[문제]

주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 2부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 7장의 카드가 들어 있다. 이때 다음과 같은 시행을 한다,

- 한 개의 주사위를 던져서 나온 눈의 수가 3의 배수이면 주머니 A를 선택하고, 아니면 주머니 B를 선택한다.
- 선택한 주머니에서 두 장의 카드를 동시에 꺼낸다.
- 두 장의 카드에 적힌 수 중 작은 수를 a, 큰 수를 b라고 할 때, a와 b가 $b^3-6ab^2+11a^2b-6a^3=0$을 만족하면 $\dfrac{b}{a}$점의 점수를 획득하고, 그렇지 않으면 $b-a$점의 점수를 획득한다.

위의 시행을 한 번 할 때, 획득하는 점수의 기댓값을 구하시오. [20점]

$b^3-6ab^2+11a^2b-6a^3=0$를 인수분해해보면
$(b-a)(b-2a)(b-3a)=0$인데, 한 주머니에서 똑같은 숫자를 꺼낼 수는 없으므로 우리가 찾아야 하는 경우는 $b=2a$, $b=3a$이다.

$\frac{b}{a}$점수를 얻는 사건을 P, $b-a$점수를 얻는 사건을 Q라 하자.

한 개의 주사위를 던져 A주머니를 선택할 확률은 $\frac{1}{3}$, B주머니를 선택할 확률은 $\frac{2}{3}$이다.

P사건부터 먼저 고려해보자.
A주머니에서 P를 만족시키는 카드를 뽑는 순서쌍은 $(1,2)$, $(1,3)$이다.

이 때 각각 점수는 2점, 3점이고 1, 2, 3 의 카드3장 중 2장을 뽑는 확률은 전부 $\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}=\frac{1}{3}$

이고 A주머니를 선택하는 확률도 고려하면 이때의 점수×확률은

$2\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$이다.

B주머니에서 P를 만족시키는 카드를 뽑는 순서쌍은 $(2,4)$, $(2,6)$, $(3,6)$, $(4,8)$

이때의 점수와 2 ~ 8 중 2장을 뽑는 확률은 $\frac{{}_2C_2}{{}_7C_2}=\frac{1}{21}$이고 B주머니를 선택하는 확률도 고려하면 이때의 점수×확률은

$2\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{21}\times3+3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{21}\times1=\frac{6}{21}=\frac{2}{7}$이다.

이제 Q사건을 고려해보자.
A주머니에서 Q사건을 만족하는 경우는 $(2,3)$ 뿐이므로 이때의 점수×확률은

$1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

B주머니에서 Q사건을 만족하는 경우는 너무 경우의 수가 많으므로 표로 나열해보자.

$b-a$	순서쌍	경우의 수	점수×확률
6	$(8,2)$	1	$6\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{21}=\frac{12}{63}$
5	$(8,3)$, $(7,2)$	2	$5\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{21}=\frac{20}{63}$
4	(7.3)	1	$4\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{21}=\frac{8}{63}$
3	$(8,5)$, $(7,4)$, $(5,2)$	3	$3\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{21}=\frac{18}{63}$
2	$(8,6)$, $(7,5)$, $(6,4)$, $(5,3)$	4	$2\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{21}=\frac{16}{63}$
1	$(8,7)$, $(7,6)$, $(6,5)$, $(5,4)$, $(4,3)$, $(3,2)$	6	$1\times\frac{2}{3}\times\frac{6}{21}=\frac{12}{63}$

따라서 구하는 기댓값은

$$\frac{5}{9}+\frac{2}{7}+\frac{1}{9}+\frac{12+20+8+18+16+12}{63}=\frac{35+18+7+86}{63}=\frac{146}{63}$$

[문제]

다음을 읽고 문제에 답하시오.

> • 수열을 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.
>
> • 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.
>
> • 탄젠트함수의 덧셈정리는 다음과 같다.
>
> $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta},\ \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

(1) 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=2$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-4 & (a_n>0) \\ a_n & (a_n=0) \\ a_n+d & (a_n<0) \end{cases}\quad (\text{단, } d\text{는 자연수})$$

이다. 다음 성질을 만족하는 자연수 d를 모두 구하시오. [10점]

> $a_m=0$을 만족하는 m의 최솟값은 7이다.

(2) n이 자연수일 때, y축 위의 점 $(0,\ n)$에서 곡선 $y=\ln x$에 그은 접선을 l_n이라 하고, l_n이 x축의 양의 방향과 이루는 각도를 θ_n이라 하자. x축과 l_n, l_{n+1}로 둘러싸인 삼각형의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n\tan(\theta_n-\theta_{n+1})}{n^2}$을 구하시오. [15점]

(1)

$a_m = 0$이므로 6번의 시행 이후 a_n이 처음으로 0이 된다.

따라서 0에 도달하기 전까지 4가 빠지는 횟수를 t라 하면 d가 더해지는 횟수를 $6-t$라 할 수 있다,

따라서 이를 이용하면 $a_1 - 4t + d(6-t) = 0$ 이고 정리해주면 $(4+d)(6-t) = 22$

(t, d)의 가능한 자연수 순서쌍은 $(4, 7)$, $(18, 5)$이므로 d가 가능한 자연수는 7, 18이다.

실제로 확인해보면 아래와 같다.

$d = 7$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
2	-2	5	1	-3	4	0	0	0	0

$d = 18$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
2	-2	16	12	8	4	0	0	0	0

(2)

l_n은 점$(0, n)$에서 그은 접선의 방정식이므로 구해보면

$l_n : y = e^{-(n+1)}x + n$을 얻는다.

마찬가지로 l_n에 n대신 $n+1$을 대입하면

$l_{n+1} : y = e^{-(n+2)}x + n + 1$을 얻는다.

$\tan\theta_n = e^{-(n+1)}$이고 $\tan\theta_{n+1} = e^{-(n+2)}$이므로

$\tan(\theta_n - \theta_{n+1}) = \dfrac{e^{-(n+1)} - e^{-(n+2)}}{1 + e^{-(2n+3)}}$을 얻는다.

l_n과 l_{n+1}의 교점을 구해보면 $\left(\dfrac{e^{n+2}}{e-1}, \dfrac{1}{e-1} + n + 1\right)$을 얻고

S_n는 세 점 $\left(\dfrac{e^{n+2}}{e-1}, \dfrac{1}{e-1} + n + 1\right)$, $(0, n)$, $(0, n+1)$을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이이므로

$S_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{e-1} + n + 1\right) \times e^{n+1} \times ((n+1)e - n)$이다.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n \tan(\theta_n - \theta_{n+1})}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{e-1} + n + 1\right) \times e^{n+1} \times \{(n+1)e - n\} \times \frac{e^{-(n+1)} - e^{-(n+2)}}{1 + e^{-(2n+3)}}}{n^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e} - 2\right)$$

[문제]
다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 미분가능한 함수 $g(x)$의 도함수 $g'(x)$가 닫힌구간 $[a,\ b]$를 포함하는 열린구간에서 연속이고, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$에 대하여 함수 $f(x)$가 α와 β를 양끝으로 하는 닫힌구간에서 연속일 때, 다음 식이 성립한다.
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx=\int_\alpha^\beta f(t)dt$$
- 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는 다음과 같다.
$$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$
- 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고 $x=a$에서 극값을 가지면 $f'(a)=0$이다.

(1) 일반항이 $a_n=\displaystyle\int_1^e (x\ln x-x)^n \ln x\,dx$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2024} a_k a_{k+1}$을 구하시오. [10점]

(2) 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$가 $y^2-(x^2+x+1)y+x^3+x^2=0$을 만족한다. 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{B}(5,\ 0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2$의 최솟값을 구하시오. [15점]

(1)

$a_n = \int_1^e (x\ln x - x)^n \ln x \, dx$에서

$x\ln x - x = t$로 치환하면 $\ln x = \frac{dt}{dx}$이므로

$a_n = \int_1^e (x\ln x - x)^n \ln x \, dx = \int_{-1}^0 t^n dt = \frac{(-1)^n}{n+1}$

$\sum_{k=1}^{2024} a_k a_{k+1} = -\sum_{k=1}^{2024} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = -\left(\frac{1}{2026} - \frac{1}{2}\right)$

(2)

$y^2 - (x^2+x+1)y + x^3 + x^2 = (y-x^2)(y-x-1) = 0$

이므로 $y = x^2$ 이거나 $y = 1+x$

위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$ 의 x좌표를 t라 하자.

① P가 $y = x^2$ 위의 점일 때

$\mathrm{P}(x,\ y) = \mathrm{P}(t,\ t^2)$

$\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 = (t-1)^2 + t^2 + (t-5)^2 + t^4 = t^4 + t^2 - 6t + 13$

$t^4 + t^2 - 6t + 13 = f(t)$라 하면

$f'(t) = 2(t-1)(2t^2+2t+3)$

이고 $t < 1$에선 $f'(t) < 0$, $t > 1$에선 $f'(t) > 0$이므로

$t = 1$에서 $f(t)$는 최솟값 9를 가진다.

② P가 $y = x+1$위의 점일 때

$\mathrm{P}(x,\ y) = \mathrm{P}(t,\ t+1)$

$\overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 = (t-1)^2 + (t+1)^2 + (t-5)^2 + (t+1)^2$

$(t-1)^2 + (t+1)^2 + (t-5)^2 + (t+1)^2 = g(t)$라 하면

$g'(t) = 8t - 8$

$t < 1$에선 $g'(t) < 0$, $t > 1$에선 $g'(t) > 0$이므로

$t = 1$에서 $g(t)$는 최솟값 18를 가진다.

따라서 최솟값은 18이다.

[문제]

다음을 읽고 문제에 답하시오.

- 중심이 $(a,\ b,\ c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은
  $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$이다.

- 두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터의 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은
  $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$이다. (단, $a>c>0$, $b^2=a^2-c^2$)

- 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 직선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$이다.

(1) 구 $(x-3)^2+(y-4)^2+(z-5)^2=1$을 S라 하자. 중심이 구 S 위에 놓여있고 반지름의 길이가 7인 구가 xy평면, yz평면, zx평면과 만나서 이루는 세 원을 각각 C_1, C_2, C_3라 하자. C_1, C_2, C_3의 넓이의 합을 A라 할 때, $\dfrac{A}{\pi}$의 최솟값과 최댓값의 합을 구하시오. [15점]

(2) 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$인 타원 E가 다음의 두 조건을 만족한다.

(가) 타원 E 위의 두 점과 점 F를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 둘레의 최댓값이 $4\sqrt{10}$이다.
(나) 기울기가 $\sqrt{3}$이고 타원 E에 접하는 두 직선 사이의 거리가 6이다.

직선 $y=x+c$가 타원 E와 점 P, Q에서 만날 때, 삼각형 PQF의 넓이를 구하시오.
(단, $c>0$) [15점]

(1)
반지름의 길이가 7이고 중심이 구 S 위에 놓인 구를 S'라 하자.
A의 최댓값은 S'의 중심이 각각 xy, yz, zx평면과 거리가 제일 가까울 때, S'과 각각의 평면이 만나서 생기는 원 C_1, C_2, C_3의 합이며, 반대로 A의 최댓값은 S'의 중심이 각각 xy, yz, zx평면과 거리가 제일 멀때가 최소이다.
(예를들어, S 위의 한점을 중심으로 할 때, 이 점에서 xy평면에 내린 수선의 발은 원 C_1의 중심이 된다. 따라서, 구 S'의 반지름은 7이므로 원 C_1위의 임의의 한점과 H_1, S'의 중심으로 이루어진 삼각형은 직각삼각형이므로 이때 C_1의 반지름의 길이는
$\sqrt{49-(S'\text{중심의 } |z\text{좌표}|)^2}$ 이다. 따라서 C_1의 넓이는 S'의 중심의 z좌표가 xy평면으로부터 멀수록 최소, 가까울수록 최대이다)

x, y좌표에 대해서도 마찬가지이므로, 구 S위의 한 점을 (a, b, c)라 한다면
$A = 49 \times 3 - (a^2 + b^2 + c^2)$
최대, 최소는 원점으로부터 구 위의 점이 얼마나 멀리 떨어져 있냐 이므로
원중심 ~ 원점사이의 거리 : $\sqrt{3^2+4^2+5^2} = 5\sqrt{2}$
이고 여기서 반지름이 각각 더해지고 빠진 것이 최대, 최소이므로
최대 : $5\sqrt{2}-1$
최소 : $5\sqrt{2}+1$
이다.

2)

두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$인 타원 E의 방정식을 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$라 하자.

타원 E의 방정식에 접하는 기울기가 $\sqrt{3}$인 두 접선의 방정식을 구하면

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$에서 $m=\sqrt{3}$일 때이므로

$y=\sqrt{3}x\pm\sqrt{3}a^2+b^2$이다.

조건 (나)에서 이 두 직선사이의 거리가 6이므로 $y=\sqrt{3}x+\sqrt{3}a^2+b^2$위의 한 점

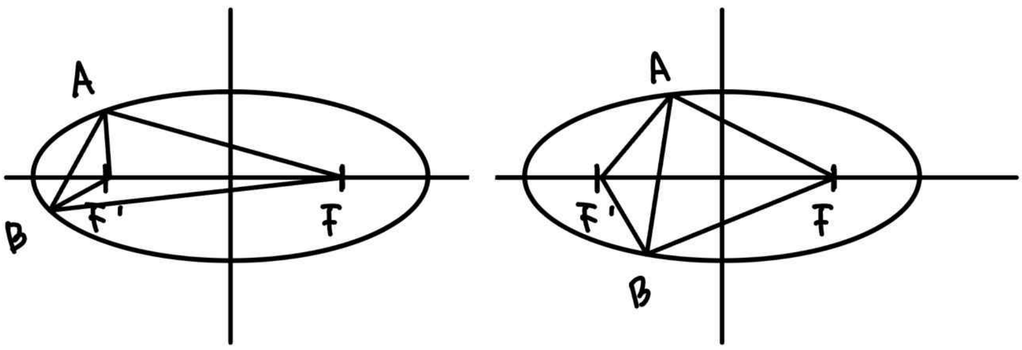
$\left(0,\ \sqrt{3a^2+b^2}\right)$에서 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}a^2+b^2=0$까지의 거리도 6이다.

즉, 점과 직선사이의 거리공식을 이용하면 $\dfrac{2\sqrt{3a^2+b^2}}{2}=6$이므로 $3a^2+b^2=36$

(이 다음이 어려운데, 무조건 타원의 정의를 사용한다는 생각을 가지고 접근해봐야 그나마 발상이 가능함)

(가) 타원 E 위의 두 점과 점 F를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 둘레의 최댓값이 $4\sqrt{10}$이다.

조건 (가)에서 타원위의 두 점을 각각 A, B라 하면 삼각형 FAB의 둘레의 최댓값은 $4\sqrt{10}$이다. 이 상황을 이해해보자.



최대인 상황을 관찰해보기 위하여 A와 B를 움직이다보면 $\overline{\mathrm{AB}}\le\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{F'B}}$임을 알 수 있다.

이 부등식의 양 변에 $\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{FB}}$을 더하면

$$\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{AB}}\le\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{F'B}}$$

을 얻고, 삼각형 둘레의 최댓값은 등호가 성립할 때이다.

이때 타원의 정의에 의하여

$$\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{FA}}+\overline{\mathrm{F'A}}+\overline{\mathrm{FB}}+\overline{\mathrm{F'B}}=2a$$

를 얻는다. $2a=4\sqrt{10}$이므로 $a=\sqrt{10}$, $b=\sqrt{6}$, $c=2$이다.

$y=x+2$와 타원 $\dfrac{x^2}{10^2}+\dfrac{y^2}{6^2}=1$을 연립하여 넓이를 구하면 $3\sqrt{5}$이다.