개념서

문제편

COMPACT

수학1

드리는 말

안녕하세요. 정지호입니다. 제가 사정이 생겨 수업을 그만두게 되었습니다. 이제까지 받은 것들이 너무 많아, 제 수업과 교재를 드리고 싶어 이렇게 글을 남깁니다.

이 교재는, 제 교재의 문제 중 강의가 있는 문제들만 추려서 만들었습니다. 그러니 이 문제들만 풀면 이 단원을 마스터했다라는 착각은 하지 마시고, 이 단원에 이런 문제들이 있다 정도로 봐주시면 좋을 것 같습니다. 하지만 많은 학생들이 풀고 도움이 되었으므로 이 문제들을 선보입니다.

강의 검색은 문제 옆의 대괄호안의 이름을 유튜브에 검색하면 나옵니다.

예) 수상 C135번

띄어쓰기도 지켜서 검색하시면 됩니다. 간혹가다 검색이 안 되는 문제들도 있는듯한데, 그건 왜 그런지 저도 잘 모르겠습니다.... 미리 양해 부탁드립니다. 제가 부족해서 교재나 영상의 오타나 오류 등이 있을 수 있습니다. 그것도 미리 미안합니다. 다만, 조금이나마 여러분들에게 도움이 되었으면 하는 마음으로 올리게 되었습니다.

마지막으로 언제나 공부보다, 성적보다 비할 수 없을 정도로 소중한 여러분들임을 잊지 마셨으면 좋겠습니다. 세상에서 가장 멋진 여러분들을 만나게 되어 설렙니다. 항상 응원하고 사랑합니다.

마음으로 가르치는 강사 정 지 호

공 부 법

첫째, 조금이라도 애매하면 모르는 것입니다. 답지를 보거나 영상을 보세요.

둘째, 답지를 보거나 영상을 보았으면, 답지를 덮고, 반드시 다시 풀어야 합니다.

셋째, 책에 틀리거나 애매한 문제도 반드시 문제 옆에 표시하고, 꼭 다시 풀어야 합니다.

지수함수와 로그함수

(1) 지수

(2) 로그

(3) 지수함수

(4) 로그함수

밑과 지수

2^2, 2^3, 2^4, $\cdots$을 각각 2의 제곱, 2의 세제곱, 2의 네제곱, $\cdots$이라 읽고, 이들을 통틀어 2의 **거듭제곱**이라고 한다.
또, 2^2, 2^3, 2^4, $\cdots$에서 2를 거듭제곱의 **밑**이라 하고, 밑 2를 곱한 횟수 2, 3, 4, $\cdots$를 거듭제곱의 **지수**라고 한다.

거듭제곱근의 뜻

(1) 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 $x^n=a$를 만족하는 x를 a의 n제곱근이라 한다.
(2) 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

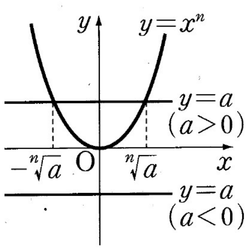
	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

(1)실수 a의 n제곱근 : 방정식 $x^n=a$의 근
(2) n제곱근 a : $\sqrt[n]{a}$ (a의 n제곱근 중 a와 부호가 같은 실수)
(3) n제곱근 a는 많아야 1개이지만 a의 n제곱근은 복소수의 범위에서 n개다.

[참고] 그래프를 이용한 거급제곱근의 이해

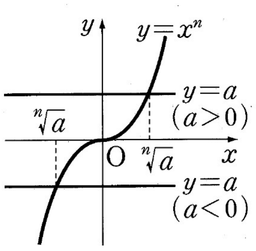
a의 n제곱근 중 실수인 것을 구하는 방정식 $x^n=a$의 실근을 구하는 것과 같고, 이것은 곡선 $y=x^n$과 직선 $y=a$의 교점의 x좌표를 찾는 것과 같다.

(1) n이 짝수일 때



n이 짝수일 때 함수 $y=x^n$은 우함수이므로 이 함수의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.
① $a>0$이면 교점을은 두 개이고, 교점의 x좌표는 $x=-\sqrt[n]{a}$, $x=\sqrt[n]{a}$이다.
② $a=0$이면 교점은 한 개이고, 교점의 x좌표는 $x=0$이다.
③ $a<0$이면 교점이 없다.

(2) n이 홀수일 때



n이 홀수일 때 함수 $y=x^n$은 기함수이므로 이 함수의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.
이때, a의 값에 관계없이 교점은 한 개이고, 교점의 x좌표는 $x=\sqrt[n]{a}$이다.

거듭제곱근의 성질

$a>0,\ b>0$이고, $m,\ n$이 2 이상의 자연수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n=a$ ② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$ ④ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}=\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ ⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

지수의 확장

$a \neq 0$이고, n이 자연수일 때

$a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

$a > 0$이고, m은 정수, n은 2 이상의 자연수일 때

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

지수법칙

$a > 0$, $b > 0$이고, $m,\ n$이 유리수일 때

① $a^m a^n = a^{m+n}$ ② $a^m \div a^n = a^{m-n}$

③ $(a^m)^n = a^{mn}$ ④ $(ab)^n = a^n b^n$

⑤ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

[참고] 지수법칙은 지수의 범위를 실수로 확장하여도 성립한다.

[증명]

①

정수 m, n, p, q $(n \geq 2,\ q \geq 2)$에 대하여 $r = \dfrac{m}{n}$, $s = \dfrac{p}{q}$로 놓으면

$$a^r a^s = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

지수법칙에서 지수 범위의 확장

지수가 정수일 때는 밑이 음수인 경우에도 지수법칙이 성립하지만, 지수가 정수가 아닌 유리수, 실수일 때는 반드시 밑이 양수인 경우에만 지수법칙이 성립한다.

즉, 지수가 정수가 아닌 경우 밑이 음수이면 지수법칙을 적용하지 않는다.

예 잘못된 계산 : $\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-3)^{2\times\frac{1}{2}} = (-3)^1 = -3$

옳은 계산 : $\{(-3)^2\}^{\frac{1}{2}} = 9^{\frac{1}{2}} = 3^{2\times\frac{1}{2}} = 3$

지수법칙의 활용 (지수의 변형)

(1) 조건 $a^{2x} = k$이 주어지면 $\dfrac{a^x - a^{-x}}{a^x + a^{-x}}$의 분모, 분자에 각각 a^x을 곱한다.

(2) 조건 $a^x = b^y = c^z$이 주어지면 주어진 식의 값을 k라 하여 $a,\ b,\ c$를 k로 나타낸다.

$a^x = b^y = c^z = k \Rightarrow a = k^{\frac{1}{x}}$, $b = k^{\frac{1}{y}}$, $c = k^{\frac{1}{z}}$

(3) 조건 $a^x = b^y$이 주어지면 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$을 이용하여 양변을 적절히 변형한다.

$a^x = b^y \Rightarrow a = b^{\frac{y}{x}}$, $b = a^{\frac{x}{y}}$, $a^{\frac{1}{y}} = b^{\frac{1}{x}}$

(4) $a^x = p$, $a^y = q$에서 $x \pm y$의 값을 구하려면 주어진 두 식을 곱하거나 나눈다.

$a^{x+y} = a^x \times a^y = pq$, $a^{x-y} = a^x \div a^y = \dfrac{p}{q}$

거듭제곱근의 대소 관계

분수 지수를 이용하여 나타내었을 때, 밑을 같게 할 수 없으면 지수를 같게 하여 밑을 비교한다.

(ⅰ) 거듭제곱근 꼴은 분수 지수 꼴로 고친다.

(ⅱ) 분수 지수의 분모의 최소공배수를 이용하여 통분한다.

(ⅲ) 지수를 같게 하여 밑이 큰 쪽이 크다고 결정한다.

[참고] 밑을 같게 할 수 있을 때는

(1) $0<$(밑)<1 ⇨ 지수가 작은 쪽이 큰 수

(2) (밑)>1 ⇨ 지수가 큰 쪽이 큰 수

1. 지수와 밑 조건(지수법칙에 따른)

a^x

x가 자연수, 정수	x가 유리수, 실수
$a \neq 0$	$a > 0$

예) $\{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}} \neq (-1)^1$

$\{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$

2. a의 n제곱근 : $x^n = a$

n제곱근 a : $\sqrt[n]{a}$

※ a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수

n \ a	$a>0$	$a=0$	$a<0$
짝수	2개	1개	0개
홀수	1개	1개	1개

예) $\sqrt[3]{3^5}$ 이 어떤 자연수의 n 제곱근

=> 어떤 자연수를 a라 했을 때, $\left\{\sqrt[3]{3^5}\right\}^n = a$

3. 성질들($a>0$, $b>0$)

① $\sqrt{a^5} = a^2\sqrt{a}$

예) $\sqrt{2^5} = 4\sqrt{2}$

② $\sqrt[\text{홀수}]{-a} = -\sqrt[\text{홀수}]{a}$

예) $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$

③ $\sqrt[n]{a^n} = a$

예) $\sqrt[4]{3^4} = 3$

cf) a의 부호에 관계없이

n이 짝수, $\sqrt[n]{a^n} = |a|$, n이 홀수, $\sqrt[n]{a^n} = a$

예) $\sqrt[4]{(-5)^4} = \sqrt[4]{(5)^4} = 5 = |-5|$

$\sqrt[3]{(-5)^3}$ 은 $x^3 = (-5)^3$ 중 부호가 같은 실수

$\therefore x = -5 \quad \therefore \sqrt[3]{(-5)^3} = -5$

④ $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$

예) $\sqrt[3]{5}\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{10}$

⑤ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

예) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{5}{2}}$

⑥ $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$

예) $\{\sqrt[3]{2}\}^5 = \sqrt[3]{2^5} = 2\sqrt[3]{2^2}$

※ a가 음수일 때는 성립하지 않는다.

예) $(\sqrt{-3})^6 \neq \sqrt{(-3)^6}$

⑦ $(\sqrt[n]{a})^n = \sqrt[n]{a^n}$

※ a가 음수일 때는 성립하지 않는다.

cf) $(\sqrt[4]{-3})^4 \neq -3$은 $x^4 = -3$을 만족하는 실수 x는 존재하지 않기 때문에 $\sqrt[4]{-3}$은 존재하지 않는다.

⑧ $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

예) $\sqrt[8]{5^6} = \sqrt[4]{5^3}$

⑨ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

예) $\sqrt[3]{\sqrt{5}} = \sqrt[6]{5}$

⑩ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$,

예) $5^{-3} = \dfrac{1}{5^3}$

⑪ $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

예) $5^{-1} = \dfrac{1}{5}$

⑫ $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

예) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

⑬ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

예) $5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{5}$

1) [수1 C31번]

다음 중 옳지 않은 것은?

① $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{2^7}$

② $\sqrt[3]{-\sqrt{64}} = -2$

③ $\sqrt[3]{\sqrt[5]{8}} = \sqrt[5]{2}$

④ $\dfrac{\sqrt[3]{-27}}{\sqrt[3]{-8}} = \sqrt[3]{\dfrac{27}{8}}$

⑤ $\left(\sqrt[3]{7} \times \dfrac{1}{\sqrt{7}}\right)^6 = 7$

2) [수1 C66번]
다음을 계산하시오.

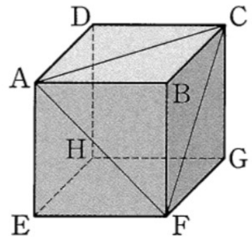
$$\sqrt{(-2)^2}+\sqrt[3]{(-3)^3}+\sqrt[4]{(-4)^4}+\cdots+\sqrt[10]{(-10)^{10}}$$

3) [수1 C68번]
실수 x와 자연수 n에 대하여 x의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $R(x,\ n)$이라 하자. 이때

$$R(10,\ 10)+R(\sqrt{10},\ 5)+R(-\sqrt{10},\ 5)+R(-10,\ 10)$$

의 값을 구하시오.

4) [수1 C70번]
오른쪽 그림과 같은 정육면체의 부피가 $\sqrt{3}$일 때, 삼각형 AFC의 넓이는 $\dfrac{\sqrt[n]{3^m}}{2}$ 이다. 이때 서로소인 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오. (단, $n \geq 2$)



5) [수1 C71번]
$a>0$일 때, $\dfrac{\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a\sqrt[5]{a}}}}{\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}}}=\sqrt[n]{a^m}$ 을 만족시키는 서로소인 두 자연수 $m,\ n$에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

6) [수1 C74번]

$a=\sqrt[6]{2-\sqrt{3}}$ 일 때, $\dfrac{a^{-2}+a^{-4}+a^{-6}+a^{-8}+a^{-10}}{a^2+a^4+a^6+a^8+a^{10}}$의 값은?

① $7-4\sqrt{3}$ ② $2-\sqrt{3}$ ③ 1
④ $2+\sqrt{3}$ ⑤ $7+4\sqrt{3}$

7) [수1 C78번]

다음 조건을 모두 만족시키는 1이 아닌 세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $ac=b^k$이다. 이때 실수 k의 값을 구하시오.

> (가) a^2은 b의 세제곱근이다.
> (나) b^3은 c의 제곱근이다.

8) [수1 C79번]

$a>0,\ a\neq 1$일 때,

$\sqrt[3]{a\sqrt[3]{a}}\div\sqrt{a^3\sqrt{a^k}}\times\sqrt[4]{a^3}=1$

을 만족시키는 실수 k의 값은?

① $-\dfrac{4}{3}$ ② $-\dfrac{11}{9}$ ③ $-\dfrac{8}{9}$
④ $-\dfrac{7}{9}$ ⑤ $-\dfrac{2}{3}$

9) [수1 C90번]

$2^x=3^{-y}$, $9^y=6^z$ 일 때, $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$을 z를 이용하여 나타내면?(단, $xyz\neq 0$)

① $-\dfrac{2}{z}$ ② $\dfrac{1}{z}$ ③ $\dfrac{2}{z}$
④ $-\dfrac{z}{2}$ ⑤ $\dfrac{z}{2}$

10) [수1 C92번]
어떤 문서를 $r\%$로 확대 복사한 후 복사본을 다시 $r\%$로 확대 복사하는 작업을 반복하였다. 6번째 복사본의 글자 크기가 원본의 2배일 때, 8번째 복사본의 글자 크기는 6번째 복사본의 $2^{\frac{q}{p}}$배이다. 이때 $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

지수함수와 로그함수

(1) 지수

(2) 로그

(3) 지수함수

(4) 로그함수

로그의 정의

$a>0$, $a\neq 1$일 때, 임의의 양수 N에 대하여 $a^x=N$를 만족하는 실수 x는 오직 하나만 존재하고, 이 실수 x를 $\log_a N$로 나타낸다. 즉,

$$a^x=N \Longleftrightarrow x=\log_{\underbrace{a}_{\text{밑}}} \overbrace{N}^{\text{진수}}$$

이 때, x를 a를 밑으로 하는 N의 로그라 하고, N를 $\log_a N$의 진수라 한다.

로그의 밑과 진수의 조건

(1) 밑이 1이 아닌 양수이어야 하는 이유

(밑)<0 : $\log_{-1}3=x \Leftrightarrow (-1)^x=3$

(밑)$=0$: $\log_0 3=x \Leftrightarrow 0^x=3$

(밑)$=1$: $\log_1 3=x \Leftrightarrow 1^x=3$

위의 세 가지 경우를 만족하는 실수 x는 존재하지 않는다.

(2) 진수가 양수이어야 하는 이유

(진수)$=\ 0$: $\log_2 0=x \Leftrightarrow 2^x=0$

(진수)$=\ <0$: $\log_2(-4)=x \Leftrightarrow 2^x=-4$

위의 두 가지 경우를 만족하는 실수 x는 존재하지 않는다.

따라서 $\log_a b$에서 $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$이어야 한다.

로그의 성질과 밑의 변환 공식

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $b\neq 1$, $c>0$, $c\neq 1$, $x>$, $y>0$일 때,

(1) $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$　　(2) $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

[증명]

$M>0$, $N>0$일 때 $\log_a M=p$, $\log_a N=q$라고 하면 로그의 정의에 의해

$$a^p=M,\ a^q=N$$

이때 $MN=a^p a^q=a^{p+q}$이므로, 로그의 정의에 의해

$$\log_a MN=p+q=\log_a M+\log_a N$$

(3) $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

(4) $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k은 실수)

(5) $\log_{a^m} M^n=\dfrac{n}{m}\log_a M$ (단, m, n은 실수, $m\neq 0$)

(6) $\log_a M=\dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ (7) $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

[증명]

$x=\log_a b$, $y=\log_c a$라고 하면 로그의 정의에 의해

$$b=a^x,\ a=c^y$$

이므로, 지수의 성질에 의해 $b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$이다.

즉, 로그의 정의에 의해 $xy=\log_c b$이므로

$$\log_a b\times log_c a=\log_c b$$

이다. 이때 로그의 정의에 의해 $a\neq 1$이므로 $\log_c a\neq 0$이다.

따라서 양변을 $\log_c a$로 나누면$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

8) $a^{\log_a M} = M$, $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

[증명]

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$**의 증명**

$a^{\log_b c} = x$로 놓고 양변에 밑이 $b\,(b>0,\ b \neq 1)$인 로그를 취하면

$\log_b a^{\log_b c} = \log_b x$

위의 좌변을 정리하면

$$\begin{aligned}\log_b a^{\log_b c} &= (\log_b c)(\log_b a)\\ &= (\log_b a)(\log_b c)\\ &= \log_b c^{\log_b a}\end{aligned}$$

$\log_b c^{\log_b a} = \log_b x$에서 양변의 로그의 밑이 b로 같으므로 $x = c^{\log_b a}$ $\therefore\ a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

(9) $\log_a b \cdot log_b a = 1$

로그의 계산에서 다음에 유의한다.

(1) $\log_a (M+N) \neq log_a M + \log_a N$

(2) $\dfrac{\log_a M}{\log_a N} \neq log_a M - \log_a N$

(3) $\log_a M^k \neq (\log_a M)^k$

상용로그의 정수부분과 소수부분

(1) 임의의 양수 N에 대하여 $\log_{10}N$과 같이 10을 밑으로 하는 로그를 상용로그라 하고, 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$으로 나타낸다.

(2) 임의의 양수 N에 대하여 상용로그는

$\log N = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)

로 나타낼 수 있고, n을 $\log N$의 지표, α를 $\log N$의 소수부분(음이 아닌 소수부분)라 한다.

(2) 상용로그의 정수부분은 소수부분이 먼저 결정되고 난 후, 결정된다.

(3) x보다 크지 않은 최대의 정수를 $[x]$라 할 때,

① $\log x$의 정수부분 : $[\log x]$

② $\log x$의 소수부분 : $\log x - [\log x]$

정수부분과 소수부분의 성질의 활용

$A>0$, $B>0$일 때,

(1) 정수부분의 성질

$\log A$의 정수부분이 n이다.

$\Leftrightarrow$ $\log A = n+\alpha$ (단, n은 정수, $0 \le \alpha < 1$)

$\Leftrightarrow$ $n \le log\ A < n+1$

$\Leftrightarrow$ $[\log A] = n$

0이 아닌 수이면서 한 자리의 수이다.

$\Leftrightarrow$ $A = (\square,\square\square\square\cdots)\times 10^n$ (단, n은 정수)

$\Leftrightarrow$ $10^n \le A < 10^{n+1}$

(2) 소수부분의 성질

$\log A$와 $\log B$의 소수부분이 같다.

$\Leftrightarrow$ $\log A - \log B =$(정수)

$\Leftrightarrow$ $\log A - [\log A] = \log B - [\log B]$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{A}{B} = 10^m$ (단, m은 정수)

$\Leftrightarrow$ A와 B의 숫자의 배열이 같다.

상용로그의 정수부분과 소수부분의 성질

(1) 정수부분의 성질

① 정수 부분이 n자리인 수의 상용로그의 정수부분은 $n-1$이다.

② 소수점 아래 n째 자리에서 처음으로 0이 아닌 숫자가 나타나는 수의 상용로그의 정수부분은 $-n$ (또는 $\overline{n}$)이다.

예) $\log 2 = 0.3010$, $\log 0.2 = -0.6990 = -1 + 0.3010 = \overline{1}.3010$

$\log 0.02 = -1.6990 = -2 + 0.3010 = \overline{2}.3010$

(2) 소수부분의 성질

진수의 숫자의 배열이 같고 소수점의 위치만 다른 양수들의 상용로그의 소수부분은 모두 같다.

예) $\log 2 = 0.3010$, $\log 20 = 1.3010$, $\log 200 = 2.3010$

1. 로그의 정의와 밑, 진수 조건

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b \,(a > 0, a \neq 1, b > 0)$

2. 로그의 공식

(1) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

(2) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

(3) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(4) $\log_a M^k = k\log_a M$ (단, k은 실수)

(5) $\log_{a^m} M^n = \dfrac{n}{m}\log_a M$ (단, m, n은 실수, $m \neq 0$)

(6) $\log_a M = \dfrac{\log_b M}{\log_b a}$ (7) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

(8) $a^{\log_a M} = M$, $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

(9) $A = B \Leftrightarrow \log A = \log B$

(10) $A + B = C \Leftrightarrow \log(A+B) = \log C$

cf) $A + B = C \Rightarrow \log A + \log B = \log C$ (X)

3. 상용로그

$\log N = n + \alpha$ (n은 정수, $0 \leq \alpha < 1$)

11) [수1 C95번]
다음 등식을 $a^x = N$ 꼴로 나타내어라.
(1) $\log_2 32 = 5$ (2) $\log_{\frac{1}{3}} 81 = -4$

12) [수1 C98번]
다음 등식을 $x = \log_a N$ 꼴로 나타내어라.
(1) $4^2 = 16$ (2) $2^{-2} = 0.25$

(3) $100^{\frac{1}{2}} = 10$ (4) $3^0 = 1$

다음 식을 만족시키는 x의 값을 구하여라.

13) [수1 C100번]
$\log_3 x = -3$

다음 값이 존재하기 위한 x의 값의 범위를 구하여라.

14) [수1 C109번]
$\log_{x+4}(x-2)^2$

15) [수1 C124번]

$\log_2 5 = a$, $\log_5 3 = b$ 일 때, $\log_6 45$ 를 a, b 로 나타내면?

① $\frac{2ab}{1+a}$ ② $\frac{2ab-1}{1+a}$ ③ $\frac{a(b+2)}{1+ab}$

④ $\frac{a(2b-1)}{1+ab}$ ⑤ $\frac{a(2b+1)}{1+ab}$

16) [수1 C135번]

$\left(3^{\log_3 4 + \log_3 2}\right)^2 + \left(2^{\log_3 4 + \log_3 2}\right)^{\log_2 3}$의 값은?

① 64 ② 68 ③ 72

④ 76 ⑤ 80

17) [수1 C167번]

$\log A = -5.6$일 때, $\log \sqrt[4]{A}$의 정수 부분과 소수 부분을 차례대로 적은 것은?

① $-1,\ 0.4$ ② $-1,\ 0.6$ ③ $-2,\ 0.4$

④ $-2,\ 0.6$ ⑤ $-2,\ 0.8$

18) [수1 C169번]

$\log x$의 정수 부분이 2일 때, $\log x^3$의 소수 부분과 $\log x^5$의 소수 부분이 같도록 하는 모든 실수 x의 값의 곱은?

① 10^2 ② 10^3 ③ $10^{\frac{7}{2}}$

④ 10^4 ⑤ $10^{\frac{9}{2}}$

19) [수1 C173번]

$10 < x < 100$일 때, $\log x$의 소수 부분과 $\log x^2$의 소수 부분의 합이 1인 모든 실수 x의 값의 곱은?

① 10^2 ② $10^{\frac{5}{2}}$ ③ $10^{\frac{8}{3}}$
④ 10^3 ⑤ 10^4

20) [수1 C174번]

지진의 에너지 E와 지진의 규모 M 사이에는 다음의 관계식이 성립한다고 한다.

$\log E = 11.8 + 1.5M$

이 때 규모가 5인 지진의 에너지는 규모가 4인 지진의 에너지의 몇 배인가?

① $\sqrt{10}$ ② 10 ③ $10\sqrt{10}$
④ 100 ⑤ $100\sqrt{100}$

21) [수1 C178번]

어느 산유국에서 매년 일정한 비율로 산유량을 증가시켜 20년 후의 산유량이 올해 산유량의 2배가 되도록 하려고 한다. 이 나라에서는 산유량을 매년 몇 $\%$식 증가시켜야 하는가? (단, $\log 1.035 = 0.015$, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

① 2.9 ② 3.1 ③ 3.3
④ 3.5 ⑤ 3.7

22) [수1 C182번]

$a=\log_2(2+\sqrt{3})$일 때,$4^a+\frac{4}{2^a}$의 값을 구하시오. [3점]

23) [수1 C184번]

$x=\log_3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$일 때, 3^x-3^{-x}의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{3}$ ③ $2\sqrt{2}$

④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $2\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

24) [수1 C186번]

다음 식의 값을 구하시오.

$$\log_2\left(1-\frac{1}{2}\right)+\log_2\left(1-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\log_2\left(1-\frac{1}{32}\right)$$

25) [수1 C187번]

216의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_{16}이라 할 때,

$$\log_6 a_1+\log_6 a_2+\log_6 a_3+\cdots+\log_6 a_{16}$$

의 값을 구하시오.

26) [수1 C194번]
다음 식의 값을 구하시오.
$$\log_5(\log_3 2)+\log_5(\log_4 3)+\log_5(\log_5 4)+\cdots+\log_5(\log_{32}31)$$

27) [수1 C205번]
$\log_{x-3}(-x^2+8x-12)$의 값이 존재하도록 하는 자연수 x에 대하여 $\log_2 x$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라 할 때, 2^{a-b}의 값을 구하시오.

28) [수1 C220번]
$1<\log A<2$일 때, $\log A = p\log 2 + q\log 3$을 만족시키는 정수 A의 개수를 구하시오.
(단, p, q는 음이 아닌 정수이다.)

29) [수1 C221번]
어느 인터넷 쇼핑몰의 매출액이 매년 일정한 비율로 증가하여 15년 만에 3배가 되었다. 15년 동안 이 인터넷 쇼핑몰의 매출액은 매년 몇 $\%$씩 증가했는지 구하시오.
(단, $\log 1.077 = 0.032$, $\log 3 = 0.48$로 계산한다.)

30) [수1 C222번]
일정한 온도에서 어느 세균을 배양하면 10분마다 그 수가 두 배로 증가한다고 한다. 이 세균 10마리를 일정한 온도에서 배양하면 3시간 후 세균은 10^k마리가 된다. 이때 k의 값을 구하시오. (단, $\log 2 = 0.3$으로 계산한다.)

31) [수1 C224번]
어느 도시의 10년 전의 인구는 A명이었는데, 그 후 5년 동안은 매년 10%씩 인구가 감소하고, 그 다음 5년 동안은 매년 10%씩 인구가 증가하여 현재의 인구는 10년 전의 인구의 k배가 되었다. 이때 k의 값을 구하시오.
(단, $\log 9.55 = 0.98$, $\log 9.9 = 0.996$으로 계산한다.)

32) [수1 C225번]

1보다 큰 두 실수 a, b에 대하여

$$\log_{\sqrt{3}} a = \log_9 ab$$

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

지수함수와 로그함수

(1) 지수

(2) 로그

(3) 지수함수

(4) 로그함수

지수함수

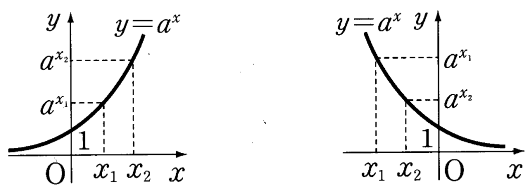
임의의 실수 x에 대하여 a^x를 대응시키는 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 0,1)$을 a를 밑으로 하는 x의 지수함수라 한다.

지수함수의 밑의 조건

1이 아닌 양수라는 조건이 있는 이유는 a가 0또는1인 경우에는 x의 값에 관계없이 y가 항상 $0,\ 1$의 값을 갖기 때문이다. 또한, a가 음수인 경우에는 a^x이 실수가 아닌 값을 갖게 될 수 있다. 예를 들어, $a=-1$인 경우 $y=(-1)^x$은 $x=\frac{1}{2}$일 때 실수가 아닌 값을 갖는다.

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프

(1) 정의역 : $\{x|x$는 모든 실수$\}$, 치역 : $\{y|y$는 $y>0$인 실수$\}$
(2) 점 $(0,\ 1)$, $(1,\ a)$를 지나고 $y=0$(x축)을 점근선으로 한다.
(3) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다. (증가함수)
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다. (감소함수)



지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$의 그래프의 평행이동, 대칭이동

x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동	$y=a^x \Rightarrow y-n=a^{x-m}$ $\therefore\ y=a^{x-m}+n$
x축에 대하여 대칭이동	$y=a^x \Rightarrow -y=a^x$ $\therefore\ y=-a^x$
y축에 대하여 대칭이동	$y=a^x \Rightarrow y=a^{-x}$ $\therefore\ y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$
원점에 대하여 대칭이동	$y=a^x \Rightarrow -y=a^{-x}$ $\therefore\ y=-\left(\frac{1}{a}\right)^x$
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동	$y=a^x \Rightarrow x=a^y$ $\therefore\ y=\log_a x$

$y=a^x$ 과 $y=\log_a x$
는 서로 역함수 관계

지수함수의 최대, 최소

정의역이 $\{x|m\leq x\leq n\}$일 때, 지수함수 $y=a^x$은
(1) $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 a^m, $x=n$에서 최댓값 a^n을 갖는다.
(2) $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 a^m, $x=n$에서 최솟값 a^n을 갖는다.

지수방정식의 풀이

(1) 항이 2개인 경우

① 밑을 같게 할 수 있을 때 ⇨ 지수를 비교하거나 밑을 1로 만드는 값을 찾는다.

즉, $a^{f(x)}=a^{g(x)}$ ⇨ $f(x)=g(x)$또는 $a=1$

② 밑을 같게 할 수 없을 때 ⇨ 양변에 상용로그를 취하여 푼다.

$a^{f(x)}=b^{g(x)}$ ⇨ $f(x)\cdot log\,a=g(x)\cdot log\,b$ (단, $a>0,\ b>0$)

③ 지수가 같을 때, ⇨ 밑을 비교하거나 지수를 0으로 만드는 값을 찾는다.

즉, $a^{f(x)}=b^{f(x)}$ ⇨ $a=b$ 또는 $f(x)=0$. 지수가 0일 때는 밑이 같지 않아도 등식이 성립한다.

(2) 항이 3개 이상인 경우

$a^x,\ a^{2x}$, $\cdots$의 항이 있을 때, ⇨ $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

지수부등식의 풀이

(1) 항이 2개인 경우

① 밑을 같게 할수 있을 때 ⇨ 지수를 비교한다.

㉠ $a>1$인 경우 : $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ ⇨ $f(x)>g(x)$ ← 부등호 방향 그대로

㉡ $0<a<1$인 경우 : $a^{f(x)}>a^{g(x)}$ ⇨ $f(x)<g(x)$ ← 부등호 방향 반대로

② 밑을 같게 할 수 없을 때 ⇨ 양변에 로그를 취하여 푼다.

(2) 항이 3개 이상인 경우

$a^x,\ a^{2x}$, $\cdots$의 항이 있을 때, ⇨ $a^x=t\ (t>0)$로 치환하여 t에 대한 부등식을 푼다.

〈참고〉

지수함수의 최대, 최소의 변역

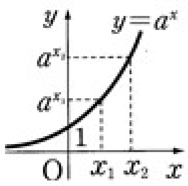
함수의 최대, 최소는 함수의 그래프의 증가, 감소에 따라 어떤 x의 값에서 최대, 최소가 되는지를 확인해야 한다. 또한, a^x 또는 a^x+a^{-x}를 치환할 때는 변역에 유의 해야 한다.

(1) $a^x=t$로 치환하면 $a^{2x}=t^2,\ a^{-x}=\dfrac{1}{t}$이고, $t>0$이다.

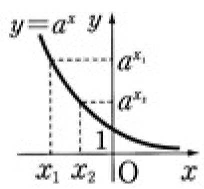
(2) $a^x+a^{-x}=t$로 치환하면 산술평균과 기하평균의 관계에 의하여 $a^x+a^{-x}\geq 2\sqrt{a^x\cdot a^{-x}}=2$이므로 $t\geq 2$이다. (단, 등호는 $x=0$일 때, 성립)

1. $y=a^x \ (a>0,\ a\neq 1)$

① $a>1$ 증가함수



② $0<a<1$ 감소함수



2. 공통점
정의역: $\{x|x\text{는 모든 실수}\}$
치역: $\{y|y>0\}$
$(0,1)$지남
x축이 점근선

3. 치환
$a^x=t(t>0)$

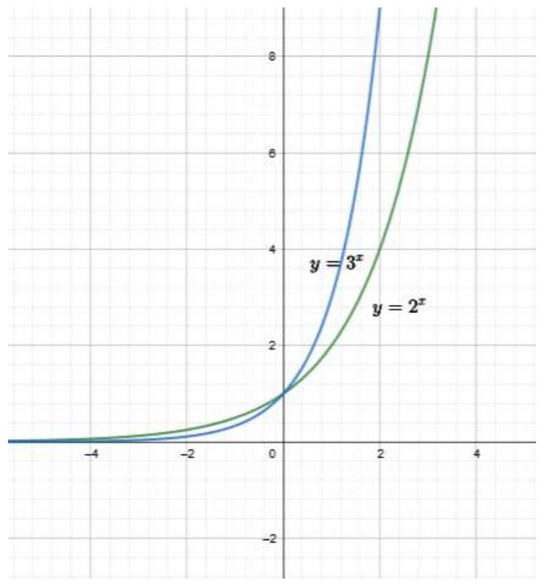
4. $a^x<a^y$
① $0<a<1$ => $x>y$
② $1<a$ => $x<y$

5. 해, 근 => x, 값 => y

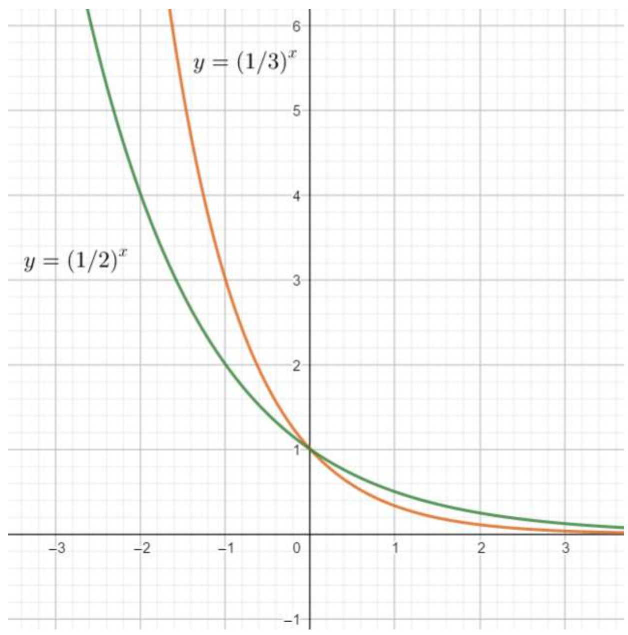
6. 식의 변형 : 식을 변형해도 해는 바뀌지 않는다.
ex) $2x^2+5x=0$의 해 $\Leftrightarrow$ $2x^2+3x=-2x$의 해

7. 함수와 방정식의 관계
$x^2-2x+1=x+5$의 방정식의 실근
$\Leftrightarrow$ $y=x^2-2x+1$과 $y=x+5$의 교점의 x좌표

8. 그래프연습($x=1$을 그어 비교한다.)
① $y=2^x$, $y=3^x$



② $y=(\frac{1}{2})^x$, $y=(\frac{1}{3})^x$



33) [수1 C258번]
다음 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구하여라.

$$\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}},\ \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{4}},\ \left(2^{\frac{1}{3}}8^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{6}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{32}}}}$$

34) [수1 C273번]
두 함수 $y=9^x$, $y=3^{x+1}$의 그래프가 직선 $x=k$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=54$일 때, 상수 k의 값을 구하여라.

35) [수1 C307번]

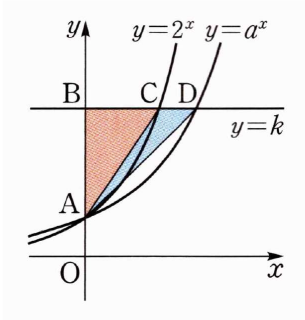
함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}-5$의 그래프와 직선 $y=k$가 만나지 않도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

36) [수1 C308번]

함수 $y=3^x$의 그래프 위의 두 점 A, B에 대하여 직선 AB의 기울기가 3이고 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$이다. 두 점 A, B의 x좌표를 각각 a, b라 할 때, 3^b-3^a의 값을 구하시오. (단, $a<b$)

37) [수1 C311번]

오른쪽 그림과 같이 y축 위의 두 점 A, B에 대하여 두 함수 $y=2^x$, $y=a^x$의 그래프와 점 B를 지나는 직선 $y=k(k>1)$가 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 삼각형 ACB의 넓이가 삼각형 ADC의 넓이의 2배일 때, 상수 a의 값을 구하시오. (단, $1<a<2$)



38) [수1 C312번]

다음 중 가장 큰 수와 가장 작은 수의 곱을 구하시오.

$$\sqrt[4]{8\sqrt[3]{4}},\ \left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{4}},\ \left(2^{\frac{1}{3}}\cdot 8^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{6}},\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{256}}}}$$

39) [수1 C313번]

$a>1$일 때, 자연수 n에 대하여 세 수

$$A=\sqrt[n]{a^{n+1}},\ B=\sqrt[n+1]{a^{n+2}},\ C=\sqrt[n+2]{a^{n+3}}$$

의 대소를 비교하시오.

40) [수1 C314번]

$0<a<1$일 때, 세 수 a, a^a, a^{a^a}의 대소 관계는?

① $a<a^a<a^{a^a}$ ② $a<a^{a^a}<a^a$ ③ $a^a<a<a^{a^a}$

④ $a^{a^a}<a<a^a$ ⑤ $a^{a^a}<a^a<a$

41) [수1 C316번]

정의역이 $\{x\mid -1\le x\le 2\}$인 함수 $y=a^{|x-1|+2}$의 최댓값이 $\dfrac{1}{4}$일 때, 최솟값은? (단, $a>0$)

① 2^{-3} ② 2^{-4} ③ 2^{-5}

④ 2^{-6} ⑤ 2^{-7}

42) [수1 C317번]

$x+2y-4=0$을 만족시키는 실수 x, y에 대하여 7^x+49^y은 $x=\alpha$, $y=\beta$일 때 최솟값 γ를 갖는다. 이때 $\alpha+\beta+\gamma$의 값은?

① 100 ② 101 ③ 102

④ 103 ⑤ 104

43) [수1 C320번]
두 함수 $y=9^x$, $y=3^{x+1}$의 그래프가 직선 $x=k$와 만나는 두 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=54$일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

44) [수1 C321번]
연립방정식 $\begin{cases} 2^{x-1}+3^{y+1}=11 \\ 2^{x+2}-3^{y-1}=15 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

① -3 ② -2 ③ -1
④ 1 ⑤ 2

45) [수1 C322번]
연립방정식 $\begin{cases} 2^{x+1}+2^{y+1}=24 \\ 2^{x+y-2}=8 \end{cases}$의 해를 $x=\alpha$, $y=\beta$라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오.

46) [수1 C323번]
방정식 $3^{2x}-3^{x+1}=a$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는 $m<a<n$이다. 이때 $m+n$의 값을 구하시오.

47) [수1 C326번]

방정식 $4^x+4^{-x}-2^{1+x}-2^{1-x}+k=0$이 적어도 하나의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위를 구하시오.

48) [수1 C331번]

모든 실수 x에 대하여 부등식 $4^x-2^{x+2}+k\geq 0$이 성립하도록 하는 실수 k의 최솟값을 구하시오.

49) [수1 C333번]

1마리의 박테리아는 x시간 후에 a^x마리로 증식된다고 한다. 처음에 50마리였던 박테리아가 4시간 후에 4050마리가 되었을 때, 50마리였던 박테리아가 36450마리가 되는 것은 처음으로부터 몇 시간 후인지 구하시오. (단, $a>0$)

50) [수1 C334번]

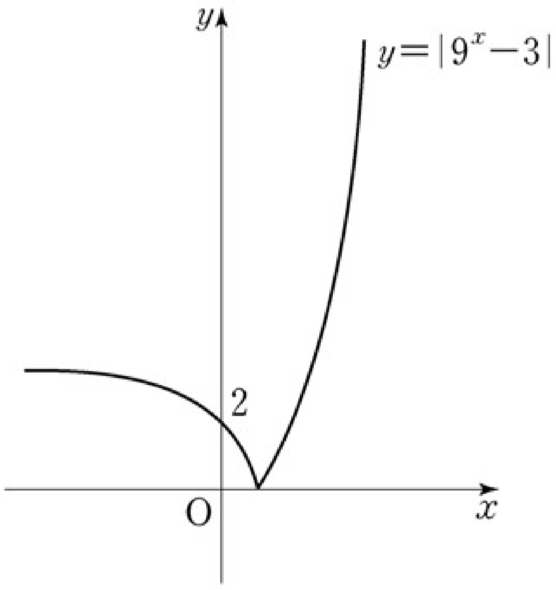
2000만 원을 주고 구매한 어떤 자동차를 중고로 팔 경우에는 구매 후 1년이 지날 때마다 30%씩 가격이 떨어진다고 한다. 이 자동차의 중고 가격이 처음으로 686만 원 이하가 되는 것은 구매 후 몇 년이 지났을 때인지 구하시오.

51) [수1 C336번]
두 비커 A, B에 같은 농도의 소금물이 같은 양만큼 들어 있다. 이때 갑은 비커 A의 소금물의 $\frac{7}{8}$을 버린 후 버린 양만큼 물을 넣고, 을은 비커 B의 소금물의 $\frac{3}{4}$을 버린 후 버린 양만큼 물을 넣는다. 이와 같은 작업을 갑은 12회, 을은 n회 시행하면 두 비커 A, B에 들어 있는 소금물의 농도가 같아진다고 할 때, n의 값을 구하시오.

52) [수1 C338번]

좌표평면 위의 두 곡선 $y = |9^x - 3|$과 $y = 2^{x+k}$이 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$라 할 때, $x_1 < 0$, $0 < x_2 < 2$를 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12



53) [수1 C339번]

실수에서 정의된 함수 $y = \dfrac{2^{x+3}}{2^{2x} - 2^x + 1}$의 최댓값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

지수함수와 로그함수

(1) 지수

(2) 로그

(3) 지수함수

(4) 로그함수

로그 함수

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq0)$의 역함수 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq0)$를 a를 밑으로 하는 로그함수라 한다.

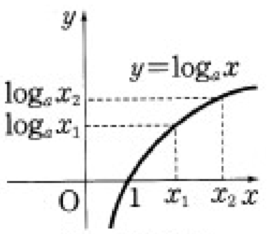
로그 함수 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq0)$의 그래프

(1) 정의역 : $\{\ x\mid x$는 $x>0$인 실수$\}$, 치역 : $\{y\mid y$는 모든 실수$\}$

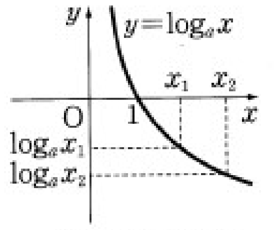
(2) 점 $(1,\ 0)$, $(a,\ 1)$을 지나고, $x=0$ (y축)을 점근선으로 한다.

(3) $a>1$일 때, x의 값의 증가하면 y의 값도 증가한다. (증가함수)

$0<a<1$일 때, x의 값의 증가하면 y의 값은 감소한다. (감소함수)



[$a>1$일 때]



[$0<a<1$일 때]

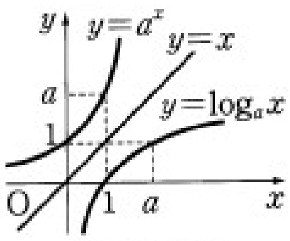
로그함수와 지수함수와의 관계

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로 로그의 정의에 의하여

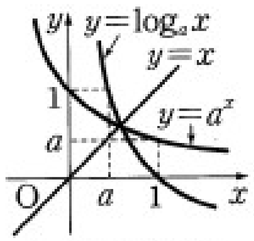
$y=a^x$에서 $x=\log_a y$이고, x와 y를 서로 바꾸면

$y=\log_a x$ $(a>0,\ \ a\neq1)$

따라서 지수함수 $y=a^x$의 역함수는 $y=\log_a x$이다.



[$a>1$일 때]



[$0<a<1$일 때]

로그함수 $y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$의 그래프의 평행이동 · 대칭이동

x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동	$y=\log_a x$ ⇨ $y-n=\log_a(x-m)$ $\therefore\ y=\log_a(x-m)+n$
x축에 대하여 대칭이동	$y=\log_a x$ ⇨ $-y=\log_a x$ $\therefore\ y=-\log_a x$
y축에 대하여 대칭이동	$y=\log_a x$ ⇨ $y=\log_a(-x)$ $\therefore\ y=\log_a(-x)$
원점에 대하여 대칭이동	$y=\log_a x$ ⇨ $-y=\log_a(-x)$ $\therefore\ y=-\log_a(-x)$
직선 $y=x$에 대하여 대칭이동	$y=\log_a x$ ⇨ $x=\log_a y$ $\therefore\ y=a^x$

로그함수의 최대 ㆍ최소

정의역이 $\{x|\ m\ \leq\ x\ \leq\ n\}$일 때, 로그함수 $y=\log_a x$는

(1) $a>1$일 때, $x=m$에서 최솟값 $\log_a m$, $x=n$에서 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.

(2) $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 $\log_a m$, $x=n$에서 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

로그 방정식의 풀이

(1) $\log_a f(x)=b \ \Leftrightarrow\ f(x)=a^b \quad (\text{단}, f(x)>0)$

(2) 밑이 같을 때, $\Rightarrow$ 진수를 비교한다.

$\log_a f(x)=\log_a g(x) \Rightarrow f(x)=g(x)(\text{단}\, f(x)>0, g(x)>0)$

(3) 진수가 같을 때 $\Rightarrow$ 밑을 비교하거나 진수를 1로 만드는 값을 찾는다.

$\log_a f(x)=\log_b f(x)\ \Rightarrow\ a=b$또는 $f(x)=1$

(4) $\log_a f(x)$의 꼴이 반복하여 나타날 때, $\Rightarrow$ $\log_a f(x)=t$로 치환하여 t에 대한 방정식을 푼다.

(5) 지수에 로그가 있을 때 $\Rightarrow$ 양변에 로그를 취하여 푼다.

로그 부등식의 풀이

(1) 밑이 같을 때 $\Rightarrow$ 진수를 비교한다.

① $a>1$인 경우 : $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Rightarrow f(x)>g(x)>0$

②$0<a<1$일 때 : $\log_a f(x)>\log_a g(x) \Rightarrow 0<f(x)<g(x)$

(2) 밑이 다를 때 $\Rightarrow$ 밑의 변환공식을 이용하여 밑을 같게 하여 푼다.

(3) $\log_a f(x)$의 꼴이 반복하여 나타날 때 $\Rightarrow$ $\log_a f(x)=t$로 치환하여 t에 대한 부등식을 푼다.

(4) 지수에 로그가 있을 때 $\Rightarrow$ 양변에 로그를 취하여 푼다.

〈참고〉 밑과 진수의 조건의 확인

로그방정식과 로그부등식을 풀 때, 밑과 진수의 조건을 반드시 확인해야 한다.

$y=\log_{g(x)} f(x)$에서

(1) 밑의 조건 : $g(x)>0,\ g(x)\neq 1$

(2) 진수의 조건 : $f(x)>0$

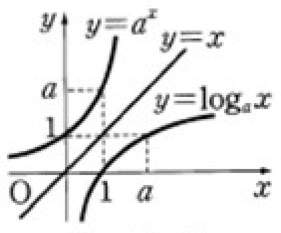
1. 정의

$y = a^{x}$ ($a > 0,\ a \neq 1, y > 0$)

$\Leftrightarrow \quad \log_{a}y = x \quad \Rightarrow \quad y = \log_{a}x$ ($a > 0,\ a \neq 1, x > 0$)

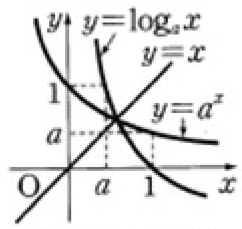
2. 그래프

① $a > 1$ 증가함수



[a>1일 때]

② $0 < a < 1$ 감소함수



[0<a<1일 때]

정의역: $\{x|x>0\}$
치역: $\{y|y$는 모든실수$\}$
둘 다 $(1,0)$을 지난다.

3. $y = \log_{a}bx$

① 점근선: $bx = 0$

② x절편: $bx = 1$

4. $y = \log_{a}bx + c$

① 점근선: $bx = 0$

② x절편: $y = 0$

5. 치환

$\log_{a}x = t$ (t범위 없다)

6. 대소비교

① $1 < a$이면 $\quad p < q \quad \Leftrightarrow \quad \log_{a}p < \log_{a}q$

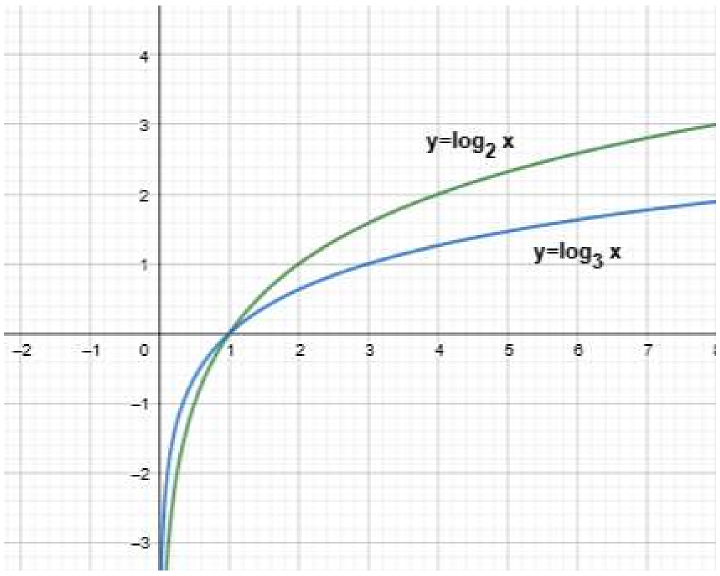
$0 < a < 1$이면 $\quad p < q \quad \Leftrightarrow \quad \log_{a}p > \log_{a}q$

② $1 < a$이면 $\quad a^{p} < q \quad \Leftrightarrow \quad p < \log_{a}q$

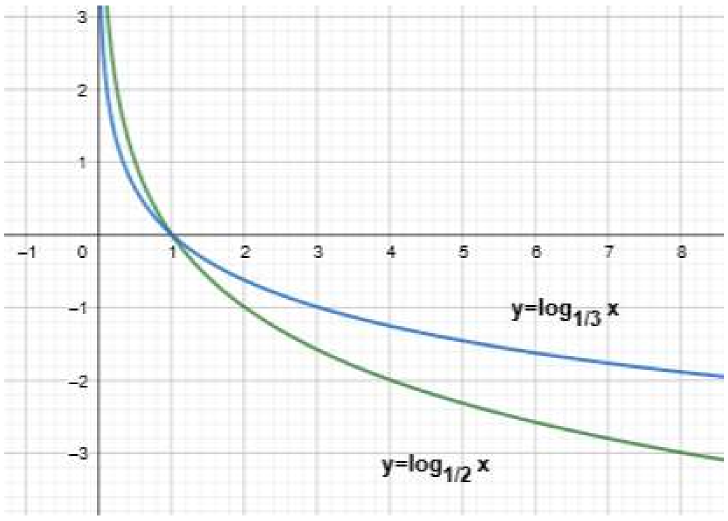
$0 < a < 1$이면 $\quad a^{p} < q \quad \Leftrightarrow \quad p > \log_{a}q$

7. 그래프연습($y=1$을 그어 비교한다.)

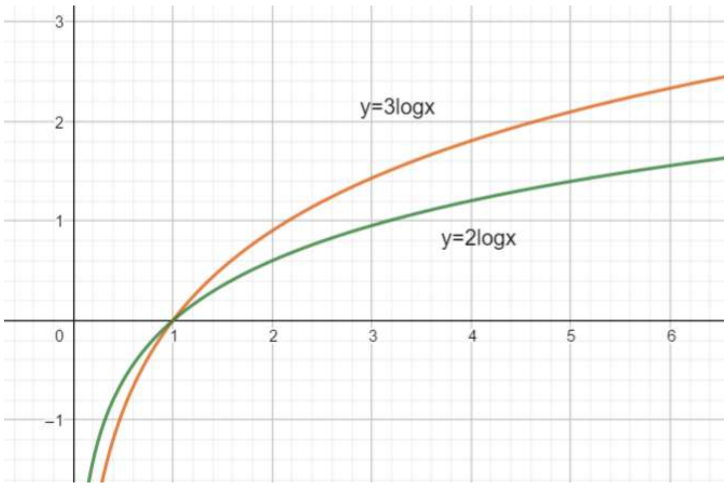
① $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$



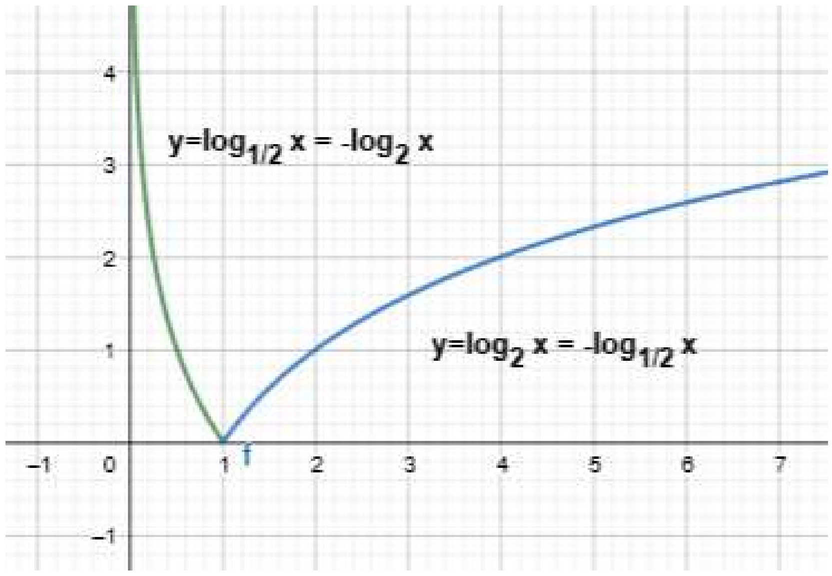
② $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$



③ $y=2\log x$, $y=3\log x$



④ $y=\left|\log_2 x\right|$ ⑤ $y=\left|\log_{\frac{1}{2}} x\right|$



다음 함수의 그래프를 그리고, 점근선의 방정식을 구하여라.

54) [수1 C353번]

$y=-\log_3(2x-1)$

55) [수1 C359번]

$y=2\log_3 x$와 $y=\log_3 x^2$의 그래프를 비교하여라.

다음 함수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

56) [수1 C368번]

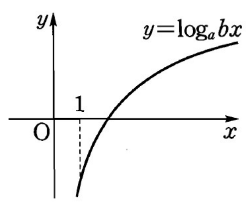
정의역이 $\left\{x \middle| \frac{1}{3} \le x \le \frac{8}{3}\right\}$인 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} 3x+1$

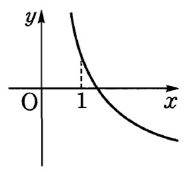
57) [수1 C372번]

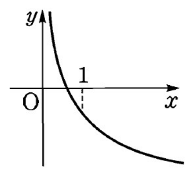
함수 $y=(\log_3 x)^2+a\log_{\frac{1}{3}} x+b$가 $x=\frac{1}{9}$에서 최솟값 -1을 가질 때, 상수 a, b에 대하여 ab의 값을 구하여라.

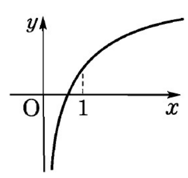
58) [수1 C374번]
$x \geq 2$일 때, 함수
$y=2(\log_2 2x)^2+\log_2(2x)^2+2\log_2 x+2$의 최솟값과 이때 x의 값을 구하여라.

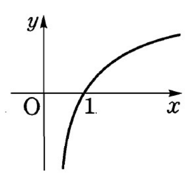
59) [수1 C376번]
함수 $y=\log_a bx$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 중 함수 $y=\log_b ax$의 그래프의 개형으로 알맞은 것은?
(단, $a>0,\ a\neq 1,\ b>0,\ b\neq 1$ 이고, 점선은 y축에 평행하다.)

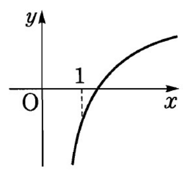


①


②


③


④


⑤


60) [수1 C387번]
방정식 $\log\sqrt{5x+5}=1-\frac{1}{2}\log(3x-1)$의 해는?

① $x=-3$ 또는 $x=\frac{7}{3}$
② $x=-\frac{7}{3}$ 또는 $x=3$
③ $x=-\frac{7}{3}$
④ $x=\frac{7}{3}$
⑤ $x=3$

다음 두 문제의 물음에 하여라.
61) [수1 C392번]
방정식 $x^{\log x}=\frac{100}{x}$의 모든 근의 곱을 구하여라.

62) [수1 C393번[
방정식 $5^{2x}=2^{4-2x}$의 해를 구하여라.

다음 문제의 물음에 하여라

63) [수1 C403번]

부등식 $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{3}}x) \le 1$의 해를 구하여라.

64) [수1 C405번]

부등식 $\log_2(\log_3 x) \le 1$의 해는?

① $0 < x \le 3$ ② $0 < x \le 9$ ③ $1 < x \le 3$
④ $1 < x \le 9$ ⑤ $1 \le x \le 9$

65) [수1 C413번]

부등식 $x^{\log_{\frac{1}{2}}x} > 4x^3$의 해가 $\alpha < x < \beta$일 때, $\alpha + \beta$의 값을 구하여라.

66) [수1 C414번]

부등식 $3^{4x} < (4^x)^3$의 해는?

① $x > -1$ ② $x > 0$ ③ $x < 0$
④ $x < 1$ ⑤ $x < \frac{4}{3}$

67) [수1 C415번]

부등식 $x^{\log x} < x$를 만족시키는 정수 x의 개수는?

① 8　② 9　③ 10

④ 11　⑤ 12

68) [수1 C422번]

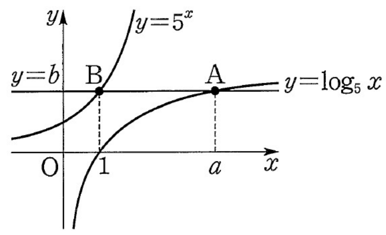
함수 $f(x)=\log_2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)$에 대하여

$$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots f(n)=-5$$

를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오.

70) [수1 C425번]

다음 그림과 같이 두 함수 $y=\log_5 x$, $y=5^x$의 그래프와 직선 $y=b$의 교점을 각각 A, B라 하자. 점 A의 x좌표가 a일 때, $\log_5 ab$의 값을 구하시오.



69) [수1 C423번]

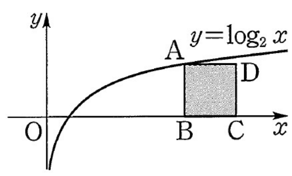
함수 $y=-\log_2 k(x+3)$의 그래프가 제 3 사분면을 지나지 않도록 하는 양수 k의 최댓값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$

④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

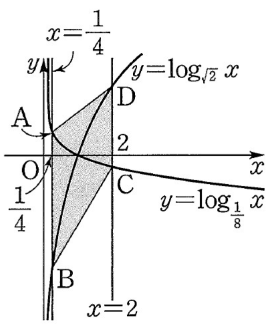
71) [수1 C426번]

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 A와 x축 위의 두 점 B, C에 대하여 사각형 ABCD가 한 변의 길이가 3인 정사각형일 때, 점 D의 좌표를 구하여라.



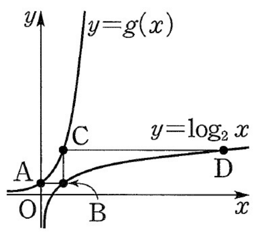
72) [수1 C428번]

오른쪽 그림과 같이 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{8}}x$, $y=\log_{\sqrt{2}}x$의 그래프가 직선 $x=\frac{1}{4}$과 만나는 점을 각각 A, B, 직선 $x=2$와 만나는 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오.



73) [수1 C432번]

오른쪽 그림과 같이 함수 $y=\log_2 x$와 그 역함수 $y=g(x)$의 그래프가 있다. 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 두 점 B, D와 곡선 $y=g(x)$ 위의 두 점 A, C에 대하여 두 직선 AB와 CD는 x축에 평행하고 직선 BC는 y축에 평행할 때, $\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$의 값을 구하여라. (단, A는 y축 위의 점이다.)



74) [수1 C435번]

$0<a<b<1$일 때, 다음 중 가장 큰 값과 가장 작은 값을 차례대로 나열한 것은?

$\log_a \frac{b}{a}$, $\log_a b$, $\log_b a$, $\log_a \frac{a}{b}$

① $\log_a b$, $\log_b a$　　② $\log_b a$, $\log_a \frac{b}{a}$

③ $\log_b a$, $\log_a \frac{a}{b}$　　④ $\log_a \frac{a}{b}$, $\log_a \frac{b}{a}$

⑤ $\log_a \frac{a}{b}$, $\log_b a$

75) [수1 C438번]

함수 $y=\frac{x^2}{x^{\log x}}$이 $x=a$에서 최댓값 b를 가질 때, $a+b$의 값을 구하시오.

76) [수1 C440번]
연립방정식

$$\begin{cases}\log_2 x + \log_3 y = 6 \\ \log_3 x \cdot log_2 y = 8\end{cases}$$

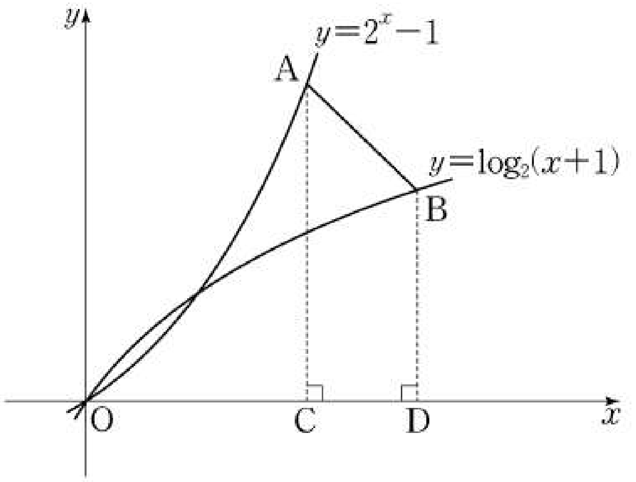
의 해가 $x=\alpha,\ y=\beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값을 구하시오.
(단, $\alpha > \beta$)

77) [수1 C452번]
어떤 휴대 전화의 가격은 매년 전년보다 15%씩 떨어진다고 한다. 2019년에 80만 원인 휴대 전화가 처음으로 8만 원 이하가 되는 해는? (단, $\log 8.5 = 0.9294$로 계산한다.)

① 2030년 ② 2031년 ③ 2032년
④ 2033년 ⑤ 2034년

78) [수1 C456번]

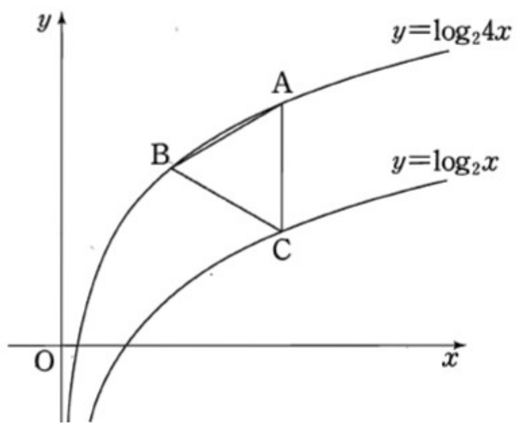
곡선 $y=2^{x}-1$ 위의 점 $\mathrm{A}(2,3)$을 지나고 기울기가 -1인 직선이 곡선 $y=\log_{2}(x+1)$과 만나는 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ACDB의 넓이는?



① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{11}{4}$ ③ 3 ④ $\frac{13}{4}$ ⑤ $\frac{7}{2}$

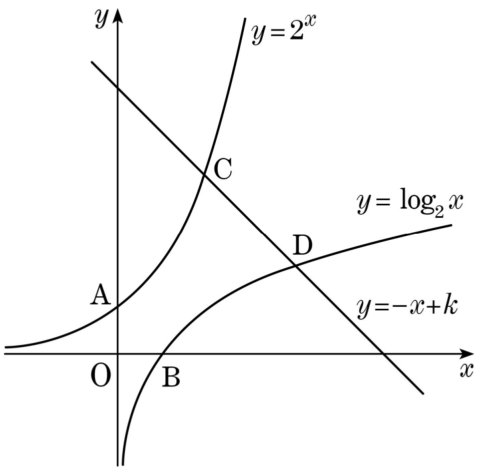
79) [수1 C457번]

함수 $y=\log_{2}4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_{2}x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 (p, q)이다. $p^{2}\times 2^{q}$의 값은?



① $6\sqrt{3}$ ② $9\sqrt{3}$ ③ $12\sqrt{3}$
④ $15\sqrt{3}$ ⑤ $18\sqrt{3}$

80) [수1 C458번]
그림과 같이 곡선 $y=2^x$이 y축과 만나는 점을 A, 곡선 $y=\log_2 x$가 x축과 만나는 점을 B라 하자. 또, 직선 $y=-x+k$가 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 만나는 점을 각각 C, D라 하자. 사각형 ABDC가 정사각형일 때, 상수 k의 값은?



① 2　② $1+\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}$
④ 3　⑤ $2+\sqrt{2}$

삼각함수

(5) 삼각함수

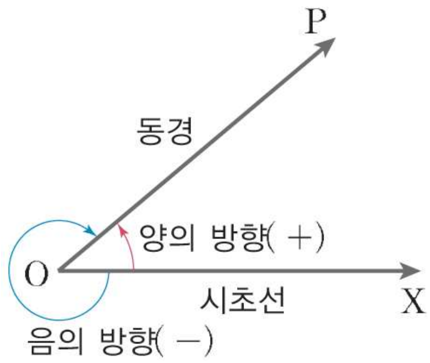
(6) 삼각함수의 그래프

(7) 삼각함수의 활용

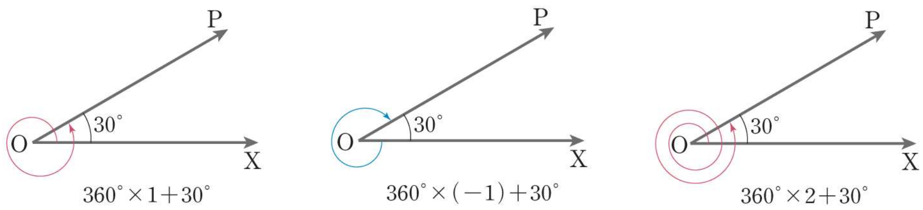
일반각과 호도법

(1) 일반각 : 시초선 OX와 동경 OP가 타내는 한 각의 크기를 α° 라 할 때, 동경 OP가 나타내는 일반각 θ는
$\theta = 360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (단, n은 정수)

[설명]
그림과 같이 평면 위의 두 반직선 OX와 OP에 의하여 $\angle$XOP가 정해진다. $\angle$XOP의 크기는 반직선 OP가 고정된 반직선 OX의 위치에서 시작하여 점 O를 중심으로 회전한 양으로 정의한다. 이때 반직선 OX를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 한다.
또, 동경 OP가 시곗바늘이 도는 방향과 반대로 회전할 때 양의 방향으로 회전한다고 하고, 시곗바늘이 도는 방향으로 회전할 때 음의 방향으로 회전한다고 한다. 음의 방향으로 회전한 각의 크기는 음의 부호 (−)를 붙여서 음수로 나타낸다.



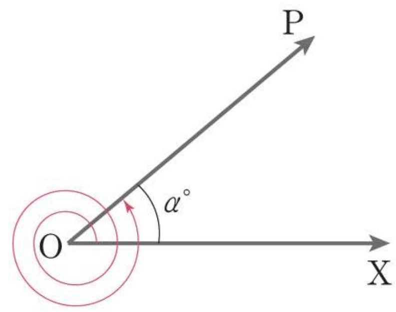
시초선 OX는 고정되어 있으므로 $\angle$XOP의 크기가 주어지면 동경 OP의 위치는 하나로 정해진다. 그러나 동경 OP의 위치가 정해지더라도 $\angle$XOP의 크기는 하나로 정해지지 않는다. 예를 들어 다음 그림에서 같은 위치의 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 여러 가지로 표현할 수 있다.



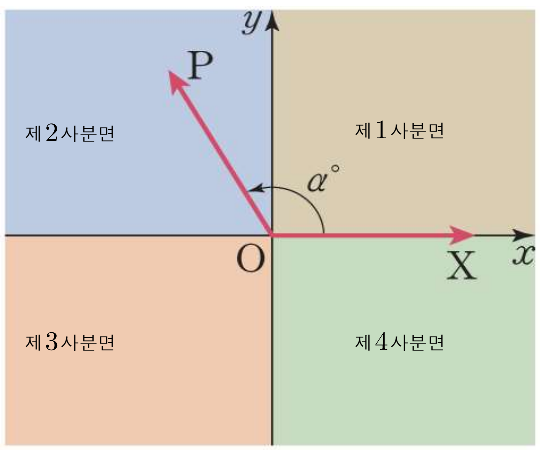
일반적으로 시초선 OX에 대하여 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 α°라고 할 때, 동경 OP가 나타내는 각의 크기는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (단, n은 정수)

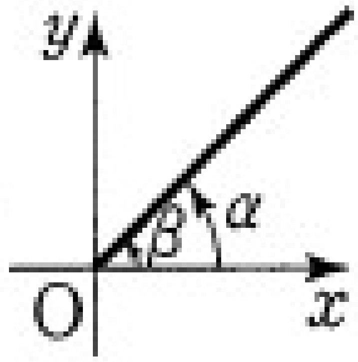
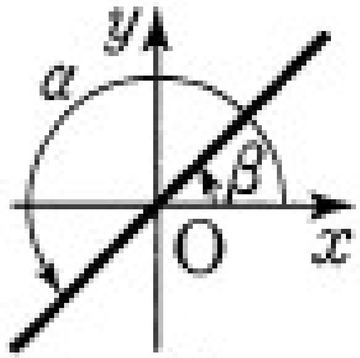
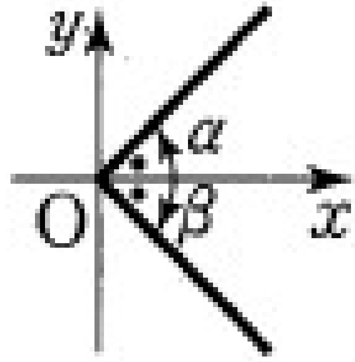
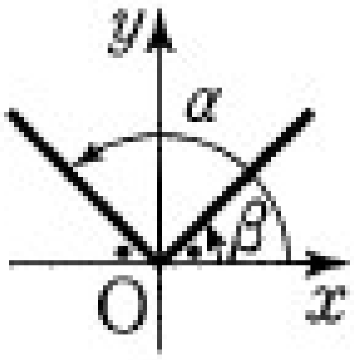
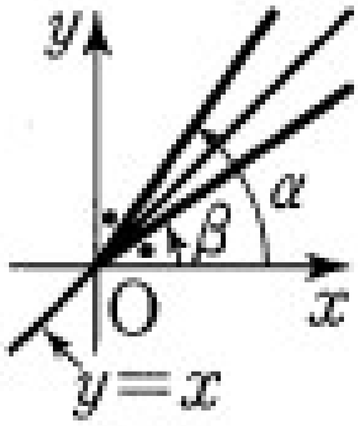
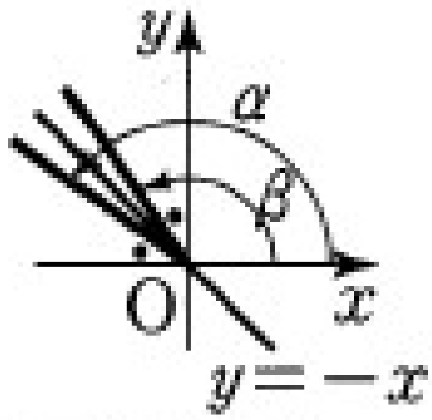
크기가 이와 같은 각을 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.



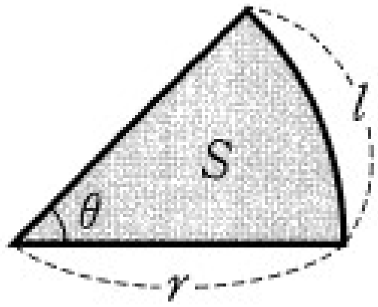
일반각의 꼭짓점을 좌표평면의 원점 O에 놓고 시초선 OX를 양의 방향의 x축으로 잡았을 때, 동경 OP가 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면 중 어느 사분면에 있는가에 따라 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다. 동경 OP가 좌표축 위에 놓여 있을 때에는 어느 사분면에도 속하지 않는다.



두 동경의 위치 관계 (단, n은 정수)

일치	원점 대칭	x축 대칭
		
$\alpha-\beta=$ $360^\circ\times n+0^\circ$	$\alpha-\beta=$ $360^\circ\times n+180^\circ$	$\alpha+\beta=$ $360^\circ\times n+0^\circ$
y축 대칭	**$y=x$ 대칭**	**$y=-x$ 대칭**
		
$\alpha+\beta=$ $360^\circ\times n+180^\circ$	$\alpha+\beta=$ $360^\circ\times n+90^\circ$	$\alpha+\beta=$ $360^\circ\times n+270^\circ$

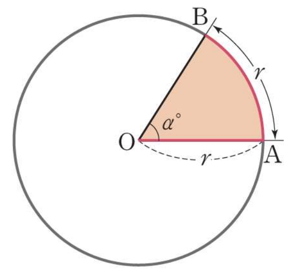
(2) 호도법 : 반지름의 길이가 r인 원에서 길이가 r인 호의 중심각의 크기를 1라디안이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 것을 호도법이라 한다.



호도법과 육십분법 사이의 관계

1라디안$=\dfrac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$라디안

[설명]
지금까지는 각의 크기를 나타낼 때, 30°, 45°, 60°와 같이 $^\circ$(도)를 단위로 하는 육십분법을 사용하였다. 이제 각의 크기를 나타내는 새로운 방법에 대하여 알아보자.



반지름의 길이가 r인 원에서 호의 길이가 r인 부채꼴 OAB의 중심각의 크기를 α°라고 하면, 호의 길이와 중심각의 크기는 정비례하므로 다음이 성립한다.

$r : 2\pi r = \alpha^\circ : 360^\circ$

$\alpha^\circ = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

따라서 반지름의 길이와 같은 길이의 호에 대한 중심각의 크기 α°는 반지름의 길이에 관계없이 항상 일정하다. 이 일정한 각의 크기 $\dfrac{180^\circ}{\pi}$를 1라디안(radian)이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

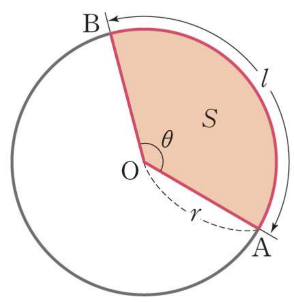
(3)

부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴의 호의 길이를 l, 넓이를 S라고 하면

$l=r\theta$, $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rl$

[설명]
호도법을 이용하여 부채꼴의 호의 길이와 넓이를 구해 보자.



반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴 OAB에서 호 AB의 길이를 l이라고 하면, 호의 길이는 중심각의 크기에 정비례하므로

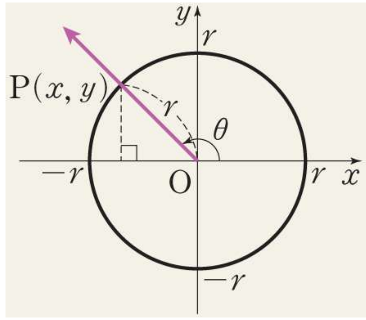
$l : 2\pi r = \theta : 2\pi$, $l = r\theta$ …… ①

이다. 또, 부채꼴 OAB의 넓이를 S라고 하면, 부채꼴의 넓이도 중심각의 크기에 정비례하므로

$S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$, $S=\dfrac{1}{2}r^2\theta$ …… ②

삼각함수의 정의

오른쪽 그림에서 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라고 할 때



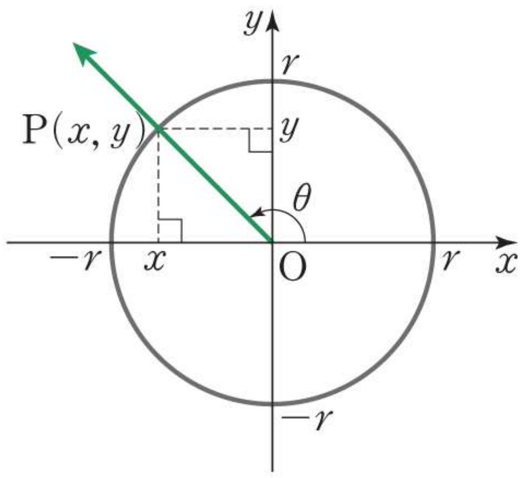
$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

[설명]

좌표평면 위에서 양의 방향의 x축을 시초선으로 잡았을 때, 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 θ라고 하자. 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원과 동경 OP의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면



$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

의 값은 반지름의 길이 r에 관계없이 θ의 값에 따라 각각 단 하나로 정해진다. 따라서

$$\theta \to \frac{y}{r},\ \theta \to \frac{x}{r},\ \theta \to \frac{y}{x}\ \ (x \neq 0)$$

와 같은 대응은 각각 θ의 함수이다. 이와 같은 함수를 차례대로 θ에 관한 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

한편, 각각의 역수 $\frac{r}{y}$, $\frac{r}{x}$, $\frac{x}{y}$에 대하여

$$\theta \to \frac{r}{y}\ (y \neq 0),\ \theta \to \frac{r}{x}\ (x \neq 0),\ \theta \to \frac{x}{y}\ (y \neq 0)$$

와 같은 대응도 각각 θ의 함수이다.

삼각함수의 값의 부호

삼각함수의 값의 부호는 각 θ를 나타내는 동경 위의 점 $P(x,\ y)$의 x좌표, y좌표의 부호에 의하여 결정된다. (단, $r = \sqrt{x^2+y^2}$

사분면	1	2	3	4
$\sin\theta = \frac{y}{r}$	+	+	−	−
$\cos\theta = \frac{x}{r}$	+	−	−	+
$\tan\theta = \frac{y}{x}$	+	−	+	−

삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(2) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, $1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

[설명]
오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 크기가 θ인 각이 나타내는 동경과 단위원 O의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면

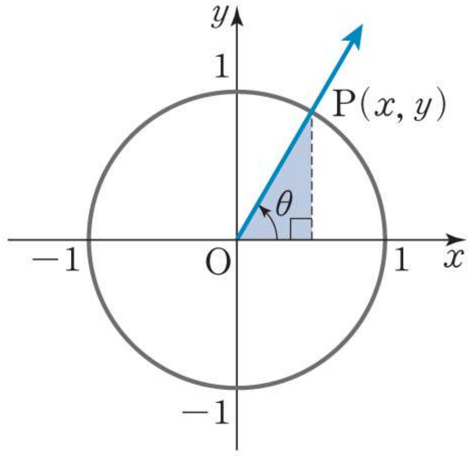
$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

이므로 다음이 성립한다.

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

또한, $\mathrm{P}(x,\ y)$는 단위원 O 위의 점이므로 $x^2 + y^2 = 1$이다.
따라서 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$이 성립한다.



삼각함수의 성질

(1) $2n\pi + \theta$ (n은 정수)의 삼각함수
① $\sin(2n\pi + \theta) = \sin\theta$
② $\cos(2n\pi + \theta) = \cos\theta$
③ $\tan(2n\pi + \theta) = \tan\theta$

(2) $-\theta$의 삼각함수
① $\sin(-\theta) = -\sin\theta$
② $\cos(-\theta) = \cos\theta$
③ $\tan(-\theta) = -\tan\theta$

(3) $\pi \pm \theta$의 삼각함수
① $\sin(\pi \pm \theta) = \mp sin\theta$
② $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos\theta$
③ $\tan(\pi \pm \theta) = \pm tan\theta$

(4) $\dfrac{\pi}{2} \pm \theta$의 삼각함수
① $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \cos\theta$
② $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp sin\theta$
③ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right) = \mp cot\theta$

삼각함수의 각의 변환

$\dfrac{n}{2}\pi \pm \theta$ (n은 정수)의 삼각함수에서 θ는 어떤 각이든지 예각으로 간주하고
(i) n이 짝수이면
$\sin \to sin$, $\cos \to cos$, $\tan \to tan$
n이 홀수이면
$\sin \to cos$, $\cos \to sin$, $\tan \to \dfrac{1}{\tan}$로 바꾼 후
(ii) 부호는 동경이 $\dfrac{n}{2}\pi \pm \theta$일 때의 삼각함수의 부호로 결정한다.

1. $\pi(rad) = 180^\circ$

2. 다음 삼각비 값을 구하시오.

	$\sin x^\circ$	$\cos x^\circ$	$\tan x^\circ$
0°	0	1	0
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	1	0	X

3. 다음과 같이 각 바꾸기를 하시오.

(1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

(2) $\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$

(3) $\tan\left(\frac{3}{2}\pi-\theta\right) = \frac{1}{\tan\theta}$

(4) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right) = -\cos\theta$

(5) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$

(6) $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$(주기공식 암기)

(7) $\sin(2\pi+\theta) = \sin\theta$(주기공식 암기)

(8) $\cos(2\pi+\theta) = \cos\theta$(주기공식 암기)

(9) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ (음각공식 암기)

(10) $\cos(-\theta) = \cos\theta$ (음각공식 암기)

(11) $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ (음각공식 암기)

(12) $\sin(2\pi-\theta) = \sin(-\theta) = -\sin\theta$

(13) $\cos(2\pi-\theta) = \cos(-\theta) = \cos\theta$

(14) $\tan(\pi-\theta) = \tan(-\theta) = -\tan\theta$

4. 두 변의 길이 a, b와 그 끼인각 θ를 알 때 삼각형의 넓이

-> $S = \frac{1}{2}absin\theta$

5. 반지름이 r이고 각이 θ인 부채꼴의 호의 길이

-> $l = r\theta$

6. 반지름이 r이고 각이 θ인 부채꼴의 넓이

-> $S = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}rl$

7. 삼각함수의 정의

(1) $\sin\theta = \frac{y}{r}$

(2) $\cos\theta = \frac{x}{r}$

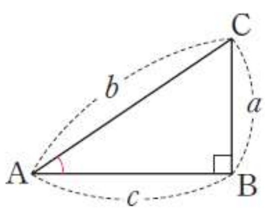
(3) $\tan\theta = \frac{y}{x}$

8. 공식들

(1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

(2) $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$

9. 변형

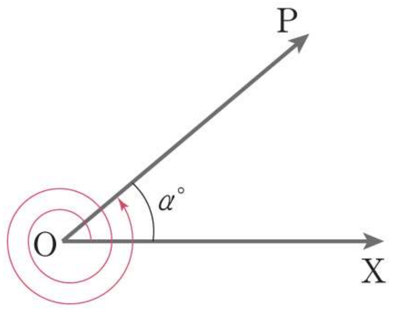


(1) $a = bsinA$

(2) $a = c\tan A$

(3) $c = b\cos A$

1. 용어
① 시초선 : 각의 기준이 되는 x축의 양의 방향으로의 반직선
② 동경 : 각의 대상이 되는 반직선
③ 반시계방향으로 회전할 때 각의 크기를 +,
시계방향으로 회전할 때 각의 크기를 -
④ 일반각 $\theta = 360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (단, n은 정수)



2. 두 동경의 위치관계
① 각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경이 일치할 때의 일반각
$\Rightarrow \beta - \alpha = 360n$

② 각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대일 때의 일반각
$\Rightarrow \beta - \alpha = 360n + 180^\circ$

③ 각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭일 때의 일반각
$\Rightarrow \beta + \alpha = 360n$

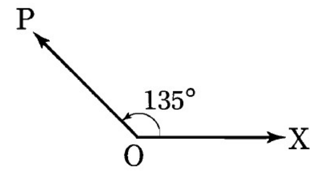
④ 각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭일 때의 일반각
$\Rightarrow \beta + \alpha = 360n + 180^\circ$

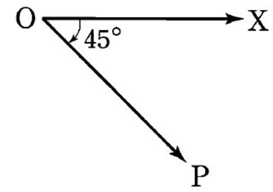
⑤ 각 α를 나타내는 동경과 각 β를 나타내는 동경이직선 $y = x$ 에 대하여 대칭일 때의 일반각
$\Rightarrow \beta + \alpha = 360n + 90^\circ$

81) [수1 C459번]
다음 각을 호도법으로 나타내어라.
(1) 135° (2) -210°

82) [수1 C462번]
다음 중 옳지 않은 것은?
① $40^{\circ}=\frac{2}{9}\pi$ ② $126^{\circ}=\frac{7}{10}\pi$ ③ $\frac{7}{4}\pi=315^{\circ}$
④ $\frac{4}{5}\pi=156^{\circ}$ ⑤ $\frac{3}{2}\pi=270^{\circ}$

83) [수1 C471번]
다음 그림에서 시초선이 반직선 OX일 때, 동경 OP가 나타내는 일반각 θ를 구하여라.

(1)


(2)


84) [수1 C479번]
각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 y축에 대하여 대칭일 때, θ의 값은? $\left(단,\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$
① $\frac{\pi}{12}$ ② $\frac{\pi}{6}$ ③ $\frac{\pi}{5}$
④ $\frac{\pi}{4}$ ⑤ $\frac{\pi}{3}$

85) [수1 C481번]
각 3θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 x축에 대하여 대칭일 때, 모든 θ의 값의 합을 구하여라.
(단, $0<\theta<\pi$)

86) [수1 C483번]
각 θ를 나타내는 동경과 각 5θ를 나타내는 동경이 일직선 위에 있고 방향이 반대일 때, θ의 값을 구하여라.
$\left(\text{단, } \frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right)$

87) [수1 C485번]
각 θ를 나타내는 동경과 각 7θ를 나타내는 동경이 원점에 대하여 대칭일 때, 각 θ의 개수를 구하여라.
(단, $0<\theta<2\pi$)

88) [수1 C487번]
각 α의 동경과 각 β의 동경이 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 조건을 구하여라.

89) [수1 C489번]
원점 O와 점 $\mathrm{P}(6,\ -8)$을 지나는 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $5\sin\theta+5\cos\theta+3\tan\theta$의 값은?
① -5　② -3　③ -1
④ 3　⑤ 5

90) [수1 C509번]
$\sin\theta+\cos\theta=\frac{1}{3}$일 때, 다음 식의 값을 구하여라.
(1) $\sin\theta\cos\theta$

(2) $\frac{1}{\sin\theta}+\frac{1}{\cos\theta}$

다음 식을 간단히 하여라.
91) [수1 C512번]
$(1-\sin^2\theta)(1+\tan^2\theta)$

92) [수1 C513번]
$\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}$

93) [수1 C517번]

보기의 각을 나타내는 동경 중 $100°$ 를 나타내는 동경과 일치하는 것만을 있는 대로 고르시오.

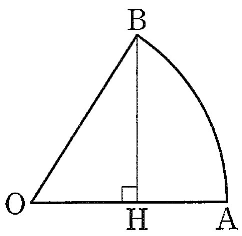
[보 기]

ㄱ. $-970°$　　ㄴ. $-620°$　　ㄷ. $-170°$

ㄹ. $460°$　　ㅁ. $1180°$

94) [수1 C521번]

오른쪽 그림의 부채꼴 OAB는 반지름의 길이와 호의 길이가 같고, 점 H는 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발이다. 삼각형 BOH의 넓이가 4일 때, 부채꼴 OAB의 넓이는?



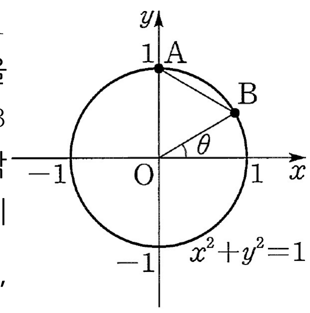
① $\dfrac{1}{\sin 2}$　　② $\dfrac{2}{\sin 2}$

③ $\dfrac{2}{\sin 1 \cos 1}$　　④ $\dfrac{4}{\sin 1 \cos 1}$

⑤ $\dfrac{8}{\sin 1 \cos 1}$

95) [수1 C526번]

오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$이 y축의 양의 방향과 만나는 점을 A라 하자. 원점 O와 원 위의 점 B를 지나는 동경 OB가 나타내는 각이 θ일 때, 선분 AB의 길이를 θ에 대한 삼각함수로 나타내면? $\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$



① $\sqrt{\sin\theta}$　　② $\sqrt{\cos\theta}$

③ $\sqrt{2-2\sin\theta}$　　④ $\sqrt{2-2\cos\theta}$

⑤ $\sqrt{\sin\theta\cos\theta}$

삼각함수

(5) 삼각함수

(6) 삼각함수의 그래프

(7) 삼각함수의 활용

주기함수

일반적으로 함수 $y=f(x)$의 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+p)$를 만족하는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때, $f(x)$를 주기함수라 하고, 상수 p 중에서 최소인 양수를 함수 $f(x)$의 주기라 한다.

<참고> 함수 $f(x)$의 주기가 p이면 $f(x+p)=f(x)$이므로

$\cdots=f(-2p)=f(-p)=f(0)=f(p)=f(2p)=\cdots$,

$\cdots=f\left(-\dfrac{3}{2}p\right)=f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=f\left(\dfrac{p}{2}\right)=f\left(\dfrac{3}{2}p\right)=f\left(\dfrac{5}{2}p\right)=\cdots$

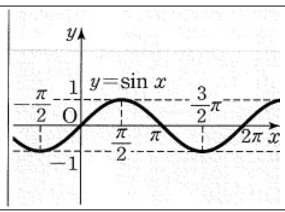
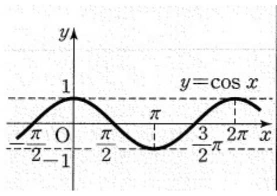
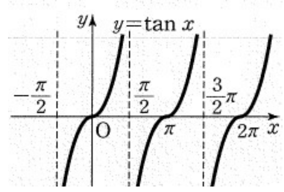
상수 p에 대하여

$f(x-p)=f(x+p) \Leftrightarrow f(x)=f(x+2p)$

$f(p-x)=f(p+x)$

$\Leftrightarrow$ 그래프가 직선 $x=p$에 대하여 대칭인 함수

삼각함수의 성질

	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
그래프의 개형			
정의역	실수 전체의 집합	실수 전체의 집합	$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)인모든실수의 집합
치역	$\{y\mid -1\leq y\leq 1\}$	$\{y\mid -1\leq y\leq 1\}$	실수 전체의 집합
그래프의 성질	$\sin(-x)=-\sin x$ 즉, 원점에 대하여 대칭(기함수)	$\cos(-x)=\cos x$ 즉, y축에 대하여 대칭(우함수)	$\tan(-x)=-\tan x$ 즉, 원점에 대하여 대칭(기함수) 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)
주기	2π	2π	π

삼각함수의 연속성

(1) 두 함수 $y=\sin x$, $y=\cos x$는 각각 모든 실수 x에서 연속이다.

(2) 함수 $y=\tan x$는 $x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 모든 실수 x에서 연속이다.

[설명]

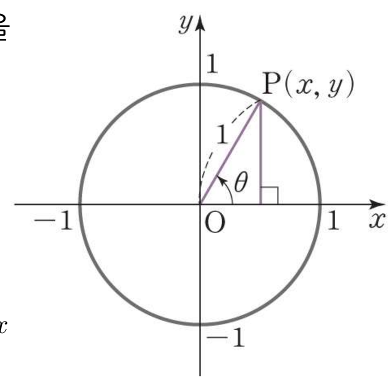
오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 크기가 θ인 각을 나타내는 동경과 단위원 O의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면

$$\sin\theta=\frac{y}{1}=y$$

$$\cos\theta=\frac{x}{1}=x$$

이다.

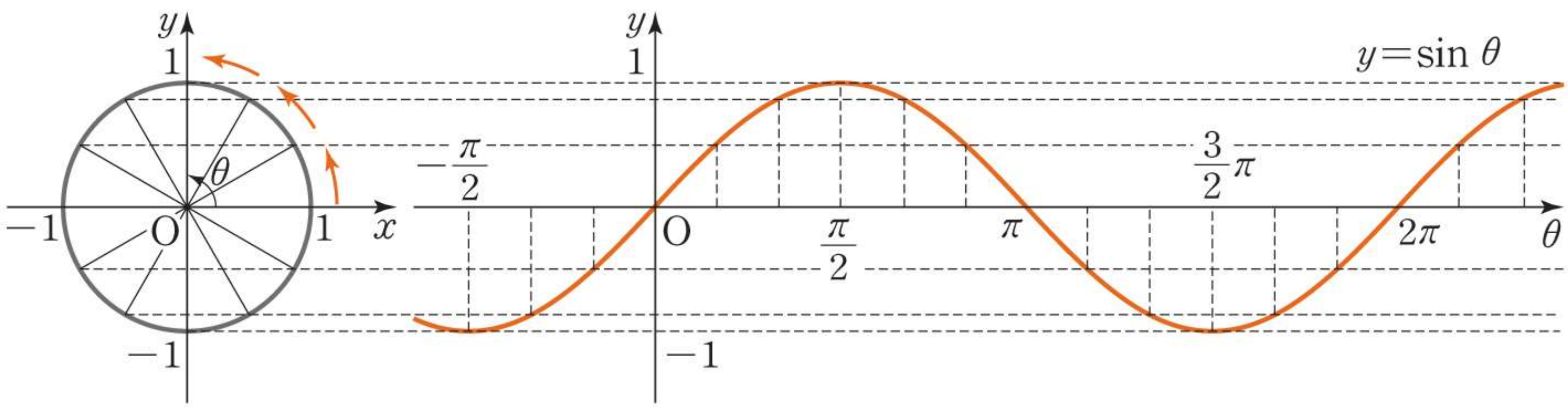
따라서 점 P가 단위원 O 위를 움직일 때, $\sin\theta$, $\cos\theta$의 값의 변화는 각각 점 P의 y좌표, x좌표의 변화와 같다.



$\sin\theta$, $\cos\theta$의 그래프

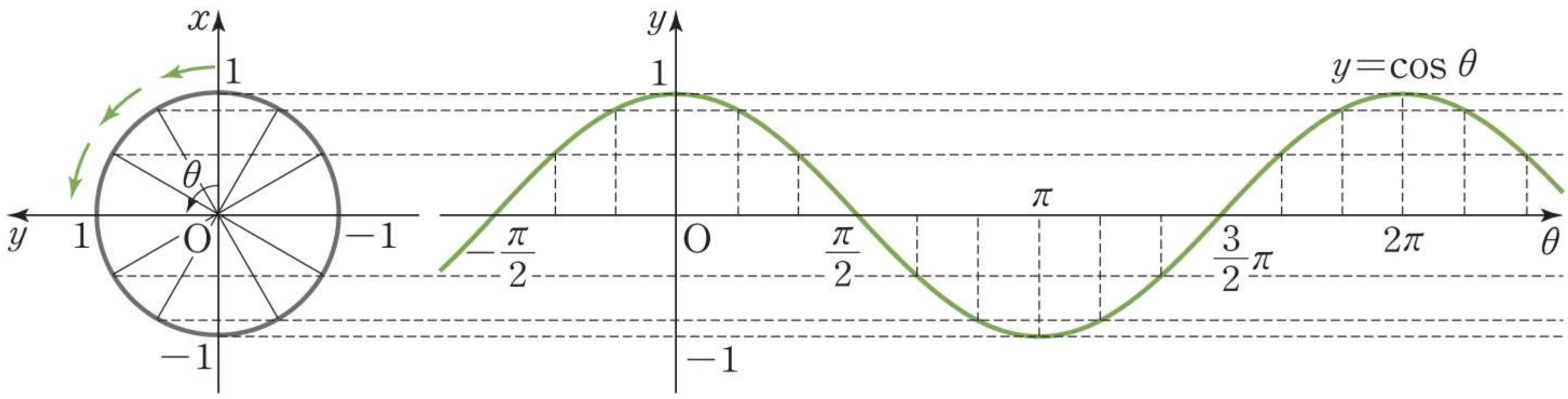
θ의 값을 가로축에 나타내고, 그에 대응하는 $\sin\theta$의 값을 세로축에 나타내면 다음과 같은 $y=\sin\theta$의 그래프를 얻는다.

$y=\sin\theta$의 그래프



$y=\sin\theta$의 그래프를 살펴보면 이 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이다.
또한, $y=\sin\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\sin(-\theta)=-\sin\theta$이다.
이제 $y=\cos\theta$의 그래프를 그려 보자.
$y=\sin\theta$와 마찬가지로, θ의 값을 가로축에 나타내고, 그에 대응하는 $\cos\theta$의 값을 세로축에 나타내면 다음과 같은 $y=\cos\theta$의 그래프를 얻는다.

$y=\cos\theta$의 그래프



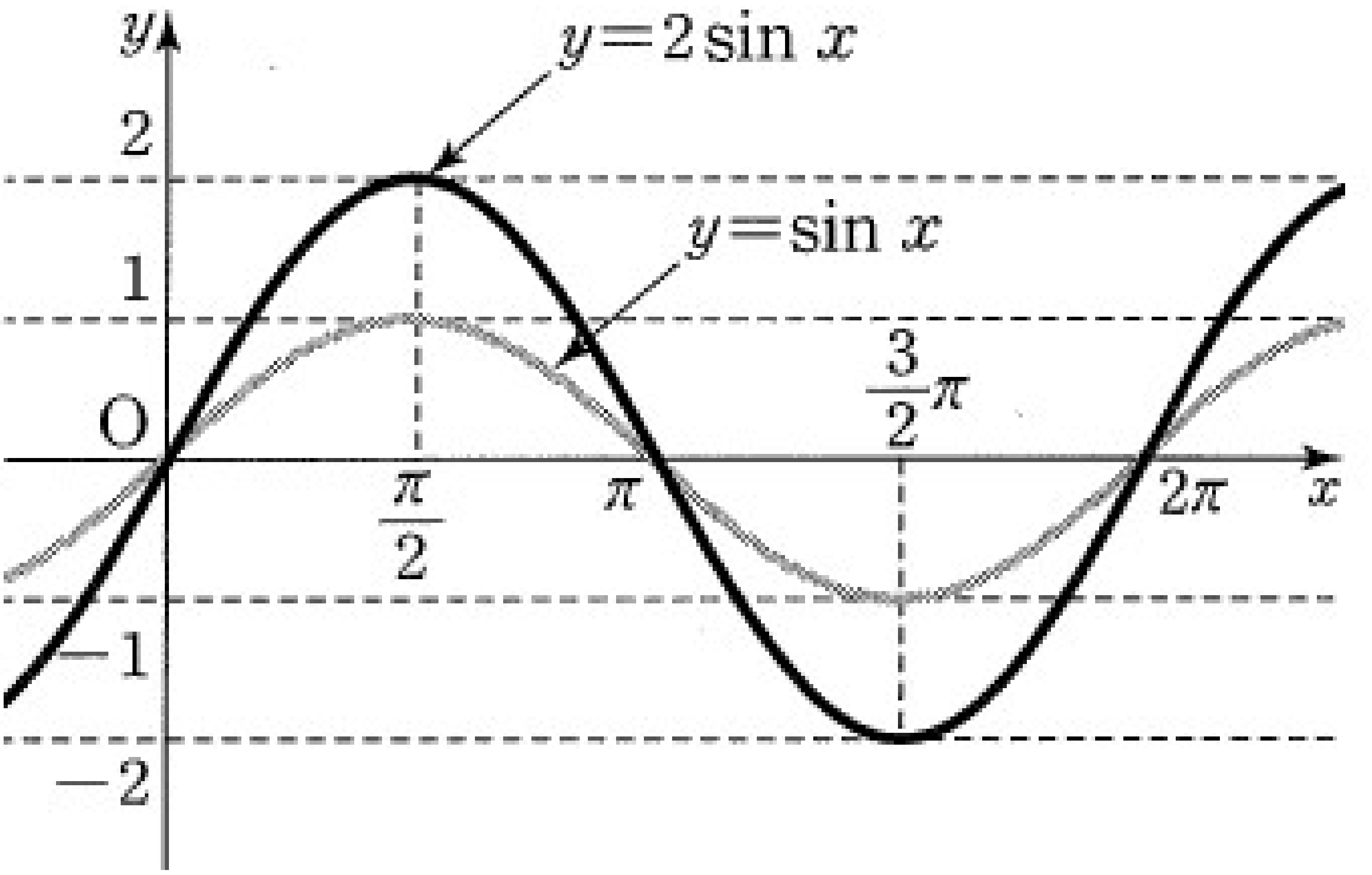
$y=\cos\theta$의 그래프를 살펴보면 이 함수의 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 $\{y|-1\le y\le 1\}$이다.
또한, $y=\cos\theta$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이므로 $\cos(-\theta)=\cos\theta$이다.

한편, $y=\sin\theta$와 $y=\cos\theta$의 그래프는 모두 2π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 즉, 임의의 θ에 대하여

$$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$$
$$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta \quad (n\text{은 정수})$$

가 성립한다.

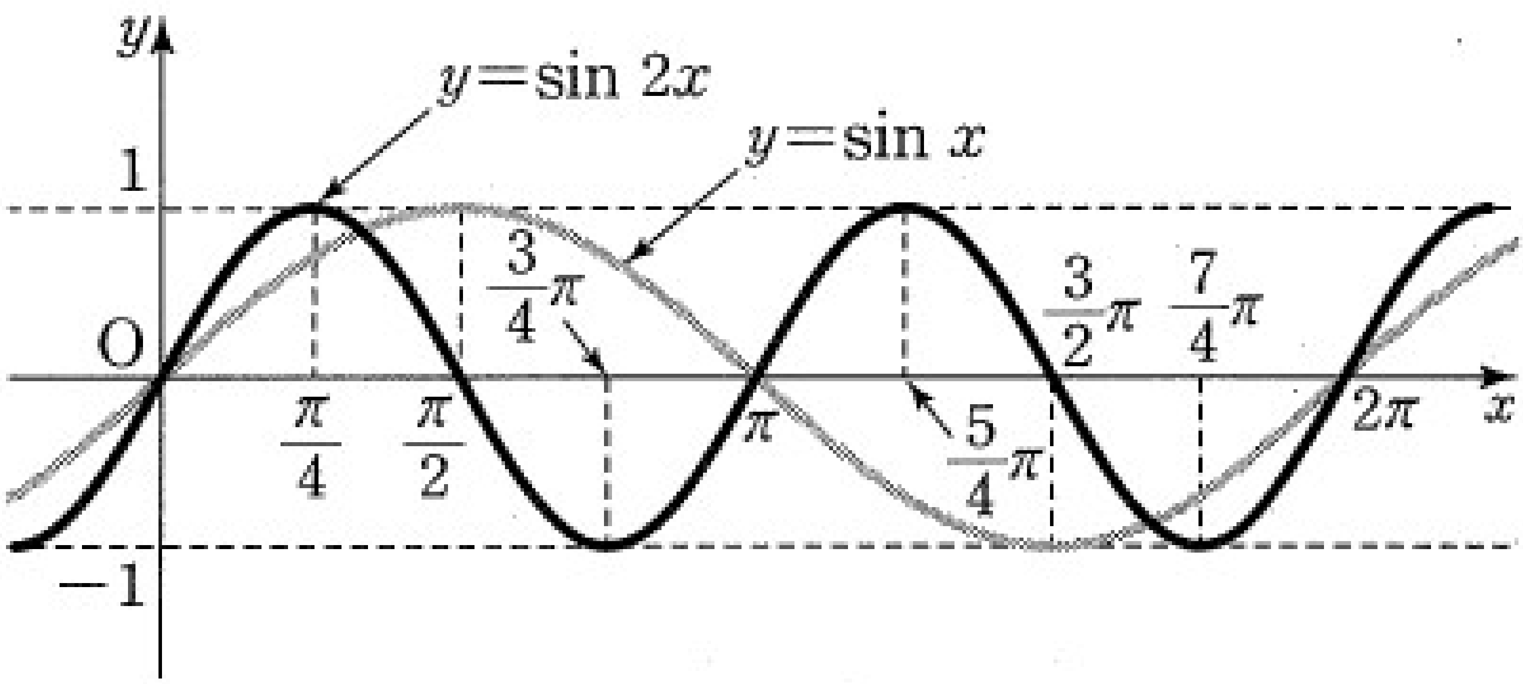
(1)$y=\sin x$ vs $y=2\sin x$



주기의 변화없이 함숫값이 2배씩 커지고 있다.

⇒ 함수 $y=a\sin x$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 y축으로 $|a|$배한 그래프이다.

(2) $y=\sin x$ vs $y=\sin 2x$

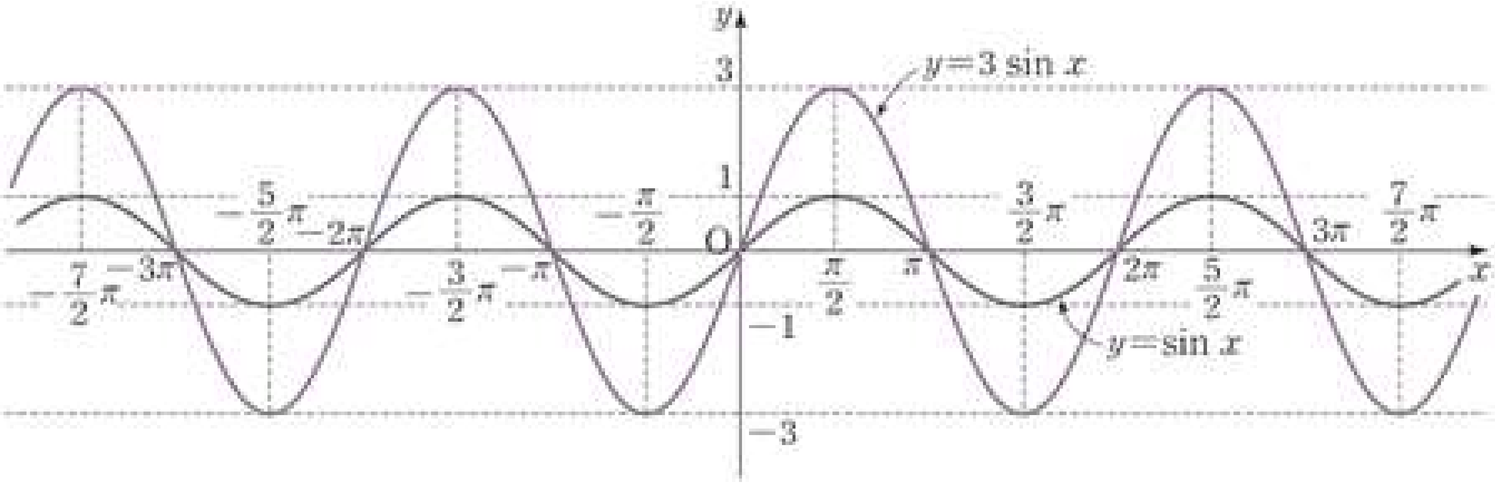


최댓값, 최솟값의 변화없이 주기가 $\frac{1}{2}$배가 되었다.

⇒ 함수 $y=\sin ax$의 그래프는 함수 $y=\sin x$의 그래프를 x축으로 $\frac{1}{|a|}$배한 그래프이다.

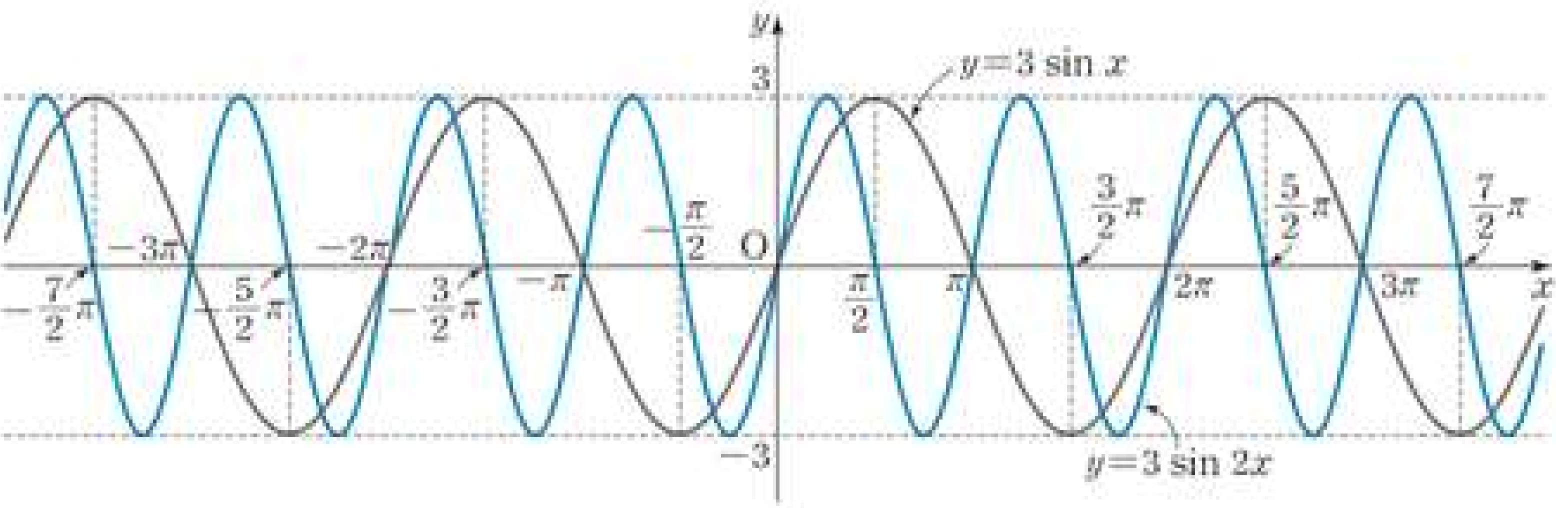
· $y = a\sin(bx+c)+d$**그래프 그리기**

1. 함수 $y = \sin x$, $y = 3\sin x$의 그래프는 각각 다음 그림과 같고, $y = 3\sin x$의 최댓값은 3, 최솟값은 -3이다.



일반적으로 함수 $y = a\sin x$의 주기는 2π이고, 최댓값은 $|a|$, 최솟값은 $-|a|$이다.

2. 함수 $y = 3\sin x$, $y = 3\sin 2x$의 그래프는 각각 다음 그림과 같고, $y = 3\sin 2x$의 주기는 π이다.

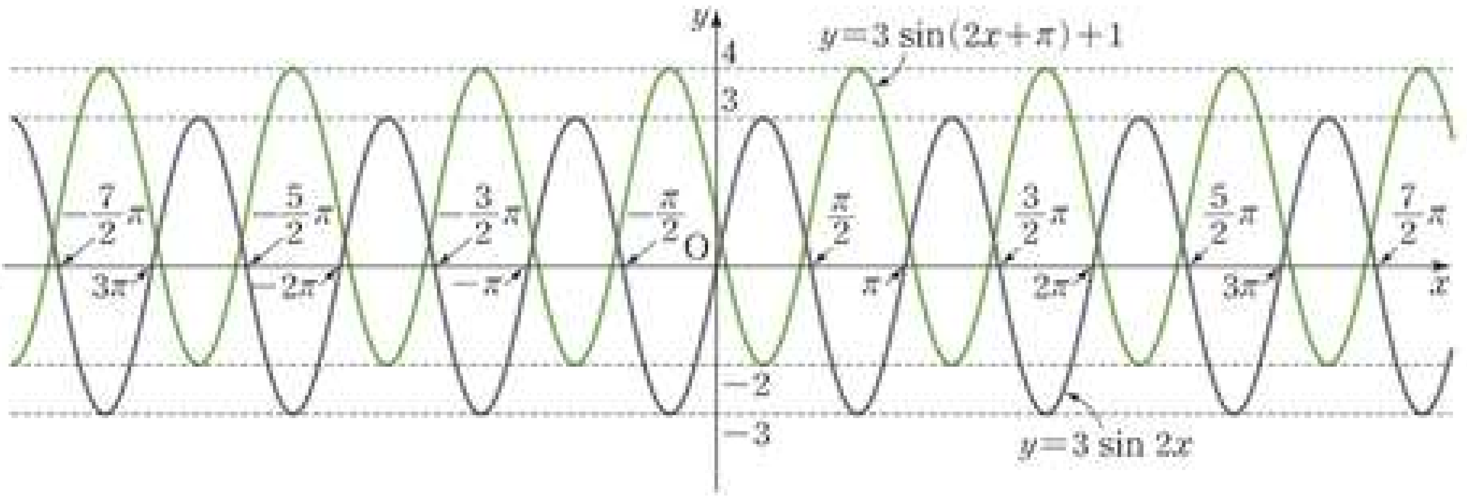


일반적으로 함수 $y = a\sin bx$의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이고, 최댓값은 $|a|$, 최솟값은 $-|a|$이다.

3. 함수 $y=3\sin 2x$, $y=3\sin(2x+\pi)+1$의 그래프는 각각 다음 그림과 같고,

$$y=3\sin(2x+\pi)+1=3\sin 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)+1$$

이므로 함수 $y=3\sin(2x+\pi)+1$의 그래프는 함수 $y=3\sin 2x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이고, 주기는 π, 최댓값은 4, 최솟값은 -2이다.



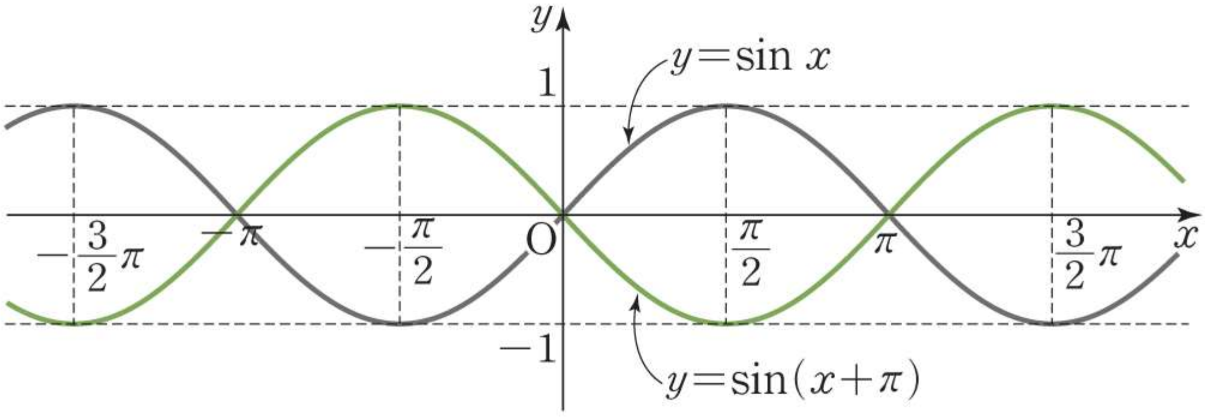
일반적으로 함수 $y=a\sin(bx+c)+d$의 그래프는 함수 $y=a\sin bx$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{c}{b}$만큼, y축의 방향으로 d만큼 평행이동한 것이다. 또한, 이 함수의 주기는 $\frac{2\pi}{|b|}$이며, 최댓값은 $|a|+d$, 최솟값은 $-|a|+d$이다.

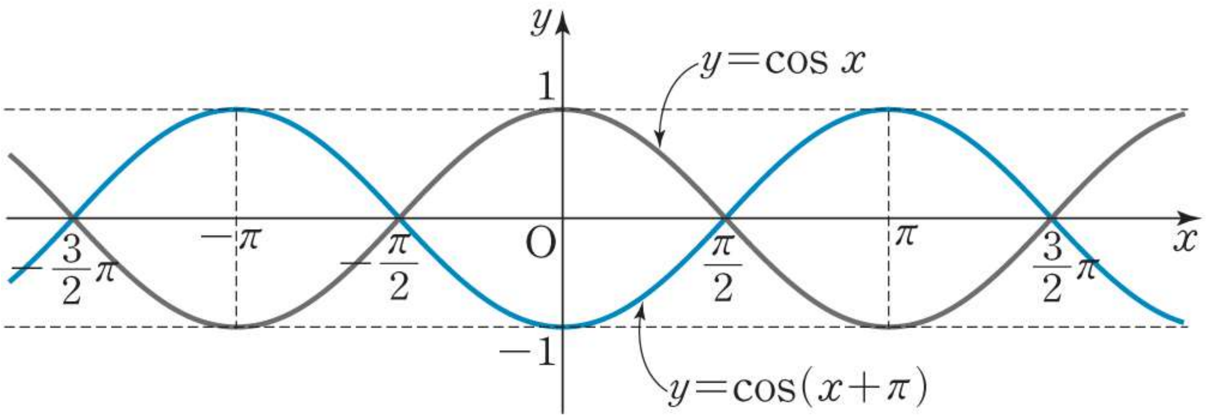
삼각함수의 최댓값, 최솟값과 주기

삼각함수	최댓값	최솟값	주기
$y=a\sin(bx+c)+d$	$\|a\|+d$	$-\|a\|+d$	$\frac{2\pi}{\|b\|}$
$y=a\cos(bx+c)+d$	$\|a\|+d$	$-\|a\|+d$	$\frac{2\pi}{\|b\|}$
$y=a\tan(bx+c)+d$	없다.	없다.	$\frac{\pi}{\|b\|}$

함수 $y=\sin x$ 의 그래프와 함수 $y=\cos x$ 의 그래프 사이의 관계

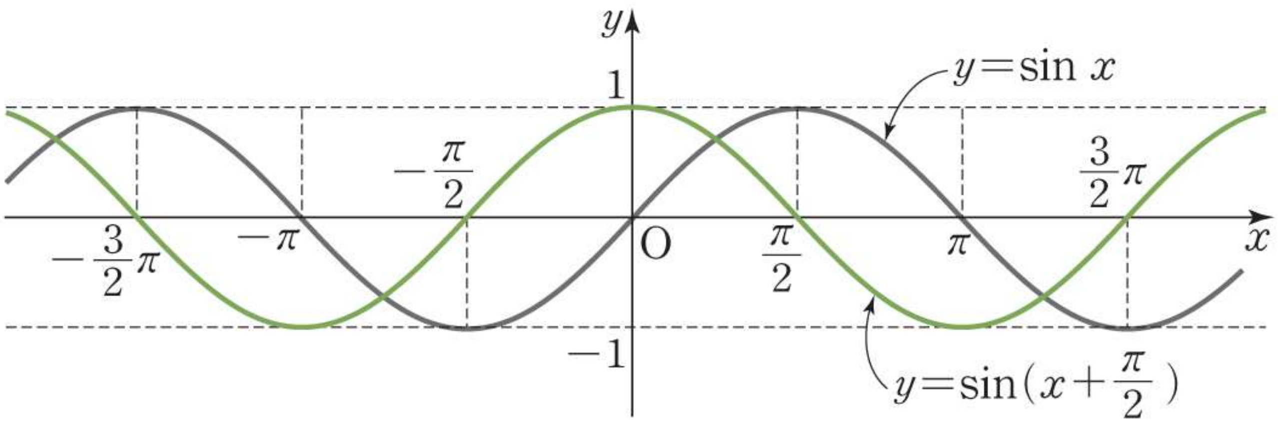
$y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\pi$만큼 평행이동한 그래프는 각각 다음과 같다.

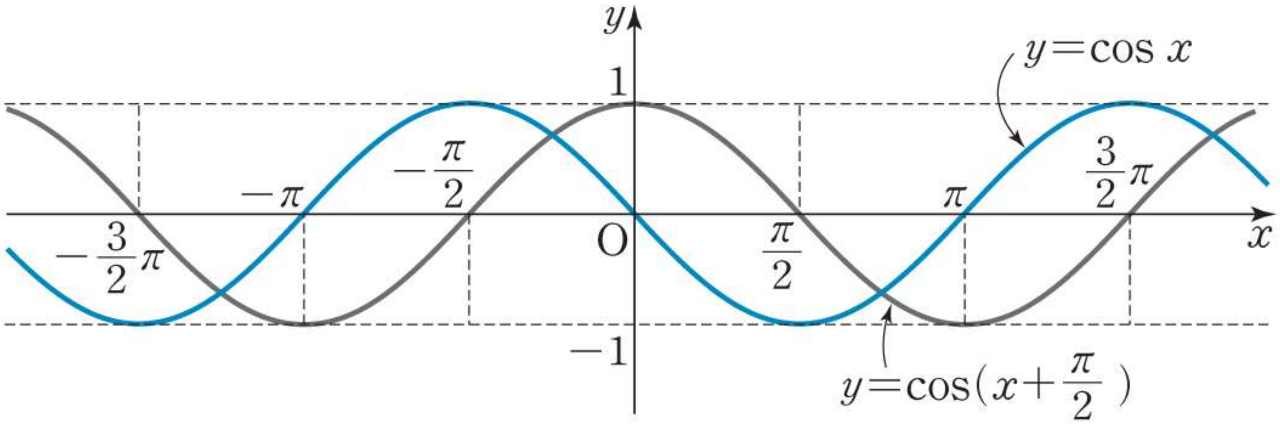




즉, 임의의 θ에 대하여 $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$, $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$가 성립한다.

$y=\sin x$, $y=\cos x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동한 그래프는 각각 다음과 같다.





즉, 임의의 θ에 대하여 $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$가 성립한다.

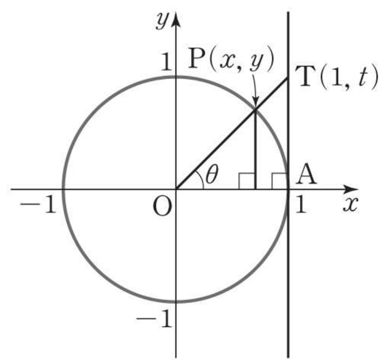
$\tan\theta$그래프

오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에서 크기가 θ인 각을 나타내는 동경과 단위원 O의 교점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라 하고, 점 $\mathrm{A}(1,\ 0)$에서의 단위원 O의 접선과 동경 OP의 교점을 $\mathrm{T}(1,\ t)$라고 하면

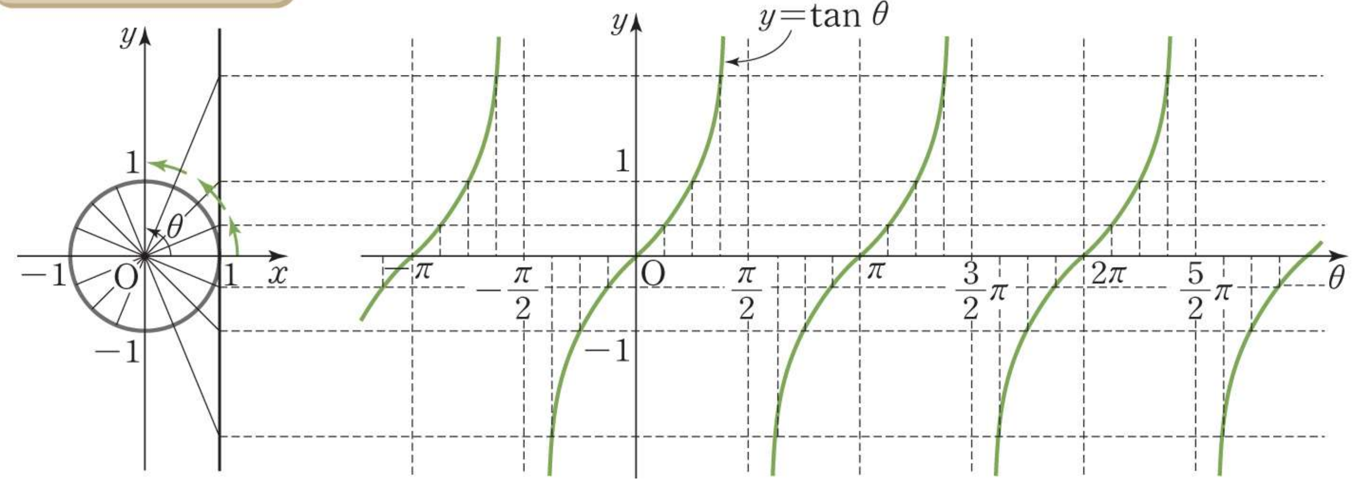
$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{t}{1} = t$$

이다. 따라서 점 T의 y좌표로 $\tan\theta$의 값이 정해진다.

이를 이용하여 θ의 값을 가로축에 나타내고, 그에 대응하는 $\tan\theta$의 값을 세로축에 나타내면 다음과 같은 $y=\tan\theta$의 그래프를 얻는다.



$y=\tan\theta$의 그래프



$\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi$ 등과 같이 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서는 점 P의 x좌표가 0이므로 $\tan\theta$의 값이 정의되지 않는다. 따라서 $y=\tan\theta$의 정의역은 $n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)를 제외한 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다. 이때 직선 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)는 $y=\tan\theta$의 점근선이다.

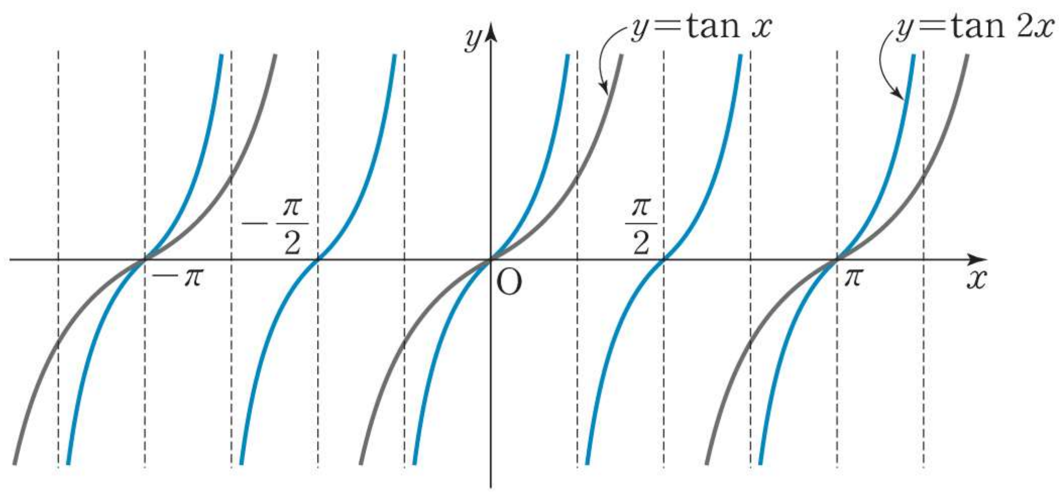
$y=\tan\theta$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이므로 $\tan(-\theta)=-\tan\theta$이다. 또한, $y=\tan\theta$의 그래프는 π 간격으로 같은 모양이 반복된다. 즉, $y=\tan\theta$는 임의의 θ에 대하여

$$\tan(\theta+n\pi)=\tan\theta \ (n\text{은 정수})$$

가 성립한다. 따라서 $y=\tan\theta$는 주기가 π인 주기함수이다.

$y=\tan x$ **VS** $y=\tan 2x$

$\tan 2x=\tan(2x+\pi)=\tan 2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$이므로 함수 $y=\tan 2x$의 주기는 $\frac{\pi}{2}$이고, 그래프는 다음과 같다. 이때 점근선은 직선 $x=\frac{n}{2}\pi+\frac{\pi}{4}$ (n은 정수)이다.

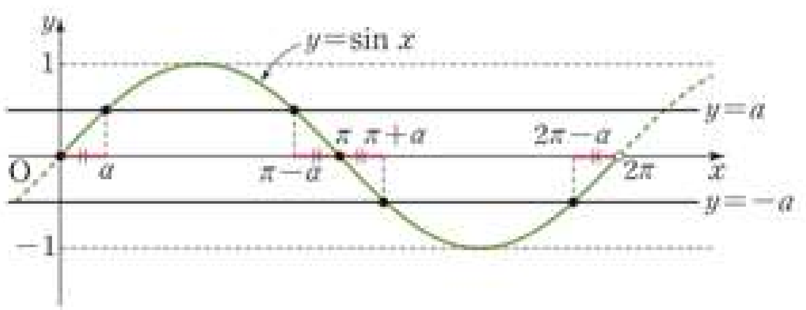


삼각방정식과 삼각부등식의 풀이

	삼각방정식	삼각부등식
정의	각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식	각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식
풀이방법	(ⅰ) 주어진 방정식을 $\sin x = a$ (또는 $\cos x = a$, $\tan x = a$)꼴로 고친다. (ⅱ) 함수 $y = \sin x$ (또는 $y = \cos x$, $y = \tan x$)의 그래프와 직선 $y = a$의 교점의 x좌표를 구한다.	(ⅰ) 주어진 부등식을 $\sin x > a$ (또는 $\cos x > a$, $\tan x > a$)꼴로 고친다. (ⅱ) 함수 $y = \sin x$ (또는 $y = \cos x$, $y = \tan x$)의 그래프와 직선 $y = a$의 교점의 x좌표를 이용하여 부등식을 만족하는 x의 값의 범위를 구한다.

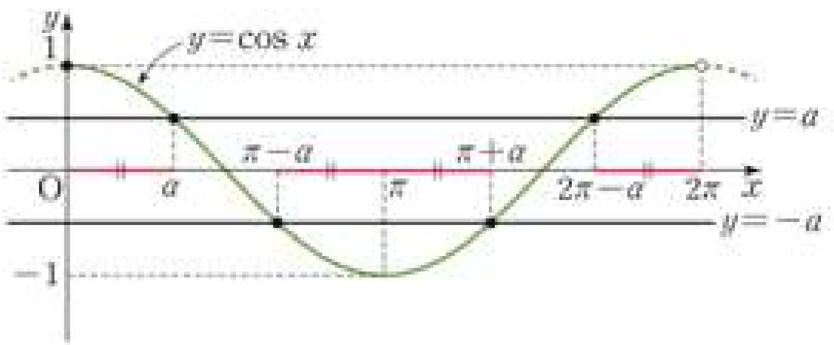
❶ $0 < a < 1$일 때, $\sin x = a$ $(0 \le x < 2\pi)$의 한 근이 α라고 하자. $\left(단,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

함수 $y = \sin x$의 그래프와 직선 $y = a$의 교점을 구하면 $\sin x = a$의 다른 한 근은 $\pi - \alpha$임을 알 수 있다. 또한, 함수 $y = \sin x$의 그래프와 직선 $y = -a$의 교점을 구하면 $\sin x = -a$의 두 근은 $\pi + \alpha$, $2\pi - \alpha$임을 알 수 있다.



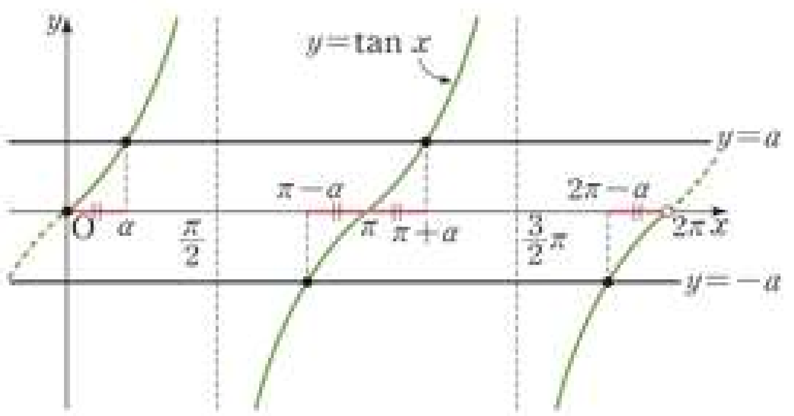
❷ $0 < a < 1$일 때, $\cos x = a$ $(0 \le x < 2\pi)$의 한 근이 α라고 하자. $\left(단,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

위와 같은 방법으로 $\cos x = a$의 다른 한 근은 $2\pi - \alpha$임을 알 수 있다. 또한, $\cos x = -a$의 두 근은 $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$이다.



❸ $a > 0$일 때, $\tan x = a$ $(0 \le x < 2\pi)$의 한 근이 α라고 하자. $\left(단,\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$

위와 같은 방법으로 $\tan x = a$의 다른 한 근은 $\pi + \alpha$임을 알 수 있다. 또한, $\tan x = -a$의 두 근은 $\pi - \alpha$, $2\pi - \alpha$이다.



1. 주기 : 한 패턴이 완성되는 최소의 구간 길이

※ 주기가 $2a$인 함수

① $f(x+2a)=f(x)$

② $f(x+a)=f(x-a)$

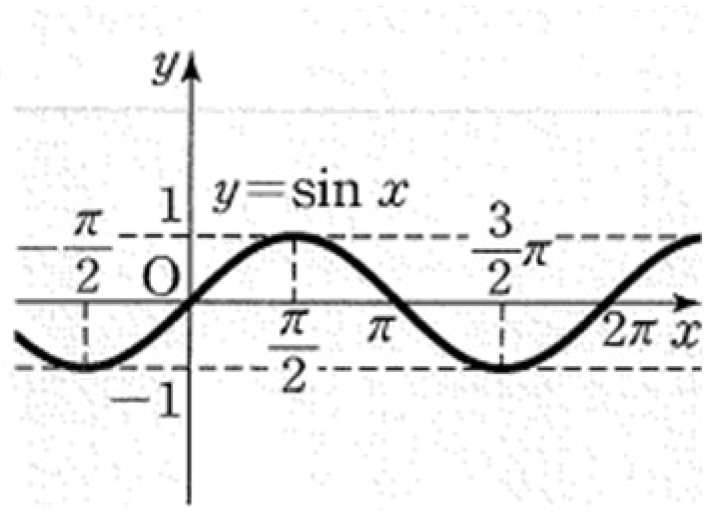
ex1)

$y=\sin ax$, 주기: $\frac{2\pi}{|a|}$

$y=\cos ax$, 주기: $\frac{2\pi}{|a|}$

$y=\tan ax$, 주기: $\frac{\pi}{|a|}$

2. $y=\sin x$ $(-2\pi \le x \le 2\pi)$



① 주기: 2π

② 최댓값: 1, 최솟값: -1

③ 원점 대칭

④ 대칭성이 가장 중요하다.

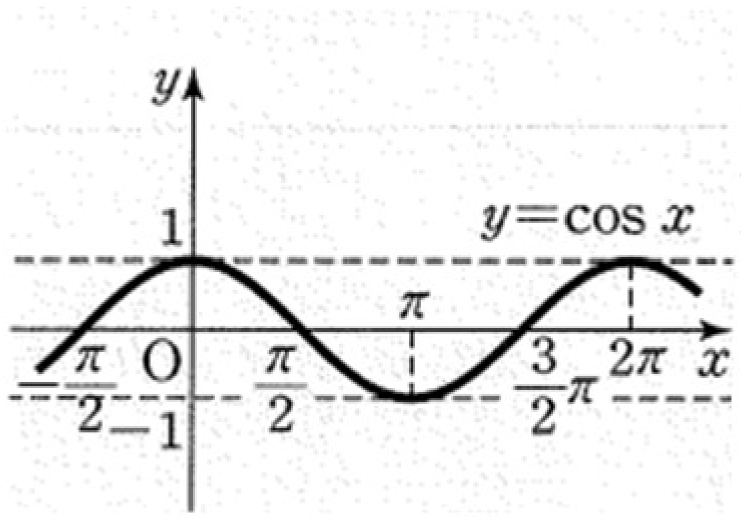
⑤ $\sin x=t$치환 $(-1 \le t \le 1)$

⑥ $y=\cos x$그래프를 x축으로 $\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동.

$\cos(x-\frac{\pi}{2})=\sin x$

※ 각 바꾸기로도 증명이 가능하다.

3. $y=\cos x$ $(-2\pi \le x \le 2\pi)$



① 주기: 2π

② 최댓값: 1, 최솟값: -1

③ y축 대칭

④ 대칭성이 가장 중요하다.

⑤ $\cos x=t$치환 $(-1 \le t \le 1)$

⑥ $y=\sin x$그래프를 x축으로 $-\frac{\pi}{2}$만큼 평행이동.

$\sin(x+\frac{\pi}{2})=\cos x$

※ 각 바꾸기로도 증명이 가능하다.

ex2) 그래프를 이용하여 θ로 간단하게 표현하여라.

① $\sin(2\pi+\theta)=\sin\theta$

② $\sin(-\theta)=-\sin\theta$

③ $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

④ $\sin(2\pi-\theta)=\sin(-\theta)=-\sin\theta$

⑤ $\sin(-\frac{3}{2}\pi+\theta)=\cos\theta$

⑥ $\cos(2\pi+\theta)=\cos\theta$

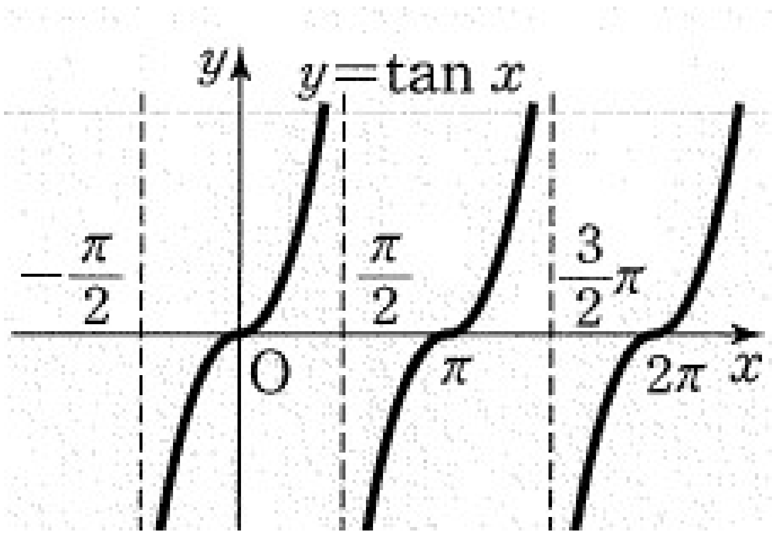
⑦ $\cos(-\theta)=\cos\theta$

⑧ $\cos(-2\pi-\theta)=\cos\theta$

⑨ $\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

⑩ $\cos(\frac{3}{2}\pi+\theta)=\sin\theta$

4. $y=\tan x$ $(-2\pi \le x \le 2\pi)$



① 주기: π
② 최댓값: x, 최솟값: x
③ 원점 대칭
④ 대칭성이 가장 중요하다.
⑤ 점근선: $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$
⑥ $\tan x=t$치환 (t는 모든 실수)

ex3) 그래프를 이용하여 θ로 간단하게 표현하여라.
① $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

② $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

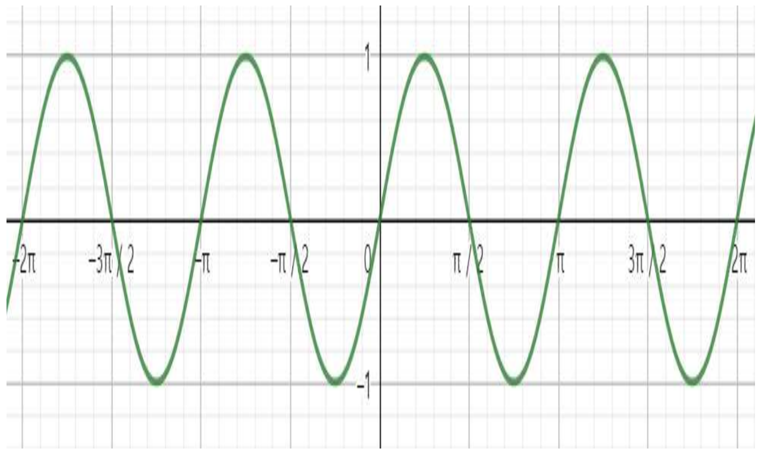
③ $\tan(2\pi-\theta)=-\tan\theta$

5. $y=a\sin(bx+c)+d$

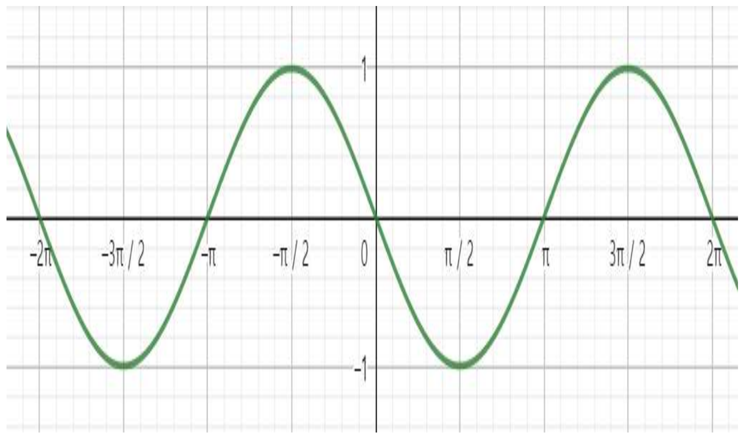
① a: 최댓값, 최솟값과 관련
b: 주기와 관련
c: x축 평행이동
d: y축 평행이동. 최댓값, 최솟값과 관련

② 그래프 그리는 순서
$b \to c \to a \to d$

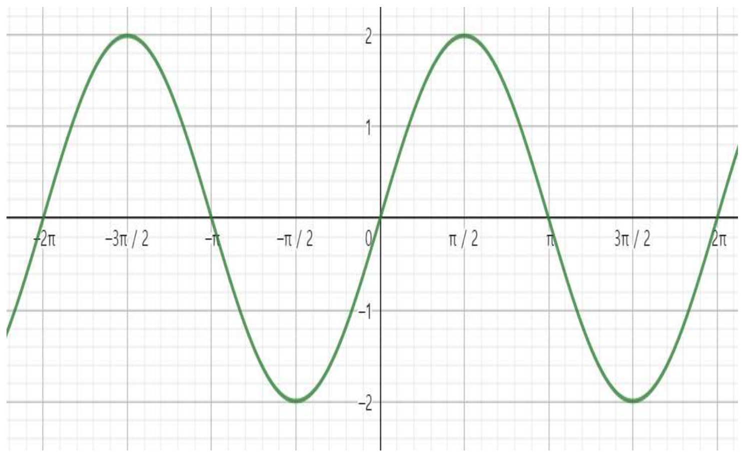
6. 변형그래프 $(-2\pi \le x \le 2\pi)$
① $y=\sin 2x$
주기: π, 최댓값: 1, 최솟값: -1



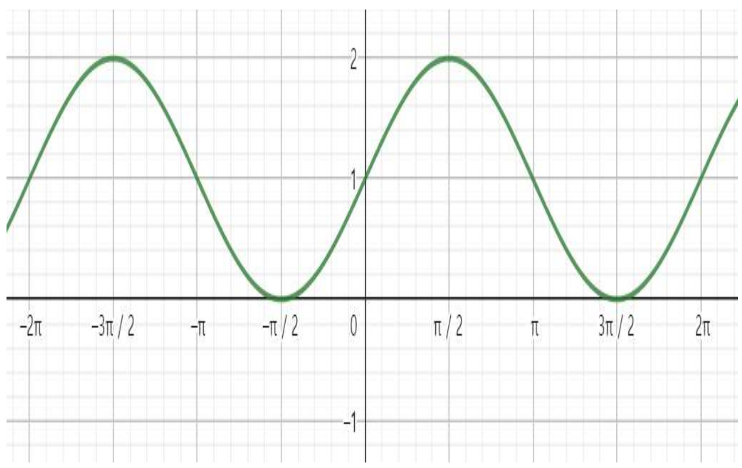
② $y=\sin(x-\pi)$
주기: 2π, 최댓값: 1, 최솟값: -1



③ $y=2\sin x$
주기: 2π, 최댓값: 2, 최솟값: -2

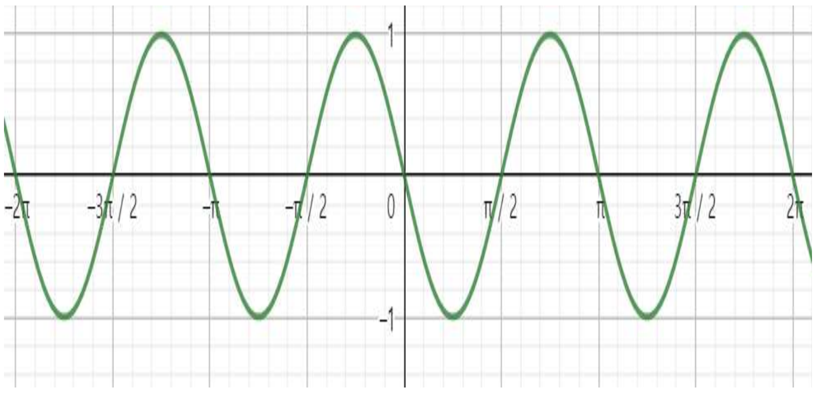


④ $y=\sin x+1$
주기: 2π, 최댓값: 2, 최솟값: 0



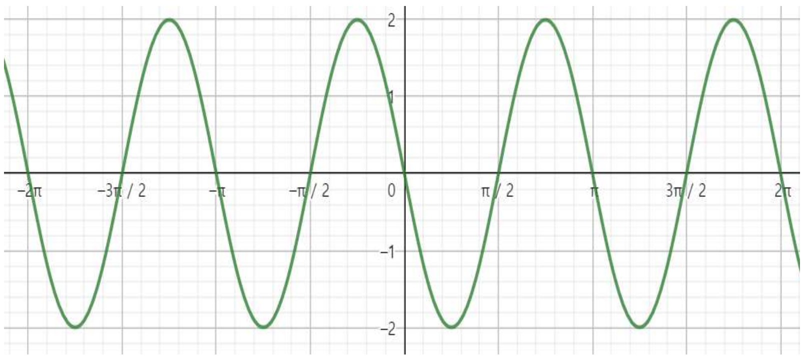
⑤ $y=\sin(2x-\pi)$

주기: π, 최댓값: 1, 최솟값: -1



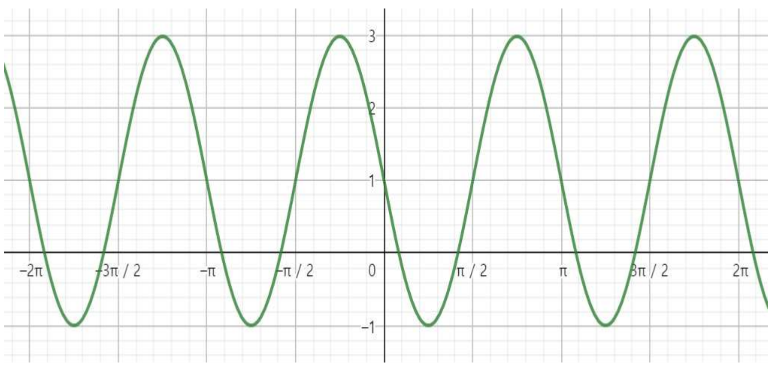
⑥ $y=2\sin(2x-\pi)$

주기: π, 최댓값: 2, 최솟값: -2



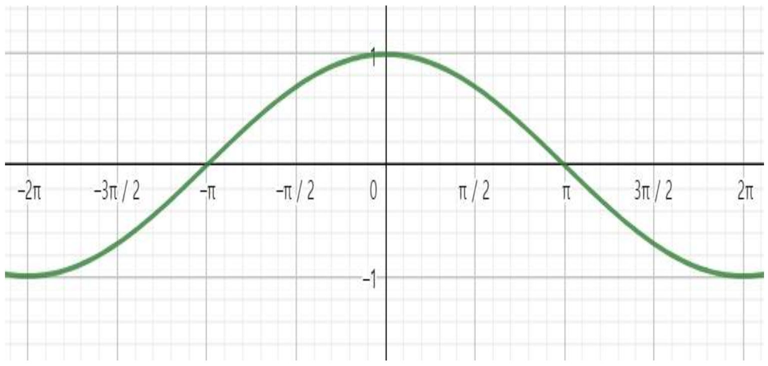
⑦ $y=2\sin(2x-\pi)+1$

주기: π, 최댓값: 3, 최솟값: -1



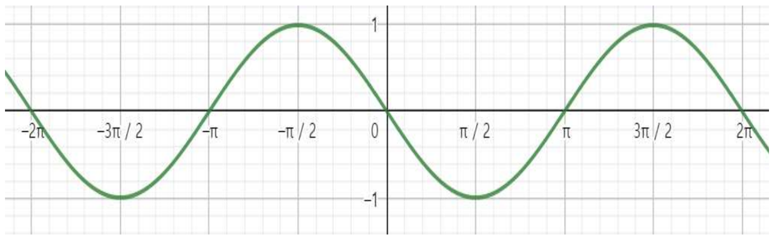
⑧ $y=\cos\frac{x}{2}$

주기: 4π, 최댓값: 1, 최솟값: -1



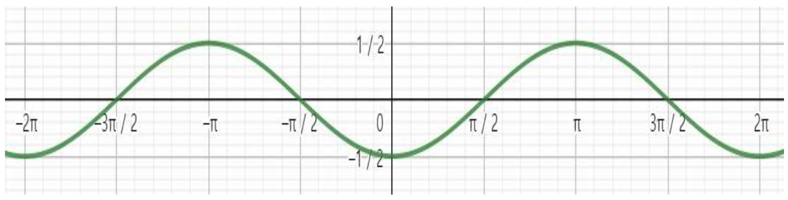
⑨ $y=\cos(x+\frac{\pi}{2})$

주기: 2π, 최댓값: 1, 최솟값: -1



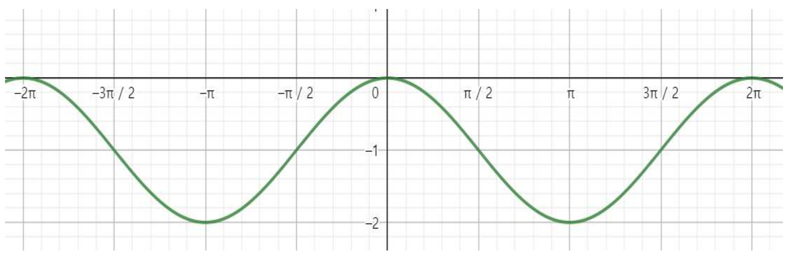
⑩ $y=-\frac{1}{2}\cos x$

주기: 2π, 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: -$\frac{1}{2}$



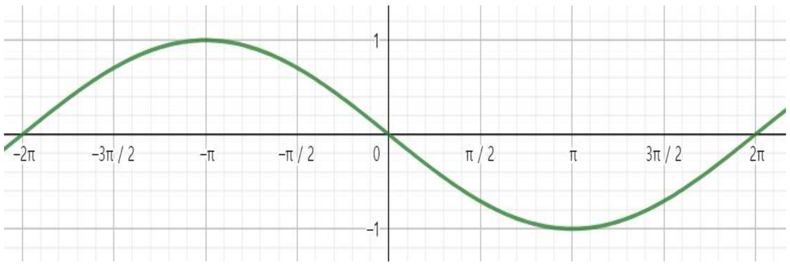
⑪ $y=\cos x-1$

주기: 2π, 최댓값: 0, 최솟값: -2



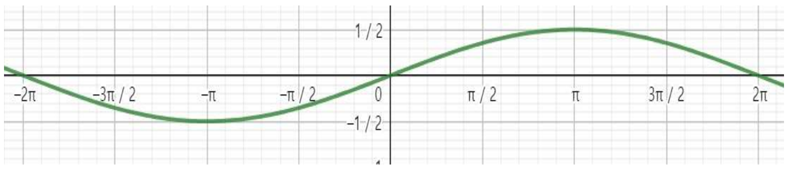
⑫ $y=\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

주기: 4π, 최댓값: 1, 최솟값: -1



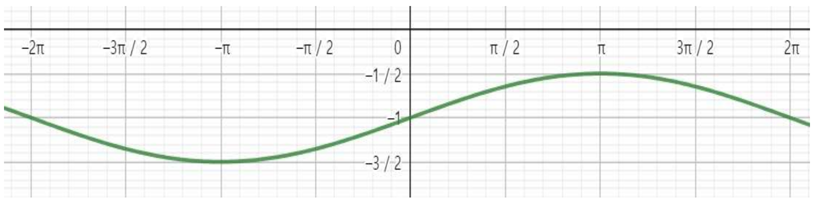
⑬ $y=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$

주기: 4π, 최댓값: $\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{1}{2}$



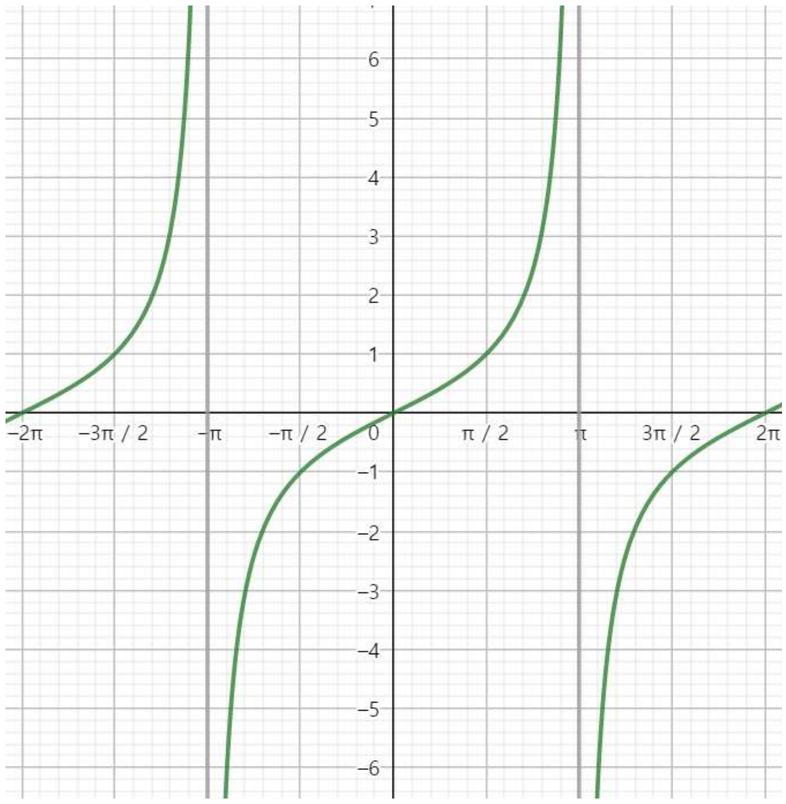
⑭ $y=-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2}\right)-1$

주기: 4π, 최댓값: $-\frac{1}{2}$, 최솟값: $-\frac{3}{2}$



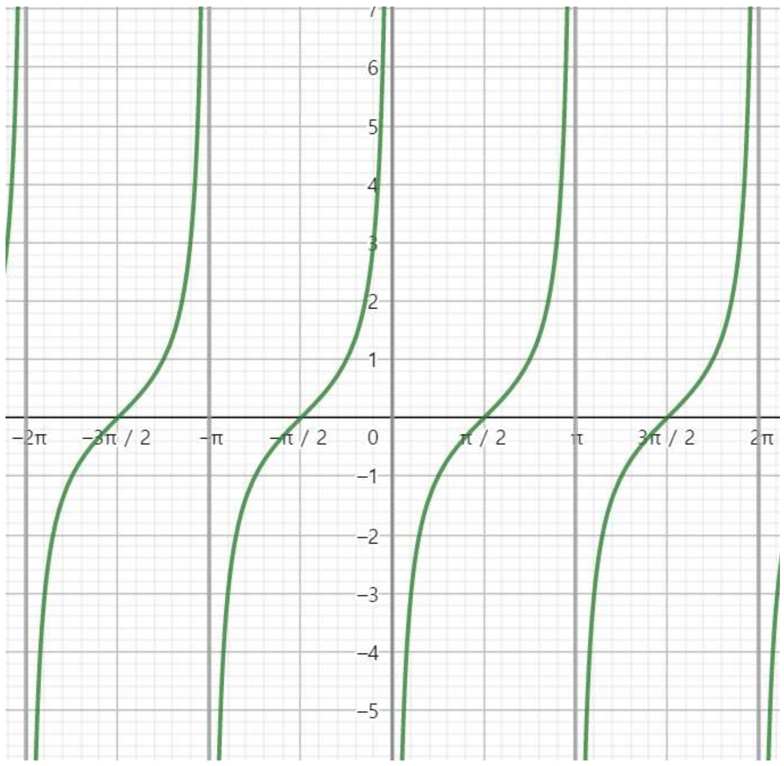
⑮ $y=\tan\frac{x}{2}$

주기: 2π, 최댓값: x, 최솟값: x, 점근선: $x=2n\pi+\pi$



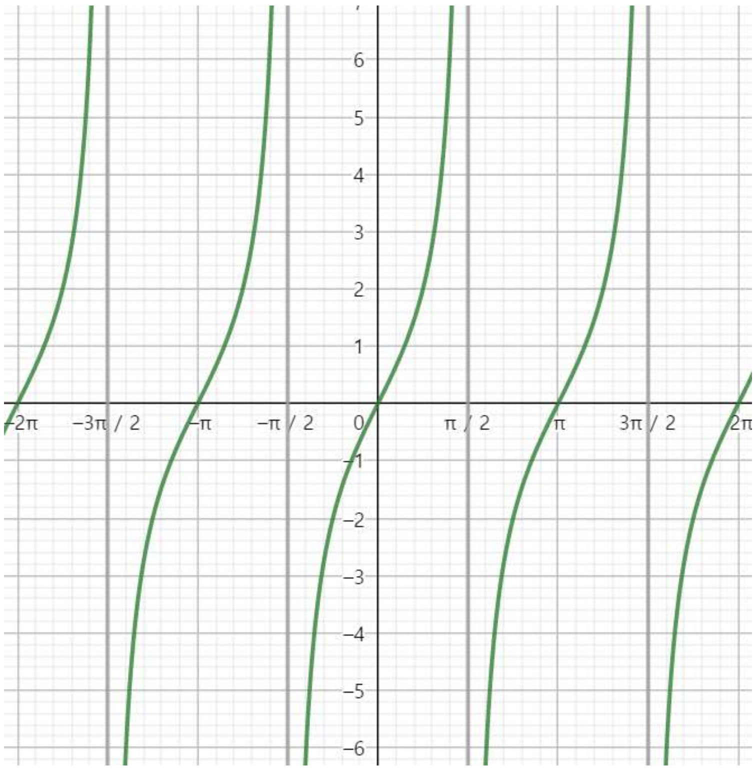
⑯ $y=\tan\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)$

주기: π, 최댓값: x, 최솟값: x, 점근선: $x=n\pi$



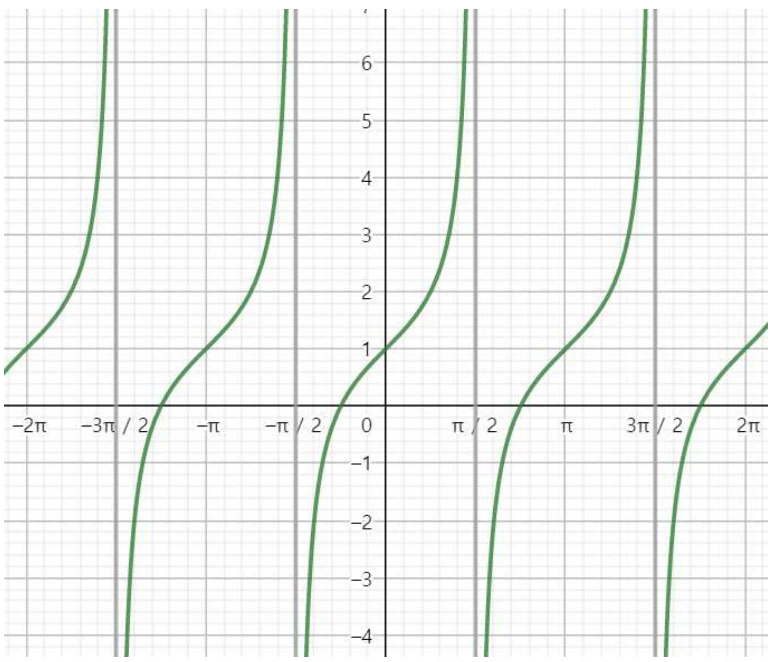
⑰ $y=2\tan x$

주기: π, 최댓값: x, 최솟값: x, 점근선: $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$



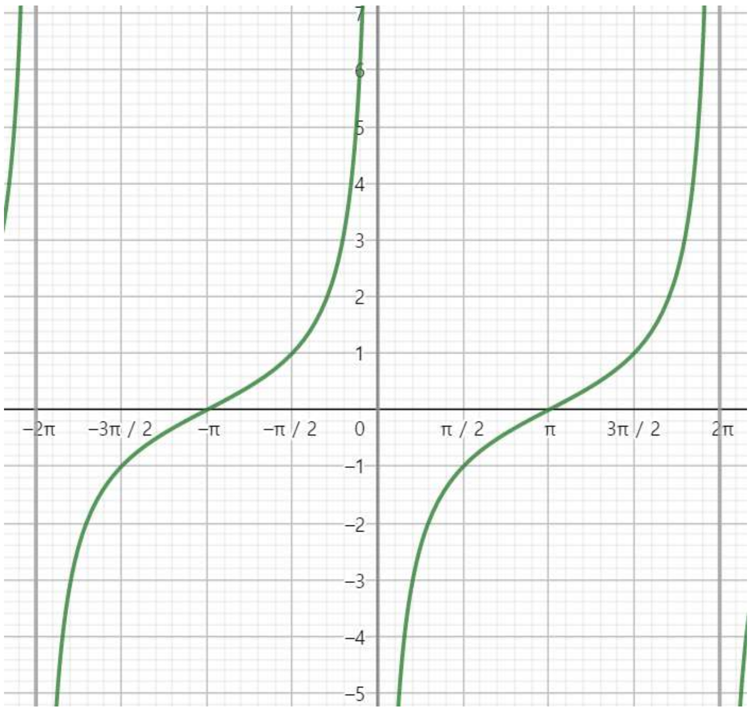
⑱ $y=\tan x+1$

주기: π, 최댓값: x, 최솟값: x, 점근선: $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$



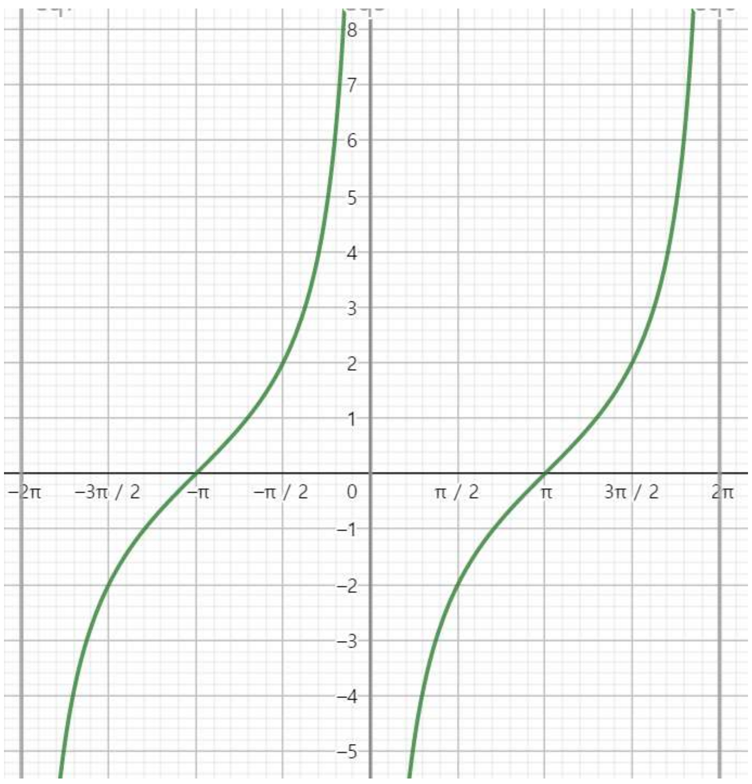
⑲ $y=\tan(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{2})$

주기: 2π, 최댓값: x, 최솟값: x, 점근선: $x=2n\pi$



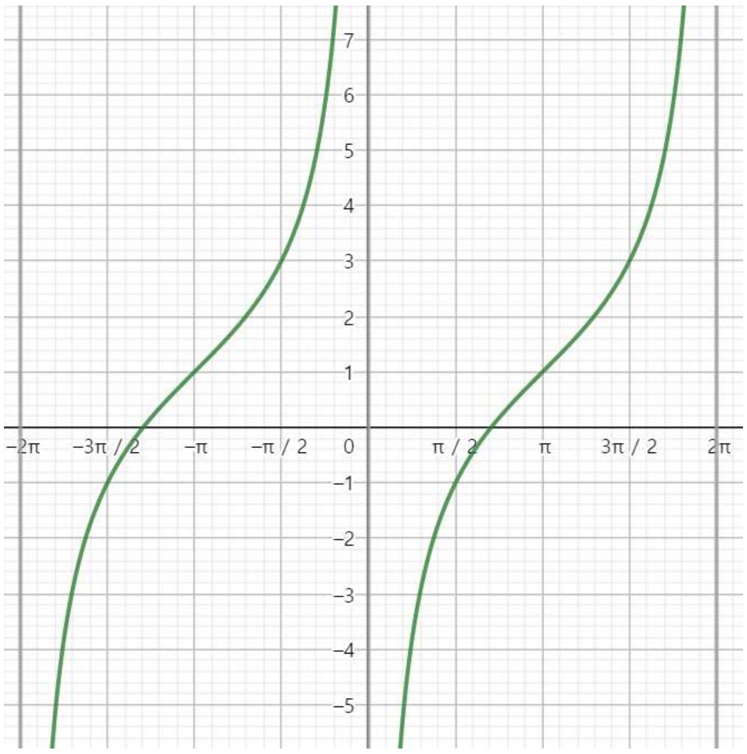
⑳ $y=2\tan(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{2})$

주기: 2π, 최댓값: x, 최솟값: x, 점근선: $x=2n\pi$



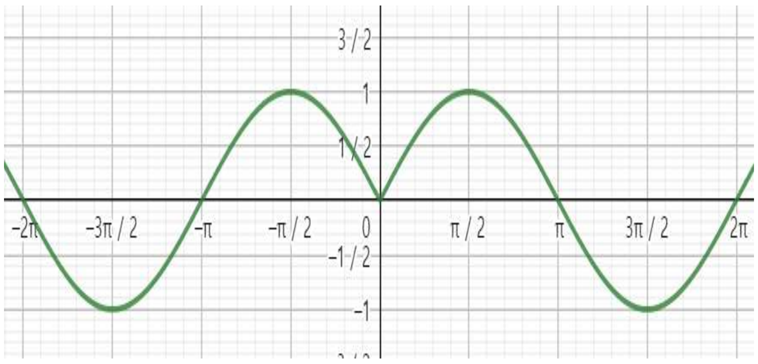
㉑ $y=2\tan\left(\frac{x}{2}-\frac{3\pi}{2}\right)+1$

주기: 2π, 최댓값: x, 최솟값: x, 점근선: $x=2n\pi$



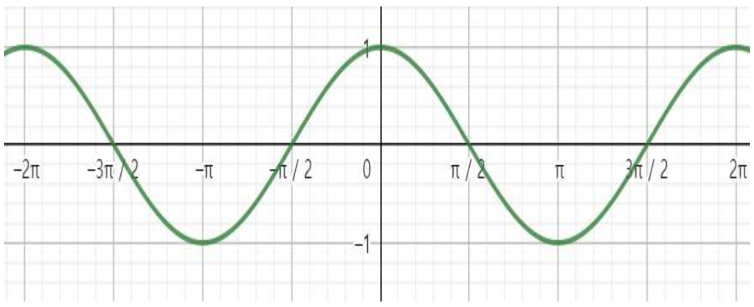
㉒ $y=\sin|x|$

주기: x, 최댓값: 1, 최솟값: -1



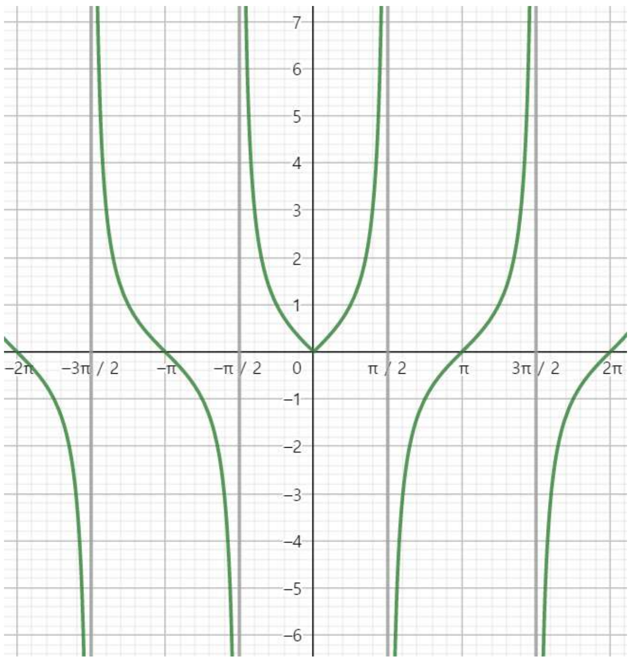
㉓ $y=\cos|x|$

주기: 2π, 최댓값: 1, 최솟값: -1



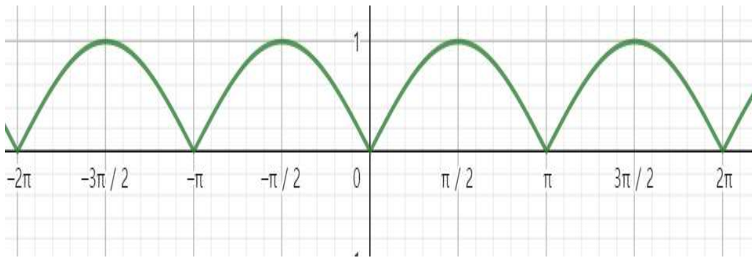
㉔ $y=\tan|x|$

주기: x, 최댓값: x, 최솟값: x, 점근선: $n\pi+\frac{\pi}{2}$



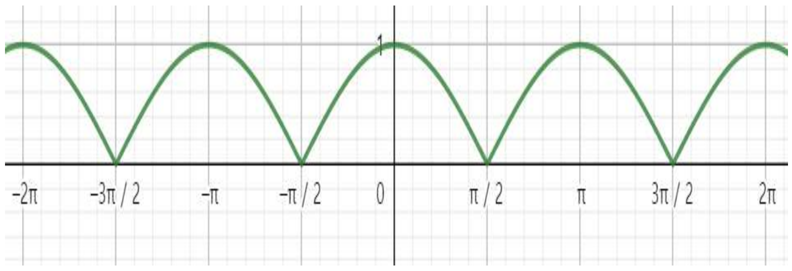
㉕ $y=|\sin x|$

주기: π, 최댓값: 1, 최솟값: 0



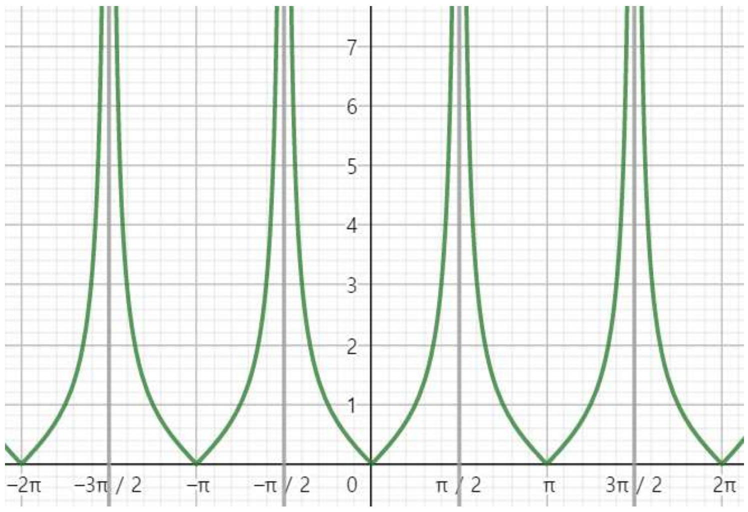
㉖ $y=|\cos x|$

주기: π, 최댓값: 1, 최솟값: 0



㉗ $y=|\tan x|$

주기: π, 최댓값: x, 최솟값: 0, 점근선: $n\pi+\frac{\pi}{2}$

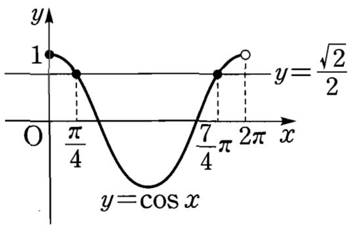


7. 방정식

① $2\cos x-\sqrt{2}=0$ (단, $0\le x<2\pi$)

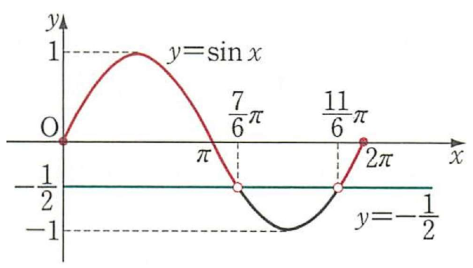
$2\cos x-\sqrt{2}=0$에서 $\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

오른쪽 그림과 같이 $0\le x<2\pi$에서 함수 $y=\cos x$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$의 교점의 x좌표가 $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{7}{4}\pi$이므로



$x=\dfrac{\pi}{4}$ 또는 $x=\dfrac{7}{4}\pi$

② $\sin x=-\dfrac{1}{2}$ (단, $0\le x<2\pi$)



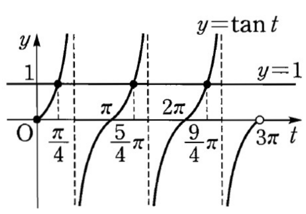
$x=\dfrac{7}{6}\pi$ 또는 $x=\dfrac{11}{6}\pi$

③ $\tan\dfrac{1}{3}x-1=0$ (단, $0\le x<9\pi$)

$\tan\dfrac{1}{3}x-1=0$에서 $\tan\dfrac{1}{3}x=1$

$\dfrac{1}{3}x=t$로 놓으면 $0\le x<9\pi$에서 $0\le t<3\pi$

오른쪽 그림과 같이 $0\le t<3\pi$에서 함수 $y=\tan t$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 t좌표가 $\dfrac{\pi}{4}$, $\dfrac{5}{4}\pi$, $\dfrac{9}{4}\pi$이므로

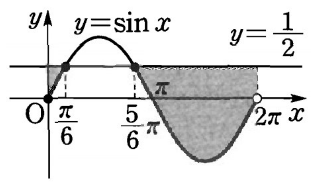


$x=\dfrac{3}{4}\pi$ 또는 $x=\dfrac{15}{4}\pi$ 또는 $x=\dfrac{27}{4}\pi$

8. 부등식

① $\sin x\le\dfrac{1}{2}$ (단, $0\le x<2\pi$)

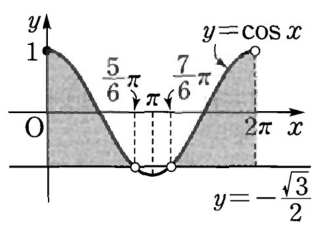
부등식 $\sin x\le\dfrac{1}{2}$의 해는 함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{1}{2}$과 만나는 부분 또는 직선보다 아래쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



$0\le x\le\dfrac{\pi}{6}$ 또는 $\dfrac{5}{6}\pi\le x<2\pi$

② $2\cos x>-\sqrt{3}$ (단, $0\le x<2\pi$)

부등식 $\cos x>-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 해는 함수 $y=\cos x$의 그래프가 직선 $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



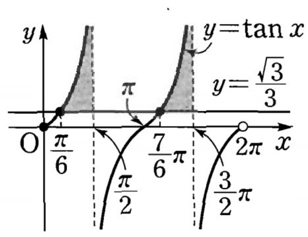
$0\le x<\dfrac{5}{6}\pi$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi<x<2\pi$

③ $\sqrt{3}\tan x-1\ge 0$ (단, $0\le x<2\pi$)

$\sqrt{3}\tan x-1\ge 0$에서

$\tan x\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

부등식 $\tan x\ge\dfrac{\sqrt{3}}{3}$의 해는 함수 $y=\tan x$의 그래프가 직선 $y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$과 만나는 부분 또는 직선보다 위쪽에 있는 부분의 x의 값의 범위이므로 오른쪽 그림에서



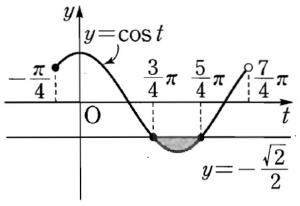
$\dfrac{\pi}{6}\le x<\dfrac{\pi}{2}$ 또는 $\dfrac{7}{6}\pi\le x<\dfrac{3}{2}\pi$

④ $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ (단, $0\leq x<2\pi$)

$x-\frac{\pi}{4}=t$로 놓으면 $0\leq x\leq 2\pi$에서 $-\frac{\pi}{4}\leq t\leq\frac{7}{4}\pi$이고,

주어진 부등식은 $\cos t\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ……㉠

오른쪽 그림에서 부등식 ㉠의 해는 $\frac{3}{4}\pi\leq t\leq\frac{5}{4}\pi$이므로



$$\frac{3}{4}\pi\leq x-\frac{\pi}{4}\leq\frac{5}{4}\pi$$

$$\therefore\ \pi\leq x\leq\frac{3}{2}\pi$$

96) [수1 C546번]

함수 $f(x)=2\sin 2x+1$에 대한 설명 중 옳은 것은?

① 함수 $g(x)=\tan 2x$와 주기가 같다.

② $0 \le x \le \pi$에서 최댓값은 3이고 최솟값은 -3이다.

③ $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$에서 x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

④ $f(0)+f(\pi)=2$

⑤ 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$이다.

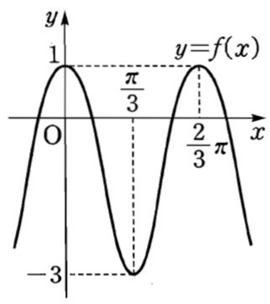
다음 함수의 그래프를 그리고, 최댓값, 최솟값, 주기를 구하여라.

97) [수1 C559번]

$y=\tan 4\pi x+2$

98) [수1 C569번]

다음 중 함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같은 것은?



① $f(x)=\cos 3x$

② $f(x)=\sin 3x+1$

③ $f(x)=2\sin 3x-1$

④ $f(x)=2\cos 3x-1$

⑤ $f(x)=3\cos 3x-2$

99) [수1 C579번]

함수 $f(x)=2|\cos 3(x-\pi)|+1$의 주기를 a, 최댓값을 b, 최솟값을 c라 할 때, abc의 값은?

① π ② 2π ③ 3π

④ 4π ⑤ 5π

다음 방정식을 풀어라. (단, $0 \leq x < 2\pi$)

100) [수1 C587번]

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

101) [수1 C605번]

$0 \leq x < \pi$에서 부등식 $2\sin^2\left(x+\frac{3}{2}\pi\right)+3\sin x-3 \geq 0$의 해를 구하여라.

102) [수1 C606번]

$0 \leq x < 2\pi$에서 부등식 $2\sin^2 x-\cos x-1 \geq 0$의 해가 $\alpha \leq x \leq \beta$일 때, $\alpha+\beta$의 값은?

① $\frac{2}{3}\pi$ ② $\frac{4}{3}\pi$ ③ 2π
④ $\frac{8}{3}\pi$ ⑤ $\frac{10}{3}\pi$

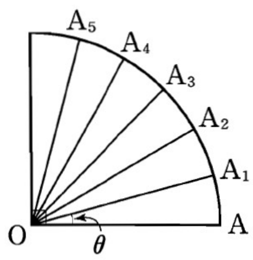
103) [수1 C607번]

$\sin^2 10° + \sin^2 20° + \cdots + \sin^2 80° + \sin^2 90°$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

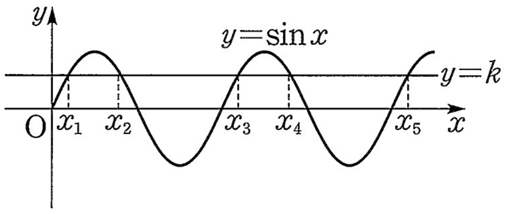
104) [수1 C608번]
$\tan 1° \times tan 2° \times \cdots \times tan 88° \times tan 89°$ 의 값을 구하여라.

105) [수1 C609번]
오른쪽 그림과 같이 사분원을 6 등분하는 각 점을 차례대로
$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ A_5$ 라 하자.
$\angle A_1OA = \theta$ 라 할 때,
$\cos^2\theta + \cos^2 2\theta + \cos^2 3\theta$
$+ \cos^2 4\theta + \cos^2 5\theta$
의 값은?



① $\frac{3}{2}$　② 2　③ $\frac{5}{2}$
④ 3　⑤ $\frac{7}{2}$

106) [수1 C612번]
다음 그림과 같이 함수 $y=\sin x\ (x \geq 0)$의 그래프와 직선 $y=k\ (0<k<1)$의 교점의 x좌표를 작은 것부터 차례대로 x_1, x_2, x_3, $\cdots$이라 할 때, $x_{11}+x_{12}$의 값은?



① 17π ② 19π ③ 21π
④ 23π ⑤ 25π

107) [수1 C617번]
다음 식의 값을 구하시오.

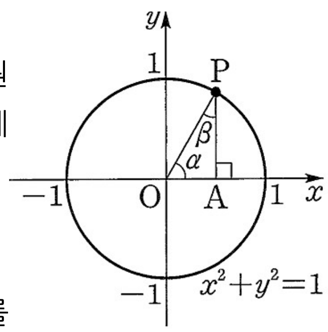
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(3\pi+\frac{\pi}{6}\right)$$

108) [수1 C620번]
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변 삼각형 ABC에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?

[보 기]
ㄱ. $\sin A=\sin 2B$
ㄴ. $\cos\frac{A}{2}=\sin B$
ㄷ. $\tan A=\tan 2C$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

109) [수1 C621번]
오른쪽 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 A라 하자.
$\angle\mathrm{POA}=\alpha$, $\angle\mathrm{OPA}=\beta$라 할 때, $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\tan^2\alpha=4$를 만족시키는 선분 OA의 길이를 구하시오.



(단, O는 원점이고 점 P는 제 1사분면 위의 점이다.)

110) [수1 C624번]

함수 $y=\dfrac{\cos x+a}{\cos x-2}$의 최솟값이 -3일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>-2$)

① $-\dfrac{3}{2}$ ② -1 ③ $\dfrac{3}{2}$

④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

111) [수1 C626번]

함수 $y=\cos^2 x+2k\sin x-1+4k$는 $x=\alpha$일 때 최댓값 -4를 갖는다. 실수 α, k의 값을 구하시오. (단, $0\le x<2\pi$)

112) [수1 C627번]

방정식 $2\log\cos x-2\log\sin x=\log 3$을 푸시오.

(단, $0<x<2\pi$)

113) [수1 C628번]

방정식 $\left|\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$의 모든 근의 곱이 $\dfrac{q}{p}\pi^4$일 때, 서로소인 두 자연수 p, q에 대하여 $p-q$의 값은? (단, $0\le x<2\pi$)

① 38 ② 39 ③ 40

④ 41 ⑤ 42

114) [수1 C634번]

$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sqrt{2}\cos 2x - \cos x = 0$의 모든 근의 합은?

① 2π ② $\frac{5}{2}\pi$ ③ 3π

④ $\frac{7}{2}\pi$ ⑤ 4π

115) [수1 C639번]

전체집합 $U = \{x | 0 \le x < 2\pi\}$의 두 부분집합

$$A = \left\{x \,\middle|\, \cos x > -\frac{1}{2}\right\},\ B = \{x | \tan x < \sqrt{3}\}$$

에 대하여 다음 중 집합 $A \cap B$의 원소가 아닌 것은?

① $\frac{\pi}{9}$ ② $\frac{7}{12}\pi$ ③ $\frac{5}{6}\pi$

④ $\frac{5}{3}\pi$ ⑤ $\frac{11}{6}\pi$

116) [수1 C642번]

이차함수 $y = x^2 - 2x\cos\theta + 1 - \frac{3}{2}\cos\theta$의 그래프가 x축에 접하도록 하는 θ의 값을 θ_1, θ_2 $(\theta_1 < \theta_2)$라 할 때, $\theta_2 - \theta_1$의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < 2\pi$)

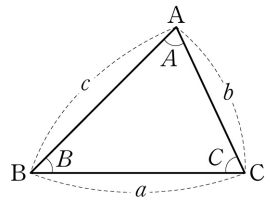
삼각함수

(5) 삼각함수

(6) 삼각함수의 그래프

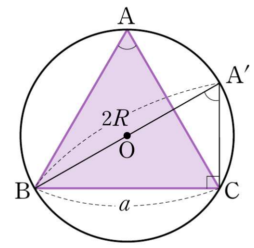
(7) 삼각함수의 활용

1.사인법칙



오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 세 각 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고 이들의 대변 BC, CA, AB의 길이를 각각 a, b, c로 나타내자.

삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 반지름의 길이를 R라고 할 때, ∠A의 크기에 따라 세 가지 경우로 나누어 $\frac{a}{\sin A}$의 값을 구하면 다음과 같다.



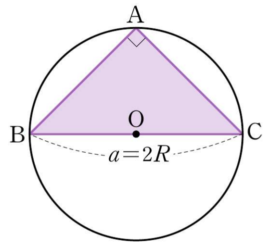
(i) $A < 90°$일 때

선분 BA′이 원의 지름이 되도록 점 A′을 잡으면

$A = A'$이고, ∠A′CB=90°이므로

$\sin A = \sin A' = \frac{a}{2R}$

따라서 $\frac{a}{\sin A} = 2R$이다.

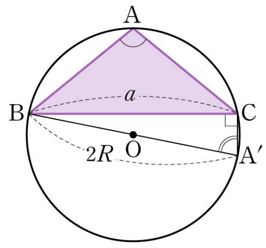


(ii) $A = 90°$일 때

선분 BC는 원의 지름이다.

즉, $a = 2R$이므로 $\sin A = 1 = \frac{a}{2R}$

따라서 $\frac{a}{\sin A} = 2R$이다.



(iii) $A > 90°$일 때

선분 BA′이 지름이 되도록 점 A′을 잡으면

$A = 180° - A'$이고, ∠A′CB=90°이므로

$\sin A = \sin(180° - A')$

$= \sin A' = \frac{a}{2R}$

따라서 $\frac{a}{\sin A} = 2R$이다.

(i), (ii), (iii)에 의하여 ∠A의 크기에 관계없이 $\frac{a}{\sin A} = 2R$이다.

같은 방법으로

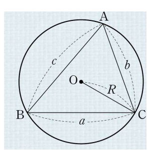
$$\frac{b}{\sin B} = 2R, \quad \frac{c}{\sin C} = 2R$$

임을 알 수 있다. 이상을 정리하면 다음과 같고, 이것을 사인법칙이라고 한다.

사인법칙

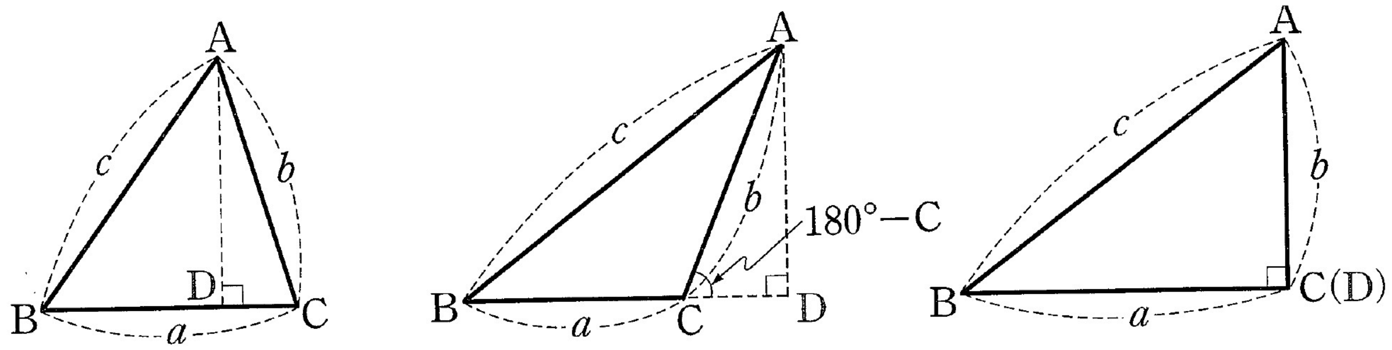
삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R라고 하면

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



2. 제일 코사인법칙

$\triangle$ABC의 꼭짓점 A에서 대변 BC또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 D라고 하자.



(ⅰ) 각 B, C가 모두 예각인 경우

$a=\overline{\mathrm{BD}}+\overline{\mathrm{CD}}=a\cos \mathrm{B}+b\cos \mathrm{C}$

(ⅱ) 각 C가 둔각인 경우

$a=\overline{\mathrm{BD}}-\overline{\mathrm{CD}}=c\cos \mathrm{B}-b\cos(180^\circ-\mathrm{C})=c\cos\mathrm{B}+b\cos\mathrm{C}$

각 B가 둔각인 경우에도 마찬가지이다.

(ⅲ) 각 C가 직각인 경우 : $a=c\cos \mathrm{B}$

그런데 $\cos \mathrm{C}=0$ 이므로 이때에도 $a=a\cos \mathrm{B}+b\cos \mathrm{C}$가 성립한다.

각 B가 직각인 경우에도 마찬가지이다.

같은 방법으로 하면 다음 법칙이 성립한다.

$b=c\cos \mathrm{A}+a\cos \mathrm{C}$, $\quad c=a\cos \mathrm{B}+b\cos \mathrm{A}$

제일 코사인법칙

$a=b\cos \mathrm{C}+c\cos \mathrm{B}$

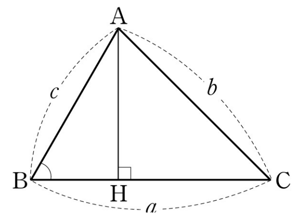
$b=c\cos \mathrm{A}+a\cos \mathrm{C}$

$c=a\cos \mathrm{B}+b\cos \mathrm{A}$

3. 코사인법칙(제이 코사인법칙)

삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, ∠B의 크기에 따라 세 가지 경우로 나누어 변 BC의 길이를 구하면 다음과 같다.

(ⅰ) $B < 90°$일 때



$\overline{\mathrm{AH}} = \mathrm{c}\sin\mathrm{B}$

$\overline{\mathrm{BH}} = \mathrm{c}\cos\mathrm{B}$

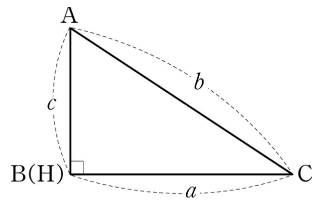
이므로

$\overline{\mathrm{CH}} = \mathrm{a} - \mathrm{c}\cos\mathrm{B}$

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{CH}}^2$이므로

$$b^2 = (c\sin B)^2 + (a - c\cos B)^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

(ⅱ) $B = 90°$일 때

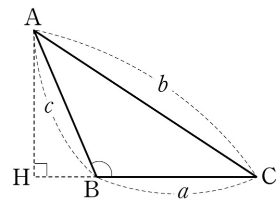


피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{CH}}^2$이고 $\cos B = 0$이므로

$$b^2 = a^2 + c^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

(ⅲ) $B > 90°$일 때



$\overline{\mathrm{AH}} = \mathrm{c}\sin(180° - \mathrm{B}) = \mathrm{c}\sin\mathrm{B}$

$\overline{\mathrm{BH}} = \mathrm{c}\cos(180° - \mathrm{B}) = -\mathrm{c}\cos\mathrm{B}$

이므로

$\overline{\mathrm{CH}} = \mathrm{a} - \mathrm{c}\cos\mathrm{B}$

피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AC}}^2 = \overline{\mathrm{AH}}^2 + \overline{\mathrm{CH}}^2$이므로

$$b^2 = (c\sin B)^2 + (a - c\cos B)^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$가 성립한다.

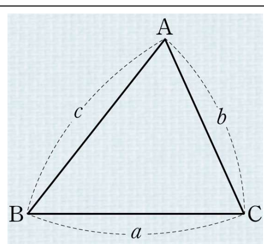
같은 방법으로

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

가 성립함을 알 수 있다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

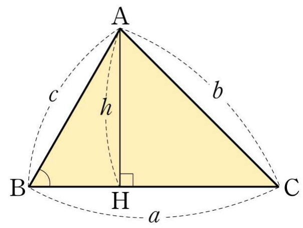
> 코사인법칙
>
> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
>
> $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$
>
> $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



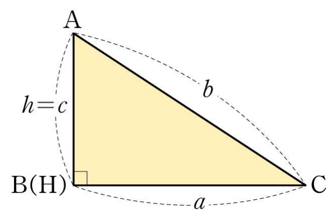
4. 삼각형의 넓이

삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하고 $\overline{\mathrm{AH}}=\mathrm{h}$라고 하자. 이때 ∠B의 크기에 따라 세 가지 경우로 나누어 삼각형의 높이를 구하면 다음과 같다.

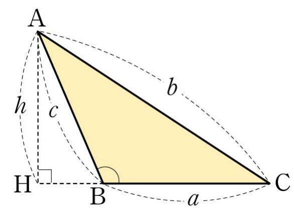
(i) $B<90°$일 때
오른쪽 그림에서
$h=c\sin B$



(ii) $B=90°$일 때
$\sin B=1$이므로
$h=c=c\sin B$



(iii) $B>90°$일 때
$h=c\sin(180°-B)$
$=c\sin B$



따라서 ∠B의 크기에 관계없이 $h=c\sin B$이므로
삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ac\sin B$$

가 성립한다.
같은 방법으로

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}bc\sin A$$

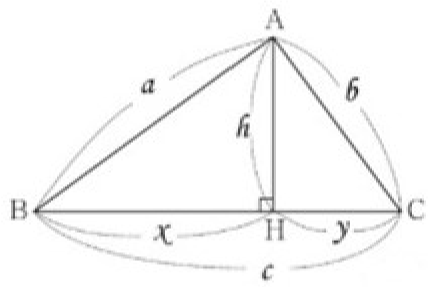
도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

삼각형의 넓이

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

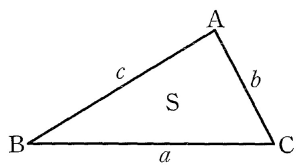
5. 헤론의 공식



$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ab\sin C \\
&= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\cos^2 C} \\
&= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}ab\sqrt{\frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}{4a^2b^2}} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)} \\
&= \sqrt{\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{-a+b+c}{2}} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ \left(s=\frac{a+b+c}{2}\right)
\end{aligned}
$$

헤론의 공식

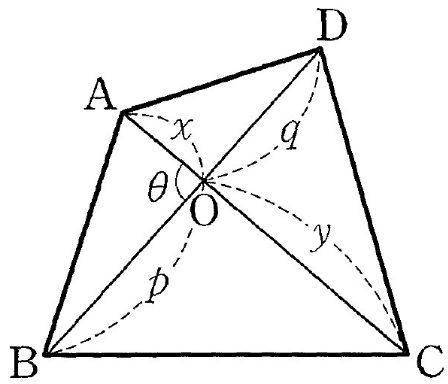
$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (단, $2s=a+b+c$)



6. 사각형의 넓이

두 대각선의 길이가 a, b인 사각형 ABCD가 있다.
사각형 ABCD를 그림과 같이 네 개의 삼각형으로 나누어
$p+q=a,\ x+y=b$
라고 하면

$$
\begin{aligned}
S &= \triangle \mathrm{OAB} + \triangle \mathrm{OBC} + \triangle \mathrm{OCD} + \triangle \mathrm{ODA} \\
&= \frac{1}{2}xp\sin\theta + \frac{1}{2}py\sin(180^\circ - \theta) \\
&\quad + \frac{1}{2}yq\sin\theta + \frac{1}{2}qx\sin(180^\circ - \theta) \\
&= \frac{1}{2}(xp+py+yq+qx)\sin\theta = \frac{1}{2}(x+y)(p+q)\sin\theta = \frac{1}{2}ab\sin\theta
\end{aligned}
$$



사각형의 넓이

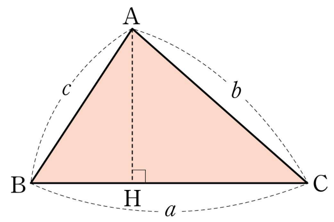
a, b는 사각형의 두 대각선일 때,

$$S = \frac{1}{2}ab\sin A$$

〈참고〉 코사인법칙의 다른 증명

코사인의 성질을 이용하여 코사인법칙을 증명해 보자.

삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 세 변의 길이를 구하면 다음과 같다.



$$a=\overline{\mathrm{BH}}+\overline{\mathrm{HC}}$$
$$=c\cos B+b\cos C$$
$$b=c\cos A+a\cos C$$
$$c=a\cos B+b\cos A$$

위의 식의 양변에 차례로 $a,\ b,\ c$를 곱하면

$$a^2=ac\cos B+ab\cos C \quad \cdots\cdots ①$$
$$b^2=bc\cos A+ab\cos C \quad \cdots\cdots ②$$
$$c^2=ac\cos B+bc\cos A \quad \cdots\cdots ③$$

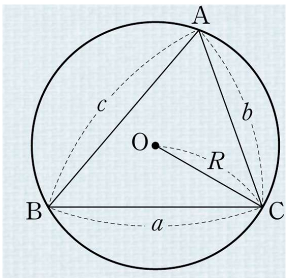
① - ② - ③을 계산하여 정리하면 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$가 성립한다.

같은 방법으로

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

가 성립함을 알 수 있다.

1. 사인법칙



삼각형 ABC에서 외접원의 반지름의 길이를 R

① $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ <암기>

② $\sin A=\dfrac{a}{2R}$ <암기>

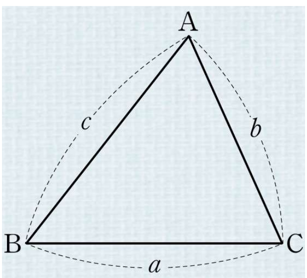
③ $a=2R\cdot \sin A$ <암기>

④ $\sin A$와 a는 비례관계이다. <암기>

ex1) $\sin A:\sin B:\sin C=1:2:3$,

$a=k$, $b=2k$, $c=3k$

2. 코사인법칙



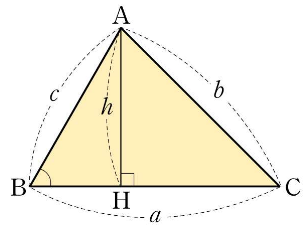
① $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ <암기>

② $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ <암기>

③ $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ <암기>

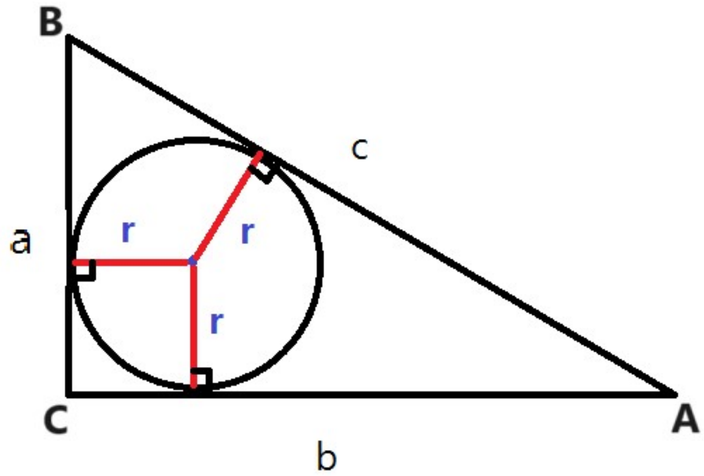
④ $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ <암기>

3. 삼각형의 넓이1



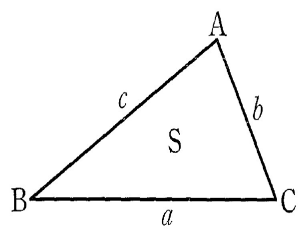
① $S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$ <암기>

4. 삼각형의 넓이2



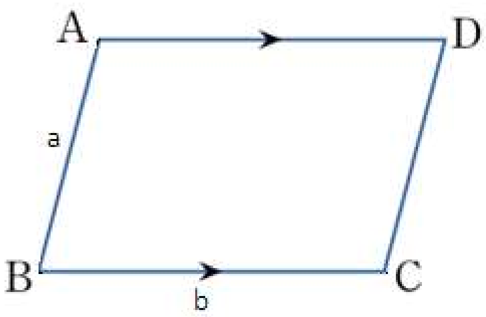
① $S=lr$ (단, $l=\dfrac{a+b+c}{2}$)

5. 삼각형의 넓이3 (헤론의 공식)



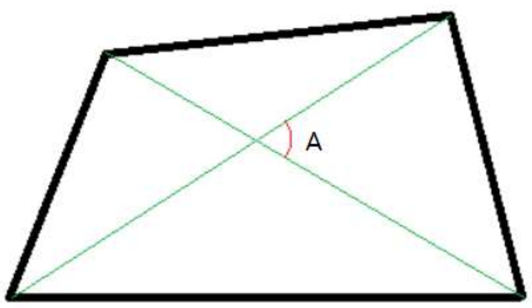
$S=\sqrt{l(l-a)(l-b)(l-c)}$ (단, $l=\dfrac{a+b+c}{2}$)

6. 사각형의 넓이1 (평행사변형의 넓이)



$S = ab\sin B$

7. 사각형의 넓이2 (평행사변형의 넓이)



a, b는 사각형의 두 대각선일 때,

$S = \frac{1}{2}ab\sin A$

8. 다음 삼각비 값을 구하시오.

	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$

삼각형 ABC에 대하여 다음을 구하시오.

117) [수1 C648번]

$a=5,\ A=60^\circ,\ C=45^\circ$ 일 때, c의 값

118) [수1 C649번]

$b=5,\ c=5\sqrt{2},\ B=30^\circ$ 일 때, $\angle \mathrm{A}$의 크기

다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이 R의 값을 구하시오.

119) [수1 C656번]

$c=3,\ A=35^\circ,\ B=100^\circ$

120) [수1 C662번]

다음 등식을 만족시키는 삼각형 ABC는 어떤 삼각형인지 구하시오.

$a\sin A = b\sin B + c\sin C$

121) [수1 C665번]
$\overline{AB}=c$, $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$인 삼각형 ABC에서 $ab:bc:ca=2:3:6$일 때, $\sin A:\sin B:\sin C$는?

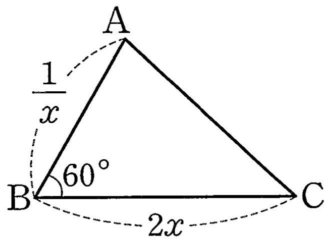
① $1:2:3$ ② $2:1:3$ ③ $2:2:3$
④ $2:3:1$ ⑤ $3:1:2$

삼각형 ABC에 대하여 다음을 구하시오.

122) [수1 C668번]
$b=3$, $c=\sqrt{2}$, $A=45^\circ$ 일 때, a의 값

123) [수1 C669번]
$a=13$, $b=7$, $c=8$일 때, $\angle\mathrm{A}$의 크기

124) [수1 C675번]
오른쪽 그림과 같이



$\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{x}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2x$, $B=60^\circ$

인 삼각형 ABC에서 $\overline{\mathrm{AC}}$의 길이의 최솟값을 구하시오.

125) [수1 C679번]
세 변의 길이가 4, $2\sqrt{7}$, 6인 삼각형에서 세 내각 중 최대인 각의 크기를 α, 최소인 각의 크기를 β라 할 때, $\cos\alpha\sin\beta$의 값은?

① $\frac{\sqrt{3}}{14}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{13}$ ③ $\frac{\sqrt{3}}{12}$
④ $\frac{\sqrt{3}}{11}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{10}$

126) [수1 C680번]

삼각형의 세 변의 길이가 각각 7, 8, 9일 때, 이 삼각형의 외접원의 넓이는?

① $\frac{437}{20}\pi$ ② $\frac{439}{20}\pi$ ③ $\frac{441}{20}\pi$

④ $\frac{439}{10}\pi$ ⑤ $\frac{441}{10}\pi$

127) [수1 C696번]

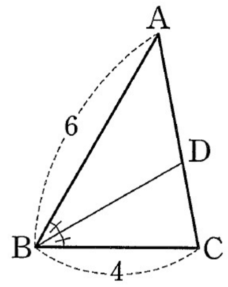
세 변의 길이가 $2,3,4$인 삼각형 ABC의 넓이는?

① $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{15}}{2}$ ③ $\frac{3\sqrt{15}}{4}$

④ $\sqrt{15}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{15}}{4}$

128) [수1 C699번]

오른쪽 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$, $B=60°$인 삼각형 ABC에서 $\angle \mathrm{B}$의 이등분선이 $\overline{\mathrm{AC}}$와 만나는 점을 D라 할 때, $\overline{\mathrm{BD}}$의 길이는?



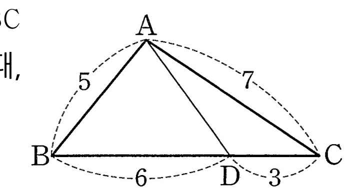
① $\frac{7\sqrt{3}}{5}$ ② $\frac{8\sqrt{3}}{5}$

③ $\frac{9\sqrt{3}}{5}$ ④ $\frac{11\sqrt{3}}{5}$

⑤ $\frac{12\sqrt{3}}{5}$

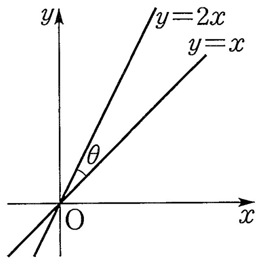
129) [수1 C700번]

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 변 BC 위에 점 D를 잡을 때, $\overline{\mathrm{AD}}$의 길이를 구하시오.



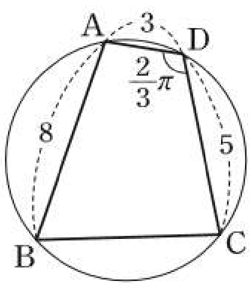
130) [수1 C701번]

오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x$ 와 $y=x$가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



131) [수1 C704번]

그림과 같이 원에 내접하는 사각형 $ABCD$에서 $\overline{AB}=8$, $\overline{CD}=5$, $\overline{AD}=3$ 이고 $D=\frac{2}{3}\pi$일 때, 사각형 $ABCD$의 넓이는? (단, $\overline{BC}>3$)

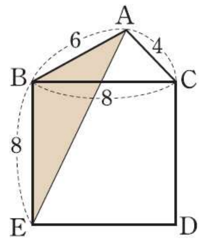


① $\frac{51\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{53\sqrt{3}}{4}$ ③ $\frac{55\sqrt{3}}{4}$

④ $\frac{57\sqrt{3}}{3}$ ⑤ $\frac{59\sqrt{3}}{4}$

132) [수1 C706번]

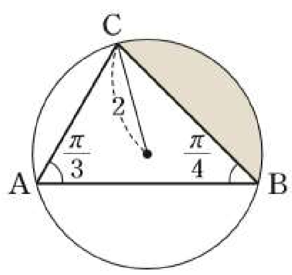
그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=6$, $\overline{\mathrm{BC}}=8$, $\overline{\mathrm{AC}}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 BC를 한 변으로 하는 정사각형 BEDC를 만들었다. 이때 삼각형 ABE의 넓이를 구하시오.



133) [수1 716번]

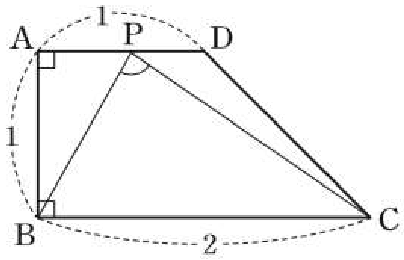
그림과 같이 삼각형 ABC에서 $A=\frac{\pi}{3}$, $B=\frac{\pi}{4}$이고 외접원의 반지름의 길이가 2일 때, 색칠된 부분의 넓이 S는 $S=p\pi+q\sqrt{3}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p, q는 유리수이다.)



134) [수1 C723번]

그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AD}=1$, $\overline{BC}=2$, $A=B=\frac{\pi}{2}$인 사다리꼴 $ABCD$가 있다, 변 AD 위의 점 P에 대하여 $\overline{PB}\times\overline{PC}=2$일 때, $\angle BPC$의 크기는?

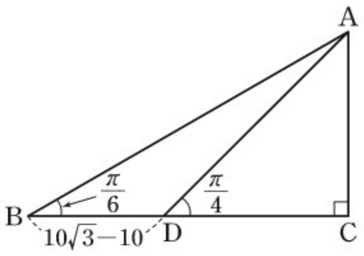


① $\frac{\pi}{2}$ ② $\frac{\pi}{3}$ ③ $\frac{\pi}{4}$

④ $\frac{\pi}{6}$ ⑤ $\frac{\pi}{12}$

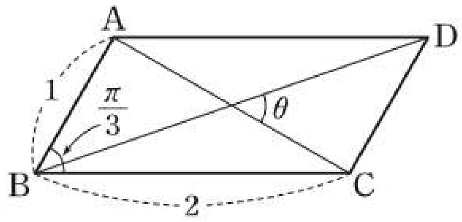
135) [수1 C724번]

그림과 같이 $B=\frac{\pi}{6}$, $C=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC가 있다. 변 BC 위의 점 D에 대하여 $\overline{BD}=10\sqrt{3}-10$, $\angle ADC=\frac{\pi}{4}$일 때, $\cos(\angle BAD)$의 값을 구하시오.



136) [수1 C725번]

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=2$, $B=\frac{\pi}{3}$인 평행사변형 $ABCD$의 두 대각선이 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin^2\theta$의 값은? (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$)

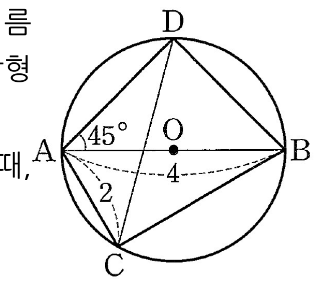


① $\frac{1}{7}$ ② $\frac{2}{7}$ ③ $\frac{3}{7}$

④ $\frac{4}{7}$ ⑤ $\frac{5}{7}$

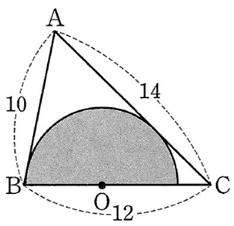
137) [수1 C726번]

오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 원 O에 내접하는 사각형 ACBD에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=2$, $\angle DAB=45°$일 때, 선분 CD의 길이를 구하시오.



138) [수1 C727번]

오른쪽 그림과 같이 세 변의 길이가 10, 12, 14인 삼각형 ABC에 중심이 O인 반원이 내접한다. 이때 반원의 넓이는?



① 9π　② 10π
③ 11π　④ 12π
⑤ 13π

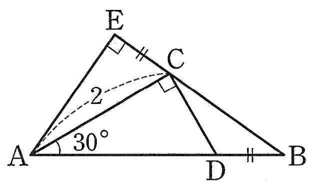
139) [수1 C729번]

오른쪽 그림에서

$\overline{\mathrm{AC}}=2$, $\angle\mathrm{DAC}=30^{\circ}$,

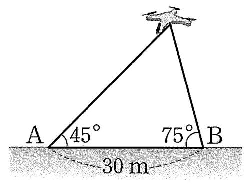
$\angle\mathrm{AEC}=\angle\mathrm{ACD}=90^{\circ}$

이고 $\overline{\mathrm{EC}}=\overline{\mathrm{BD}}$이다. 이때 $\overline{\mathrm{BC}}$의 길이를 구하시오.



140) [수1 C734번]

오른쪽 그림과 같이 $30\mathrm{m}$ 떨어진 두 지점 A, B에서 비행 중인 드론을 올려다 본 각의 크기가 각각 45°, 75°일 때, B지점에서 드론까지의 거리는?

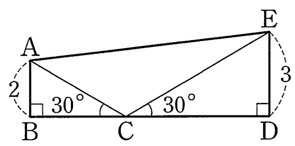


(단, 드론의 크기는 무시한다.)

① $10\sqrt{2}\mathrm{m}$　② $20\mathrm{m}$　③ $10\sqrt{6}\mathrm{m}$
④ $20\sqrt{2}\mathrm{m}$　⑤ $20\sqrt{3}\mathrm{m}$

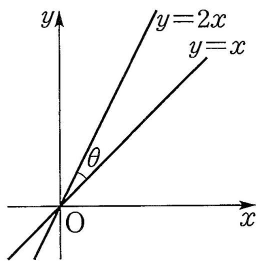
141) [수1 C736번]

오른쪽 그림에서 세 점 B, C, D가 한 직선 위에 있을 때, $\overline{\mathrm{AE}}$의 길이를 구하시오.



142) [수1 C738번]

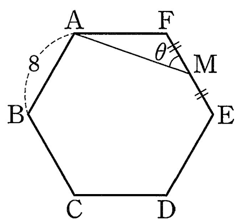
오른쪽 그림과 같이 두 직선 $y=2x$ 와 $y=x$가 이루는 예각의 크기를 θ 라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



143) [수1 C739번]

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 8 인 정육각형에서 변 EF의 중점을 M이라 하자.

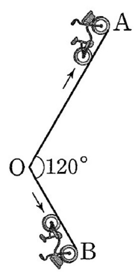
$\angle\mathrm{AMF}=\theta$라 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.



144) [수1 C743번]

오른쪽 그림과 같이 지점 O에서 두 자전거 A, B가 동시에 출발하여 $\angle\mathrm{AOB}=120^{\circ}$가 되도록 직선으로 달리고 있다. 두 자전거 A, B가 각각 초속 $5\,\mathrm{m}$, $3\,\mathrm{m}$의 속력으로 일정하게 달릴 때, 10초 후의 두 자전거 사이의 거리를 구하시오.

(단, 자전거의 크기는 무시한다.)

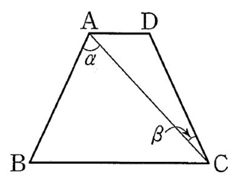


145) [수1 C746번]

오른쪽 그림과 같은 사다리꼴 ABCD에서 $\overline{\mathrm{BC}}=3\overline{\mathrm{AD}}$이다.

$\angle\mathrm{BAC}=\alpha$, $\angle\mathrm{ACD}=\beta$라 할 때,

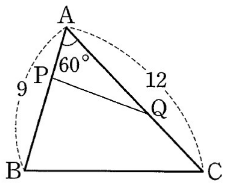
다음 중 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}$의 값과 같은 것은?



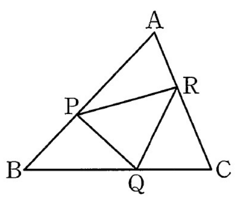
① $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$　② $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{BC}}}$　③ $\dfrac{3\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$

④ $\dfrac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$　⑤ $\dfrac{3\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{AC}}}$

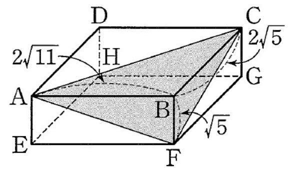
146) [수1 C748번]
오른쪽 그림과 같이 $\mathrm{A}=60°$인 삼각형 ABC의 변 AB, AC 위에 삼각형 APQ의 넓이가 삼각형 ABC의 넓이의 $\frac{1}{4}$이 되도록 두 점 P, Q를 각각 잡을 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이의 최솟값을 구하시오.



147) [수1 C749번]
오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA를 $3:2$로 내분하는 점을 각각 P, Q, R라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 S, 삼각형 PQR의 넓이를 S'이라 할 때, $\frac{S'}{S}$의 값을 구하시오.



148) [수1 C750번]
오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{11}$, $\overline{\mathrm{BC}}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{BF}}=\sqrt{5}$일 때, 삼각형 AFC의 넓이를 구하시오.

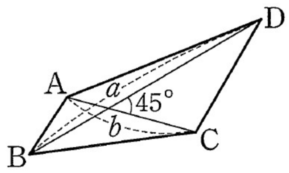


149) [수1 C752번]
삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 길이가 각각 $\sqrt{5}$, 4, x일 때, 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값과 그때의 x의 값을 차례대로 구하면?

① $2\sqrt{3}$, $\sqrt{19}$ ② 4, $2\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{5}$, $\sqrt{21}$
④ $2\sqrt{6}$, $\sqrt{22}$ ⑤ $2\sqrt{7}$, $\sqrt{23}$

150) [수1 C758번]

오른쪽 그림과 같이 두 대각선의 길이가 a, b이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 $45°$인 사각형 ABCD가 있다. 이 사각형의 넓이가 $2\sqrt{2}$이고 $a+b=6$일 때, a^3+b^3의 값은?



① 48 ② 54 ③ 60

④ 66 ⑤ 72

수열

(8) 등차수열과 등비수열

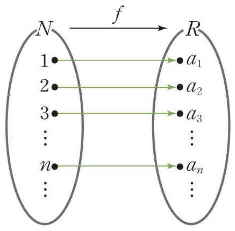
(9) 수열의 합

(10) 수학적 귀납법

수열의 의미

어떤 일정한 규칙에 따라 얻어지는 수들을 차례로 나열한 것을 수열이라고 한다. 수열은 자연수 전체의 집합 N을 정의역, 실수 전체의 집합 R를 공역으로 하는 함수이다.

[설명]



수열의 각 항은 그 항의 번호에 대응하여 정해지므로, 수열은 정의역이 자연수 전체의 집합 N이고, 공역이 실수 전체의 집합 R인 함수

$$f : N \to R, \quad f(n) = a_n$$

으로 볼 수 있다.

수열 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$에서 제n항 a_n이 n에 관한 식으로 주어지면 $n=1$, 2, 3, $\cdots$을 대입하여 그 수열의 모든 항을 구할 수 있다. 따라서 수열의 각 항을 일반적으로 나타내고 있다는 의미에서 제n항 a_n을 일반항이라고 한다.

또, 일반항이 a_n인 수열을 간단히 $\{a_n\}$으로 나타낸다.

등차수열

(1) 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더하여 만들어지는 수열을 등차수열이라 하고, 더하는 일정한 수를 공차라 한다.

(2) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항 a_n은

$$a_n = a + (n-1)d \ \ (n = 1,\ 2,\ 3, \cdots)$$

(3) 세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라 한다. 이때, $2b = a + c,\ b = \dfrac{a+c}{2}$가 성립한다.

등차수열의 항을 미지수로 놓기

(1) 세 수 $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등차수열을 이루면 다음과 같이 놓는다.

$a,\ b,\ c \Rightarrow a,\ a+d,\ a+2d$

$\Rightarrow a-d,\ a,\ a+d$

(2) 네 수 $a,\ b,\ c,\ d$가 이 순서대로 등차수열을 이루면 다음과 같이 놓는다.

$a,\ b,\ c,\ d \Rightarrow a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d$

$\Rightarrow a-3d,\ a-d,\ a+d,\ a+3d$

등차수열의 합

첫째항이 a, 공차가 d, 제 n항이 l인 등차수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합 S_n은 $S_n=\frac{n(a+l)}{2}=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$

[증명]

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하고, 제n항을 l이라고 하면

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(1-d)+l \quad \cdots\cdots①$$

이다. ①에서 우변의 항을 역순으로 놓으면

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \quad \cdots\cdots②$$

이다. ①, ②를 같은 변끼리 더하면

$$2S_n=(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)$$

$=n(a+l)$

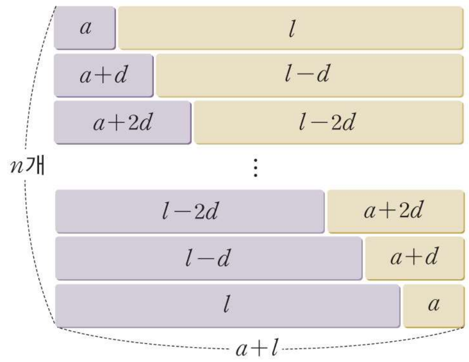
이므로 $S_n=\frac{n(a+l)}{2} \quad \cdots\cdots③$

이다. 여기서 l은 제n항이므로

$l=a+(n-1)d$를 ③에 대입하면

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

이다.



조화수열

(1) 수열 $\{a_n\}$에서 각 항의 역수가 등차수열을 이룰 때,
수열 $\{a_n\}$을 조화수열이라 한다.

(2) 0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 조화수열을 이룰 때, b를 a와 c의 조화중항이라 한다.
이때, $\frac{2}{b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}$, $b=\frac{2ac}{a+c}$가 성립한다.

등비수열

(1) 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라 한다.

(2) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 일반항 a_n은

$$a_1 = a,\ a_n = ar^{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(3) 0이 아닌 세수 $a,\ b,\ c$가 이 순서로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라 한다. 이때, $b^2 = ac,\ b = \pm\sqrt{ac}$가 성립한다.

등차중항, 등비중항, 조화중항 사이의 관계

세 양수 $a,\ b,\ c$에 대한 등차중항, 등비중항, 조화중항은 각각

$\frac{a+c}{2},\ \sqrt{ac},\ \frac{2ac}{a+c}$이고, 이것은 각각 양수 $a,\ c$의 산술평균, 기하평균, 조화평균과 같다.

이들 사이에는 항상 $\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac} \geq \frac{2ac}{a+c}$가 성립한다.

등비수열의 합

(1) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열의 제 n항까지의 합 S_n은

$$\begin{cases} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} & (r \neq 1) \\ na & (r=1) \end{cases}$$

[증명]

등비수열에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하여 보자.

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라고 하면

$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$ ……①

이다. ①의 양변에 r를 곱하면

$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$ ……②

이고, ①에서 ②를 같은 변끼리 빼면 다음과 같다.

$$\begin{array}{rl} S_n = & a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \\ -)\quad rS_n = & \quad\ \ ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n \\ \hline (1-r)S_n = & a \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - ar^n \end{array}$$

따라서 $r \neq 1$일 때에는 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$

이고, $r=1$일 때에는 ①에서

$S_n = \underbrace{a + a + a + \cdots + a}_{n\text{개}} = na$ 이다.

(2) 원리합계

① 연이율 r의 복리로 매년 초에 a원 씩 n년 간 적립할 때, n년 말의 원리합계 S_n은

$$S_n = a(1+r)^n + a(1+r)^{n-1} + \cdots + a(1+r)$$
$$= \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

② 연이율 r의 복리로 매년 말에 a원 씩 n년 간 적립할 때, n년 말의 원리합계 S_n은

$$S_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \cdots + a = \frac{a\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

일정한 비율로 증가, 감소하는 양

(1) 현재의 양이 A이고, 전년에 비해 매년 $r\%$씩 증가할 때, n년 후의 양은 $A\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

(2) 현재의 양이 A이고 전년에 비해 매년 $r\%$씩 감소할 때, n년 후의 양은 $A\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항 a_1부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$a_1 = S_1,\ a_n = S_n - S_{n-1}\ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

[참고] n에 대한 식 S_n으로부터 일반항 $a_n = f(n)$을 구할 때,

① $S_n = 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항부터 $a_n = f(n)$이다.

② $S_n \neq 0$이면 수열 $\{a_n\}$은 제2항부터 $a_n = f(n)$이다.

1. 수열 : 이 단원에서 추구하는 바는 2가지이다. 사고의 유연함과 규칙성.

2. 일반항 a_n의 의미 : n번째항

3. 등차수열의 일반항

$\Rightarrow$ $a_n = a + d(n-1)$

$= a_2 + d(n-2)$

$= a_k + d(n-k)$

4. 등차수열의 성질

① $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \cdots\cdots$

② a, x, b가 등차수열을 이룰 때,

$\Rightarrow$ $a = x - d,\ b = x + d$ 표현가능

$\Rightarrow$ $x = \dfrac{a+b}{2}$

③ p, q, x, r, s가 등차수열을 이룰 때,

$\Rightarrow$ $p = x - 2d,\ q = x - d,\ r = x + d,\ s = x + 2d$ 표현가능

④ p, q, r, s가 등차수열을 이룰 때,

=> $p = x - 3d, q = x - d, r = x + d, s = x + 3d$ 표현가능

(단,$x = \dfrac{q+r}{2} = \dfrac{p+s}{2}$일 때)

5. 등차수열의 합

$S_n = \dfrac{n\{2a + d(n-1)\}}{2} = \dfrac{n\{a + l\}}{2}$

6. S_n과 a_n의 관계

ⅰ) $S_0 \neq 0$

$a_n = S_n - S_{n-1}$(단, $n \geq 2$)

$a_1 = S_1$

ⅱ) $S_0 = 0$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

※ ⅰ)은 둘째 항부터 등차 혹은 등비수열을 이루는 경우이고, ⅱ)는 첫째 항부터 등차 혹은 등비수열을 이루는 경우이다.

7. 등비수열의 일반항

$\Rightarrow$ $a_n = a \cdot r^{n-1}$

$= a_2 \cdot r^{n-2}$

$= a_k \cdot r^{n-k}$

8. 등비수열의 성질

① $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = \cdots\cdots$

② a, x, b가 등비수열을 이룰 때,

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{x}{r},\ b = xr$ 표현가능

$\Rightarrow$ $x^2 = ab$

③ a, b, x, c, d가 등비수열을 이룰 때,

$\Rightarrow$ $a = \dfrac{x}{r^2},\ b = \dfrac{x}{r},\ c = xr, d = xr^2$ 표현가능

④ a, b, c, d가 등비수열을 이룰 때,

=> $a = \dfrac{x}{r^3},\ b = \dfrac{x}{r},\ c = xr, d = xr^3$ 표현가능

(단,$x = \pm\sqrt{ad} = \pm\sqrt{bc}$일 때)

9. 등비수열의 합

$S_n = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}$ (주로 $r > 1$)

$= \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ (주로 $r < 1$) $= na$ $(r = 1)$

수열 $\{a_n\}$의 일반항이 다음과 같을 때, 첫째항부터 제5항까지 차례대로 나열하여라.

151) [수1 C764번]

$a_n = 8n - 7$

다음은 등차수열을 나타낸 것이다. □ 안에 알맞은 수를 써 넣어라.

152) [수1 C769번]

$20,\ \square,\ 10,\ 5,\ \square,\ \cdots$

다음 등차수열의 일반항 a_n을 구하여라.

153) [수1 C770번]

첫째항이 15, 공차가 -3

154) [수1 C782번]

1과 101 사이에 19개의 수 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{19}$를 넣어

$$1,\ a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_{19},\ 101$$

이 이 순서대로 등차수열을 이루도록 할 때, 이 수열의 공차를 구하여라.

155) [수1 C784번]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 -2일 때, 등차수열 $\{2-3a_n\}$의 공차를 구하여라.

156) [수1 C785번]
등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 등차수열 $\{a_{2n}\}$의 공차가 8일 때, 등차수열 $\{a_{3n+1}\}$의 공차를 구하여라.

157) [수1 C799번]
-9 와 31 사이에 n 개의 수를 넣은 수열 $-9,\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ 31$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루고 그 합이 231 일 때, n 의 값과 공차 d 를 구하여라.

158) [수1 C802번]
등차수열 $\{a_n\}$ 에서 첫째항부터 제10 항까지의 합이 145, 제11 항부터 제20 항까지의 합이 445 이다. 이때 제21 항부터 제30 항까지의 합을 구하여라.

159) [수1 C803번]
제 5항이 8, 제 13항이 -16인 등차수열 $\{a_n\}$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, S_n의 최댓값을 구하여라.

160) [수1 C805번]
첫째항이 100 이고, 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제n 항까지의 합 S_n 은 $n=17$ 일 때, 최댓값을 갖는다. 이때 a_{10} 의 값은?

① 44 ② 46 ③ 48
④ 50 ⑤ 52

161) [수1 C809번]
첫째항부터 등차수열을 이루는 수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=-(n-2)^2+k$일 때, a_1+k의 값을 구하여라. (단, k는 상수)

162) [수1 C811번]
첫째항부터 제 n 항까지의 합 S_n 이 $S_n=n^2+2n$ 인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{99}$ 의 값을 구하여라.

163) [수1 C834번]
등비수열을 이루는 세 실수의 합이 7이고 곱이 8일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3
④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

164) [수1 C835번]
등비수열을 이루는 세 실수의 합이 13이고 곱이 27일 때, 세 수 중 가장 큰 수는?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

165) [수1 C838번]
공비가 실수인 등비수열 $\{a_n\}$에서 제3항이 32, 제6항이 4이고 제10항까지의 합을 S라 할 때, $[S]$의 값은?
(단, $[n]$은 n보다 크지 않은 최대의 정수)

① 255 ② 256 ③ 257
④ 511 ⑤ 512

다음 등비수열의 합을 구하여라.

166) [수1 C839번]
$1-2+4-8+\cdots+(-2)^{n-1}$

167) [수1 C840번]
$3+1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{243}$

168) [수1 C848번]

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면 $S_n = 2 \cdot 3^{n+1} + k$가 성립한다. 이때 수열 $\{a_n\}$이 첫째항부터 등비수열을 이루도록 하는 상수 k의 값을 구하여라.

169) [수1 C866번]
두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항의 합이 4이고 공차의 합이 2일 때,
$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{15})+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_{15})$의 값은?
① 120 ② 160 ③ 210
④ 270 ⑤ 330

170) [수1 C867번]
등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=50$, $a_{10}=23$일 때, $|a_1|+|a_2|+|a_3|+\cdots+|a_{30}|$의 값은?
① 196 ② 234 ③ 478
④ 576 ⑤ 689

171) [수1 C868번]
두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 할 때, $a_{10}+b_{10}=42$, $S_{10}+T_{10}=160$이다. 이때 a_1+b_1의 값은?
① -10 ② -8 ③ -6
④ -4 ⑤ -2

172) [수1 C896번]
첫째항이 2, 공비가 5인 등비수열의 첫째항부터 제 n 항까지의 합이 처음으로 10^8 이상이 될 때, 자연수 n의 값을 구하시오. (단, $\log 2=0.3$으로 계산한다.)

173) [수1 C906번]
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n = n^2 - 10n$$

일 때, $a_n < 0$을 만족시키는 자연수 n의 개수는?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

174) [수1 C907번]
첫째항이 6이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$\frac{a_8 - a_6}{S_8 - S_6} = 2$$

가 성립한다. d의 값은?

① -1 ② -2 ③ -3
④ -4 ⑤ -5

175) [수1 C908번]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1 = 1,\ a_2 = 3,$$
$$(S_{n+1} - S_{n-1})^2 = 4a_n a_{n+1} + 4\ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

일 때, a_{20}의 값은? (단, $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n < \cdots$ 이다.)

① 39 ② 43 ③ 47
④ 51 ⑤ 55

수열

(8) 등차수열과 등비수열

(9) 수열의 합

(10) 수학적 귀납법

$\sum$의 뜻과 기본 성질

(1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 기호 $\sum$를 사용하여 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

(2) $\sum$의 기본 성질

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k \pm \sum_{k=1}^{n}b_k$ (복부호 동순)

② $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

③ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

<참고>

(1) $\sum_{k=1}^{n}(pa_k \pm qb_k)=p\sum_{k=1}^{n}a_k \pm q\sum_{k=1}^{n}b_k$ (단, p, q는 상수, 복부호 동순)

(2) $\sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n}a_ib_j)=\sum_{j=1}^{n}\left\{a_i\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)\right\}$

주의해야 할 $\sum$의 계산

(1) $\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{l=1}^{n}a_l=\sum_{i=1}^{n}a_i=\cdots$

(2) $\sum_{k=1}^{n}a_kb_k \neq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$

(3) $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{b_k} \neq \frac{\sum_{k=1}^{n}a_k}{\sum_{k=1}^{n}b_k}$

(4) $\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2 \neq \left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2$

(5) $\sum_{k=1}^{n}n=n^2$

자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n}k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n}k^2=1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n}k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

참고) (1) $\sum_{k=1}^{n-1}=k=\frac{n(n-1)}{2}$ (2) $\sum_{k=1}^{n-1}k^2=\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n-1}k^3=\left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ **의 증명**

항등식 $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ 에 $k = 1, 2, 3, \cdots, n$ 을 차례로 대입하여 변끼리 더하면

$$2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1$$
$$\vdots$$
$$(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$$

이 n 개의 등식을 변끼리 더하면 다음과 같다.

$$(n+1)^3 - 1^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$3\sum_{k=1}^{n} k^2 = (n+1)^3 - 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - (n+1)$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

특수한 꼴의 수열의 합

식이 소거되는 합의 형태로 변형하여 계산을 간단히 한다.

(1) a_k가 분수식이고, 분모가 두 개 이상의 일차식의 곱으로 되어 있는 경우 : 부분분수 분해를 이용한다.

① $\frac{1}{k(k+a)} = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+a}\right)$

② $\frac{1}{(k+a)(k+b)} = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{k+a} - \frac{1}{k+b}\right)$

③ $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$

(2) a_k가 무리식의 형태로 되어 있는 경우 : 분모의 유리화를 이용한다.

① $\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

② $\frac{1}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k}} = \frac{1}{2}(\sqrt{k+2} - \sqrt{k})$

군수열

(1) 주어진 수열에서 몇 개의 항이 일정한 규칙에 따라 짝을 지어 이루어지는 수열을 군수열이라 한다.

(2) 군수열에 대한 문제는 일반적으로 다음과 같이 해결한다.

(ⅰ) 수열의 각 항이 갖는 규칙성을 파악하여 군을 나눈다.

(ⅱ) 각 군의 첫째항이 갖는 규칙성을 파악한다.

(ⅲ) 각 군의 항의 개수를 조사한다.

(ⅳ) 각 군의 규칙성을 파악한다.

참고) 분수로 나타내어진 수열의 경우에는 분모 또는 분자가 같은 것끼리 군으로 묶거나 분모, 분자의 합이 같은 것끼리 군으로 묶는다.

1. 합의 기호

$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = S_n$

※ k번째항인 a_k를 구하는 것이 중요하다.

ex1)

$\sum_{k=3}^{n} 2^k = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots + 2^n = \sum_{k=1}^{n-2} 2^{k+2} = \sum_{k=2}^{n-1} 2^{k+1}$

ex2)

$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - a_1$

ex3)

$\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

2. 성질

① $\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$

ex4) $\sum_{k=1}^{n} (k+1) = 2+3+4+\cdots+(n+1)$

$\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = (1+2+3+\cdots+n) + (1+1+1+\cdots+1)$

$\sum_{k=1}^{n} (k+1) = \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$

② $\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$ (단, c는 상수)

ex5) $\sum_{k=1}^{n} 2k = 2\sum_{k=1}^{n} k$

③ $\sum_{k=1}^{n} c = cn$ (단, c는 상수)

ex6) $\sum_{p=1}^{n} 2k = 2kn = 2k\sum_{p=1}^{n} 1$

3. 공식

(1) $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

(4) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

(5) $\frac{C}{AB} = \frac{C}{B-A}(\frac{1}{A} - \frac{1}{B})$

ex7)

(1) $\sum_{k=1}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n-1} k^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n-1} k^3 = \left\{\frac{n(n-1)}{2}\right\}^2$

(4) $1+3+5+\cdots+21$

$2k-1=21$이므로 $k=11$일 때까지의 합이다. 따라서

$\sum_{k=1}^{11} (2k-1) = 11^2$

(5) $\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k(k+2)} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{10}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2}\right)$

다음 수열의 합을 기호 $\sum$를 사용하여 나타내어라.

176) [수1 C920번]

$1+4+7+\cdots+28$

177) [수1 C921번]

$2+4+8+\cdots+256$

178) [수1 C928번]

$\sum_{k=1}^{n}(k-2)^2-\sum_{k=1}^{n}(k^2-4k)$

다음을 계산하여라.

179) [수1 C934번]

$\sum_{k=1}^{10}(k-1)(2k+1)$

180) [수1 C936번]

$\sum_{k=1}^{n-1}(4k+3)=52$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하여라.

181) [수1 C937번]
다음을 계산하여라.

(1) $\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^{k}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} 2\cdot 3^{k-1}$

(3) $\sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^{k}$

(4) $\sum_{k=1}^{n-1} 2\cdot 3^{k-1}$

다음 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구하여라.

182) [수1 C939번]
$1\cdot 2,\ 2\cdot 3,\ 3\cdot 4,\ 4\cdot 5,\ \cdots$

183) [수1 C940번]
$1^2,\ 3^2,\ 5^2,\ 7^2,\ \cdots$

184) [수1 C943번]

다음 수열의 첫째항부터 제100항까지의 합은?

$$1,\ 1+2,\ 1+2+4,\ 1+2+4+8,\ \cdots$$

① $2^{100}-101$ ② $2^{100}-100$ ③ $2^{101}-102$
④ $2^{101}-101$ ⑤ $2^{101}-100$

185) [수1 C948번]

$1\cdot 20+2\cdot 19+3\cdot 18+\cdots+20\cdot 1$ 의 값은??

① 1458 ② 1482 ③ 1500
④ 1540 ⑤ 1600

186) [수1 C949번]

수열의 합

$$9+99+999+\cdots+\underbrace{999\cdots9}_{10\text{개}}$$

의 값을 S라 할 때, $9S$의 값은?

① $10^{10}-100$ ② $10^{10}-10$ ③ $10^{10}-1$
④ $10^{11}-100$ ⑤ $10^{11}-10$

187) [수1 C950번]

등식 $\displaystyle\sum_{k=1}^{100}\frac{3^k-2^k}{4^k}=a+b\left(\frac{3}{4}\right)^{100}+c\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$을 만족시키는 정수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $a+b+c$의 값을 구하여라.

다음을 계산하여라.
188) [수1 C951번]
$$\sum_{k=2}^{10} \frac{2}{(k-1)k}$$

다음을 계산하여라.
189) [수1 C953번]
$$\frac{1}{1 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 5}+\frac{1}{5 \cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

다음을 계산하여라.
190) [수1 C955번]
$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$$

다음을 계산하여라.
191) [수1 C957번]
$$\frac{2}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$$

192) [수1 C958번]

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}$$

193) [수1 C959번]

수열의 합

$$\frac{1}{3^2-1}+\frac{1}{5^2-1}+\frac{1}{7^2-1}+\frac{1}{9^2-1}+\cdots+\frac{1}{25^2-1}$$

의 값이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값은?

(단, p, q는 서로소인 자연수이다.)

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

194) [수1 C960번]

다음 수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구하여라.

$$\frac{1}{2^2-1},\ \frac{1}{4^2-1},\ \frac{1}{6^2-1},\ \frac{1}{8^2-1},\ \cdots$$

195) [수1 C961번]

$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+\cdots+1999}$ 의 값은?

① $\frac{1999}{2000}$ ② $\frac{1998}{1999}$ ③ $\frac{1997}{1998}$
④ $\frac{1996}{1997}$ ⑤ $\frac{1999}{1000}$

196) [수1 C963번]

$S=1\cdot1-2\cdot2+3\cdot2^2-4\cdot2^3+\cdots-10\cdot2^9$ 이라 할 때, $9S$의 값은?

① $1-31\cdot2^{10}$ ② $1-30\cdot2^{10}$ ③ $1-29\cdot2^{10}$
④ $1+30\cdot2^{10}$ ⑤ $1+31\cdot2^{10}$

197) [수1 C965번]

수열의 합 $1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+30\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{29}$ 을 S라 할 때, $S=a-\left(\frac{1}{2}\right)^b$ 을 만족시키는 자연수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은?

① 20 ② 24 ③ 28
④ 32 ⑤ 36

198) [수1 C966번]

다음 수열의 합을 간단히 하여라.

$$1\cdot n+2\cdot(n-1)+3\cdot(n-2)+\cdots+(n-1)\cdot2+n\cdot1$$

199) [수1 C968번]

자연수 n에 대하여 등식

$$1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+3\cdot(2n-5)+\cdots+n\cdot1$$
$$=\frac{n(n+1)(an+b)}{6}$$

가 성립할 때, $a+2b$의 값은?(단, a, b는 자연수)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

200) [수1 C969번]
$\sum_{k=1}^{n} a_k = n^2 + n$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_{2k-1}$ 의 값은?

① 190 ② 200 ③ 210
④ 220 ⑤ 230

201) [수1 C971번]
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이

$$S_n = \sum_{k=1}^{n+1} (2k+1)^2 - \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$의 제8항을 구하시오.

202) [수1 C980번]
$m+n=13,\ mn=40$ 일 때, $\sum_{i=1}^{m} \left\{ \sum_{j=1}^{n} (i+j) \right\}$ 의 값은?

① 220 ② 240 ③ 260
④ 280 ⑤ 300

203) [수1 C996번]
등차수열 $\{a_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} = 3n^2 + n$$

을 만족시킬 때, a_8의 값은?

① 16 ② 19 ③ 22
④ 25 ⑤ 28

204) [수1 C997번]
수열 $\{a_n\}$이 $\sum_{k=1}^{n} ka_k = n(n+1)(n+2)$를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값을 구하여라.

수열

(8) 등차수열과 등비수열

(9) 수열의 합

(10) 수학적 귀납법

수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$ 을

$$\begin{cases} \text{첫째항 } a_1 \text{ 의 값} \\ \text{이웃하는 두 항 } a_n,\ a_{n+1}\,(n-1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \text{ 사이의 관계식} \end{cases}$$

으로 정의하는 것을 그 수열의 귀납적 정의라 한다.

기본적인 점화식

수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 일때

(1) $a_{n+1}-a_n=d$ (일정)

⇨ 공차가 d 인 등차수열

(2) $a_{n+1}\div a_n=r$ (일정)

⇨ 공비가 r 인 등비수열

(3) $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$ 또는 $a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$

⇨ 등차수열

(4) ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$ 또는 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$

⇨ 등비수열

(5) $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}}$ 또는 $\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a_{n+2}}-\dfrac{1}{a_{n+1}}$

⇨ 조화수열

조화수열의 다른 표현

(1) $a_{n+1}=\dfrac{2a_na_{n+2}}{a_n+a_{n+2}}$ 꼴의 점화식의 양변에 각각 역수를 취하면

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2a_na_{n+2}},\quad \frac{2}{a_{n+1}}=\frac{a_n+a_{n+2}}{a_na_{n+2}}$$

$$\therefore\ \frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}$$

(2) $2a_na_{n+2}=a_{n+1}a_{n+2}+a_na_{n+1}$ 꼴의 점화식의 양변을 각각 $a_na_{n+1}a_{n+2}$ 로 나누면

$$\frac{2}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+2}}$$

수학적 귀납법

자연수 n에 대한 식 또는 명제 $p(n)$이 임의의 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하기 위해서는 다음 (i), (ii)를 보이면 된다.

(i) $n=1$ 일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의해 주어진 식 또는 명제 $p(n)$이 자연수 n에 대해 성립한다.

[참고] 명제 $p(n)$이 $n \geq m$ (m은 자연수)인 임의의 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하기 위해서는 다음 (i), (ii)를 보이면 된다.

(i) $n=m$ 일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k \geq m)$ 일 때 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$ 일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

수학적 귀납법의 사용

(1) 유한 개의 예를 사용하여 일반적인 성질을 증명할 수는 없지만, 수학적 귀납법을 사용하면 유한개로부터 발전시켜 무한개에 대하여 성립하는 일반적인 성질을 증명할 수 있다.

(2)수학적 귀납법은 자연수와 관계없는 증명에서는 사용할 수 없다.

1. 귀납적 정의 : 첫째항. 앞항과 뒷항의 관계를 통하여 수열을 정의하는 방법

① 일반항과 귀납적 정의를 자유롭게 바꿀 줄 아는 것이 중요하다.

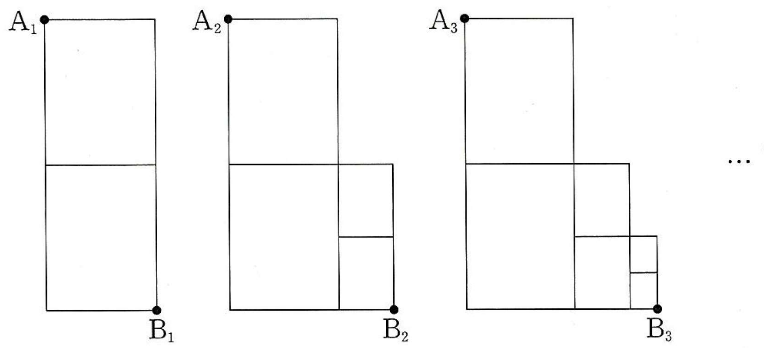
② 발견적 추론이 중요하다. 직접 대입해봐야 한다.

ex1) 수열 $\{a_n\}$이 $a_1 = 1$모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} = \frac{2n}{n+1}a_n$을 만족시킬 때, a_4의 값은?

sol)

③ 의미를 파악하여 앞항과 뒷항의 관계식을 만드는 것이 중요하다.

ex2) 그림과 같이 직사각형에서 세로를 각각 이등분하는 점 2개를 연결하는 선분을 그린 그림을 [그림 1]이라 하자. [그림 1]을 $\frac{1}{2}$만큼 축소시킨 도형을 [그림 1]의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 하나의 꼭짓점으로 하여 오른쪽에 이어 붙인 그림을 [그림2]라 하자. 이와 같이 3 이상의 자연수 k에 대하여 [그림1]을 $\frac{1}{2^{k-1}}$만큼 축소시킨 도형을 [그림 $k-1$]의 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 하나의 꼭짓점으로 하여 오른쪽에 이어 붙인 그림을 [그림k]라 하자.
자연수 n에 대하여 [그림 n]에서 왼쪽 맨 위 꼭짓점을 $\mathrm{A_n}$, 오른쪽 맨 아래 꼭짓점을 $\mathrm{B_n}$이라 할 때, 점 $\mathrm{A_n}$에서 점 $\mathrm{B_n}$까지 선을 따라 최단거리로 가는 경로의 수를 a_n이라 하자. a_{n+1}, a_n과의 관계식을 구하여라.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

sol) 그림1과 그림2의 가짓수의 관계식은 $a_2 = 2a_1 + 1$
그림2과 그림3의 가짓수의 관계식은 $a_3 = 2a_2 + 1$
따라서 가짓수의 관계식은
$a_{n+1} = 2a_n + 1\,(n = 1, 2, 3 \cdots)$, $a_1 = 3$

2. 수학적 귀납법 : 대우법, 귀류법과 같은 하나의 증명법. 단, 자연수 n에 대하여 성립함을 밝히는 증명법

ⅰ) $n=1$(초항)일 때, 성립을 밝힌다.
ⅱ) $n=k$일 때, 성립을 가정한다.
$n=k+1$일 때, 성립을 밝힌다.
ⅰ)ⅱ)에 의해 모든 자연수 n에 대하여 성립한다.

205) [수1 C1017번]
수열 $\{a_n\}$이
$a_1=3$,
$a_{n+1}=9a_n$을7로 나누었을 때의 나머지 $(n=1, 2, 3, \cdots)$
로 정의될 때, $a_{98}+a_{99}+a_{100}$의 값은?
① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

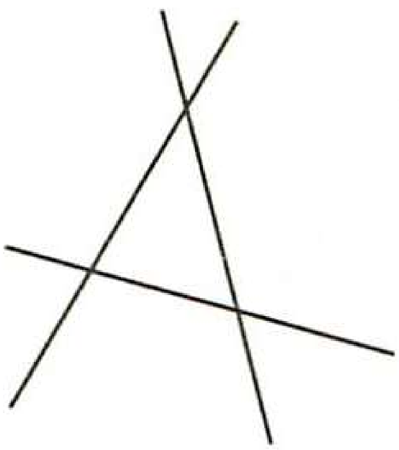
206) [수1 C1019번]
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하면
$a_1=-1,\ S_n=2a_n+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
이 성립한다. 이때 a_{99}의 값은?
① -2^{100} ② $1-2^{100}$ ③ -2^{99}
④ $1-2^{99}$ ⑤ -2^{98}

207) [수1 C1020번]
수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항가지의 합을 S_n이라 하면
$S_1=1,\ S_{n+1}=2S_n+3\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$
이 성립한다. 이때 a_9의 값은?
① 256 ② 512 ③ 768
④ 1024 ⑤ 1536

208) [수1 C1021번]
그릇 A에는 10% 소금물 $300\mathrm{g}$, 그릇 B에는 7% 소금물 $300\mathrm{g}$이 들어 있다. 동시에 $100\mathrm{g}$씩 따라 내어 서로 교환해 섞는 시행을 n회 반복한 후, 그릇 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$에 들어 있는 소금물의 농도를 각각 $a_n\%$, $b_n\%$라고 할 때, 다음 물음에 하여라.
(1) $a_1,\ b_1$의 값을 구하여라.
(2) $a_{n+1},\ b_{n+1}$을 각각 a_n과 b_n으로 나타내어라.
(3) a_n+b_n의 값을 구하여라.

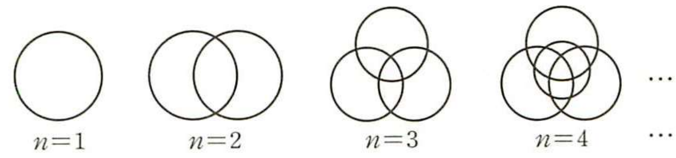
209) [수1 C1022번]
수직선 위의 점 P_{n+2}는 점 P_n, P_{n+1}을 연결하는 선분 P_nP_{n+1}을 $3:1$로 외분하는 점으로 정의한다. P_{n+2}의 좌표를 x_{n+2}를 P_{n+1}의 좌표를 x_{n+1}, P_n의 좌표를 x_n이라 하자. x_{n+2}, x_{n+1}, x_n의 관계식을 나타내어라.

210) [수1 C1023번]
평면 위에 어느 두 직선도 평행하지 않고 어느 세 직선도 한 점에서 만나지 않도록 n개의 직선을 그을 때, 이 직선들에 의하여 분할된 평면의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어 오른쪽 그림에서 $a_3 = 7$이다. 이때 a_8의 값을 구하여라.



211) [수1 C1024번]
평면 위에 다음 조건을 모두 만족시키는 n개의 원이 있다.

(가) 임의의 두 원은 항상 두 점에서 만난다.
(나) 세 개 이상의 원이 동시에 지나는 점은 없다.



n개의 원의 교점의 개수를 a_n이라 할 때, a_8의 값을 구하여라.

212) [수1 C1026번]
모든 자연수n에 대하여 등식

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하여라.

213) [수1 C1030번]
$h>0$일 때, $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 부등식

$$(1+h)^n > 1+nh$$

가 성립함을 증명하여라.

214) [수1 C1032번]
다음은 $n\ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 $2^n > n^2$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

[증 명]

(i) $n=5$일 때,

(좌변)$=2^5=32$, (우변)$=5^2=25$

따라서 주어진 부등식이 성립한다.

(ii) $n=k\ (k\ge 5)$일 때, 주어진 부등식이 성립한다고 가정하면

$$2^k > k^2$$

위의 식의 양변에 2를 곱하면

$$2^{k+1} > 2k^2$$

그런데 $k\ge 5$이면

$$k^2-2k-1=\boxed{\text{(가)}}-2>0$$

이므로 $k^2>2k+1$

$$\therefore\ 2^{k+1} > 2k^2 = k^2+k^2 > \boxed{\text{(나)}}$$

따라서 $n=k+1$일 때도 주어진 부등식이 성립한다.

(i), (ii)에서 $n\ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은?

① $(k+1)^2$, k^2+2k
② $(k+1)^2$, $(k+1)^2$
③ $(k-1)^2$, k^2+2k
④ $(k-1)^2$, $(k+1)^2$
⑤ $(2k+1)^2$, k^2+2k

215) [수1 C1033번]
다음은 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2-\frac{1}{n} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=2$일 때,

(좌변)$=1+\frac{1}{2^2}=\frac{5}{4}$, (우변)$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

따라서 부등식 ㉠이 성립한다.
(ii) $n=k\ (k \geq 2)$일 때, 부등식 ㉠이 성립한다고 가정하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

위의 식의 양변에 $\frac{1}{(k+1)^2}$을 더하면

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$<2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}$$

이때

$$\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}-\boxed{\text{(가)}}$$
$$=-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{1}{k+1}$$
$$=-\frac{1}{k(k+1)^2}<\boxed{\text{(나)}}$$

이므로 $2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}<\boxed{\text{(가)}}$

$$\therefore 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}<\boxed{\text{(가)}}$$

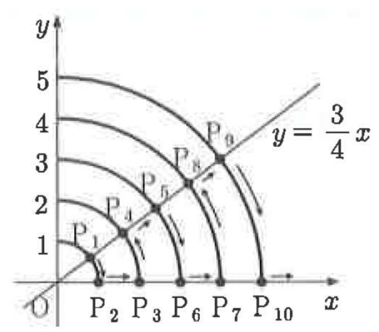
따라서 $n=k+1$일 때도 부등식 ㉠이 성립한다.
(i), (ii)에서 $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여 부등식 ㉠이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 차례대로 나열한 것은?

① $1-\frac{1}{k+1}$, 0　② $1-\frac{1}{k+1}$, 1
③ $2-\frac{1}{k+1}$, 0　④ $2-\frac{1}{k+1}$, 1
⑤ $2-\frac{2}{k+1}$, 0

216) [수1 C1034번]
수열 $\{a_n\}$은 $a_1=7$이고, 다음 조건을 만족시킨다.
(가) $a_{n+2}=a_n-4\ (n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$이다.
$\sum_{k=1}^{50} a_k=258$일 때, a_2의 값을 구하시오.

217) [수1 C1035번]
오른쪽 그림은 좌표평면에서 원점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1부터 1씩 증가하는 원들이 두 직선 $y=\frac{3}{4}x$, $y=0$과 각각 만나는 점들의 일부를 P_1부터 시작하여 화살표 방향을 따라 P_1, P_2, P_3, $\cdots$ 으로 나타낸 것이다. 점 P_{25}의 x좌표는?



① $\frac{52}{5}$　② 11　③ $\frac{56}{5}$
④ 12　⑤ $\frac{64}{5}$

218) [수1 C1046번]
수열 $\{a_n\}$이
$$a_1 = 1,\ \sqrt{n+1}\,a_{n+1} = \sqrt{n}\,a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
과 같이 정의될 때, a_{49}를 구하시오.

219) [수1 C1047번]
다음과 같이 정의되는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

$$\boxed{a_1 = 4,\ a_n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)a_{n-1}\ (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)}$$

이때 $a_k = \dfrac{21}{10}$을 만족시키는 자연수 k의 값을 구하시오.

220) [수1 C1048번]
수열 $\{a_n\}$이
$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = (n+1)a_n\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
과 같이 정의될 때, $a_{1+}a_2+a_{3+}\cdots+a_{2018}$을 120으로 나누었을 때의 나머지를 구하시오.

221) [수1 C1051번]
수열 $\{a_n\}$이
$$a_n + a_{n+1} = n+1\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ \cdots)$$
과 같이 정의될 때, $\sum_{k=1}^{50} a_k$의 값은?

① 350 ② 425 ③ 500
④ 575 ⑤ 650

222) [수1 C1052번]
수열 $\{a_n\}$이
$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_n+a_{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
과 같이 정의될 때, $\sum_{k=1}^{8}\frac{a_k}{a_{k+1}a_{k+2}}$의 값을 구하시오.

223) [수1 C1056번]
수열 $\{a_n\}$이
$$a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=10\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
을 만족시킨다. $a_7=3,\ a_{12}=5$일 때, $a_{101}a_{106}$의 값을 구하시오.

224) [수1 C1058번]
오른쪽과 같이 길이가 81인 끈을 삼등분하여 가운데 부분은 버리고, 다시 남아 있는 2개의 끈도 같은 방법으로 삼등분하여 가운데 부분을 버린다. 이와 같이 끈을 삼등분하여 가운데 부분을 버리는 시행을 n회 반복한 후 남은 끈의 길이의 합을 a_n이라 할 때, a_8을 구하시오.