\to\infty}a_n^3\tan^2(a_{n+1}-a_n)=25$$

∗ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(기하)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

2025학년도 6월 모평 수학 풀이 (기하)

2024년 6월 15일 토요일 오후 7:58

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}+3(\vec{a}-\vec{b})=k\vec{a}-3\vec{b}$$

이다. 실수 k의 값은? (단, $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$) [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\vec{a}+3\vec{a}-3\vec{b}=\underline{4}\vec{a}-3\vec{b}$$

$\therefore k=4$

24. 타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $(3, \sqrt{5})$에서의 접선의 y절편은? (단, b는 양수이다.) [3점]

① $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $\frac{5}{2}\sqrt{5}$ ④ $3\sqrt{5}$ ⑤ $\frac{7}{2}\sqrt{5}$

타원의 방정식에 $x=3$, $y=\sqrt{5}$를 대입하면

$$\frac{1}{2}+\frac{5}{b^2}=1 \qquad \therefore b^2=10$$

타원 $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{10}=1$ 위의 점 $(3,\sqrt{5})$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{3x}{18}+\frac{\sqrt{5}y}{10}=1$$

따라서 $x=0$이면 $y=2\sqrt{5}$이므로 y절편은 $2\sqrt{5}$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

25. 좌표평면에서 두 벡터 $\vec{a}=(-3,\ 3)$, $\vec{b}=(1,\ -1)$에 대하여 벡터 $\vec{p}$가

$$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{b}|$$

를 만족시킬 때, $|\vec{p}-\vec{b}|$의 최솟값은? [3점]

① $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}\sqrt{2}$

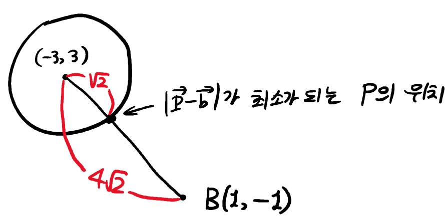
$\vec{p}=(x,y)$라 하자.

$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{b}|$ 이므로 $|(x+3,\ y-3)|=|(1,-1)|$

$(x+3)^2+(y-3)^2=2$

따라서 점 (x,y)는 중심이 $(-3,3)$이고

반지름의 길이가 $\sqrt{2}$인 원 위의 점이다.

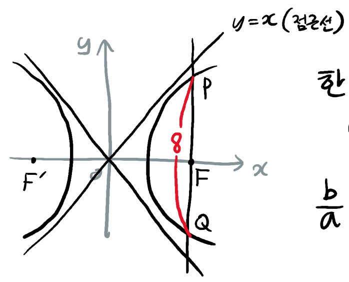


$|\vec{p}-\vec{b}|$의 최솟값은 위 그림에서 나타낸 것처럼

$4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$

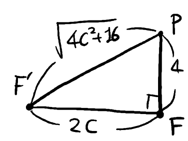
26. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 한 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)\ (c>0)$을 지나고 y축에 평행한 직선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 쌍곡선의 한 점근선의 방정식이 $y=x$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=8$일 때, $a^2+b^2+c^2$의 값은? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72



한 점근선의 방정식이 $y=x$ 이므로

$\frac{b}{a}=\pm 1$ $\therefore a=b$ $(\because a>0,\ b>0)$



$2a=\sqrt{4c^2+16}-4$ 이므로

$(2a+4)^2=\left(\sqrt{4c^2+16}\right)^2$

$4a^2+16a+16=4c^2+16$

$c^2=a^2+b^2=a^2+a^2=2a^2$

$4a^2+16a+16=8a^2+16$

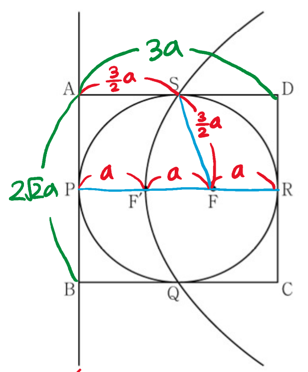
$4a^2=16a$ $\therefore a=4$

따라서 $a^2=16$, $b^2=16$, $c^2=32$이므로

$a^2+b^2+c^2=64$

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

27. 그림과 같이 직사각형 ABCD의 네 변의 중점 P, Q, R, S를 꼭짓점으로 하는 타원의 두 초점을 F, F′이라 하자. 점 F를 초점, 직선 AB를 준선으로 하는 포물선이 세 점 F′, Q, S를 지난다. 직사각형 ABCD의 넓이가 $32\sqrt{2}$일 때, 선분 FF′의 길이는? [3점]



① $\frac{7}{6}\sqrt{3}$ ② $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ ③ $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ ④ $\frac{5}{3}\sqrt{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}\sqrt{3}$

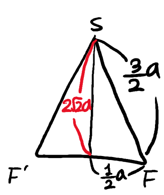
$\overline{F'F} = a$라 하자.

포물선의 정의에 의해 $\overline{F'P} = \overline{F'F} = a$이다.

타원의 성질에 의해 $\overline{FR} = \overline{F'P} = a$이다.

$\overline{AS} = \frac{1}{2}\overline{AD} = \frac{1}{2} \times 3a = \frac{3}{2}a$ 이고,

포물선의 정의에 의해 $\overline{SF} = \overline{SA} = \frac{3}{2}a$ 이다.



피타고라스의 정리에 의해 삼각형 SF′F의 높이는 $\sqrt{2}a$ 이므로 $\overline{AB} = 2\sqrt{2}a$ 이다.

사각형 ABCD의 넓이는 $\overline{AB} \times \overline{AD} = 2\sqrt{2}a \times 3a$
$= 6\sqrt{2}a^2$

따라서 $6\sqrt{2}a^2 = 32\sqrt{2}$ 이므로 $a^2 = \frac{16}{3}$이다.

$a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ 이므로 $\overline{F'F} = a = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

28. 좌표평면에서 두 점 A(1, 0), B(1, 1)에 대하여 두 점 P, Q가

$$|\overrightarrow{OP}| = 1, \quad |\overrightarrow{BQ}| = 3, \quad \overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QP}) = 0$$

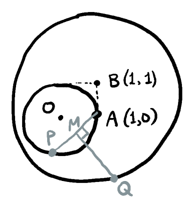
을 만족시킨다. $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최소가 되도록 하는 두 점 P, Q에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ}$의 값은?
(단, O는 원점이고, $|\overrightarrow{AP}| > 0$이다.) [4점]

① $\frac{6}{5}$ ② $\frac{9}{5}$ ③ $\frac{12}{5}$ ④ 3 ⑤ $\frac{18}{5}$

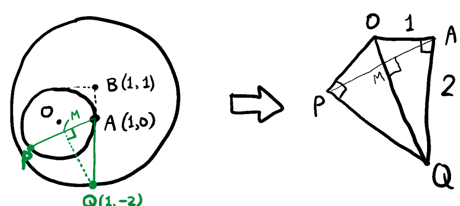
$|\overrightarrow{OP}| = 1$ 이므로 점 P는 점 O를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있고, $|\overrightarrow{BQ}| = 3$이므로 점 Q는 점 B를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 원 위에 있다.

$\overline{AP}$의 중점을 M이라 하면 $\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{QM}$ 이므로
$\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QP}) = 0$이면 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{QM} = 0$ 이다. 즉, $\overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{QM}$ 이다.

지금까지의 내용을 종합하여 그림으로 그리면 다음과 같다



$|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 최소가 된다고 했는데, 왼쪽 그림에서 $\overline{PM} = \overline{AM}$이므로 피타고라스의 정리에 의해 $\overline{PQ} = \overline{AQ}$이다. 따라서 $|\overrightarrow{PQ}|$를 최소가 되도록 하려면 $|\overrightarrow{AQ}|$를 최소로 만들면 된다.



$\overline{OQ} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

위 그림에서 $\sin(\angle OQA) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로

$\overline{AP} = 2\overline{AM} = 2\overline{AQ}\sin(\angle OQA) = \frac{4\sqrt{5}}{5}$ 이다.

$\overline{BQ} = 3$이고

두 벡터 $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{BQ}$가 이루는 각 $\angle PAQ$에 대하여
$\cos(\angle PAQ) = \frac{\sqrt{5}}{5}$ 이므로
$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = |\overrightarrow{AP}||\overrightarrow{BQ}|\cos(\angle PAQ)$
$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{12}{5}$

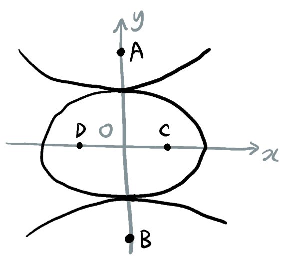
이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.

단답형

29. 좌표평면에 곡선 $|y^2-1| = \frac{x^2}{a^2}$ 과 네 점 A$(0, c+1)$, B$(0, -c-1)$, C$(c, 0)$, D$(-c, 0)$이 있다. 곡선 위의 점 중 y좌표의 절댓값이 1보다 작거나 같은 모든 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PC}} + \overline{\mathrm{PD}} = \sqrt{5}$ 이다. 곡선 위의 점 Q가 제1사분면에 있고 $\overline{\mathrm{AQ}} = 10$ 일 때, 삼각형 ABQ의 둘레의 길이를 구하시오. (단, a와 c는 양수이다.) [4점] 25

곡선 $|y^2-1| = \frac{x^2}{a^2}$ 을 풀어 쓰면

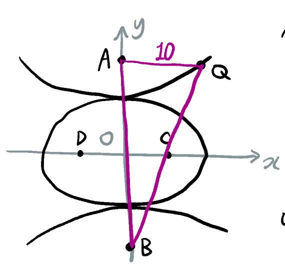
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - y^2 = -1 & (|y| \geq 1 \text{ 일 때}) \ (\because |y^2-1| = y^2-1) \quad \text{쌍곡선} \\ \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 & (|y| < 1 \text{ 일 때}) \ (\because |y^2-1| = -y^2+1) \quad \text{타원} \end{cases}$$



|점 P의 y좌표| ≤ 1이므로 점 P는 왼쪽 그림의 타원 위에 있다. 그리고 $\overline{\mathrm{PC}} + \overline{\mathrm{PD}}$의 값이 $\sqrt{5}$로 일정하기 때문에 점 C, D는 타원의 초점임을 알 수 있다.

그리고 이때 $2a = \sqrt{5}$이므로 $a = \frac{\sqrt{5}}{2}$이고, $c = \sqrt{a^2-1} = \frac{1}{2}$이다.

$\overline{\mathrm{AQ}} = 10$ 이라고 했는데, 점 Q가 타원 위에 있으면 $\overline{\mathrm{AQ}} = 10$이 될 수 없다.
따라서 점 Q는 쌍곡선 위에 있다.



쌍곡선 $\frac{x^2}{\left(\frac{5}{4}\right)} - y^2 = -1$ 의 두 초점은 $\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$인데 이는 각각 점 A, B와 일치한다. $\left(\because c = \frac{1}{2}\right)$
따라서 점 A, B는 쌍곡선의 두 초점이다.

쌍곡선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{BQ}} - \overline{\mathrm{AQ}} = 2$이므로 $\overline{\mathrm{BQ}} = 12$
↳ 쌍곡선식 우변이 −1이므로 두 변의 길이 차는 2a가 아니라 2b이다.

그리고 $\overline{\mathrm{AB}} = \frac{3}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right) = 3$이므로

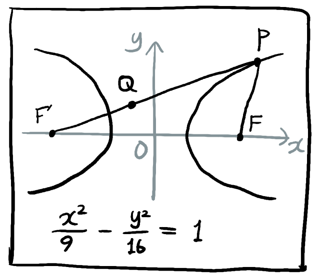
삼각형 ABQ의 둘레의 길이는

$$\overline{\mathrm{AQ}} + \overline{\mathrm{BQ}} + \overline{\mathrm{AB}} = 10 + 12 + 3 = 25$$

30. 두 초점이 F$(5, 0)$, F$'(-5, 0)$이고, 주축의 길이가 6인 쌍곡선이 있다. 쌍곡선 위의 $\overline{\mathrm{PF}} < \overline{\mathrm{PF'}}$ 인 점 P에 대하여 점 Q가

$$(|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|+1)\overrightarrow{\mathrm{F'Q}} = 5\overrightarrow{\mathrm{QP}}$$

를 만족시킨다. 점 A$(-9, -3)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$ 의 최댓값을 구하시오. [4점] 10



$(|\overrightarrow{\mathrm{FP}}|+1)\overrightarrow{\mathrm{F'Q}} = 5\overrightarrow{\mathrm{QP}}$
이므로 $\overrightarrow{\mathrm{F'Q}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{QP}}$의 방향은 같다.
따라서 왼쪽 그림처럼 점 Q는 선분 F'P 위에 있다.

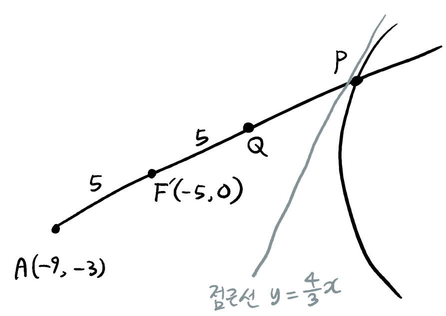
그리고 $\overline{\mathrm{F'P}} : \overline{\mathrm{PQ}} = 5 : (\overline{\mathrm{FP}}+1)$ 이다.

주축의 길이가 6이므로 $\overline{\mathrm{F'P}} = \overline{\mathrm{FP}} + 6$ 인데,

$\overline{\mathrm{F'Q}} : \overline{\mathrm{QP}} = 5 : (\overline{\mathrm{FP}}+1)$ 이므로

$$\overline{\mathrm{F'Q}} = \frac{5}{\cancel{5 + (\overline{\mathrm{FP}}+1)}} \cancel{\overline{\mathrm{F'P}}} = 5 \text{ 이다.}$$

즉, 선분 F'Q의 길이는 항상 5로 고정된다.



$\overline{\mathrm{AF'}} = 5$, $\overline{\mathrm{F'Q}} = 5$로 길이가 고정되어 있기 때문에
세 점 A, F', Q가 일직선 위에 존재할 수 있다고 가정하면
$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}|$가 10으로 최댓값을 가지게 된다.

그런데 점 Q가 직선 AF' 위에 존재하는 것이 가능할까?
쌍곡선의 한 점근선의 기울기는 $\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$이고, 직선 AF'의 기울기는 이보다 작은 $\frac{3}{4}$이므로 직선 AF'와 쌍곡선이 제1사분면에서 만나는 점 P가 존재한다. 따라서 직선 AF' 위에 $\overline{\mathrm{F'Q}} = 5$인 점 Q가 존재할 수 있다.

이 문제지에 관한 저작권은 한국교육과정평가원에 있습니다.