공통문항						확률과 통계		미적분	
1	④	9	①	16	2	23	④	23	③
2	③	10	③	17	60	24	②	24	④
3	②	11	⑤	18	16	25	⑤	25	②
4	⑤	12	④	19	70	26	③	26	⑤
5	③	13	③	20	16	27	②	27	①
6	①	14	②	21	117	28	①	28	③
7	①	15	②	22	26	29	81	29	25
8	⑤					30	650	30	229

[공통 문항]

1) 정답 ④

$$2^{\sqrt{8}}\times\left(\frac{1}{4}\right)^{\sqrt{2}-1}=2^{2\sqrt{2}}\times\left(2^{-2}\right)^{\sqrt{2}-1}$$
$$=2^{2\sqrt{2}}\times 2^{-2\sqrt{2}+2}=2^2=4$$

2) 정답 ③

$f(x)=2x^4-3x^2+x$ 에서

$f'(x)=8x^3-6x+1$

$\therefore\ f'(1)=8-6+1=3$

3) 정답 ②

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면 $a_3=3$에서

$a_2=3-d$, $a_4=3+d$

따라서 $a_2=\dfrac{5}{a_4}$에서

$3-d=\dfrac{5}{3+d}$, $9-d^2=5$, $d^2=4$

$\therefore\ d=2$ 또는 $d=-2$

만약 $d=2$이면 $a_1=a_3-2d=-1$이므로 a_1이 양수라는 조건에 모순이다.

따라서 $d=-2$이므로 구하는 값은

$a_5=a_3+2d=-1$

4) 정답 ⑤

$$\int_1^x f(t)dt=x^n-ax+2\ \cdots\cdots\ ㉠$$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=1-a+2$, 즉 $a=3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=nx^{n-1}-3$

이므로

$f(-1)=n(-1)^{n-1}-3=0$

즉, $n=3$, $f(x)=3x^2-3$이므로 구하는 값은

$f(2)=3\times2^2-3=9$

5) 정답 ③

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\dfrac{1}{4}$ 에서

$-\sin\theta=-\dfrac{1}{4}$, 즉 $\sin\theta=\dfrac{1}{4}$

$\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)>0$에서

$-\cos\theta>0$, 즉 $\cos\theta<0$

이므로

$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

따라서 구하는 값은

$\tan(\theta-\pi)=\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

6) 정답 ①

함수 $f(x)$는 $x\neq1$인 모든 x에서 연속이므로, 함수 $\{f(x)\}^2$도 $x\neq1$인 모든 x에서 연속이다. 따라서 함수 $\{f(x)\}^2$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=1$에서 연속이면 된다.

$\lim\limits_{x\to1-}\{f(x)\}^2=(a-3)^2$

$\lim\limits_{x\to1+}\{f(x)\}^2=(-1-a)^2$

$\{f(1)\}^2=(-1-a)^2$

이므로

$(a-3)^2=(-1-a)^2$,

$a^2-6a+9=a^2+2a+1$, $8a=8$

$\therefore\ a=1$

7) 정답 ①

곡선 $y=x^2-3x+4$과 직선 $y=2$의 교점의 x좌표는 $x^2-3x+4=2$에서

$x^2-3x+2=0$, $(x-1)(x-2)=0$

$\therefore\ x=1$ 또는 $x=2$

따라서 구하는 넓이는

$\int_{1}^{2}\{2-(x^2-3x+4)\}dx$

$=\int_{1}^{2}(-x^2+3x-2)dx$

$=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_1^2$

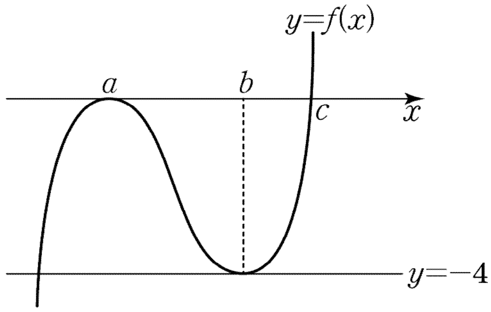
$=-\frac{2}{3}-\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{1}{6}$

8) 정답 ⑤
두 직선 $y=x+2$, $y=2x-m+2$의 교점의 x좌표는 $x+2=2x-m+2$에서 $x=m$이다.
따라서 교점의 좌표는 $(m,\ m+2)$이고, 이 교점을 곡선 $y=\log_3(x+4)+m$이 지나므로
$m+2=\log_3(m+4)+m$,
$2=\log_3(m+4)$, $9=m+4$
$\therefore\ m=5$

9) 정답 ①
만약 삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는다면, 함수 $y=|f(x)|$가 극값을 갖는 x의 개수는 1이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 삼차함수 $f(x)$는 극값을 갖는다.

만약 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수가 3이면, 함수 $y=|f(x)|$가 극값을 갖는 x의 개수는 5이므로 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수는 1 또는 2이고, 이때
$f(a)=0$ 또는 $f(c)=0$
이 성립한다.

그런데 조건에 의하여 $f(a)=f(c)$이므로 $f(a)=f(c)=0$이고, $f(b)=-4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=(x-a)^2(x-c)$라 하면
$f'(x)=2(x-a)(x-c)+(x-a)^2$
$=(x-a)(3x-a-2c)$
이므로 $b=\frac{a+2c}{3}$이다.
그러면
$f(b)=\left(\frac{-2a+2c}{3}\right)^2\left(\frac{a-c}{3}\right)=\frac{4(a-c)^3}{27}$에서
$\frac{4(a-c)^3}{27}=-4$, $(c-a)^3=27$
$\therefore\ c-a=3$

10) 정답 ③
$\{a_n\}$이 등차수열이므로
$a_1+a_5=a_2+a_4=2a_3$
따라서 조건 (나)에서
$5a_9+\sum_{k=1}^{5}a_k=5a_9+5a_3=10\times\frac{a_3+a_9}{2}$
$=10a_6=40$
이므로 $a_6=4$이다.

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면, $d>0$이므로
$a_8=a_6+2d=4+2d>0$,
$a_9=a_6+3d=4+3d>0$
이다. 또한
$a_2=a_6-4d=4-4d$
이므로
$0<d<1$이면 $|a_2|=a_2$,
$d\geq 1$이면 $|a_2|=-a_2$이다.

(ⅰ) $0<d<1$인 경우
조건 (가)에서

$|a_2|+|a_8|+|a_9|=a_2+a_8+a_9$

$=(4-4d)+(4+2d)+(4+3d)=12+d=22$

$\therefore\ d=10$

따라서 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $d\geq 1$인 경우

조건 (가)에서

$|a_2|+|a_8|+|a_9|=-a_2+a_8+a_9$

$=(4d-4)+(4+2d)+(4+3d)=4+9d=22$

$\therefore\ d=2$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $d=2$이므로 구하는 값은

$a_{12}=a_6+6d=4+6\times 2=16$

11) 정답 ⑤

$\angle\mathrm{PBA}=120°$이므로 $\angle\mathrm{PAB}=15°$로부터

$\angle\mathrm{APB}=45°$이다.

삼각형 APB에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\sin 45°}=\dfrac{\overline{\mathrm{AP}}}{\sin 120°}$이므로

$\sqrt{3}\times\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}\times\overline{AP}$

따라서 양수 k에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}k$, $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{3}k$

로 놓을 수 있다.

$\angle\mathrm{DAP}=45°$이므로 삼각형 APD에서 코사인 법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{DP}}^2=2k^2+3k^2-2\times\sqrt{2}k\times\sqrt{3}k\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=(5-2\sqrt{3})k^2$$

따라서 삼각형 CPD에서 사인법칙에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{DP}}}{\sin 60°}=\dfrac{\overline{\mathrm{DC}}}{\sin(\angle\mathrm{CPD})}$이므로

$$\sin^2(\angle\mathrm{CPD})=\frac{3}{4}\times\frac{\overline{\mathrm{AB}}^2}{\overline{\mathrm{DP}}^2}$$
$$=\frac{3}{2(5-2\sqrt{3})}=\frac{15+6\sqrt{3}}{26}$$

12) 정답 ④

두 교점 A, B의 x좌표를 α, β라 하자.

그러면 점 $(-1,\ 0)$을 지나면서 기울기가 t인 직선의 방정식은 $y=t(x+1)$이므로 방정식

$x^2-2x=t(x+1)$, 즉 $x^2-(t+2)x-t=0$

의 두 실근이 α, β이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=t+2$, $\alpha\beta=-t$

이고

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$이므로

$|\alpha-\beta|=\sqrt{(t+2)^2+4t}=\sqrt{t^2+8t+4}$

그러면 선분 AB의 기울기가 t이므로 두 점 A, B의 y좌표의 차이는 $t\sqrt{t^2+8t+4}$이고

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(t^2+8t+4)(t^2+1)}$

따라서 구하는 값은

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(t)-2}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{\sqrt{(t^2+8t+4)(t^2+1)}-2}{t}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{(t^2+8t+4)(t^2+1)-4}{t\left(\sqrt{(t^2+8t+4)(t^2+1)}+2\right)}$$
$$=\lim_{t\to 0+}\frac{t^3+8t^2+5t+8}{\sqrt{(t^2+8t+4)(t^2+1)}+2}$$
$$=\frac{8}{2+2}=2$$

13) 정답 ③

ㄱ. 함수 $f(x)$가 연속함수이고

$-2<x<0$, $0<x<1$에서 $f'(x)>0$,

$1<x<2$에서 $f'(x)<0$

이므로 함수 $f(x)$는 구간 $[-2,\ 1]$에서 증가하고 $[1,\ 2]$에서 감소한다.

$f(-2)=a$라 하면 $-1\leq x<0$일 때

$$f(x)=f(-2)+\int_{-2}^{x}f'(t)dt$$
$$=a+\frac{1}{2}+(x+1)^2$$

이므로 $f(-1)=a+\dfrac{1}{2}$ 이고,

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$f(0)=\lim_{x\to 0-}f(x)=a+\frac{3}{2}\ \cdots\cdots\ ㉠$$

을 얻는다.

$f(1)=b$라 하면 $0<x<2$일 때

$$f(x)=f(1)+\int_1^x f'(t)dt$$
$$=b-(1-x)^2$$

이고 함수 $f(x)$가 $x=0$, $x=2$에서 각각 연속이므로

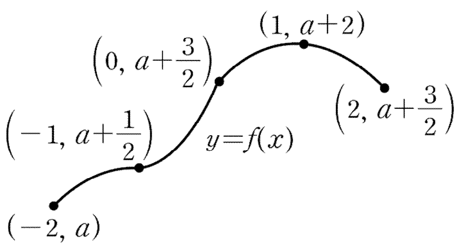
$$f(0)=\lim_{x\to 0+}f(x)=b-1\ \cdots\cdots\ ㉡$$
$$f(2)=\lim_{x\to 2-}f(x)=b-1$$

을 얻는다.

㉠, ㉡에서 $b=a+\dfrac{5}{2}$ 이므로

$$f(1)=a+\frac{5}{2},\ f(0)=f(2)=a+\frac{3}{2}$$

을 얻고, 함수 $f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



$f(x)$는 $x=-2$에서 최솟값 a, $x=1$에서 최댓값 $a+2$를 가지므로 $f(x)$의 최댓값과 최솟값의 차는 $(a+2)-a=2$이다. (참)

ㄴ. $g(x)=xf(x)$라 하면 $g(0)=0$이고

$$\lim_{x\to 0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0+}\frac{xf(x)-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$$
$$\lim_{x\to 0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0-}\frac{xf(x)-0}{x-0}$$
$$=\lim_{x\to 0-}f(x)=f(0)$$

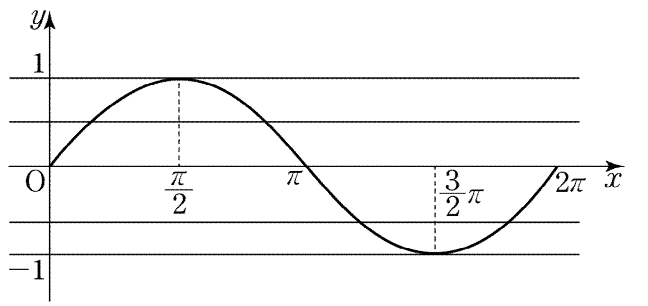
이므로 함수 $g(x)=xf(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. (참)

ㄷ. $f(0)=0$이면 ㄱ에 의해
$-2<x<0$에서 $f(x)<0$,
$0<x<2$에서 $f(x)>0$
임을 알 수 있다. 즉,
$-2<x<0$에서 $x^2f(x)<0$,
$0<x<2$에서 $x^2f(x)>0$
이므로 함수 $x^2f(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖지 않는다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

14) 정답 ②

$0\le x\le 2\pi$에서 방정식 $\sin x=t$의 서로 다른 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자. (단, 실근이 존재하지 않는 경우 $g(t)=0$이라 하자.)



그러면
$t<-1$일 때 $g(t)=0$,
$t=-1$일 때 $g(t)=\dfrac{3}{2}\pi$,
$-1<t\le 0$일 때 $g(t)=3\pi$,
$0<t<1$일 때 $g(t)=\pi$,
$t=1$일 때 $\dfrac{\pi}{2}$,
$t>1$일 때 $g(t)=0$
이 성립한다. $\cdots\cdots$ ㉠

(i) 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수가 0인 경우

방정식 $f(\sin x)f(\sin x-2)=0$의 실근이 존재

하지 않으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) 이차방정식 $f(x)=0$이 α를 중근으로 갖는 경우
$0 \le x \le 2\pi$에서 방정식 $f(\sin x)f(\sin x-2)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 $\sin x=\alpha$ 또는 $\sin x=\alpha+2$인 모든 x의 합과 같다.
이 값은 $g(\alpha)+g(\alpha+2)$과 같은데 ㉠에 의하여 5π일 수 없으므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) 이차방정식 $f(x)=0$이 서로 다른 두 실근 α, β를 갖는 경우
$0 \le x \le 2\pi$에서 방정식 $f(\sin x)f(\sin x-2)=0$의 서로 다른 모든 실근의 합은 $\sin x=\alpha$ 또는 $\sin x=\alpha+2$ 또는 $\sin x=\beta$ 또는 $\sin x=\beta+2$인 모든 x의 합과 같다.
이 값은 α, $\alpha+2$, β, $\beta+2$ 중에서 서로 다른 값들을 t_1, t_2, $\cdots$, t_n이라 할 때,
$g(t_1)+g(t_2)+\cdots+g(t_n)$과 같다. …… ㉡
즉, 조건에 의하여 ㉡의 값이 5π이어야 한다.

만약 α와 β의 값이 모두 -1이 아니라면, $g(\alpha)$와 $g(\alpha+2)$ 중 적어도 하나의 값은 0이고, $g(\beta)$와 $g(\beta+2)$ 중 적어도 하나의 값은 0이므로 ㉡의 값이 5π일 수 없다.

따라서 α 또는 β의 값이 -1이어야 하므로, 일반성을 잃지 않고 $\alpha=-1$이라 하자.
이때
$g(\alpha)+g(\alpha+2)=g(-1)+g(1)=2\pi$
이고 $g(\beta)$와 $g(\beta+2)$ 중 적어도 하나의 값은 0이므로 ㉡의 값이 5π이려면 $g(\beta)=3\pi$ 또는 $g(\beta+2)=3\pi$이어야 한다.

㉠에 의하여
$-1<\beta \le 0$ 또는 $-1<\beta+2 \le 0$
이므로
$-3<\beta \le -2$ 또는 $-1<\beta \le 0$ …… ㉢

그러면 $f(x)=(x+1)(x-\beta)$에서
$f(3)=4(3-\beta)$
이므로 ㉢에 의하여 $f(3)$의 최솟값은 $\beta=0$일 때 $4\times 3=12$이다.

15) 정답 ②
$a_2=k$일 때 $a_m=0$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값을 $f(k)$라 하면, $f(k)=27$이 되도록 하는 모든 k의 합을 구해야 한다.

(ⅰ) $k=1$인 경우
$a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=0$
$\therefore\ f(1)=3$
(ⅱ) $k=2$인 경우
$a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=2,\ a_4=0$
$\therefore\ f(2)=4$
(ⅲ) $k=3$인 경우
$a_1=1,\ a_2=3,\ a_3=4,\ a_4=2,$
$a_5=4,\ a_6=4,\ a_7=0$
$\therefore\ f(3)=7$
(ⅳ) $k=4$인 경우
$a_1=1,\ a_2=4,\ a_3=6,\ a_4=4,$
$a_5=4,\ a_6=0$
$\therefore\ f(4)=6$
(ⅴ) $k \ge 5$인 경우
$a_1=1,\ a_2=k,\ a_3=2k-2,\ a_4=2k-4$
$a_5=4\times 1,\ a_6=4\times(k-4)$ …… (*)

한편 $a_1=1$, $a_2=k$이고
$a_{n+2}=2|a_{n+1}-a_n|$
인 수열 $\{a_n\}$과,
$b_1=4$, $b_2=4k$이고
$b_{n+2}=2|b_{n+1}-b_n|$
인 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $b_n=4a_n$을 만족시킨다.

따라서 (*)를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_{4+m}=0$이 성립할 필요충분조건은
$b_1=1$, $b_2=k-4$이고
$b_{n+2}=2|b_{n+1}-b_n|$
인 수열 $\{b_n\}$에 대하여 $b_m=0$이 성립하는 것

이다.

$\therefore\ f(k)=f(k-4)+4$

따라서 모든 자연수 n에 대하여

$f(1+4n)=3+4n$,

$f(2+4n)=4+4n$,

$f(3+4n)=7+4n$,

$f(4+4n)=6+4n$

이므로 $f(k)=27$이 되도록 하는 모든 k는 23, 25이고 그 합은

$23+25=48$

16) 정답 2

$$\log_3 36-\frac{2}{\log_2 3}=\log_3 36-2\log_3 2$$
$$=\log_3 36-\log_3 4$$
$$=\log_3\frac{36}{4}=\log_3 9=2$$

17) 정답 60

$f(x)=3x+a$, $g(x)=2x^3-bx^2-x$라 하면

$f'(x)=3$, $g'(x)=6x^2-2bx-1$이다.

직선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 x좌표가 2인 점에서 접하므로

$f(2)=g(2)$, $f'(2)=g'(2)$

이때 $g'(2)=23-4b$이므로 $f'(2)=g'(2)$에서

$3=23-4b$, 즉 $b=5$

$g(x)=2x^3-5x^2-x$이므로 $f(2)=g(2)$에서

$6+a=-6$, 즉 $a=-12$

$\therefore\ |ab|=12\times5=60$

18) 정답 16

$$\sum_{k=1}^{6}\{k^2x^2-2k(k+1)x+(k+1)^2\}=125$$

$$\left(\sum_{k=1}^{6}k^2\right)x^2-\left\{2\sum_{k=1}^{6}k(k+1)\right\}x+\left\{\sum_{k=1}^{6}(k+1)^2\right\}=125$$

이때

$$\sum_{k=1}^{6}k^2=\frac{1}{6}\times6\times7\times13=91$$

$$\sum_{k=1}^{6}k(k+1)=\frac{1}{3}\times6\times7\times8=112$$

$$\sum_{k=1}^{6}(k+1)^2=\frac{1}{6}\times7\times8\times15-1=139$$

이므로

$91x^2-224x+139=125$, $13x^2-32x+2=0$

이 이차방정식의 두 실근이 α, β이므로 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{32}{13}$, $\alpha\beta=\dfrac{2}{13}$

$$\therefore\ \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=16$$

19) 정답 70

시각 $t=x$일 때 점 P의 위치는

$$\int_0^x(3t^2+14t)dt=x^3+7x^2$$

이고, 점 Q의 위치는 $0\le x\le2$인 경우 0, $x>2$인 경우 $\displaystyle\int_2^x k\,dt=k(x-2)$이다.

두 점 P, Q가 원점이 아닌 점에서 만나는 시각이 $t=\alpha$ 뿐이므로

$x^3+7x^2=k(x-2)$ …… ㉠

를 만족시키는 2보다 큰 실수 x의 값이 α 뿐이어야 한다.

이때 $y=k(x-2)$는 점 $(2,\ 0)$을 지나는 직선이므로, ㉠을 만족시키는 2보다 큰 실수 x의 개수가 1이려면 곡선 $y=x^3+7x^2$과 직선 $y=k(x-2)$가 $x=\alpha$ $(\alpha>2)$에서 접해야 한다.

곡선 $y=x^3+7x^2$의 $x=\alpha$에서의 접선의 방정식은 $y=(3\alpha^2+14\alpha)(x-\alpha)+\alpha^3+7\alpha^2$

이고, 이 접선이 $(2,\ 0)$을 지나야 하므로

$0=(3\alpha^2+14\alpha)(2-\alpha)+\alpha^3+7\alpha^2$,

$0=6\alpha^2+28\alpha-3\alpha^3-14\alpha^2+\alpha^3+7\alpha^2$,

$0=-2\alpha^3-\alpha^2+28\alpha$, $\alpha(2\alpha^2+\alpha-28)=0$,

$\alpha(2\alpha-7)(\alpha+4)=0$

이때 $\alpha>2$이므로 $\alpha=\dfrac{7}{2}$이다.

$\therefore\ 20\alpha=20\times\frac{7}{2}=70$

20) 정답 16

점 Q의 x좌표가 점 P의 x좌표보다 a만큼 크다고 하면, 문제의 조건에서 점 Q의 y좌표는 점 P의 y좌표보다 1만큼 크고 직선 PQ의 기울기가 유리수이므로 a도 유리수이다.

곡선 $y=2^{x+2}+2$를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 점 Q를 지나게 되고, 곡선 $y=2^{x-1}-10$을 x축의 방향으로 $-a$만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 점 Q를 지나게 된다.

즉, 세 곡선

$y=2^{x-a+2}+3$, $y=2^{x}+1$, $y=2^{x+a-1}-11$

은 교점 Q를 지난다.

점 Q의 x좌표를 k라 하면

$2^{k-a+2}+3=2^{k}+1$, $2^{k+a-1}-11=2^{k}+1$

이므로

$2^{k}(1-2^{2-a})=2$, $2^{k}(2^{a-1}-1)=12$

이다.

$6\times2^{k}(1-2^{2-a})=2^{k}(2^{a-1}-1)$,

$6-6\times2^{2-a}=2^{a-1}-1$,

$2^{a-1}-7+6\times2^{2-a}=0$

에서 $2^{a}=t$로 놓으면

$\frac{t}{2}-7+\frac{24}{t}=0$, $t^{2}-14t+48=0$, $t=6,\ 8$

$\therefore\ 2^{a}=6,\ 8$

이때 a는 유리수이므로 $a=3$이고,

$2^{k}(2^{a-1}-1)=12$에서 $k=2$이므로

점 Q의 좌표는 $(2,\ 5)$이다.

따라서 직선 l의 방정식은 $y=\frac{1}{3}(x-2)+5$이고 y절편은 $\frac{13}{3}$이다.

$\therefore\ p+q=3+13=16$

21) 정답 117

$g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\{f(x+p)+f(x-p)+x\}=f(p)+f(-p)$$

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\{f(x+p)-f(x-p)-x\}=f(p)-f(-p)$$

에서

$f(p)+f(-p)=f(p)-f(-p)$

$\therefore\ f(-p)=0$

그러면 $g(0)=f(p)$이고, $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{f(x+p)+f(x-p)+x-f(p)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0-}\frac{f(x+p)-f(p)+f(x-p)-f(-p)+x}{x}$$

$$=f'(p)+f'(-p)+1$$

$$\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{f(x+p)-f(x-p)-x-f(p)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0+}\frac{f(x+p)-f(p)-f(x-p)+f(-p)-x}{x}$$

$$=f'(p)-f'(-p)-1$$

에서

$f'(p)+f'(-p)+1=f'(p)-f'(-p)-1$

$\therefore\ f'(-p)=-1$

한편 $f(-5p)=f(-p)=f(0)=0$이므로

$$f(x)=x(x+5p)(x+p)=x^{3}+6px^{2}+5p^{2}x$$

$f'(x)=3x^{2}+12px+5p^{2}$

따라서 $f'(-p)=-1$에서 $p=\frac{1}{2}$이고

$$f(x)=x\left(x+\frac{5}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$\therefore\ f(4)=4\times\frac{13}{2}\times\frac{9}{2}=117$

22) 정답 26

$x=k$에서 함수 $g(x)$의 좌미분계수를 $g_1(k)$, 우미분계수를 $g_2(k)$라 하면

$$\lim_{x\to k-}\frac{xg(x)-xg(k)}{|x-k|}$$

$$=\lim_{x\to k-}\left\{-x\times\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\right\}=-kg_1(k),$$

$$\lim_{x\to k+}\frac{xg(x)-xg(k)}{|x-k|}$$

$$=\lim_{x\to k+}\left\{x\times\frac{g(x)-g(k)}{x-k}\right\}=kg_2(k)$$

따라서 $\displaystyle\lim_{x\to k}\frac{xg(x)-xg(k)}{|x-k|}$의 값이 존재하려면

$k=0$ 또는 $g_1(k)=-g_2(k)$

이어야 한다. 즉,

(a) $k=0$

(b) $f(k)=t$인 k

(c) $f'(k)=0$인 k

에서 $\displaystyle\lim_{x\to k}\frac{xg(x)-xg(k)}{|x-k|}$의 값이 존재한다.

삼차함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 실수 t의 값에 관계없이 $f(k)=t$인 k의 개수는 1이고, $f'(k)=0$인 k의 개수는 0 또는 1이다.
따라서 모든 실수 t에 대하여 $h(t)=2$ 또는 $h(t)=3$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

따라서 삼차함수 $f(x)$는 극솟값 m과 극댓값 M을 갖고, 이때 $h(t)=6$이려면 $m<t<M$이어야 한다. 그러면 조건 (나)에서 $m=12$, $M=14$이므로 삼차함수 $f(x)$의 극솟값은 12, 극댓값은 14이다. 이때 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)^2+12$$

로 놓을 수 있다.
삼차함수의 비율성에 의하여 $f(x)$는

$x=\dfrac{2\alpha+\beta}{3}$에서 극댓값 14를 가지므로

$$f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{-\alpha+\beta}{3}\right)\left(\frac{2\alpha-2\beta}{3}\right)^2+12=14,$$

$$\frac{2(\beta-\alpha)^3}{27}=2,\ (\beta-\alpha)^3=27$$

$\therefore\ \beta=\alpha+3$

한편 조건 (가)에서 함수 $y=f(x)$의 그래프가 $(0,\ 4)$를 지나야 하므로

$$f(0)=\frac{1}{2}(-\alpha)(\alpha+3)^2+12=4,$$

$16=\alpha(\alpha+3)^2,\ \alpha^3+6\alpha^2+9\alpha-16=0,$

$(\alpha-1)(\alpha^2+7\alpha+16)=0$

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=4$

$f(x)=\dfrac{1}{2}(x-1)(x-4)^2+12$ 에서

$$f(6)=\frac{1}{2}\times5\times2^2+12=22$$

이고 $h(6)=4$이므로 구하는 값은

$f(6)+h(6)=22+4=26$

[확률과 통계]

23) 정답 ④

${}_3\Pi_4-{}_4\mathrm{P}_3=3^4-4\times3\times2=81-24=57$

24) 정답 ②

$(5-1)!=4!=24$

25) 정답 ⑤

5개의 문자 b, b, c, c, c를 먼저 나열하는 경우의 수는 $\dfrac{5!}{2!3!}=10$

이때 나머지 2개의 문자 a, a를 먼저 나열한 b, b, c, c, c의 사이와 양 끝에 끼워넣는 경우의 수는 ${}_6\mathrm{C}_2=\dfrac{6\times5}{2\times1}=15$

따라서 구하는 경우의 수는

$10\times15=150$

26) 정답 ③
네 자리 자연수가 3600보다 크려면 천의 자리에 들어갈 숫자는 4 또는 5여야 한다.
또한 짝수이려면 일의 자리에 들어갈 숫자는 2 또는 4여야 한다.
한편 십의 자리와 백의 자리에 들어갈 숫자를 선택하는 경우의 수는
$_5\Pi_2=5^2=25$
따라서 구하는 짝수의 개수는
$2\times2\times25=100$

27) 정답 ②
$6-d=k$로 놓으면 k는 5 이하의 자연수이고,
$a+b+c=5+d$에서
$a+b+c=11-k$,
$a+b+c+k=11$ …… ㉠

따라서 구하는 순서쌍의 개수는 a, b, c, k가 모두 자연수일 때 ㉠을 만족시키는 해의 개수에서 k의 값이 6 이상인 해의 개수를 빼면 되므로
$_4H_7-{}_4H_2={}_{10}C_3-{}_5C_2=120-10=110$

28) 정답 ①
번호가 8번인 학생을 먼저 자리에 앉히는 경우의 수는 1이다.
이때 번호가 7번인 학생과 8번인 학생 사이에 의자가 몇 개 있는지에 따라 경우를 나누어 생각하자.

(ⅰ) 7번 학생과 8번 학생 사이에 의자가 1개 있는 경우
7번 학생이 앉을 수 있는 자리는 2개다.
이때 5번과 6번 학생은 모두 7번 또는 8번 학생과 인접하지 않아야 하므로, 5번과 6번 학생이 앉는 경우의 수는 $_3P_2=6$이다.
4번 학생은 8번 학생과 인접하지 않아야 하므로 앉을 수 있는 자리는 2개다.
3번, 2번, 1번 학생은 아무 자리나 앉으면 되므로 이들을 앉히는 경우의 수는 $3!=6$이다.
따라서 (ⅰ)의 경우의 수는
$1\times2\times6\times2\times6=144$

(ⅱ) 7번 학생과 8번 학생 사이에 의자가 2개 있는 경우
7번 학생이 앉을 수 있는 자리는 2개다.
이때 5번과 6번 학생은 모두 7번 또는 8번 학생과 인접하지 않아야 하므로, 5번과 6번 학생이 앉는 경우의 수는 2이다.
4번 학생은 8번 학생과 인접하지 않아야 하므로 앉을 수 있는 자리는 2개다.
3번, 2번, 1번 학생은 아무 자리나 앉으면 되므로 이들을 앉히는 경우의 수는 $3!=6$이다.
따라서 (ⅱ)의 경우의 수는
$1\times2\times2\times2\times6=48$

(ⅲ) 7번 학생과 8번 학생 사이에 의자가 3개 있는 경우
이 경우는 7번 학생과 8번 학생이 마주보고 앉는 경우와 같다.
7번 학생이 앉을 수 있는 자리는 1개다.
이때 5번과 6번 학생은 모두 7번 또는 8번 학생과 인접하지 않아야 하므로, 5번과 6번 학생이 앉는 경우의 수는 2이다.
4번 학생은 8번 학생과 인접하지 않아야 하므로 앉을 수 있는 자리는 2개다.
3번, 2번, 1번 학생은 아무 자리나 앉으면 되므로 이들을 앉히는 경우의 수는 $3!=6$이다.
따라서 (ⅲ)의 경우의 수는
$1\times1\times2\times2\times6=24$

(ⅰ)~(ⅲ)에 의하여 구하는 경우의 수는
$144+48+24=216$

29) 정답 81
조건 (가)에 의하여 먼저 A, A, E, E를 선택한 후, A, B, C, D, E 중에서 중복을 허락하여 5개를 추가로 선택하면 된다.

A, B, C, D, E 중에서 중복을 허락하여 5개를 추가로 선택하는 경우의 수는 $_5H_5$인데, 이때 조건 (나)에 의하여 같은 자음이 3개 이상 선택되는 경우의 수는 제외해야 한다.

이때 자음 B가 3개 이상 선택되는 경우의 수는 B, B, B를 선택한 후 A, B, C, D, E 중에서 중복을 허락하여 2개를 추가로 선택하는 경우의 수와 같으므로 ${}_5\mathrm{H}_2$이다.
마찬가지로 자음 C와 자음 D가 3개 이상 선택되는 경우의 수도 각각 ${}_5\mathrm{H}_2$이므로 구하는 경우의 수는
${}_5\mathrm{H}_5 - 3\times{}_5\mathrm{H}_2 = {}_9\mathrm{C}_4 - 3\times{}_6\mathrm{C}_2 = 126-45=81$

30) 정답 650
조건에 의하여
$f(1)+f(2)$, $f(3)+f(2)$, $f(5)+f(2)$, $f(7)+f(2)$
가 모두 홀수이므로
$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$
은 모두 홀수이거나 모두 짝수이어야 한다.

또한 조건에 의하여
$f(1)+f(2)$, $f(1)+f(4)$, $f(1)+f(6)$
도 모두 홀수이므로
$f(2)$, $f(4)$, $f(6)$은 $f(1)$이 홀수일 때 모두 짝수이거나, $f(1)$이 짝수일 때 모두 홀수이어야 한다.

따라서 $f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$이 모두 홀수이고 $f(2)$, $f(4)$, $f(6)$이 모두 짝수이거나,
$f(1)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$이 모두 짝수이고
$f(2)$, $f(4)$, $f(6)$이 모두 홀수이어야 한다.

또한 조건에 의하여
$f(1)\le f(3)\le f(5)\le f(7)$과
$f(2)\le f(4)\le f(6)$
이 모두 성립해야 하므로 구하는 함수 f의 개수는
${}_4\mathrm{H}_4\times{}_3\mathrm{H}_3+{}_3\mathrm{H}_4\times{}_4\mathrm{H}_3$
$={}_7\mathrm{C}_3\times{}_5\mathrm{C}_2+{}_6\mathrm{C}_2\times{}_6\mathrm{C}_3$
$=35\times10+15\times20=650$

[미적분]

23) 정답 ③
$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(3n^2+2)}{n^2(2n+1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(3+\frac{2}{n^2}\right)}{2+\frac{1}{n}}=\frac{2\times3}{2}=3$$

24) 정답 ④
$3^n(2^n+1)<a_n<2^n(3^n+2^n)$에서
$1+\left(\frac{1}{2}\right)^n<\frac{a_n}{6^n}<1+\left(\frac{2}{3}\right)^n$이고
$\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}=1$, $\lim_{n\to\infty}\left\{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=1$
이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{6^n}=1$이다.

따라서 구하는 값은
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{6^{n-1}+2^{2n+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{6^n}}{\frac{1}{6}+2\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}=\frac{1}{\frac{1}{6}+0}=6$$

25) 정답 ②
$\lim_{n\to\infty}(a_n-3)=1$이므로
$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\{(a_n-3)+3\}=1+3=4$
$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{b_n}\times\frac{n+1}{2n+1}\times a_n\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{b_n}{2n+1}}\times\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}\times\lim_{n\to\infty}a_n$$
$$=\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}\times4=2$$

26) 정답 ⑤
$\{a_n\}$이 등차수열이므로 $a_n=an+b$라 하면

$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+n)(a_n-2n)}{a_{3n}}=4$에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{\{(a+1)n+b\}\{(a-2)n+b\}}{3an+b}=4$ …… ㉠

이때 ㉠의 값이 수렴하므로

$a=-1$ 또는 $a=2$

이다.

(i) $a=-1$인 경우

㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{b(-3n+b)}{-3n+b}=b=4$

이므로 $a_n=-n+4$이다.

이때 $a_4=0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a=2$인 경우

㉠에서

$\lim_{n\to\infty}\frac{b(3n+b)}{6n+b}=\frac{b}{2}=4$, 즉 $b=8$

이므로 $a_n=2n+8$이다.

이때 수열 $\{a_n\}$의 모든 항이 0이 아니므로 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에 의하여 $a_n=2n+8$이므로 구하는 값은 $a_5=18$이다.

27) 정답 ①

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r이라 하자.

조건에 의하여

$a_1+b_1=4$, $a_2+b_2=9$,

$a_3+b_3=17$, $a_4+b_4=31$

이므로

$(a_2+b_2)-(a_1+b_1)=d+b_1(r-1)=5$ … ㉠

$(a_3+b_3)-(a_2+b_2)=d+b_1r(r-1)=8$ … ㉡

$(a_4+b_4)-(a_3+b_3)=d+b_1r^2(r-1)=14$ … ㉢

㉡−㉠에서 $b_1(r-1)^2=3$,

㉢−㉡에서 $b_1r(r-1)^2=6$

이므로 두 식을 각 변끼리 나누면

$r=2$, $b_1=3$, $a_1=1$, $d=2$

따라서 $a_n=2n-1$, $b_n=3\cdot 2^{n-1}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{k^{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 2^{n-1}}{k^{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot\sqrt{2}^{\,2n-2}}{k^{2n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{k}\right)^{2n-1}=c$$

극한값이 존재하므로 $k=\sqrt{2}$이고 $c=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$\therefore\ kc=\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=3$

28) 정답 ③

점 A_n의 좌표는 $(a^n-1,\ n)$이고, 점 A_{n+1}의 좌표는 $(a^{n+1}-1,\ n+1)$이므로

$b_n=\frac{a^n+a^{n+1}-2}{2}$, $c_n=\sqrt{(a^{n+1}-a^n)^2+1}$

이고

$$\frac{c_n}{b_n}=\frac{2\sqrt{(a^{n+1}-a^n)^2+1}}{a^n+a^{n+1}-2}$$

(i) $0<a<1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}a^n=0$이므로,

$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=-1=\frac{3a-4}{2}$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$

(ii) $a>1$인 경우

$\lim_{n\to\infty}a^n=\infty$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{(a-1)^2+\frac{1}{a^{2n}}}}{1+a-\frac{2}{a^n}}$$

$$=\frac{2(a-1)}{1+a}=\frac{3a-4}{2}$$

$4a-4=3a^2-a-4$, $3a^2-5a=0$,

$a(3a-5)=0$

$\therefore\ a=\frac{5}{3}\ (\because\ a>0)$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 a의 값의 합은

$\frac{2}{3}+\frac{5}{3}=\frac{7}{3}$

29) 정답 25

$a_n>0$이므로 근의 공식에 의하여

$a_n=-(n-1)+\sqrt{n^2-n}$ 이고

$a_{n+1}=-n+\sqrt{n^2+n}$ 이므로

$a_{n+1}-a_n=\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}-1$

이다.

$$\lim_{n\to\infty}n^m(a_{n+1}-a_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^m\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^m\left\{\sqrt{n^2+n}-\left(\sqrt{n^2-n}+1\right)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^m\left\{(n^2+n)-\left(\sqrt{n^2-n}+1\right)^2\right\}}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^m\left(2n-1-2\sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^m}{\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n}+1\right)\left(2n-1+2\sqrt{n^2-n}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{m-2}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}+2\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)}$$

의 극한값이 p이므로

$m=2,\ p=\frac{1}{2\times4}=\frac{1}{8}$

$\therefore\ 100mp=100\times2\times\frac{1}{8}=25$

30) 정답 229

$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x(x^n+1)}{2+x^n}$ 에서

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & (0\le x<1)\\ \frac{2}{3} & (x=1)\\ x & (x>1)\end{cases}$$

$m=1$일 때 $0\le x<3$에서 $g(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)$이고,

$m=2$일 때 $3\le x<6$에서 $g(x)=f\left(\frac{x}{5}\right)$이다.

$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$인 경우,

$x\to\infty$일 때 $\frac{kx+5}{x+1}\to k+$

$k=5$인 경우,

$\frac{kx+5}{x+1}=5$

$k=6$인 경우,

$x\to\infty$일 때 $\frac{kx+5}{x+1}\to k-$

이므로

$a_1=\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{4}$,

$a_2=\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2+}f\left(\frac{x}{2}\right)=1$,

$a_3=\lim_{x\to3+}g(x)=\lim_{x\to3+}f\left(\frac{x}{5}\right)=\frac{3}{10}$,

$a_4=\lim_{x\to4+}g(x)=\lim_{x\to4+}f\left(\frac{x}{5}\right)=\frac{2}{5}$,

$a_5=g(5)=f\left(\frac{5}{5}\right)=\frac{2}{3}$,

$a_6=\lim_{x\to6-}g(x)=\lim_{x\to6-}f\left(\frac{x}{5}\right)=\frac{6}{5}$

따라서 구하는 값은

$$60\sum_{k=1}^{6}a_k=15+60+18+24+40+72=229$$