

수학 영역

1. 실수 a 의 세제곱근 중 실수인 것이 4이고, 81의 네제곱근 중 실수인 것을 b 라 하자. $a+b$ 의 최댓값을 구하시오.

1) 정답 67

실수 a 의 세제곱근 중 실수인 것이 4이므로 4는 방정식 $x^3=a$ 의 실근이다.

$$\therefore a=4^3=64$$

한편, b 는 81의 네제곱근 중 실수인 것이므로

$$b^4=81$$

$$b=\pm\sqrt[4]{81}=\pm\sqrt[4]{3^4}$$

$$\therefore b=3 \text{ 또는 } b=-3$$

따라서 $a+b$ 의 최댓값은

$$64+3=67$$

2. $\log_{|x+1|}(16-x^2)$ 이 정의되기 위한 모든 정수 x 의 값의 합을 구하시오.

2) 정답 3

$\log_{|x+1|}(16-x^2)$ 에서 로그의 진수 조건에 의하여

$$16-x^2 > 0$$

$$(x+4)(x-4) < 0$$

$$\therefore -4 < x < 4$$

진수 조건을 만족시키는 모든 정수 x 의 값은

$$x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \quad \dots \textcircled{A}$$

한편, $\log_{|x+1|}(16-x^2)$ 에서 로그의 밑 조건에 의하여

$$|x+1| > 0, |x+1| \neq 1$$

$$x \neq -1, x \neq -2, x \neq 0 \quad \dots \textcircled{B}$$

즉, $-2, -1, 0$ 을 제외한 모든 정수 x 가 밑 조건을 만족시킨다.

$\textcircled{A}, \textcircled{B}$ 에 의하여 $\log_{|x+1|}(16-x^2)$ 이 정의되는 모든 정수 x 의 값은

$$x=-3, 1, 2, 3$$

따라서 구하는 모든 정수 x 의 값의 합은 $-3+1+2+3=3$

3. $\log 2 = a$, $\log 3 = b$ 일 때, $\log_5 54$ 를 a 와 b 로 나타낸 것은?

- ① $\frac{a+3b}{1-a}$ ② $\frac{3a+b}{1-a}$ ③ $\frac{a+3b}{2-a}$
 ④ $\frac{3a+b}{2-a}$ ⑤ $\frac{a+3b}{3-2a}$

3) 정답 ①

$$\log_5 54 = \frac{\log 54}{\log 5} = \frac{\log(2 \times 3^3)}{1 - \log 2} = \frac{\log 2 + 3 \log 3}{1 - \log 2} = \frac{a + 3b}{1 - a}$$

4. 두 실수 a , b 에 대하여 $4^a = 5$, $b = \log_5 \sqrt{27}$ 일 때, 16^{ab} 의 값을 구하시오.

4) 정답 27

$$4^a = 5 \text{에서 } a = \log_4 5 = \frac{1}{2} \log_2 5$$

$$b = \log_5 \sqrt{27} = \frac{3}{2} \log_5 3$$

$$ab = \frac{3}{4} \times \log_2 5 \times \log_5 3 = \frac{3}{4} \log_2 3$$

$$\therefore 16^{ab} = 2^{4ab} = 2^{3 \log_2 3} = 3^3 = 27$$

5. 두 양수 a, b 에 대하여 $a^{-\frac{1}{3}} + b^{-\frac{1}{3}} = 3$, $a^{-1} + b^{-1} = 9$ 일 때, $a+b$ 의 값은?

- ① $\frac{9}{8}$ ② $\frac{5}{4}$ ③ $\frac{11}{8}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{13}{8}$

5) 정답 ①

$A = a^{-\frac{1}{3}}$, $B = b^{-\frac{1}{3}}$ 이라 하면
 주어진 식은 $A+B=3$, $A^3+B^3=9$ 이므로
 $A^3+B^3=(A+B)^3-3AB(A+B)$
 $9=27-9AB$
 $\therefore AB=2$
 $\therefore a+b = \frac{1}{A^3} + \frac{1}{B^3} = \frac{A^3+B^3}{(AB)^3} = \frac{9}{8}$

6. 0이 아닌 세 실수 x, y, z 에 대하여 $12^x = 16^y = 27^z$ 이고 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = 1$ 일 때, $x + \frac{3}{y} + \frac{2}{z}$ 의 값은?

- ① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

6) 정답 ②

$12^x = 16^y = 27^z = k$ ($k > 0$)이라 놓으면
 $12 = k^{\frac{1}{x}}$, $4 = k^{\frac{1}{2y}}$, $3 = k^{\frac{1}{3z}}$ 이고 $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z} = 1$ 이므로
 $k^{\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{3z}} = k$
 $12 \times 4 \times 3 = k$
 $\therefore k = 12^2, x = 2$
 $4 = k^{\frac{1}{2y}}$ 에서 $\frac{1}{y} = \log_{12} 4$
 $3 = k^{\frac{1}{3z}}$ 에서 $\frac{2}{3z} = \log_{12} 3$
 $\therefore x + \frac{3}{y} + \frac{2}{z} = x + 3 \times \frac{1}{y} + 3 \times \frac{2}{3z}$
 $= 2 + 3 \log_{12} 4 + 3 \log_{12} 3$
 $= 2 + 3 = 5$

7. 두 점 $A(-1, -1)$, $B(2^a, 2^b)$ 을 지나는 직선과 직선 $y = -\frac{1}{2}x + 3$ 이 서로 수직이고 $2^a + 2^{b+2} = 22$ 일 때, $a + 2^b$ 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.)

7) 정답 6

수직인 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이므로 두 점 A, B 를 지나는 직선의 기울기는 2 이다.

$$\frac{2^b + 1}{2^a + 1} = 2$$

$$2^b = 2^{a+1} + 1$$

이므로 $2^a + 2^{b+2} = 22$ 에서

$$2^a + 2^{a+3} + 4 = 22$$

$$9 \times 2^a = 18$$

$$\therefore a = 1, 2^b = 5$$

따라서 구하는 값은

$$a + 2^b = 1 + 5 = 6$$

8. 직선 $y = x$ 와 곡선 $y = 2^p \times \sqrt{x}$ 가 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 A 라 하고, 점 A 를 지나고 기울기가 2 인 직선이 x 축과 만나는 점을 B 라 하자. 삼각형 OAB 의 넓이가 16 일 때, 상수 p 의 값은? (단, O 는 원점이다.)

- ① $-\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

8) 정답 ③

점 A 의 좌표를 $A(t, t)$ ($t > 0$)이라 하면

$$t = 2^p \sqrt{t} \text{에서 } t = 4^p$$

즉, $A(4^p, 4^p)$ 이고, 직선 $y = 2(x - 4^p) + 4^p$ 의 x 절편은

방정식 $2x - 4^p = 0$ 의 근이므로 점 B 의 좌표는 $B(2^{2p-1}, 0)$ 이다.

이때 삼각형 OAB 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 2^{2p-1} \times 2^{2p} = 16$$

$$2^{4p-2} = 2^4$$

$$4p - 2 = 4$$

$$\therefore p = \frac{3}{2}$$

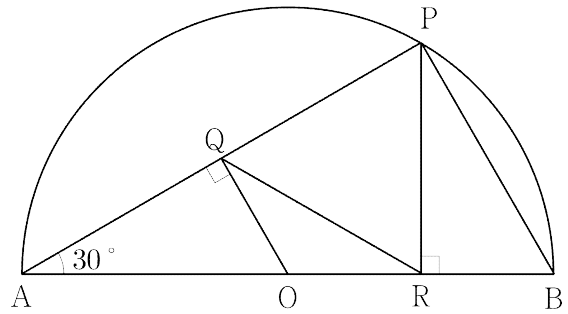
9. 두 정수 a, b 와 2 이상의 두 자연수 m, n 에 대하여 $a^m = 64$ 가 되는 모든 a 의 값의 합을 p 라 하고, 729 의 n 제곱근이 b 가 되는 모든 b 의 값의 개수를 q 라 할 때, $p+q$ 의 값은?

- ① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

9) 정답 ②

$a^m = 64 = 2^6$ 에서 a 는 정수이므로 m 은 2 이상의 6의 약수이다.
 $m = 6$ 일 때 $a = -2$ 또는 $a = 2$
 $m = 3$ 일 때 $a = 4$
 $m = 2$ 일 때 $a = -8$ 또는 $a = 8$
 모든 정수 a 의 값의 합은 $(-2) + 2 + 4 + (-8) + 8 = 4 \quad \therefore p = 4$
 $b^n = 729 = 3^6$ 에서 b 는 정수이므로 n 은 2 이상의 6의 약수이다.
 $n = 6$ 일 때 $b = -3$ 또는 $b = 3$
 $n = 3$ 일 때 $b = 9$
 $n = 2$ 일 때 $b = -27$ 또는 $b = 27$
 따라서 모든 정수 b 의 개수는 $2 + 1 + 2 = 5$ 이므로 $q = 5$
 $\therefore p + q = 4 + 5 = 9$

10. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB의 중점을 O라 하고, 호 AB 위의 한 점 P에 대하여 점 O에서 선분 AP에 내린 수선의 발을 Q, 점 P에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 R이라 하자. $\angle BAP = 30^\circ$ 이고 삼각형 PQR의 넓이가 $\frac{3\sqrt[4]{27}}{4}$ 일 때, $\log_3 \overline{OQ} = \frac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 서로소인 자연수이다.)



10) 정답 9

삼각형 ABP에서 $\angle APB = 90^\circ$ 이고, $\angle ABP = 90^\circ - \angle BAP = 60^\circ$
 $\angle BPR = 90^\circ - \angle ABP = 30^\circ$ 이므로
 $\angle RPQ = 90^\circ - \angle BPR = 60^\circ$
 한편, 직선 OQ는 선분 AP의 수직이등분선이므로 $\overline{AQ} = \overline{PQ}$

또한 직각삼각형 ABP에서 $\overline{BP} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \overline{AO}$ 이므로

삼각형 PBR과 삼각형 AOQ는 합동이다.
 따라서 $\overline{PR} = \overline{AQ} = \overline{PQ}$ 이고, 삼각형 PQR는 정삼각형이다.

$\overline{OQ} = x$ 라 하면 삼각형 AOQ에서 $\overline{AQ} = \sqrt{3}x$ 이고, 정삼각형 PQR의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}x$ 이다.

이때 삼각형 PQR의 넓이는 $\frac{3\sqrt[4]{27}}{4}$ 이므로

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{3}x)^2 = \frac{3\sqrt[4]{27}}{4}$$

$$\frac{3\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{3\sqrt[4]{27}}{4}$$

$$x^2 = \sqrt[4]{3}$$

$$\therefore \overline{OQ} = x = 3^{\frac{1}{8}} \quad (\because x > 0)$$

따라서 $\log_3 \overline{OQ} = \log_3 3^{\frac{1}{8}} = \frac{1}{8}$ 이므로

$$p = 8, q = 1$$

$$\therefore p + q = 9$$



모킹버드



mockingbird.co.kr

기출부터 자작 실모까지 All in One 문제은행

2~3등급 N수생인데 기출 복습하기 귀찮나요?

모킹버드에서 '기출 실모'를 무료로 풀어보세요.

2개 이상 틀린다면 아직 기출 학습이 완전하지 않은 것입니다.

그냥 일반 기출문제집을 이용하거나 EBSi 사이트 가서 프린트해도 되지 않냐구요? 네, 기출 없이 2~3등급까지 달성하셨다면 그러셔도 됩니다.

다만, 이전에 3가지를 염두에 두세요.

- (1) 교육과정 밖 문제를 혼자 거르고 풀어야 합니다.
- (2) 3모~수능 때까지 시험 범위에 차이가 존재합니다.
- (3) 이미 풀어본 문제지라면 문항 배치가 기억나서 실전 느낌이 안 듭니다.

모킹버드에서 무료로 클릭 1번으로 요즘 트렌드나 난이도에 적합한 '기출 실모'를 만나볼 수 있습니다.

실제 수능 성적표와 대조를 마친 500명의 2~3등급 N수생들, 20만건 이상의 유효 채점 데이터를 분석하였습니다. '모킹버드 기출 실모' 16회차 때, 마의 84점이 뚫리는 성적 특이점을 보였습니다.

모킹버드 기출은 수학뿐만 아니라 과탐도 서비스 중이고 무료입니다. 모킹버드 시는 끊임없이 학습합니다. 마의 84점을 뚫는데 필요한 회차수는 점점 줄고 있습니다.

모킹버드 시와 함께 기출은 24시간 내로 무료로 마무리 짓고 N제, 실모로 넘어갑시다.

좋은 자작 콘텐츠도 싸게 효율적으로 양치기 하고 싶나요?

지인선 님, 기출의 파급효과 팀을 비롯하여 시대/강대/메가 콘텐츠 팀에서 근무하였고 여러 문항 공모전에서 수상한 이력이 있는 여러 문항 제작자들이 모킹버드와 함께 하고 있습니다. '이감 수학'을 제작한 CSM17 콘텐츠도 모킹버드에서 만나볼 수 있습니다.

모킹버드 시로 N제, 실모 양치기도 더 싸고 더 효율적으로 끝내버리세요.

기파급 전과목 판매링크



cafe.naver.com/spreadeffect/5615
기파급 전과목 종이책 판매링크

기출의 파급효과 시리즈는 기출 분석서입니다. 기출의 파급효과 시리즈는 국어, 수학, 영어, 물리학1, 화학1, 생명과학1, 지구과학1, 사회·문화가 출시되었습니다.

기출의 파급효과에서는 준킬러 이상 기출에서 얻어갈 수 있는 '꼭 필요한 도구와 태도'를 정리합니다. '꼭 필요한 도구와 태도' 체화를 위해 관련도가 높은 준킬러 이상 기출을 바로바로 보여주며 체화 속도를 높입니다. 단시간 내에 점수를 극대화할 수 있도록 교재가 설계되었습니다.

학습하시다 질문이 생기신다면 '파급의 기출효과' 카페에서 질문을 할 수 있습니다. 교재 인증을 하시면 질문 게시판을 이용하실 수 있습니다.

더 궁금하시다면 <https://cafe.naver.com/spreadeffect/15>에서 확인하시면 됩니다.