2025학년도 ㅊㅅㅇ 모의고사 6월 대비
정답 및 해설

ㅊㅅㅇ 모의고사 1회

[공통]

1	②	**2**	②	**3**	④	**4**	③	**5**	①
6	⑤	**7**	②	**8**	⑤	**9**	①	**10**	③
11	③	**12**	④	**13**	①	**14**	⑤	**15**	②
16	3	**17**	24	**18**	39	**19**	16	**20**	12
21	5	**22**	30						

[해설]

1. 정답 ②

$\sqrt[3]{40}\times 5^{\frac{2}{3}}=40^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}=(2^3\times 5)^{\frac{1}{3}}\times 5^{\frac{2}{3}}=2\times 5=10$

2. 정답 ②

$f'(x)=9x^2-4x+1$ 이므로 $f'(1)=9-4+1=6$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$$
$$=6$$

3. 정답 ④

각 θ는 제4사분면의 각이므로

$\cos\theta>0$, $\sin\theta<0$

$\tan\theta=-\dfrac{1}{2}$ 에서

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{1}{2}$

$4\sin^2=\cos^2\theta$

$4\sin^2\theta=1-\sin^2\theta$

$\sin^2\theta=\dfrac{1}{5}$

$\therefore\ \sin\theta=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}(\because\ \sin\theta<0)$

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ 이므로 구하는 값은 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

4. 정답 ③

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)=2$, $\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=1$ 이므로

$\lim\limits_{x\to -1+}f(x)+\lim\limits_{x\to 1-}f(x)=2+1=3$

5. 정답 ①

함수 $f(x)=2\cos ax$ 의 주기는 $\dfrac{2\pi}{a}$ 이고, 최댓값은 2이므로

$\dfrac{2\pi}{a}=4 \qquad \therefore\ a=\dfrac{\pi}{2}$

따라서 $f(x)=2\cos\dfrac{\pi}{2}x$ 이므로

$f(2)=2\cos\pi=-2$

6. 정답 ⑤

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}=\alpha$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\beta$라 할 때, $f(x)=\alpha x^2+\beta x$ 이다.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\{f(x)\}^3}{x^3}=\left\{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\right\}^3=8$ 이므로 $\beta=2$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\dfrac{f(x)}{x^2}+\dfrac{f(x)}{x^3}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x^3}=\alpha+0=8$

이므로 $\alpha=8$

따라서 $f(x)=8x^2+2x$, $f(1)=10$

7. 정답 ②

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{2n+1-k})=(a_1+a_{2n})+(a_2+a_{2n-1})+\cdots+(a_n+a_{n+1})$$
$$=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{2n-1}+a_{2n}$$

따라서

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k+a_{2n+1-k})=\sum_{k=1}^{2n}a_k=S_{2n}=4n^2+4n$$

a_n이 등차수열이므로 n대신 $\dfrac{n}{2}$ 대입해서 그냥 구하자.

$S_n=n^2+2n$

$a_n=2n+1$

따라서 $a_{10}=21$

8. 정답 ⑤

$(3^x+5)^2+9^x-a=2\times 9^x+10\times 3^x+25-a$

이고 $3^x=X$라 하면 $X>0$이다.

$X>0$에서 정의된 함수 $f(X)=2X^2+10X+25-a$의 대칭축이 음수이고 $f(X)>0$이어야 하므로

$f(0)=25-a\geq 0$

따라서 $a\leq 25$이므로 a의 최댓값은 25

9. 정답 ①

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+4 & (x<a) \\ tx & (x\geq a)\end{cases}$$

가 연속이 되려면 실수 a가 방정식 $x^2-2x+4=tx$의 근이고 $g(t)=1$이므로 방정식 $x^2-2x+4=tx$은 오직 하나의 근을 가져야 한다. 따라서

$x^2-(2+t)x+4=0$

$D=(2+t)^2-16=t^2+4t-12=0$

이므로 모든 t의 값의 곱은 -12

10. 정답 ③

$|x^{n+1}-2^{12}x|+|(-x)^n+k^n|=0$

$x^{n+1}=2^{12}x$ 이고, $(-x)^n+k^n=0$

(i) $n=2l$

$x^{2l+1}=2^{12}x$ 이고, $(-x)^{2l}+k^{2l}=0$

를 만족하는 해는 $k=0$일 때, $x=0$ 안됨

(ii) $n=2l-1$

$x^{2l}=2^{12}x$ 이고, $(-x)^{2l-1}+k^{2l-1}=0$

$x^{2l}=2^{12}x$ 에서 $x=2^{\frac{12}{2l-1}}$

$(-x)^{2l-1}+k^{2l-1}=0$ 에서 $x=k$

따라서 $2^{\frac{12}{2l-1}}+k=0$ 이고 $2^{\frac{12}{2l-1}}$ 는 자연수

$\therefore\ l=1,\ 2\ ,\ n=1,\ 3$

자연수 n값의 합은 $1+3=4$

11. 정답 ③

주어진 조건 $\frac{R_1}{2}=\frac{R_2}{3}$, $\overline{\mathrm{OC}}=3$ 에서 $\overline{\mathrm{BO}}=2$ 를 찾는다.

$\angle\mathrm{BAO}=\angle\mathrm{CAO}=\theta$라 할 때, $\angle\mathrm{BOC}=\frac{\pi}{2}+\theta$ 이므로

삼각형 BOC 에서 코사인법칙을 쓴다.

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{4+9-16}{2\times2\times3}=-\frac{1}{4}$$

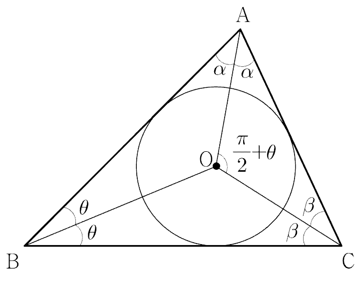
따라서 $\sin\theta=\frac{1}{4}$

사인법칙에 따라 $2R_1=\frac{2}{\sin\theta}$, $2R_2=\frac{3}{\sin\theta}$ 이므로

$$R_1\times R_2=\frac{3}{2\sin^2\theta}=24$$

<공부 Point>

삼각형에서 내접원을 생각할 때, 첫째는 '각'이다.
각각의 꼭짓점을 내심과 연결하면 각이 이등분된다.



$2(\theta+\alpha+\beta)=\pi$ 이므로

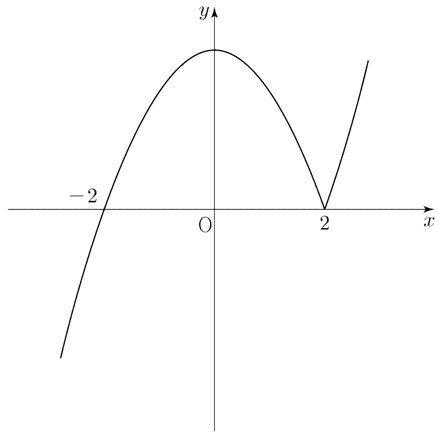
$\theta+\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$ ⇨ $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\theta$

12. 정답 ④

$|f(x)|=|3x^2+ax+b|$에서

$f(x)=3x^2+ax+b$ 또는 $f(x)=-(3x^2+ax+b)$

일 수 있는데 주어진 조건을 만족시키기 위해서는 함수 $f(x)$의그래프는 아래 그림과 같아야 한다.



따라서 $M=\frac{3}{6}\{2-(-2)\}^3=32$

13. 정답 ①

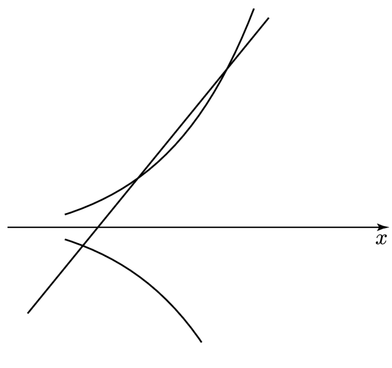
등차수열 $\{a_n\}$을 1차 함수 $f(x)$에서 정의역이 자연수인 함수이고

공비가 양수인 등비수열 $\{b_n\}$을 지수함수 $g(x)$에서 정의역이 자연수인 함수라 생각할 수 있다.

$a_m=b_m$을 만족하는 자연수 m은 방정식 $f(x)=g(x)$의 근이라 생각할 수 있다.

이때, 지수함수의 그래프와 직선이 만나는 교점은 최대 2개 이므로 등비수열의 공비가 양수일 수 없다.

따라서 등비수열은 공비가 음수로 x축 대칭상태인 두 지수함수의 그래프 위를 번갈아 가며 나온다.



공비가 음수이고, $a_m=b_m$ 만족하는 값은 음수, 양수, 양수이다.

따라서 $a_m=b_m$을 만족하는 m은 순서대로

홀수, 짝수, 짝수 / 짝수, 홀수, 홀수

이다.

$a_1=b_1$, $a_2=b_2$, $a_4=b_4$ $\cdots$ (*)

또는

$a_2=b_2$, $a_3=b_3$, $a_5=b_5$

이다. 이때, (*)는 (가) 조건을 만족시키지 못함

<이후풀이 생략>

14. 정답 ⑤

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ |f(x)-(2x-2t)| & (x \ge t) \end{cases}$$

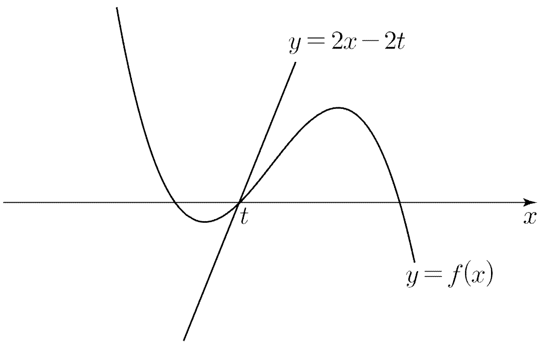
미분가능할 수 있는거 신기하지 않음?

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<t) \\ f(x)-(2x-2t) & (x \ge t) \end{cases}$$

이건 t에서 미분 불가능하겠지?

이 둘의 차이는 절댓값의 영향이겠고,
직관적으로 원래 기울기에서 2를 빼고 절댓값 씌워서
같으려면...원래 기울기는 1
즉, $f'(t)=1$

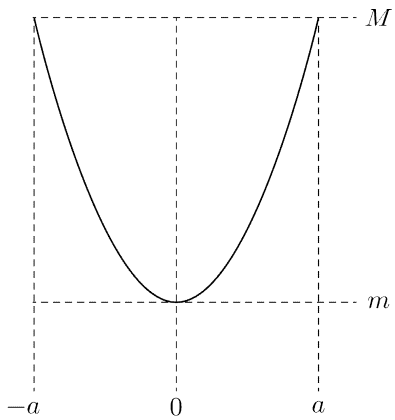
ㄷ. 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $(t, 0)$이후에 교점을 가지면 안 된다. 따라서 아래 그림과 같다.



그래서 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

15. 정답 ②

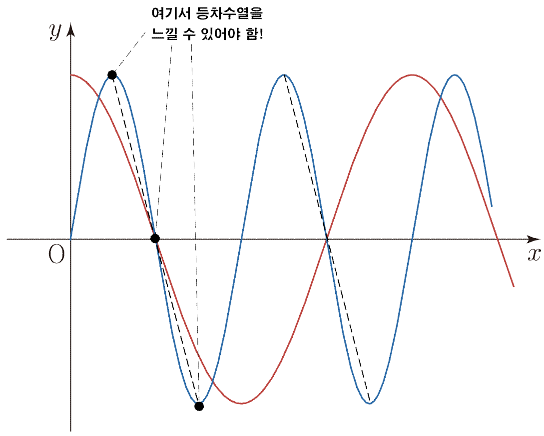
일단, $g(x)=f(a\sin 2bx)$, $h(x)=f(a\cos bx)$에서
$a\sin 2bx = t$, $a\cos bx = s$
로 치환하면 $-a \le t \le a$, $-a \le s \le a$라서 결국
$-a \le x \le a$에서 함수 $y=f(x)$의 최댓값과 최솟값을 구하는 것.



따라서 방정식 $g(x)=M$은 방정식 $a\sin 2bx = \pm a$이고

방정식 $h(x)=m$은 $a\cos bx = 0$이다.

이때, (가) 조건에서 포인트는 실근의 합이 2배! 라는 것
암튼 이걸 만족하려면 아래 그래프와 같아야 한다.
(등차중항 느낌으로 근의 합이 2배 차이나는 구나!)



이후 풀이 생략

$a=2$, $b=4$

16. 정답 3

$$\int_{-2}^{2}(3x^3+ax^2-2)\,dx=\int_{-2}^{2}(ax^2-2)\,dx$$
$$=2\int_{0}^{2}(ax^2-2)\,dx$$
$$=2\times\left[\frac{a}{3}x^3-2x\right]_0^2$$
$$=\frac{16}{3}a-8=8$$

$\therefore\ a=3$

17. 정답 24

하나씩 나열하면

$a_1=-4$
$a_2=-2$
$a_3=0$
$a_4=2$
$a_5=4$
$a_6=8$
$a_7=16$

따라서 $\sum_{k=1}^{7}a_k=24$
그래도 대칭적인 부분 있어서 귀여운 문제?

18. 정답 39

함수 $f(x)$는 원점에 대하여 대칭인 삼차함수이므로

$$f(x)=x^3+ax$$

라 할 수 있다. 따라서 $f'(x)=3x^2+a$이고, $f'(x)$는 y축에 대하여 대칭이다.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(x^2+4x)f'(x)\,dx &= \int_{-1}^{1}\left(x^2f'(x)+4xf'(x)\right)dx \\ &= \int_{-1}^{1}x^2f'(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left\{x^2\left(3x^2+a\right)\right\}dx \\ &= \int_{-1}^{1}\left(3x^4+ax^2\right)dx \\ &= 2\int_{0}^{1}\left(3x^4+ax^2\right)dx \\ &= 2\times\left[\frac{3}{5}x^5+\frac{a}{3}x^3\right]_0^1 \\ &= \frac{6}{5}+\frac{2}{3}a=\frac{58}{15}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}a &= \frac{58}{15}-\frac{6}{5} \\ &= \frac{58-18}{15}=\frac{8}{3}\end{aligned}$$

따라서 $a=4$이므로 $f(x)=x^3+4x$이고

$$f(3)=27+12=39$$

19. 정답 16

두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_1(t)$, $x_2(t)$이라 하자.
두 점 모두 동시에 원점을 출발하였으므로

$$x_1(0)=x_2(0)=0$$

한편, 두 점 P, Q의 위치를 구하면

$$x_1(t)=t^3-6t^2,$$

$$x_2(t)=2t^2-at\ \ \left(\because\ x_1(0)=x_2(0)=0\right)$$

출발 후 $t>0$에서 오직 한 번만 만나므로 방정식 $x_1(t)=x_2(t)$을 만족시키는 실근 $t\ (t>0)$의 개수는 1이다.

$$t^3-6t^2=2t^2-at$$

$$t^3-8t^2+at=t\left(t^2-8t+a\right)$$

시각 $t>0$에서 만나므로 방정식 $t^2-8t+a=0$의 판별식을 D라 하면

$$D=64-4a=0$$

따라서 $a=16$

20. 정답 12

(가)조건에서 $x\,f(x)\le 0$ 표현..... 너무 멋있음...

$x\,f(x)<0$ 이면 x좌표 $\times$ y좌표 <0
이므로 2, 4사분면인데, 실수 x의 개수가 유한개?!!
따라서

(1) 2, 4사분면에 있으면 안됨!
⇨ 삼차함수 $f(x)$는 1, 3사분면을 지난다. 그래서 원점을 지날 수 밖에 없다.

(2) 그리고 x축과 단 2개의 교점을 갖는다.

를 유추할 수 있다.

(나) 조건에서 $f(x)-x=p(x+6)x^2$임을 바로 눈치채고
삼차함수 비율관계에 따라 $f(-3)=0$임을 알아낸다.

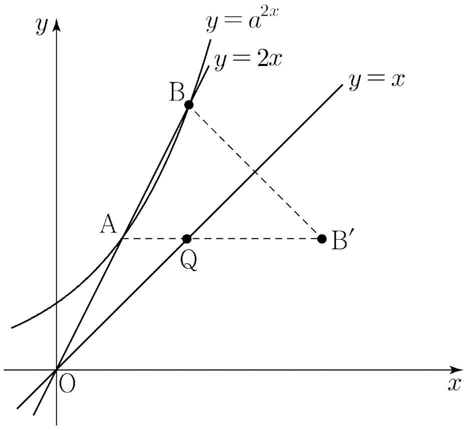
$f(-3)+3=27p=3$

따라서 $p=\dfrac{1}{9}$

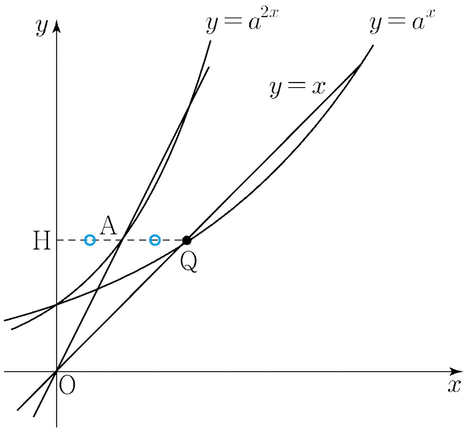
$f(x)=x+\dfrac{1}{9}(x+6)x^2$이므로 $f(3)=12$

21. 정답 5

일단, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 값을 최소로 하는 점 P를 점 Q 발문에서
$y=x$기준으로 대칭시켰겠죠?



이때, $y=x$위 점 Q를 $y=\log_a x$가 지난다는 $y=a^x$도 지난다는!
따라서 $a^{2x}=2x$를 만족하는 점 A
$a^x=x$를 만족하는 점 Q는
아래처럼 x좌표가 2배 되는 관계에 있음

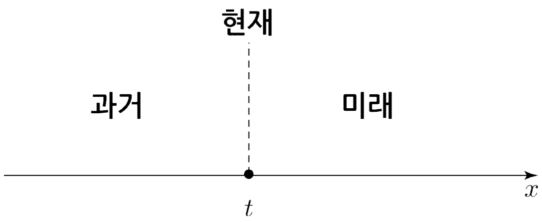


따라서 $\mathrm{A}(t,2t)$라 하면, $\mathrm{Q}(2t,2t)$, $\mathrm{B}'(4t,2t)$, $\mathrm{B}(2t,4t)$
로 구할 수 있다.

$a^{2t}\times 2=a^{4t}$이므로 $a^{2t}=2$
따라서 $t=1$

22. 정답 30

일단, 출제할 때 생각을... 얘기하겠음



(수학...해설이...)

주어진 발문을 번역하면

구간 $(-\infty, t]$ 에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $g(t)$
⇨ 과거부터 현재까지 중 최솟값을 $g(t)$라 생각

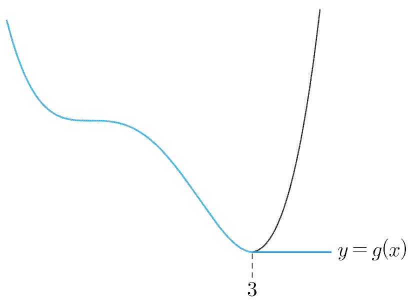
구간 $[t, \infty)$ 에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 $h(t)$
⇨ 현재부터 미래까지 중 최솟값을 $h(t)$라 생각

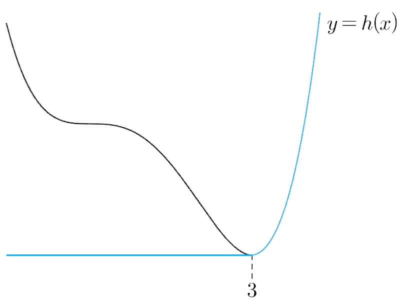
따라서

$g(3)=h(3)$의 번역
⇨ $f(3)$은 '전무후무'한 최솟값이다.

따라서 사차함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$

주어진 조건을 만족시키는 상황은 아래 그림과 같다.





$f(x)=x^3(x-4)+30$
따라서 $f(4)=30$