심화서

해설편

REAL

고1

수학(상)

REAL

수(상)

1) 18

$x\neq 0$이므로 $x^2-3x+1=0$의 양변을 x로 나누면

$x-3+\frac{1}{x}=0$ $\quad\therefore\ x+\frac{1}{x}=3$

$\therefore\ x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=3^3-3\cdot 3=18$

2) ①

$(3a^2+2a+1)^3(a-1)$의 전개식에서 a^5의 계수는

다음과 같이 경우를 나누어 구할 수 있다.

(ⅰ) $(3a^2+2a+1)^3$의 전개식에서 a^4의 계수와 $a-1$에서 a의 계수를 곱하는 경우

$(3a^2+2a+1)^3=(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)$

의 전개식에서 a^4의 계수는

$3\times\{(a^2$의 계수$)\times(a^2$의 계수$)\times($상수항$)\}$

$=3\times(3\times 3\times 1)=27$,

$3\times\{(a^2$의 계수$)\times(a$의 계수$)\times(a$의 계수$)\}$

$=3\times(3\times 2\times 2)=36$

의 합이므로 $27+36=63$ ……㉠

$a-1$에서 a의 계수는 1 ……㉡

㉠, ㉡에서 a^5의 계수는 $63\times 1=63$

(ⅱ) $(3a^2+2a+1)^3$의 전개식에서 a^5의 계수와 $a-1$에서 상수항을 곱하는 경우

$(3a^2+2a+1)^3=(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)(3a^2+2a+1)$의 전개식에서 a^5의 계수는

$3\times\{(a^2$의 계수$)\times(a^2$의 계수$)\times(a$의 계수$)\}$

$=3\times(3\times 3\times 2)=54$ ……㉢

$a-1$에서 상수항은 -1 ……㉣

㉢, ㉣에서 a^5의 계수는 $54\times(-1)=-54$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 다항식의 전개식에서

a^5의 계수는 $63+(-54)=9$이다.

3) 108

$(x^3+2x^2+3y)^3+(x^3+2x^2-3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수는

$(x^3+2x^2+3y^2)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수와

$(x^3+2x^2-3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수의

합과 같다.

(ⅰ) $(x^3+2x^2+3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수

$3\times\{(x^2$의 계수$)\times(y$의 계수$)\times(y$의 계수$)\}$

$=3\times(2\times 3\times 3)=54$

(ⅱ) $(x^3+2x^2-3y)^3$의 전개식에서 x^2y^2의 계수

$3\times\{(x^2$의 계수$)\times(y$의 계수$)\times(y$의 계수$)\}$

$=3\times\{2\times(-3)\times(-3)\}=54$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 주어진 다항식의 전개식에서

x^2y^2의 계수는 $54+54=108$이다.

〈다른풀이〉

$x^3+2x^2=A,\ 3y=B$라 하면

$(x^3+2x^2+3y)^3+(x^3+2x^2-3y)^3$

$=(A+B)^3+(A-B)^3$

$=(A^3+3A^2B+3AB^2+B^3)+(A^3-3A^2B+3AB^2-B^3)$

$=2A^3+6AB^2$

$=2(x^3+2x^2)^3+6(x^3+2x^2)(3y)^2$

이므로 x^2y^2의 계수는 $6(x^3+2x^2)(3y)^2$에서

$6\times 2\times 3^2=108$이다.

4) 48

$(x+1)^3+(x-1)^2=x^3+4x^2+x+2$이므로

$\{(x+1)^3+(x-1)^2\}^4=(x^3+4x^2+x+2)^4$의 전개식에서

x의 계수는

$4\times\{(x$의 계수$)\times($상수항$)\times($상수항$)\times($상수항$)\}$

…… [Tip]

$=4\times(1\times 2\times 2\times 2)=32$

x^{11}의 계수는

$4\times\{(x^3$의 계수$)\times(x^3$의 계수$)\times(x^3$의 계수$)\times(x^2$의 계수$)\}$

$=4\times(1\times 1\times 1\times 4)=16$

따라서 구하는 값은 $32+16=48$이다.

[Tip]
$(x^3+4x^2+x+2)^4$ 은 x^3+4x^2+x+2 를 4 번 곱한 것이다. 따라서
$(x^3+4x^2+x+2)^4$
$=(x^3+4x^2+x+2)(x^3+4x^2+x+2)(x^3+4x^2+x+2)$
$\times(x^3+4x^2+x+2)$
의 전개식에서 x 의 계수는
(x의 계수)×(상수항)×(상수항)×(상수항)
$\leftarrow x\times2\times2\times2$
+(상수항)×(x의 계수)×(상수항)×(상수항)
$\leftarrow 2\times x\times2\times2$
+(상수항)×(상수항)×(x의 계수)×(상수항)
$\leftarrow 2\times2\times x\times2$
+(상수항)×(상수항)×(상수항)×(x의 계수)
$\leftarrow 2\times2\times2\times x$
=4×{(x의 계수)×(상수항)×(상수항)×(상수항)}
이다.
이와 같은 방법으로 x^{11}의 계수도 구한다.

5) ②

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)$
$=\left(ab+\frac{a}{c}+1+\frac{1}{bc}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)$
$=abc+b+a+\frac{1}{c}+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{abc}$
$=abc+\frac{1}{abc}+\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)$
$=abc+\frac{1}{abc}+1+2+\frac{5}{6}$
$=abc+\frac{1}{abc}+\frac{23}{6}$
이때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)=1\times2\times\frac{5}{6}=\frac{5}{3}$ 이므로
$abc+\frac{1}{abc}+\frac{23}{6}=\frac{5}{3}$
$\therefore\ abc+\frac{1}{abc}=-\frac{13}{6}$

<다른풀이>
$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{c}\right)\left(c+\frac{1}{a}\right)$
$=\frac{(ab+1)(bc+1)(ca+1)}{abc}$
$=\frac{a^2b^2c^2+abc(a+b+c)+(ab+bc+ca)+1}{abc}$
$=abc+(a+b+c)+\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{abc}$
$=abc+\frac{1}{abc}+\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{c}\right)+\left(c+\frac{1}{a}\right)$
이후 풀이는 본풀이와 같다.

6) 112

$(a^3+b^3)(a^3-b^3)=a^6-b^6$
$=(a^2)^3-(b^2)^3$
$=(a^2-b^2)^3+3a^2b^2(a^2-b^2)$ ……㉠
이때, $a^2=2\sqrt{2}+2,\ b^2=2\sqrt{2}-2$ 이므로
$a^2-b^2=(2\sqrt{2}+2)-(2\sqrt{2}-2)=4$
$a^2b^2=(2\sqrt{2}+2)(2\sqrt{2}-2)=4$
$\therefore\ (a^3+b^3)(a^3-b^3)=4^3+3\times4\times4$ (∵ ㉠)
$=112$

7) ④

$a^4-\sqrt{5}a^2-1=0$ 의 양변을 a^2 으로 나누면
$a^2-\sqrt{5}-\frac{1}{a^2}=0\ \therefore\ a^2-\frac{1}{a^2}=\sqrt{5}$ ……㉠
$\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^2+4=(\sqrt{5})^2+4=9$
$\therefore\ a^2+\frac{1}{a^2}=3\ (\because\ a^2>0)$
$\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2=1$
$\therefore\ a-\frac{1}{a}=1\ (\because\ a>1)$
$a^6-\frac{1}{a^6}=\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)^3+3\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)$
$=(\sqrt{5})^3+3\times\sqrt{5}=8\sqrt{5}$ (∵ ㉠)
$\therefore\ a^6+2a^2-3a+\frac{3}{a}+\frac{2}{a^2}-\frac{1}{a^6}$
$=\left(a^6-\frac{1}{a^6}\right)+2\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-3\left(a-\frac{1}{a}\right)$
$=8\sqrt{5}+2\times3-3\times1$
$=3+8\sqrt{5}$

8) ④

$x+y=1,\ x^2+y^2=3$ 이므로

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서

$3=1^2-2xy \qquad \therefore\ xy=-1$

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=1^3-3\times(-1)\times1=4$

$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$

$=3^2-2\times(-1)^2=7$

$(x^3+y^3)(x^4+y^4)=x^7+x^3y^4+x^4y^3+y^7$

$=x^7+y^7+x^3y^3(x+y)$

$\therefore\ x^7+y^7=(x^3+y^3)(x^4+y^4)-x^3y^3(x+y)$

$=4\times7-(-1)^3\times1=29$

9) ②

$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0$ 에서 $\frac{yz-zx-xy}{xyz}=0$ 이므로

$-xy+yz-zx=0$ 이다.

한편, $x^2+y^2+z^2=4$ 이므로

$(x-y-z)^2=x^2+y^2+z^2+2(-xy+yz-zx)$

$=4+2\times0=4$

$\therefore\ (x-y-z)^{10}=\{(x-y-z)^2\}^5=4^5=2^{10}$

10) (1) 22 (2) 50

(1) $x+y+z=4,\ x^2+y^2+z^2=10$ 이므로

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$ 에서

$10=4^2-2(xy+yz+zx)$

$xy+yz+zx=3$

$\therefore\ x^3+y^3+z^3$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+3xyz$

$=4\times(10-3)+3\times(-2)$ ($\because\ xyz=-2$)

$=22$

(2) $(xy+yz+zx)^2$

$=(xy)^2+(yz)^2+(zx)^2+2(xy^2z+yz^2x+zx^2y)$

$=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)$

(1)에서 $xy+yz+zx=3$ 이므로

$3^2=x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2\times(-2)\times4$

$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2=25$

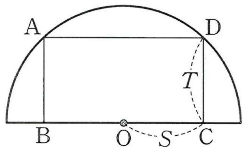
$\therefore\ x^4+y^4+z^4=(x^2)^2+(y^2)^2+(z^2)^2$

$=(x^2+y^2+z^2)-2(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$

$=10^2-2\times25=50$

11) ⑤

다음과 같이 $\overline{OC}=S,\ \overline{CD}=T$ 라 하면



조건 (가)의 $\overline{OC}+\overline{CD}=x+y+3$에서

$S+T=x+y+3$ ……㉠

조건 (나)의 $\overline{DA}+\overline{AB}+\overline{BO}=3x+y+5$에서

$3S+T=3x+y+5$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $S=x+1,\ T=y+2$

$\therefore$ (직사각형 ABCD의 넓이)

$=\overline{BC}\times\overline{CD}=2S\times T=2(x+1)(y+2)$

12) ④

직사각형 OCDE의 대각선의 길이는 부채꼴의 반지름의 길이와 같으므로 $\overline{CE}=\overline{OD}=3\sqrt{3}$

이때, $\overline{OC}=x,\ \overline{OE}=y\ (x>0,\ y>0)$라 하면

직각삼각형 OCE에서 $\overline{OC}^2+\overline{OE}^2=\overline{CE}^2$이므로

$x^2+y^2=27$ ……㉠

직사각형 OCDE의 넓이는 11이므로

$\overline{OC}\times\overline{OE}=11 \qquad \therefore\ xy=11$ ……㉡

㉠, ㉡에서

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=27+2\times11=49$

$\therefore\ x+y=7$ ($\because\ x>0,\ y>0$)

따라서 A→C→E→B를 잇는 최단거리는

$\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{EB}=(3\sqrt{3}-x)+3\sqrt{3}+(3\sqrt{3}-y)$

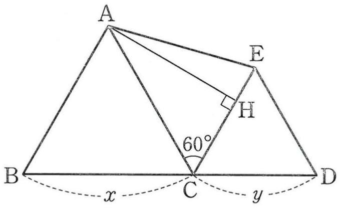
$=9\sqrt{3}-(x+y)$

$=9\sqrt{3}-7$

13) ④

$\overline{BC}=x,\ \overline{CD}=y\ (x>0,\ y>0)$라 하면 $\overline{BC}\times\overline{CD}=2$에서

$xy=2$ ……㉠



이때, 점 A에서 선분 CE에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\mathrm{AH}}=\frac{\sqrt{3}}{2}x$ 이므로

(사각형 ABDE의 넓이)

=(삼각형 ABC의 넓이)+(삼각형 ACE의 넓이)

+(삼각형 CDE의 넓이)

$=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{1}{2}\times y\times\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{4}y^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$x^2+y^2+xy=6,\ (x+y)^2-xy=6,\ (x+y)^2=8$ (∵ ㉠)

$\therefore\ \overline{\mathrm{BD}}=x+y=2\sqrt{2}$ (∵ $x>0,\ y>0$)

14) 16

주어진 직육면체의 부피는

$(a+b)^2(a+2b)=(a^2+2ab+b^2)(a+2b)$

$=a^3+4a^2b+5ab^2+2b^3$

이므로 12개로 나누어진 직육면체 중에서

부피가 a^3인 직육면체는 1개,

부피가 a^2b인 직육면체는 4개,

부피가 ab^2인 직육면체는 5개,

부피가 b^3인 직육면체는 2개이다.

따라서 $ab^2=150=6\times5^2$에서

두 자연수 $a,\ b$는 서로소이므로 $a=6,\ b=5$

$\therefore\ a+2b=6+2\times5=16$

15) ①

주어진 세 식을 변끼리 더하면

$3a+3b+3c=3ab+3bc+3ca$

$\therefore\ ab+bc+ca=a+b+c=3$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$

$=3^2-2\cdot3=3$

16) 3

17) 66

18) 112

$\{(x-2)^4+6(x-2)^3+12(x-2)^2\}^3$

$=\left[(x-2)^2\{(x-2)^2+6(x-2)+12\}\right]^3$

$=(x-2)^6\{(x-2)^2+6(x-2)+12\}^3$

$=(x-2)^6(x^2+2x+4)^3$

$=(x-2)^3\{(x-2)(x^2+2x+4)\}^3$

$=(x-2)^3(x^3-8)^3$

이므로 $m=3,\ n=8$이다.

$(x-2)^3(x^3-8)^3$

$=(x^3-6x^2+12x-8)(x^9-24x^6+192x^3-512)$

에서 x^{3m}, 즉 x^9의 계수는

(x^3의 계수)×(x^6의 계수)+(상수항)×(x^9의 계수)이므로

$1\times(-24)+(-8)\times1=-32$이다.

또한 x^n, 즉 x^8의 계수는

(x^2의 계수)×(x^6의 계수)이므로

$(-6)\times(-24)=144$이다.

따라서 구하는 값은 $-32+144=112$이다.

19) 36

조건 (나)에서

$x^2+4y^2+z^2-2xy+2yz+zx=0$

$\frac{1}{2}\{(x-2y)^2+(2y+z)^2+(-z-x)^2\}=0$

이므로 $x=2y=-z$ 이다.

따라서 조건 (가)에 의하여

$x=2y=-z=4$이므로

$x=4,\ y=2,\ z=-4$이다.

$\therefore\ x^2+y^2+z^2=4^2+2^2+(-4)^2=36$

20) 484

$(ac-bd)^3-(bc-ad)^3$
$=\{(ac-bd)-(bc-ad)\}^3$
$\quad+3(ac-bd)(bc-ad)\{(ac-bd)-(bc-ad)\}$
$=\{a(c+d)-b(c+d)\}^3$
$\quad+3(abc^2-a^2cd-b^2cd+abd^2)\{a(c+d)-b(c+d)\}$
$=\{(a-b)(c+d)\}^3$
$\quad+3\{ab(c^2+d^2)-(a^2+b^2)cd\}\{(a-b)(c+d)\}$ ······㉠
한편,
$a^2+b^2=(a-b)^2+2ab=4^2+2\times(-1)=14$,
$c^2+d^2=(c+d)^2-2cd=1^2-2\times(-3)=7$
이므로 ㉠에서
$(ac-bd)^3-(bc-ad)^3$
$=(4\times1)^3+3\times\{(-1)\times7-14\times(-3)\}\times(4\times1)$
$=484$

21) 18

주어진 두 식의 양변을 각각 더하면
$\left(a+\frac{1}{b}\right)+\left(b+\frac{1}{a}\right)=6$에서 $a+b+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=6$
$\therefore\ a+b+\frac{a+b}{ab}=6$ ······㉠
주어진 두 식의 양변을 각각 곱하면
$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{1}{a}\right)=4$에서 $ab+\frac{1}{ab}+2=4$이므로
$ab+\frac{1}{ab}=2$ ······㉡
이때, $ab=t$ 라 하고 ㉡의 양변에 t를 곱하면
$t^2-2t+1=0 \qquad \therefore\ t=1$, 즉 $ab=1$
이를 ㉠에 대입하면 $a+b=3$
$\therefore\ a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)=3^3-3\times1\times3=18$

22) ③

$f(x,\ y,\ z)=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$\qquad\qquad\quad=\frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}$
이때 $f(a,\ b,\ c)=1$이므로
$\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}=1$
$\therefore\ f(b+c-a,\ c+a-b,\ a+b-c)$
$=\frac{1}{2}(a+b+c)\{4(b-a)^2+4(c-b)^2+4(a-c)^2\}$
$=4\cdot\frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$
$=4\cdot1$
$=4$

23) 1

$99^{100}=(98+1)^{100}$
$(x+1)^{100}$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
$(x+1)^{100}=xQ(x)+R$ ······㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $R=1$
㉠의 양변에 $x=98$을 대입하면 $99^9=98Q(98)+1$
따라서 99^{100}을 98로 나누었을 대의 나머지는 1이다.

24) (1) -1 (2) 74

(1) $(x-1)^9$을 x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
$(x-1)^9=xQ(x)+R$ ······㉠
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $R=-1$
따라서 구하는 나머지는 -1이다.
(2) ㉠의 양변에 $x=75$를 대입하면
$74^9=75Q(75)-1$
$\quad=75\{Q(75)-1\}+75-1$
$\quad=75\{Q(75)-1\}+74$
따라서 구하는 나머지는 74이다.

25) ⑤

$8x^{277}$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R라 하면
$8x^{277}=(x+1)Q(x)+R$ ······㉠
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면 $R=-8$
㉠의 양변에 $x=16$을 대입하면
$8\cdot16^{277}=17Q(16)-8$

$=17\{Q(16)-1\}+17-8$

$\therefore\ 2^{1111}=17\{Q(16)-1\}+9$

따라서 2^{1111}을 17로 나누었을 때의 나머지는 9이다.

26) -12

-1	1	1	1	4
		-1	0	-1
-1	1	0	1	3
		-1	1	
-1	1	-1	2	
		-1		
	1	-2		

위의 조립제법에서

$x^3+x^2+x+4=(x+1)(x^2+1)+3$

$=(x+1)\{(x+1)(x-1)+2\}+3$

$=(x+1)\{(x+1)^2-2(x+1)+2\}+3$

$=(x+1)^3-2(x+1)^2+2(x+1)+3$

$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=2,\ d=3$

$\therefore\ abcd=-12$

<다른풀이>

$a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$

$=a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+c(x+1)+d$

$=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$

이므로

$a=1,\ 3a+b=1,\ 3a+2b+c=1,\ a+b+c+d=4$

$\therefore\ a=1,\ b=-2,\ c=2,\ d=3$

27) ②

$(3x^2-x-1)^5=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{10}x^{10}$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에

$x=\dfrac{1}{3}$을 대입하면

$-1=a_0+\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_2}{3^2}+\cdots+\dfrac{a_9}{3^9}+\dfrac{a_{10}}{3^{10}}$ ……㉠

$x=-\dfrac{1}{3}$을 대입하면

$-\dfrac{1}{3^5}=a_0-\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_2}{3^2}-\cdots-\dfrac{a_9}{3^9}+\dfrac{a_{10}}{3^{10}}$ ……㉡

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$\dfrac{-3^5+1}{3^5}=2\left(\dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_3}{3^3}+\dfrac{a_5}{3^5}+\cdots+\dfrac{a_9}{3^9}\right)$

$\therefore\ \dfrac{a_1}{3}+\dfrac{a_3}{3^3}+\dfrac{a_5}{3^5}+\cdots+\dfrac{a_9}{3^9}=\dfrac{1-3^5}{2\times3^5}$

28) ①

x에 대한 항등식

$(x^3+x^2-2x)^6=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{18}x^{18}$에서 좌변은

$\{x(x^2+x-2)\}^6=x^6(x^2+x-2)^6$이므로

이 전개식에서 x에 대한 5차 이하의 항의 계수와 상수항은 모두 0이다.

따라서 $a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=0$이므로

$(x^3+x^2-2x)^6=a_6x^6+a_7x^7+a_8x^8+\cdots+a_{18}x^{18}$ ……㉠

또한 $x^6(x^2+x-2)^6$의 전개식에서 x^6의 계수는

$(x^2+x-2)^6$의 전개식에서 상수항과 같으므로

$a_6=(-2)^6=64$

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{18}$ ……㉡

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$2^6=a_6-a_7+a_8-\cdots+a_{18}$ ……㉢

㉡과 ㉢을 변끼리 더하면

$2^6=2(a_6+a_8+a_{10}+\cdots+a_{18})$이므로

$a_6+a_8+a_{10}+\cdots+a_{18}=32$

$\therefore\ a_5+a_8+a_{10}+a_{12}+\cdots+a_{18}$

$=a_5+(a_6+a_8+a_{10}+\cdots+a_{18})-a_6$

$=0+32-64$

$=-32$

29) ⑤

$\left(\dfrac{x}{2}+1\right)^8=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$ ……㉠

이 등식은 x에 대한 항등식이다.

ㄱ. ㉠의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$0=a_0-2a_1+4a_2-\cdots+256a_8$ (참) ……㉡

ㄴ. ㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$256=a_0+2a_1+4a_2+\cdots+256a_8$ ……㉢

㉡과 ㉢을 변끼리 더하면

$256=2(a_0+4a_2+16a_4+64a_6+256a_8)$

$a_0+4a_2+16a_4+64a_6+256a_8=128$ ……㉣

이때, $\left(\frac{x}{2}+1\right)^8$의 전개식에서

x^8의 계수는 $\frac{1}{2^8}$이므로 $a_8=\frac{1}{256}$

상수항은 1이므로 $a_0=1$

따라서 ㉣에서 $1+4a_2+16a_4+64a_6+1=128$

$2a_2+8a_4+32a_6=63$ (참)

ㄷ. ㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$\left(\frac{3}{2}\right)^8=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ ……㉤

㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면

$\left(\frac{1}{2}\right)^8=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ ……㉥

㉤에서 ㉥을 변끼리 빼면

$\left(\frac{3}{2}\right)^8-\left(\frac{1}{2}\right)^8=2(a_1+a_3+a_5+a_7)$

$\therefore\ a_1+a_3+a_5+a_7=\frac{3^8-1}{2^9}$

$=\frac{(3^4+1)(3^2+1)(3+1)(3-1)}{2^9}$

$=\frac{205}{16}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

30) 7

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $R(x)$

($R(x)$는 이차 이하의 다항식)이므로

$f(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+R(x)$ …… ㉠

이때, 다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $x+3$이므로 다항식 $R(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $x+3$과 같다.

즉, $R(x)=a(x-2)^2+x+3$ (a는 상수) …… ㉡

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x-2)^2(x-1)Q(x)+a(x-2)^2+x+3$

이때, 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(1)=a+4=5$, $a=1$

따라서 ㉡에서 $R(x)=(x-2)^2+x+3$이므로

$R(3)=7$

31) ③

다항식 $f(x)$를 $(x^3+5)(x-1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $R(x)$라 하면

($R(x)$는 삼차 이하의 다항식)

$f(x)=(x^3+5)(x-1)Q(x)+R(x)$ …… ㉠

이때, 다항식 $f(x)$를 x^3+5로 나누었을 때의 나머지가 x^2-2x이므로 다항식 $R(x)$를 x^3+5로 나누었을 때의 나머지가 x^2-2x와 같다.

즉, $R(x)=a(x^3+5)+x^2-2x$ (a는 상수)이므로

이를 ㉠에 대입하면

$f(x)=(x^3+5)(x-1)Q(x)+a(x^3+5)+x^2-2x$ …… ㉡

한편, 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의

나머지가 11이므로

나머지정리에 의하여 $f(1)=11$이다.

㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=6a-1=11$이므로 $a=2$

따라서 $R(x)=2(x^3+5)+x^2-2x$이므로

$R(2)=26$

32) 2

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 몫을 $Q(x)$라 하고, $Q(x)$를 $x-2$로 나눈 몫을 $P(x)$, 나머지를 k라 하면

$f(x)=(x+1)^2Q(x)-3x+1$

$=(x+1)^2\{(x-2)P(x)+k\}-3x+1$ ……㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면 $f(2)=9k-6+1$

이때, 나머지정리에 의하여 $f(2)=4$이므로

$9k-6+1=4\qquad\therefore k=1$

㉠에 $k=1$을 대입하여 정리하면

$f(x)=(x+1)^2(x-2)P(x)+(x+1)^2-3x+1$

따라서 다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2(x-2)$로 나눈 나머지는

$R(x)=(x+1)^2-3x+1$이므로

$R(1)=4-3+1=2$

<다른풀이>

다항식 $f(x)$를 $(x+1)^2(x-2)$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,

나머지를 $R(x)=ax^2+bx+c$라 하면

$f(x)=(x+1)^2(x-2)Q_1(x)+ax^2+bx+c$ ……㉡

$f(x)$를 $(x+1)^2$으로 나눈 나머지가 $-3x+1$이므로

㉡에서 $ax^2+bx+c=a(x+1)^2-3x+1$

$\therefore\ f(x)=(x+1)^2(x-2)Q_1(x)+a(x+1)^2-3x+1$

이때, 나머지정리에 의하여 $f(2)=4$이므로

$9a-6+1=4\quad\therefore\ a=1$

따라서 구하는 나머지는 $R(x)=(x+1)^2-3x+1$이다.

33) -4

다항식 $f(x)$를 $(x+2)^3$으로 나누었을 때의
몫을 $Q_1(x)$라 하면
나머지가 $2x^2+4x-1$이므로
$f(x)=(x+2)^3Q_1(x)+2x^2+4x-1$
$=(x+2)^3Q_1(x)+2(x+2)^2-4x-9$
$=(x+2)^2\{(x+2)Q_1(x)+2\}-4x-9$
따라서 다항식 $f(x)$를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $-4x-9$이다. …… ㉠
다항식 $f(x)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $4x-8$이므로
$f(x)=(x-3)^2Q_2(x)+4x-8$
양변에 $x=3$을 대입하면 $f(3)=4$ …… ㉡
다항식 $f(x)$를 $(x+2)^2(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $R(x)$이므로
$f(x)=(x+2)^2(x-3)Q(x)+R(x)$
이때, ㉠에 의하여 $R(x)$를 $(x+2)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $-4x-9$이므로
$f(x)=(x+2)^2(x-3)Q(x)+a(x+2)^2-4x-9$
(a는 상수)
양변에 $x=3$을 대입하면 ㉡에 의하여
$f(3)=25a-21=4$이므로 $a=1$이다.
따라서 $R(x)=(x+2)^2-4x-9$이므로
$R(1)=-4$

34) 20

조건 (나)에서 삼차식 $f(x)$를 $(x+3)^2$으로 나누었을 때의 몫은 일차식이므로 $ax+b$ ($a\neq 0$, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x+3)^2(ax+b)+ax+b$ …… ㉠
이때, 조건 (가)에서 $f(-3)=2$이므로
$f(-3)=-3a+b=2$, $b=3a+2$
이를 ㉠에 대입하면
$f(x)=(x+3)^2(ax+3a+2)+ax+3a+2$
$=(x+3)^3\{a(x+3)+2\}+ax+3a+2$
$=a(x+3)^3+2(x+3)^2+ax+3a+2$ …… ㉡
따라서 다항식 $f(x)$를 $(x+3)^3$으로 나누었을 때의 나머지는 $R(x)=2(x+3)^2+ax+3a+2$이다.
$R(0)=3a+20$, $R(-2)=a+4$이므로
$R(0)=R(-2)$에서
$3a+20=a+4$ $\therefore\ a=-8$
㉡에 대입하면
$f(x)=-8(x+3)^3+2(x+3)^2-8x-22$
$\therefore\ f(-4)=20$

35) (1) 253 (2) 3

(1) $x=253$이라 하고 x^{11}을 $x+1$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.
$f(x)=x^{11}$이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(-1)=-1$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^{11}=(x+1)Q(x)-1$
다시 $x=253$을 대입하면
$253^{11}=254Q(253)-1$
$=254\{Q(253)-1\}+253$
따라서 구하는 나머지는 253이다.
(2) $x=8$이라 하고 $x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$을 $x-1$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.
$f(x)=x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1$이라 하면
다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 나머지는
나머지정리에 의하여 $f(1)=1+1+\cdots+1=101$이므로 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^{100}+x^{99}+x^{98}+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+101$
다시 $x=8$을 대입하면
$8^{100}+8^{99}+8^{98}+\cdots+8+1$
$=7Q(8)+101=7Q(8)+7\times 14+3$
$=7\{Q(8)+14\}+3$
따라서 구하는 나머지는 3이다.

36) ④

$x=100$이라 하면
$10^{39}=10\times(10^2)^{19}=10x^{19}$,
$99\times 101=(100-1)(100+1)=(x-1)(x+1)$
이므로 $10x^{19}$을 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자. $10x^{19}$을 $(x-1)(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$
(a, b는 상수)라 하면
$10x^{19}=(x-1)(x+1)Q(x)+ax+b$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에
$x=1$을 대입하면 $10=a+b$ …… ㉠

$x=-1$을 대입하면 $-10=-a+b$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=10$, $b=0$이므로
$10x^{19}=(x-1)(x+1)Q(x)+10x$
다시 $x=100$을 대입하면
$10^{39}=99\times101\times Q(100)+1000$
따라서 구하는 나머지는 1000이다.

<다른풀이>
$x=10$이라 하면 $10^{39}=x^{39}$
$99\times101=(10^2-1)(10^2+1)=(x^2-1)(x^2+1)=x^4-1$
이므로 x^{39}을 x^4-1로 나누었을 때의 나머지를 구하는 문제로 변형하자.
$x^{39}=(x^4-1)(x^{35}+x^{31}+x^{27}+\cdots+x^3)+x^3$
다시 $x=10$을 대입하면
$10^{39}=99\times101\times(10^{35}+10^{31}+10^{27}+\cdots+10^3)+10^3$
따라서 구하는 나머지는 1000이다.

37) ④

$x=80$이라 하면
$2\times3^{79}=2\times(3^4)^{19}\times3^3=54\times(3^4)^{19}$
$=54\times81^{19}=54(x+1)^{19}$
이므로 $54(x+1)^{19}$을 x로 나누었을 때의
나머지를 구하는 문제로
변형하자.
$f(x)=54(x+1)^{19}$이라 하면
다항식 $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지는 $f(0)=54$이므로 몫을
$Q(x)$라 하면
$54(x+1)^{19}=x\,Q(x)+54$
다시 $x=80$을 대입하면
$54\times81^{19}=80\mathrm{Q}(80)+54$
따라서 구하는 나머지는 54이다.

38) 16

주어진 조립제법 과정에서 다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 몫을 $G_1(x)$라 하면 나머지는 -1, 다항식 $G_1(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의 몫을 $G_2(x)$라 하면 나머지는 3, 다항식 $G_2(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫은 1이고 나머지는 -2이므로
$f(x)=(x+2)G_1(x)-1$
$=(x+2)\{(x-1)G_2(x)+3\}-1$
$=(x+2)[(x-1)\{(x-2)-2\}+3]-1$
$=(x+2)(x-1)(x-2)-2(x+2)(x-1)+3(x+2)-1$
따라서 $f(1)=8$이고,
$P(x)=x+2$, $Q(x)=x-1$, $R(x)=x-2$이므로
$P(2)=4$, $Q(3)=2$, $R(4)=2$이다.
$\therefore\ f(1)+P(2)+Q(3)+R(4)=8+4+2+2=16$

39) ②

주어진 조립제법 과정에서 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지는 3, 다항식 $Q_1(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지는 4, 다항식 $Q_2(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 몫은 2이고 나머지는 -1이므로
$P(x)=(x+1)Q_1(x)+3$
$=(x+1)\{(x+1)Q_2(x)+4\}+3$
$=(x+1)[(x+1)\{2(x+1)-1\}+4]+3$
$=2(x+1)^3-(x+1)^2+4(x+1)+3$
따라서 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $P(-2)=-4$이다.

<다른풀이>
주어진 조립제법 과정에서 빈칸을 채우면 다음과 같다.

$$\begin{array}{r|rrrr}
-1 & 2 & 5 & 8 & 8 \\
 & & -2 & -3 & -5 \\
\hline
-1 & 2 & 3 & 5 & 3 \\
 & & -2 & -1 & \\
\hline
-1 & 2 & 1 & 4 & \\
 & & -2 & & \\
\hline
 & 2 & -1 & &
\end{array}$$

따라서 $P(x)=2x^3+5x^2+8x+8$이므로 다항식 $P(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $P(-2)=-4$이다.

40) ④

주어진 조립제법 과정에서
삼차식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 다항식 $Q_1(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 몫은 $4x-12$, 나머지는 -2이므로

$Q_1(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x-12)-2$

이때, 삼차식 $f(x)$를 $x-\frac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지는 6이므로

$f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)Q_1(x)+6$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x-12)-2\right\}+6$

$=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2(4x-12)-2\left(x-\frac{1}{2}\right)+6$

$=(2x-1)^2(x-3)-2x+7$

따라서 $Q(x)=x-3$이고 $R(x)=-2x+7$이므로

$Q(1)+R(-1)=-2+9=7$

41) 8

다항식 $3x^3+2x^2-x+1$을 $x+1$로 나누는 조립제법을 연속으로 이용하면 다음과 같다.

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
-1 & 3 & 2 & -1 & 1 & \\
 & & -3 & 1 & 0 & \\
\hline
-1 & 3 & -1 & 0 & 1 & =d \\
 & & -3 & 4 & & \\
\hline
-1 & 3 & -4 & 4 & & =c \\
 & & -3 & & & \\
\hline
 & 3 & -7 & & & =b \\
 & =a & & & &
\end{array}
$$

따라서 조립제법의 결과를 이용하면

$3x^3+2x^2-x+1=(x+1)(3x^2-x)+1$

$=(x+1)\{(x+1)(3x-4)+4\}+1$

$=(x+1)[(x+1)\{3(x+1)-7\}+4]+1$

$=3(x+1)^3-7(x+1)^2+4(x+1)+1$

이므로 $a=3,\ b=-7,\ c=4,\ d=1$이다.

$\therefore\ 2a+b+2c+d=8$

<다른풀이>

$3x^3+2x^2-x+1$

$=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+d)+d$

$=a(x^3+3x^2+3x+1)+b(x^2+2x+1)+c(x+1)+d$

$=ax^3+(3a+b)x^2+(3a+2b+c)x+a+b+c+d$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$a=3,\ 3a+b=2,\ 3a+2b+c=-1,\ a+b+c+d=1$

따라서 $b=-7,\ c=4,\ d=1$이므로

$2a+b+2c+d=8$

42) ④

조건 (가)에서 $f(-2)=f(0)=f(2)=k$

(k는 상수)라 하면

$f(-2)-k=0,\ f(0)-k=0,\ f(2)-k=0$이고,

$f(x)-k$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

인수정리에 의하여 $f(x)-k=x(x-2)(x+2)$ …… ㉠

조건 (나)에서 인수정리에 의하여 $f(1)=0$이므로

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$f(1)-k=-3$에서 $k=3$이다.

따라서 $f(x)=x(x-2)(x+2)+3$이므로

$f(3)=18$

43) 풀이참조

$f(1)-1=f(2)-2=f(3)-3=k$ (k는 상수)라 하면

$f(1)-1-k=0,\ f(2)-2-k=0,\ f(3)-3-k=0$이므로

인수정리에 의하여

$f(x)-x-k=a(x-1)(x-2)(x-3)$ (a는 상수)

$\therefore\ f(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+x+k$ …… ㉠

한편, 다항식 $f(x)$를 $x(x+1)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-17x-10$이므로

$f(x)=x(x+1)Q(x)-17x-10$에서

$f(-1)=7,\ f(0)=-10$이다.

㉠에 $x=-1$을 대입하면

$f(-1)=-24a-1+k=7$

$-24a+k=8$ …… ㉡

㉠에 $x=0$을 대입하면

$f(0)=-6a+k=-10$ …… ㉢

㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-1,\ k=-16$이므로

$f(x)=-(x-1)(x-2)(x-3)+x-16$

$\therefore\ f(-2)=42$

44) 34

나머지정리에 의해서 $n=1,\ 2,\ 3$에 대하여

$f(n)=2n^2-n$

즉, $f(n)-2n^2+n=0$이므로

$f(1)-2\times1^2+1=0,\ f(2)-2\times2^2+2=0,$

$f(3)-2\times3^2+3=0$이다.

이때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차식이므로

인수정리에 의하여
$f(x)-2x^2+x=(x-1)(x-2)(x-3)$
따라서 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+2x^2-x$ 이므로
$f(4)=34$

45) 28

$P(4)=\frac{7}{4}$,

$P(3)=\frac{4}{3}P(4)=\frac{7}{3}$,

$P(2)=\frac{3}{2}P(3)=\frac{7}{2}$,

$P(1)=2P(2)=\frac{7}{1}$ 이므로

$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$ 일 때, $P(n)=\frac{7}{n}$, 즉 $nP(n)-7=0$
이때, $xP(x)-7$은 사차식이므로 인수정리에 의하여
$xP(x)-7=k(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ $(k\neq 0)$
양변에 $x=0$을 대입하면 $-7=24k$에서
$k=-\frac{7}{24}$ 이므로
$xP(x)-7=-\frac{7}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ …… ㉠
한편, 다항식 $P(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $P(-1)$이므로
㉠의 양변에 $x=-1$을 대입하면
$-P(-1)-7=-\frac{7}{24}\times(-2)\times(-3)\times(-4)\times(-5)$
$\therefore\ P(-1)=28$

46) ①

$f(1)-0^2=0$, $f(2)-1^2=0$, $f(3)-2^2=0$,
$f(4)-3^2=0$ 이고,
$f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차식이므로
인수정리에 의하여
$f(x)-(x-1)^2=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$
따라서
$f(x)=(x-1)(x-4)(x-2)(x-3)+(x-1)^2$
$=(x^2-5x+4)(x^2-5x+6)+(x-1)^2$
$=(x^2-5x+2+2)(x^2-5x+2+4)+x^2-2x+1$
$=(x^2-5x+2)^2+6(x^2-5x+2)+8+(x^2-5x+2)+3x-1$
$=(x^2-5x+2)(x^2-5x+9)+3x+7$
이므로 $R(x)=3x+7$ 이다.

$\therefore\ R(1)=10$

47) 29

$P(1)=1$, $P(2)=3$, $P(3)=7$, $P(4)=15$ 이다.
$P(x)$는 삼차식이므로 네 상수 a, b, c, d에 대하여
$P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)+d$
라 하면
$P(1)=d=1$
$P(2)=c+d=3$에서 $c=2$
$P(3)=2b+2c+d=7$에서 $b=1$
$P(4)=6a+6b+3c+d=15$에서 $a=\frac{1}{3}$ 이므로
$P(x)=\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3)+(x-1)(x-2)+2(x-1)+1$
$\therefore\ P(5)=8+12+8+1=29$

48) ①

$f(x)$가 $x+2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x+2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다. 즉, $f(-2)=0$이므로
$f(-2)=-8-28-2a-a+3=0$
$\therefore\ a=-11$

49) ④

ㄱ. $f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$에서 $m=n+(Q(x)$의 차수$)$이므로 $Q(x)$의 차수는 $m-n$이다. (참)
ㄴ. (반례) $f(x)=x^3+x$, $g(x)=x^2$이라 하면
$x^3+x=x^2\times x+x$ 이므로 $Q(x)=x$, $R(x)=x$ 이다. 이때, $m-n=3-2=1$이지만 $R(x)$는 상수가 아니다.
(거짓)
ㄷ. $m+n=10$이고 $f(x)$, $g(x)$, $Q(x)$, $R(x)$의 차수가 각각 m, n, $m-n$, $\frac{m-n}{2}$이므로 $m>n$을 만족시키는 자연수 m, n에 대하여 다음이 성립한다.

m	n	$m-n$	$\frac{m-n}{2}$
9	1	8	4
8	2	6	3
7	3	4	2
6	4	2	1

위 표에서 $n > \frac{m-n}{2}$을 만족시켜야 하므로
가능한 모든 n의 값의 합은 $3+4=7$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

50) 13

등식 $f(x^2+2x)=x^2f(x)+8x+8$에서
양변에 $x=0$를 대입하면
$f(0)=8$ ……㉠
양변에 $x=-2$를 대입하면
$f(0)=4f(-2)-16+8,\ 8=4f(-2)-8$ (∵ ㉠)
$\therefore f(-2)=4$ ……㉡
이때, 다항식 $f(x)$의 차수를 n차라 하면 $f(x^2+2x)$의 차수는 $2n$차, $x^2f(x)+8x+8$의 차수는 $n+2$차이므로
$2n=n+2 \quad \therefore n=2$
즉, $f(x)=ax^2+bx+c$라 하면
㉠에 의하여 $f(0)=c=8$이므로 $c=8$
㉡에 의하여 $f(-2)=4a-2b+8=4$이므로 $b=2a+2$
$\therefore f(x)=ax^2+(2a+2)x+8$
$f(x^2+2x)=a(x^2+2x)^2+(2a+2)(x^2+2x)+8$
$=ax^4+4ax^3+(6a+2)x^2+(4a+4)x+8$ ……㉢
$x^2f(x)+8x+8=ax^4+(2a+2)x^3+8x^2+8x+8$ ……㉣
㉢=㉣이므로
$ax^4+4ax^3+(6a+2)x^2+(4a+4)x+8$
$=ax^4+(2a+2)x^3+8x^2+8x+8$에서
$4a=2a+2,\ 6a+2=8,\ 4a+4=8$
$\therefore a=1$
따라서 $f(x)=x^2+4x+8$이므로
$f(1)=1+4+8=13$

51) 8

$x^2+x+2=(x^2+1)+(x+1)$이므로
$A=x^2+1,\ B=x=1$로 놓으면

$(x^2+x+2)^3=(A+B)^3$
$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$
$=A(A^2+2AB+3B^2)+B^3$
이때 $(x^2+x+2)^3$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지는 $(x+1)^3$을 x^2+1로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$$
\begin{array}{r l}
 & x+3 \\
\cline{2-2}
x^3+1 & \big)\, x^3+3x^2+3x+1 \\
 & x^3 \qquad\ + x \\
\cline{2-2}
 & \qquad 3x^2+2x+1 \\
 & \qquad 3x^2 \qquad +3 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad 2x-2
\end{array}
$$

따라서 $R(x)=2x-2$이므로
$R(5)=2 \cdot 5-2=8$

52) 12
$2x^3+3x^2-x+a$을 x^2-x+b로 나누는 과정은
다음과 같다.

$$
\begin{array}{r l}
 & 2x+5 \\
\cline{2-2}
x^2-x+b & \big)\, 2x^3+5x^2-x \qquad +a \\
 & 2x^3-2x^2+2bx \\
\cline{2-2}
 & \qquad 5x^2-(1+2b)x+a \\
 & \qquad 5x^2-5x \qquad +5b \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad (4-2b)x+a-5b
\end{array}
$$

이때, 나머지가 0이어야 하므로 나머지
$(4-2b)x+a-5b$에서
$4-2b=0,\ a-5b=0$을 연립하여 풀면 $a=10,\ b=2$
$\therefore\ a+b=12$

<다른풀이>
항등식을 학습한 이후 다음과 같이 풀이할 수 있다.
$2x^3+3x^2-x+a$는 x^2-x+b로 나누어떨어지므로 다음 등식이 성립한다.
$2x^3+3x^2-x+a=(x^2-x+b)(2x+k)$ (k는 상수)
이는 x에 대한 항등식이므로
x^2의 계수를 비교하면 $3=k-2 \quad \therefore\ k=5$
따라서 $2x^3+3x^2-x+a=(x^2-x+b)(2x+5)$이므로
x의 계수를 비교하면 $-1=-5+2b \quad \therefore\ b=2$
상수항을 비교하면 $a=5b=10$
$\therefore\ a+b=10+2=12$

53) ⑤

다항식 $P(x)$를 $2x+1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $Q(x),\ 5$이므로

$P(x)=(2x+1)Q(x)+5$

$=2Q(x)\left(x+\frac{1}{2}\right)+5$

$=\{2Q(x)-1\}\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{1}{2}\right)+5$

$=\{2Q(x)-1\}\left(x+\frac{1}{2}\right)+x+\frac{11}{2}$

이다. 이때, $P(x)$는 삼차다항식이고, $Q(x)$는 이차다항식이므로 다항식 $P(x)$를 $2Q(x)-1$로 나누었을 때의 몫과 나머지는 각각 $x+\frac{1}{2},\ x+\frac{11}{2}$이다.

따라서 구하는 합은 $\left(x+\frac{1}{2}\right)+\left(x+\frac{11}{2}\right)=2x+6$이다.

54) ②

다항식 $f(x)+g(x)$를 x^2-3x+7로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$,

다항식 $f(x)-2g(x)$를 $(x-1)(x^2-3x+7)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면

$f(x)+g(x)=(x^2-3x+7)Q_1(x)+2$ ……㉠

$f(x)-2g(x)=(x-1)(x^2-3x+7)Q_2(x)+x^2+6x-9$ ……㉡

㉠의 양변에 2를 곱한 식과 ㉡을 변끼리 더하면

$3f(x)=2\times\left\{x^2-3x+7)Q_1(x)+2\right\}$

$\quad+\left\{(x-1)(x^2-3x+7)Q_2(x)+x^2+6x-9\right\}$

$=2\times(x^2-3x+7)Q_1(x)+4+(x-1)(x^2-3x+7)Q_2(x)$

$\quad+(x^2-3x+7)+9x-16$

$=(x^2-3x+7)\{2Q_1(x)+(x-1)Q_2(x)+1\}+9x-12$

$f(x)=\frac{1}{3}(x^2-3x+7)\{2Q_1(x)+(x-1)Q_2(x)+1\}+3x-4$

따라서 구하는 나머지는 $3x-4$이다.

55) 32

$f(x)=2(x^2+1)+x+3$이므로

$\{f(x)\}^3=\left\{2(x^2+1)+x+3\right\}^3$

$A=2(x^2+1),\ B=x+3$이라 하면

$\{f(x)\}^3=(A+B)^3$

$=A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$=A^2(A+3B)+3AB^2+B^3$

에서 $A^2=4(x^2+1)^2$은 $(x^2+1)^2$으로 나누어떨어지므로 $\{f(x)\}^3$을 $(x^2+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 $3AB^2+B^3$을 $(x^2+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지와 같다.

$3AB^2+B^3=6(x^2+1)(x+3)^2+(x+3)^3$

$=6(x^2+1)\{(x^2+1)+6x+8\}+(x+3)^3$

$=6(x^2+1)^2+6(x^2+1)(6x+8)+(x+3)^3$

$3AB^2+B^3$을 $(x^2+1)^2$으로 나누었을 때의 나머지는 삼차 이하의 다항식이므로

$R(x)=6(x^2+1)(6x+8)+(x+3)^3$이다.

$\therefore\ R(-1)=32$

56) ②

$\frac{2x-6y+a}{bx+3y+5}=k$ (k는 상수)로

일정한 값을 갖는다고 하면

$2x-6y+a=k(bx+3y+5)$

이 등식은 $x,\ y$에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$2=bk,\ -6=3k,\ a=5k$이므로

$k=-2,\ a=-10\ \ b=-1$

$\therefore\ a+b=-11$

57) ③

$f(x)=x^3-2x^2+5$에서

$f(a-2x)=(a-2x)^3-2(a-2x)^2+5$

$=(a^3-6a^2x+12ax^2-8x^3)-2(a^2-4ax+4x^2)+5$

$=-8x^3+(12a-8)x^2+(-6a^2+8a)x+a^3-2a^2+5$

$=-8x^3+4x^2+bx+c$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

양변의 계수를 비교하면

$12a-8=4,\ -6a^2+8a=b,\ a^3-2a^2+5=c$에서

$a=1,\ b=2,\ c=4$

$\therefore\ a-b+c=3$

58) 22

다항식 $f(x)$를 $2x^3-6x^2+5x$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-2x^2+ax+7$이므로

$f(x)=(2x^3-6x^2+5x)Q(x)-2x^2+ax+7$

$=2x\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)Q(x)-2x^2+ax+7$

이때, 다항식 $f(x)$를 $x^2-3x+\frac{5}{2}$로

나누었을 때의 나머지가

$4x+b$이므로 다항식 $-2x^2+ax+7$을 $x^2-3x+\frac{5}{2}$로 나누었을 때의 나머지가 $4x+b$이다.

즉, $-2x^2+ax+7=-2\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)+4x+b$에서

$-2x^2+ax+7=-2x^2+10x+b-5$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

양변의 계수를 비교하면

$a=10$, $7=b-5$ 에서 $b=12$

$\therefore\ a+b=22$

59) ③

삼차식 $f(x)$는 x^2+x+1로 나누어떨어지므로 두 상수 a, b에 대하여

$f(x)=(x^2+x+1)(ax+b)$ ……㉠

삼차식 $f(x)+6$은 x^2+2로 나누어떨어지고

㉠에서 $f(x)$의 삼차항의 계수가 a이므로 상수 c에 대하여

$f(x)+6=(x^2+2)(ax+c)$

$\therefore\ f(x)=(x^2+2)(ax+c)-6$ ……㉡

$f(0)=2$이므로 ㉠에서 $b=2$, ㉡에서 $c=4$

따라서 ㉠, ㉡에서

$(x^2+x+1)(ax+2)=(x^2+2)(ax+4)-6$ ……㉢

$ax^3+(a+2)x^2+(a+2)x+2=ax^3+4x^2+2ax+2$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

양변의 계수를 비교하면

$a+2=4$, $a+2=2a$에서 $a=2$

$f(x)=(x^2+x+1)(2x+2)$이므로

$f(1)=12$

<다른풀이>

㉢은 x에 대한 항등식이므로

양변에 $x=-1$을 대입하면

$-a+2=3(-a+4)-6$에서 $a=2$

$f(x)=(x^2+x+1)(2x+2)$이므로

$f(1)=12$

60) 풀이 참조

$f(x^2+x)=x^2f(x)+x(1+2x+3x^2)+1$ ……㉠

에서 다항식 $f(x)$가 n차식일 때 (단, n은 자연수)

$f(x^2+x)$의 최고차항은 x^{2n},

$x^2f(x)$의 최고차항은 x^{n+2}이므로

㉠에서 좌변의 최고차항은 x^{2n}이고

우변의 최고차항은 x^{n+2}이거나 x^3이다.

이때, 자연수 n에 대하여 $x^{2n}=x^3$은

가능하지 않으므로

$x^{2n}=x^{n+2}$에서 $2n=n+2$, $n=2$

따라서 다항식 $f(x)$가 이차식이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0,\ b,\ c$는 상수)라 하면

㉠에서

$a(x^2+x)^2+b(x^2+x)+c$

$=x^2(ax^2+bx+c)+x(1+2x+3x^2)+1$

$ax^4+2ax^3+(a+b)x^2+bx+c$

$=ax^4+(b+3)x^3+(c+2)x^2+x+1$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로

양변의 계수를 비교하면

$2a=b+3$, $a+b=c+2$, $b=1$, $c=1$

따라서 $a+2$, $b=1$, $c=1$이므로

$f(x)=2x^2+x+1$이다.

$\therefore\ f(2)=11$

61) 3

다항식 $f(x)+g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의

나머지가 5이므로 나머지정리에 의하여

$f(2)+g(2)=5$ ……㉠

다항식 $\{f(x)\}^3+\{g(x)\}^3$을 $x-2$로 나누었을

때의 나머지가

80이므로 나머지정리에 의하여

$\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3=80$ ……㉡

다항식 $f(x)g(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여 $f(2)g(2)$이다.

$\{f(2)\}^3+\{g(2)\}^3=\{f(2)+g(2)\}^3-3f(2)g(2)\{f(2)+g(2)\}$

이므로 ㉠, ㉡에 의하여

$80=5^3-3\times f(2)g(2)\times 5$

$\therefore\ f(2)g(2)=3$

62) ①

다항식 $f(x)$를 x로 나누었을 때의 나머지가 3이므로
나머지정리에 의하여 $f(0)=3$이다.
따라서 항등식 $f(x+1)=f(x)+3x^2-x$의 양변에
$x=0$을 대입하면 $f(1)=f(0)=3$ ……㉠
$x=1$을 대입하면 $f(2)=f(1)+2=5$ ……㉡
이때, 다항식 $f(x)$를 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를 $ax+b$
(a, b는 상수)라 하면
$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+ax+b$ 이므로
㉠에서 $f(1)=a+b=3$, ㉡에서 $f(2)=2a+b=5$
두 식을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=1$
따라서 구하는 나머지는 $2x+1$이다.

63) -170

$Q(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_8x^8$ 에서
$Q(1)=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_8$ …… ㉠
$Q(-1)=a_0-a_1+a_2-\cdots+a_8$ …… ㉡
㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면
$Q(1)-Q(-1)=2(a_1+a_3+a_5+a_7)$에서
$a_1+a_3+a_5+a_7=\frac{1}{2}\{Q(1)-Q(-1)\}$이다.
한편, $f(x)=x^9$이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$f(-2)=-512$이므로
$f(x)=(x+2)Q(x)-512$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x=1$을
대입하면
$f(1)=3Q(1)-512$
이때, $f(1)=1^9=1$이므로
$1=3Q(1)-512 \quad \therefore \; Q(1)=171$
$x=-1$을 대입하면
$f(-1)=Q(-1)-512$
이때, $f(-1)=(-1)^9=-1$이므로
$-1=Q(-1)-512$
$\therefore \; Q(-1)=511$
$\therefore \; a_1+a_3+a_5+a_7=\frac{1}{2}\{Q(1)-Q(-1)\}$
$=\frac{1}{2}(171-511)=-170$

64) 1

다항식 $x^{20}+2x+5$를 x^2+x로 나누었을 때의 나머지를 $ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$x^{20}+2x+5=x(x+1)Q(x)+ax+b$ …… ㉠
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에
$x=0$을 대입하면 $5=b$
$x=-1$을 대입하면 $4=-a+b$에서 $a=1$
이를 ㉠에 대입하면
$x^{20}+2x+5=x(x+1)Q(x)+x+5$ …… ㉡
다항식 $Q(x)$의 상수항을 포함한 모든 항의 계수의 합은 $Q(1)$과 같으므로 ㉡의 양변에 $x=1$을 대입하면
$8=2Q(1)+6$
$\therefore \; Q(1)=1$

65) ③

$P(x)-2x$가 삼차식이고, $(x+2)^2$으로
나누어떨어지므로
$P(x)-2x=(x+2)^2(ax+b)$ ($a\neq 0$, b는 상수)
$\therefore \; P(x)=(x+2)^2(ax+b)+2x$ …… ㉠
한편, 다항식 $1-P(x)$가 $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$으로 나누어떨어지므로
$1-P(-1)=0$에서 $P(-1)=1$
$1-P(-3)=0$에서 $P(-3)=1$
㉠에 $x=-1$을 대입하면
$P(-1)=-a+b-2=1$에서 $-a+b=3$ …… ㉡
㉠에 $x=-3$을 대입하면
$P(-3)=-3a+b-6=1$에서 $-3a+b=7$ …… ㉢
㉡, ㉢을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$이므로
$P(x)=(x+2)^2(-2x+1)+2x$
$\therefore \; P(2)=-44$

66) ③

두 다항식 $3xf(x)+g(x)$와 $f(x)+g(x)-4x$가 모두 $x-1$로 나누어떨어지므로 인수정리에 의하여
$3f(1)+g(1)=0$, $f(1)+g(1)-4=0$이고 두 식을 연립하여 풀면 $f(1)=-2$, $g(1)=6$이다.
ㄱ. 다항식 $3f(x)+xg(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의
나머지는 나머지정리에 의하여
$3f(1)+g(1)=3\times(-2)+6=0$이므로 인수정리에 의하여 다항

식 $3f(x)+xg(x)$는 $x-1$로 나누어떨어진다. (참)

ㄴ. 다항식 $f(x-1)+g(x-1)$을 $x-2$로 나누었을 때의 나머지는 나머지 정리에 의하여

$f(2-1)+g(2-1)=f(1)+g(1)=(-2)+6=4$이므로

다항식 $f(x-1)+g(x-1)$은 $x-2$로 나누어떨어지지 않는다. (거짓)

ㄷ. $f(1)=-2$, $g(1)=6$에서 $f(1)+2=0$, $g(1)-6=0$이므로 인수정리에 의하여 두 다항식 $f(x)+2$와 $g(x)-6$은 각각 $x-1$로 나누어떨어진다.

따라서 다항식 $\{f(x)+2\}\{g(x)-6\}$은 $(x-1)^2$으로 나누어떨어진다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

67) 72

$(x-1)f(x)=(x+2)g(x)$ …… ㉠

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에

$x=-2$를 대입하면 $f(-2)=0$, $x=1$을 대입하면 $g(1)=0$

따라서 다항식 $f(x)$는 $x+2$로 나누어떨어지고

다항식 $g(x)$는 $x-1$로 나누어떨어진다.

또한 다항식 $f(x)$는 $x-2$로 나누어떨어지므로 최고차항의 계수가 1인 삼차식 $f(x)$는

$f(x)=(x+2)(x-2)(x+a)$ (a는 상수)

이를 ㉠에 대입하면

$(x-1)(x+2)(x-2)(x+a)=(x+2)g(x)$

$\therefore\ g(x)=(x-1)(x-2)(x+a)$ …… ㉡

이때, 다항식 $g(x)$를 $x+2$로 나누었을 때의

나머지가 12이므로

나머지정리에 의하여 $g(-2)=12$

㉡의 양변에 $x=-2$를 대입하면

$g(-2)=12(-2+a)=12 \quad \therefore\ a=3$

따라서 $f(x)=(x+2)(x-2)(x+3)$이고

$g(x)=(x-1)(x-2)(x+3)$이므로

$f(3)+g(4)=30+42=72$

68) -2

69) -1

70) ②

다항식 $f(x)$를 n차식이라 하면 (n은 자연수)

$f(x+1)+x^4 f\left(\frac{1}{x^2}\right)=5x^4-x^2+x+6$ …… ㉠

에서 $f\left(\frac{1}{x^2}\right)$은 $\frac{1}{x^{2n}}$항을 가진다.

이때, $n \geq 3$이면 $x^4 f\left(\frac{1}{x^2}\right)$에서

$x^4 \times \frac{1}{x^{2n}}=\frac{1}{x^{2n-4}}$ ($\because\ 2n>4$)항이 생기므로

㉠은 항등식이 될 수 없다.

따라서 $f(x)$는 이차 이하의 다항식이므로

$f(x)=ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면

$f(x+1)+x^4 f\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$=a(x+1)^2+b(x+1)+c+x^4\left(\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^2}+c\right)$

$=cx^4+(a+b)x^2+(2a+b)x+2a+b+c$

따라서 ㉠에 의하여

$cx^4+(a+b)x^2+(2a+b)x+2a+b+c=5x^4-x^2+x+6$

이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변의 계수를 비교하면

$c=5$, $a+b=-1$, $2a+b=1$, $2a+b+c=6$에서

$a=2$, $b=-3$, $c=5$

따라서 $f(x)=2x^2-3x+5$이므로

$f(1)=4$

71) 999

$A_1=9+99+999$,

$A_2=9\times 99+99\times 999+999\times 9$,

$A_3=9\times 99\times 999$이므로

$(x+9)(x+99)(x+999)=x^3+\mathrm{A}_1x^2+\mathrm{A}_2x+\mathrm{A}_3$

양변에 $x=1$을 대입하면

$10\times 100\times 1000=1+A_1+A_2+A_3$

$\therefore\ A_1+A_2+A_3=1000000-1=999999$

따라서 $A_1+A_2+A_3$을 1000으로 나누었을 때의 나머지는 999이다.

72) ⑤

다항식 $f(x)$를 $(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$, 나머지를

$R(x)= mx+n$ (m, n은 상수)라 하면
$f(x)= (x-a)(x-b)Q(x)+ mx+n$
$f(a)= ma+n$ ……㉠
$f(b)= mb+n$ ……㉡
㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면
$f(a)- f(b)= m(a-b)$에서 $m = \dfrac{f(a)- f(b)}{a-b}$ ($\because$ $a \neq b$)

㉠에 대입하면,
$f(a)= \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}a+n$, $n = \dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$
$R(x) = \dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}x + \dfrac{af(b)-bf(a)}{a-b}$

$\therefore$ $R(a+b)$
$= \dfrac{bf(a)- bf(b)+ af(a)- bf(a)}{a-b}$
$= \dfrac{af(a)- bf(b)}{a-b}$

[5강 기본2 변형]

73) ④

$P(x)$가 이차 이하의 다항식이므로
$P(x)= ax^2+bx+c$ (a, b, c는 상수)라 하면
$\{P(x)\}^2= (ax^2+bx+c)^2$
$= a^2x^4+b^2x^2+c^2+2abx^3+2acx^2+2bcx$
$P(x^2)= ax^4+bx^2+c$이다.
$\{P(x)\}^2 = P(x^2)+ 2x^2$에서
$a^2x^4+2abx^3+(2ac+b^2)x^2+2bcx+c^2 = ax^4+(b+2)x^2+c$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
양변의 계수를 비교하면
$a^2 = a$, $2ab = 0$, $2ac+b^2 = b+2$, $2bc = 0$, $c^2 = c$를
모두 만족시켜야 한다.
$a^2 = a$에서 $a = 0$ 또는 $a = 1$이므로 a의 값에 따라 경우를
나누어
생각하면 다음과 같다.
(ⅰ) $a = 0$인 경우
$2ab = 0$을 만족시킨다.
$2ac+b^2 = b+2$에서 $b^2-b-2 = 0$
$b = -1$ 또는 $b = 2$이므로
$2bc = 0$에서 $c = 0$이고, 이때 $c^2 = c$를 만족시킨다.
따라서 $P(x)= -x$ 또는 $P(x)= 2x$이다.
(ⅱ) $a = 1$인 경우
$2ab = 0$에서 $b = 0$이므로 $2ac+b^2 = b+2$에서 $c = 1$
이때, $2ab = 0$, $c^2 = c$를 모두 만족시킨다.
따라서 $P(x)= x^2+1$이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 다항식 $P(x)$는
$-x$, $2x$, x^2+1로 3개이다.

74) ⑤

$f\left(x+3-\dfrac{1}{x}\right)= x^3+x^2+3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}$
$= \left(x^3-\dfrac{1}{x^3}\right)+\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3$
$= \left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)\right\}+\left\{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\right\}+3$
$= \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^3+\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+5$
이때, $x-\dfrac{1}{x}= k$라 하면
$f(k+3)= k^3+k^2+3k+5$
$k+3 = t$라 하면 $k = t-3$이므로
$f(t)= (t-3)^3+(t-3)^2+3(t-3)+5$
$= (t^3-9t^2+27t-27)+(t^2-6t+9)+(3t-9)+5$
$= t^3-8t^2+24t-22$
즉, $f(x)= x^3-8x^2+24x-22$이므로
$a = -8$, $b = 24$, $c = -22$
$\therefore$ $a+b-c = 38$

75) ②

다항식 $f(x)$를 $(x-1)^3$으로 나누었을 때의
몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $-x^2+ax+b$이므로
$f(x)= (x-1)^3Q(x)- x^2+ax+b$
$= (x-1)^3Q(x)- (x-1)^2+(a-2)x+b+1$ ……㉠
$= (x-1)^3Q(x)- (x-1)^2+(a-2)(x-1)+a+b-1$ ……㉡
㉠에서 다항식 $f(x)$를 $(x-1)^2$으로
나누었을 때의 나머지는
$(a-2)x+b+1$이고
㉡에서 다항식 $f(x)$를 $x-1$로 나누었을 때의
나머지는 $a+b-1$이다.
따라서 두 나머지의 합은
$\{(a-2)x+b+1\}+(a+b-1)= (a-2)x+a+2b$

$= 2x - 6$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
양변의 계수를 비교하면
$a - 2 = 2$, $a + 2b = -6$에서 $a = 4$, $b = -5$
$\therefore\ ab = -20$

76) 8

두 다항식 $x^3 - 4x + 5$, $x^3 - 3x^2 + 5x - 1$을
$(x-a)(x-b)$로 나누었을 때의 몫을 각각 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$라 하면 나머지가 모두 $R(x)$이므로
$x^3 - 4x + 5 = (x-a)(x-b)Q_1(x) + R(x)$ …… ㉠
$x^3 - 3x^2 + 5x - 1 = (x-a)(x-b)Q_2(x) + R(x)$ …… ㉡
㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면
$3x^2 - 9x + 6 = (x-a)(x-b)\{Q_1(x) - Q_2(x)\}$
이때, $3x^2 - 9x + 6 = 3(x-1)(x-2)$이므로
$Q_1(x) - Q_2(x) = 3$이고, $a = 1$, $b = 2$ 또는
$a = 2$, $b = 1$이다.
따라서 ㉠에서
$x^3 - 4x + 5 = (x-1)(x-2)(x+3) + 3x - 1$이므로
다항식 $x^3 - 4x + 5$를 $(x-1)(x-2)$로 나누었을 때의 몫은
$Q_1(x) = x + 3$이고, 나머지는 $R(x) = 3x - 1$이다.
$\therefore\ R(a+b) = R(3) = 8$

77) ②

조건 (가)에서 다항식 $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$를 $f(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지가 $g(x)$이므로
$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = f(x)Q_1(x) + g(x)$ …… ㉠
이때, $f(x)$가 이차식이므로 나머지인
$g(x)$는 일차 이하의 다항식이다.
조건 (나)에서 다항식 $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$를 $g(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면 나머지가 $f(x) - x^2 - 2x$이므로
$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = g(x)Q_2(x) + f(x) - x^2 - 2x$ …… ㉡
이때, $g(x)$가 일차 이하의 다항식이므로 나머지인 $f(x) - x^2 - 2x$는 상수이다.
따라서 $f(x) = x^2 + 2x + a$ (a는 상수)라 하자. …… ㉢
다항식 $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$를 $f(x) = x^2 + 2x + a$로 나누었을 때의 몫이 $x + 1$이고, 나머지가 $(2-a)x + (2-a)$이므로 ㉠에서
$g(x) = (2-a)(x+1)$이다.
따라서 ㉡에서
$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (2-a)(x+1)Q_2(x) + a$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로 양변에 $x = -1$을 대입하면
$a = 0$
따라서 $g(x) = 2(x+1)$이므로
$g(1) = 4$

78) 12

조건 (가)에서 나머지정리에 의하여 $f(4) = 14$ …… ㉠
조건 (나)에서 다항식 $f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$라 하면 나머지는 $-3x + 1$이므로
$f(x) = (x+1)(x-3)Q_1(x) - 3x + 1$
양변에 $x - 1$을 곱하면
$(x-1)f(x) = (x+1)(x-3)(x-1)Q_1(x) + (x-1)(-3x+1)$
이때, 다항식 $(x-1)f(x)$를 $(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지는 다항식 $(x-1)(-3x+1)$을
$(x+1)(x-3)$으로 나누었을 때의 나머지와 같으므로
$(x-1)(-3x+1) = -3x^2 + 4x - 1$
$= -3(x^2 - 2x - 3) - 2x - 10$
에서 나머지는 $-2x - 10$이다.
즉, $(x-1)f(x) = (x+1)(x-3)Q(x) - 2x - 10$이므로
양변에 $x = 4$를 대입하면
$3f(4) = 5Q(4) - 18$, $5Q(4) = 3 \times 14 + 18 = 60$ ($\because$ ㉠)
$\therefore\ Q(4) = 12$

79) ①

$x^{27} + x^{26} + x^{24} + x^{23} + x + 3$
$= x^{27} + x^{26} + x^{25} + x^{24} + x^{23} - x^{25} + x + 3$
$= x^{23}(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - x^{25} + x + 3$
$= x^{23}(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (x^{25} - 1) + x + 2$
$= x^{23}(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$\quad - (x^5 - 1)(x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1) + x + 2$
$= x^{23}(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$
$- (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1) + x + 2$
$= (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)\{x^{23} - (x-1)(x^{20} + x^{15} + x^{10} + x^5 + 1)\}$
$\quad + x + 2$
따라서 구하는 나머지는 $x + 2$이다.

80) 450

다항식 $x^{50}-1$을 $(x-1)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,
나머지를 $R(x)=ax+b$ (a, b는 상수)라 하면
$x^{50}-1=(x-1)^2Q(x)+ax+b$ …… ㉠
양변에 $x=1$을 대입하면 $0=a+b$
$\therefore\ b=-a$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$x^{50}-1=(x-1)^2Q(x)+a(x-1)$
$=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$
이때, $x^{50}-1=(x-1)(x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1)$이므로
$(x-1)(x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1)=(x-1)\{(x-1)Q(x)+a\}$
양변을 $x-1$로 나누면
$x^{49}+x^{48}+x^{47}+\cdots+x+1=(x-1)Q(x)+a$
이 등식은 x에 대한 항등식이므로
양변에 $x=1$을 대입하면
$a=50$, $b=-50$ ($\because$ ㉡)에서 $R(x)=50x-50$이다.
$\therefore\ R(10)=450$

81) ③

$f(x)=x^8$이라 하면 다항식 $f(x)$를 $x+\dfrac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$R_1=f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^8=\dfrac{1}{2^8}$
따라서 $x^8=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)Q(x)+\dfrac{1}{2^8}$ 이므로
$x^8-\dfrac{1}{2^8}=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)Q(x)$ …… ㉠
㉠의 좌변을 인수분해하면
$x^8-\dfrac{1}{2^8}=\left(x^4+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(x^4-\dfrac{1}{2^4}\right)$
$=\left(x^4+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(x^2-\dfrac{1}{2^2}\right)$
$=\left(x^4+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$
이므로 이를 ㉠에 대입하면
$Q(x)=\left(x^4+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$
따라서 다항식 $Q(x)$를 $x+\dfrac{1}{2}$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$R_2=Q\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{2^4}\right)\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^2}\right)\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$
$=\dfrac{1}{2^3}\times\dfrac{1}{2}\times(-1)=-\dfrac{1}{2^4}$
$\therefore\ \dfrac{R_2}{R_1}=\left(-\dfrac{1}{2^4}\right)\div\dfrac{1}{2^8}=-2^4=-16$

82) ④

$x^{31}-1=(x-1)(x^{30}+x^{29}+x^{28}+\cdots+x+1)$이므로
다항식 $x^{31}-1$을 $x-1$로 나누었을 때의 몫은
$Q(x)=x^{30}+x^{29}+\cdots+x+1$이다.
$\therefore\ Q(1)=31$

83) $(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

$x^4-10x^2+9=(x^2-1)(x^2-9)$
$=(x+1)(x-1)(x+3)(x-3)$

84) 36

$a=9996=10^4-4$ 이므로
$a^2=(10^4-4)^2=10^8-8\times10^4+16$
$=100000000-80000+16$
$=99920016$
따라서 a^2의 각 자리 숫자의 합은
$9+9+9+2+0+0+1+6=36$이다.

85) 31, 35, 43

$6^6-1=(6^3)^2-1=(6^3-1)(6^3+1)$
$=(6-1)(6^2+6+1)(6+1)(6^2-6+1)$
$=5\cdot7\cdot31\cdot43$
따라서 구하는 두 자리 자연수 n의 값은 31, 35, 43이다.

86) 18

$x^3+8y^3+8z^3-12xyz=0$ 에서

$x^3+(2y)^3+(2z)^3-3\times x\times 2y\times 2z$

$=(x+2y+2z)(x^2+4y^2+4z^2-2xy-4yz-2zx)$

$=\dfrac{1}{2}(x+2y+2z)\{(x-2y)^2+(2y-2z)^2+(2z-x)^2\}$

$=0$

이때, x, y, z는 모두 양수이므로 $x+2y+2z\neq 0$ 이다.

따라서 $x-2y=0$, $2y-2z=0$, $2z-x=0$ 에서

$x=2y=2z$ 이므로

주어진 식에 $x=2z$, $y=z$를 대입하면

$\dfrac{4z^2}{xy}+\dfrac{2xz}{y^2}+\dfrac{3x^2}{yz}=\dfrac{4z^2}{2z^2}+\dfrac{4z^2}{z^2}+\dfrac{12z^2}{z^2}$

$2+4+12=18$

87) ④

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$이고

$b^3-c^3=(b-c)(b^2+bc+c^2)$이므로

$\dfrac{a^3-b^3}{b^3-c^3}=\dfrac{a-b}{b-c}$ 에서

$\dfrac{(a-b)(a^2+ab+b^2)}{(b-c)(b^2+bc+c^2)}=\dfrac{a-b}{b-c}$

$\dfrac{a^2+ab+b^2}{b^2+bc+c^2}=1$ ($\because$ $a\neq b$, $b\neq c$)

$a^2+ab+b^2=b^2+bc+c^2$

$a^2-c^2+b(a-c)=0$, $(a-c)(a+b+c)=0$

따라서 $a+b+c=0$ ($\because$ $a\neq c$)이므로

$a^3+b^3+c^3=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=3abc$ $\quad\therefore$ $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\dfrac{3abc}{abc}=3$

88) ④

$(x+2)(x+4)(x+6)(x+8)+k$

$=\{(x+2)(x+8)\}\{(x+4)(x+6)\}+k$

$=(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+k$

$x^2+10x+16=X$라 하면

$(x^2+10x+16)(x^2+10x+24)+k=X(X+8)+k$

$=X^2+8X+k$

이때, X^2+8X+k가 x에 대한 이차식의 완전제곱의 꼴로 인수분해되기 위해서는

$X^2+8X+k=(X+4)^2$을 만족시켜야 하므로

$k=16$

다시 $X=x^2+10x+16$을 대입하면

$(X+4)^2=(x^2+10x+20)^2$ 이므로

$f(x)=x^2+10x+20$

따라서 선지 중 옳은 것은 ④이다.

89) 72

$x^4+(n-1)x^3+nx^2+(n-1)x+1$

$=x^2\left\{x^2+(n-1)x+n+(n-1)\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right\}$

$=x^2\left\{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+(n-1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+n\right\}$

$=x^2\left[\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\right\}+(n-1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+n\right]$

$=x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+(n-1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+n-2\right\}$

이때, $x+\dfrac{1}{x}=X$라 하면

$x^2\left\{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+(n-1)\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+n-2\right\}$

$=x^2\{X^2+(n-1)X+n-2\}$

$=x^2(X+n-2)(X+1)$

$=x^2\left(x+\dfrac{1}{x}+n-2\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+1\right)$

$=\{x^2+(n-2)x+1\}(x^2+x+1)$

$k\neq 1$ 이므로 $k=n-2$ 에서 $n=k+2$

즉, $f(k)=k+2$ 이다.

$\therefore$ $f(2)+f(3)+\cdots+f(10)$

$=4+5+6+7+8+9+10+11+12$

$=72$

90) ⑤

ㄱ. $a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca=(a-b+c)^2$

ㄴ. $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

$=(ab+ac+b^2+bc)(c+a)+abc$

$=abc+ac^2+b^2c+bc^2+a^2b+a^2c+ab^2+abc+abc$

이 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면

$(b+c)a^2+(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)$

$$\begin{array}{ccc} a & & b+c \\ (b+c)a & & bc \end{array}$$

$=\{a+(b+c)\}\{(b+c)a+bc\}$
$=(a+b+c)(ab+bc+ca)$
ㄷ. 주어진 식을 a에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$a^2(b+c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)-abc$
$=(b+c)a^2-\left(b^2+bc-c^2\right)a+bc(b-c)$

$$\begin{array}{ccc} a & & -(b-c) \\ & \times & \\ (b+c)a & & -bc \end{array}$$

$=\{a-(b-c)\}\{(b+c)a-bc\}$
$=(a-b+c)(ab-bc+ca)$
따라서 $a-b+c$를 인수로 갖는 것은 ㄱ, ㄷ이다.

91) ③

조건 (가)에서 x에 대한 항등식
$(x-2)f(x)=(x+1)g(x)$의 양변에
$x=-1$을 대입하면 $f(-1)=0$,
$x=2$를 대입하면 $g(2)=0$이므로
다항식 $f(x)$는 $x+1$을 인수로 갖고,
다항식 $g(x)$는 $x-2$를 인수로 갖는다.
또한 두 이차식 $f(x)$, $g(x)$는 같은 일차식을 인수로 가져야 하므로
$f(x)=(x+1)(ax+b)$, $g(x)=(x-2)(ax+b)$
(a, b는 실수) …… ㉠
따라서 조건 (나)에서
$f(x)g(x)=4x^4-11x^2-9x-2$
$=(x+1)(x-2)(ax+b)^2$
$P(x)=4x^4-11x^2-9x-2$라 하면
$P(-1)=0$, $P(2)=0$이므로 조립제법을 이용하면 인수분해하면

-1	4	0	-11	-9	-2
		-4	4	7	2
2	4	-4	-7	-2	0
		8	8	2	
	4	4	1	0	

$4x^4-11x^2-9x-2=(x+1)(x-2)\left(4x^2+4x+1\right)$
$=(x+1)(x-2)(2x+1)^2$
따라서 $ax+b=2x+1$이므로 ㉠에서
$f(x)=(x+1)(2x+1)$, $g(x)=(x-2)(2x+1)$이다.
$\therefore\ f(2)-g(3)=15-7=8$

92) 5

다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로 다항식 x^4+ax^2+b는 $x-1$로 나누어떨어진다.
$f(x)=x^4+ax^2+b$라 하면 인수정리에 의하여
$f(1)=1+a+b=0$에서 $b=-a-1$
$f(x)=x^4+ax^2-a-1$
$=(x^2+a+1)(x^2-1)$
$=(x^2+a+1)(x+1)(x-1)$
이때, $f(x)$가 $(x-1)^2$을 인수로 가져야 하므로
x^2+a+1이 $x-1$을 인수로 가져야 한다.
인수정리에 의하여 $g(1)=1+a+1=0$이므로
$a=-2$, $b=1$
$\therefore\ a^2+b^2=5$

<다른풀이>
다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로 다항식 x^4+ax^2+b는 $x-1$로 나누어떨어진다.
그 때의 몫을 $Q(x)$라 하면
$x^4+ax^2+b=(x-1)Q(x)$
이때, 다항식 x^4+ax^2+b가 $(x-1)^2$을 인수로 가지므로
다항식 $Q(x)$도 $x-1$로 나누어떨어진다.
따라서 이를 조립제법을 이용하여 나타내면

1	1	0	a	0	b	
		1	1	$a+1$	$a+1$	
1	1	1	$a+1$	$a+1$	$a+b+1$	$=0$
		1	2	$a+3$		
	1	2	$a+3$	$2a+4$	$=0$	

$2a+4=0$에서 $a=-2$이므로 $a+b+1=0$에서 $b=1$
$\therefore\ a^2+b^2=5$

93) 240

$x=19$, $y=11$이라 하면
$$\frac{19^6-11^6}{19^4+19^2\times 11^2+11^4}=\frac{x^6-y^6}{x^4+x^2y^2+y^4}$$
$$=\frac{(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)}{x^4+x^2y^2+y^4}$$
$=x^2-y^2$
$=(x-y)(x+y)$
$=(19-11)\times(19+11)$
$=240$

94) ②

$x=2+\sqrt{6}$에서 $x-2=\sqrt{6}$이므로
양변을 제곱하면 $x^2-4x+4=6$
$\therefore\ x^2-4x=2$ ⋯⋯ ㉠
이때, $\dfrac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}$에서
분자를 $f(x)=x^3-5x^2+5x-1$이라 하면
$f(1)=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -5 & 5 & -1 \\ & & 1 & -4 & 1 \\ \hline & 1 & -4 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x-1)(x^2-4x+1)$
또한 분모를 인수분해하면
$$\begin{aligned} x^3-5x^2+4x &= x(x^2-5x+4) \\ &= x(x-4)(x-1) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} \therefore\ \frac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x} &= \frac{(x-1)(x^2-4x+1)}{x(x-4)(x-1)} \\ &= \frac{x^2-4x+1}{x^2-4x} = \frac{3}{2}\ (\because\ ㉠) \end{aligned}$$

<다른풀이>
$x=2+\sqrt{6}$에서 $x-2=\sqrt{6}$이므로 양변을 제곱하면
$x^2-4x+4=6$ $\qquad\therefore\ x^2-4x-2=0$
$\dfrac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x}$의 분자와 분모를 각각 x^2-4x-2로 나누었을 때의 몫은 모두 $x-1$이고, 나머지는 각각 $3x-3$, $2x-2$이므로
$$\begin{aligned} \frac{x^3-5x^2+5x-1}{x^3-5x^2+4x} &= \frac{(x^2-4x-2)(x-1)+3x-3}{(x^2-4x-2)(x-1)+2x-2} \\ &= \frac{0+3(x-1)}{0+2(x-1)}\ \ (\because\ x^2-4x-2=0) \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

95) ④

$$\begin{aligned} 2^{12}-1 &= (2^6+1)(2^6-1) \\ &= (2^6+1)(2^3+1)(2^3-1) \\ &= (2^6+1)(2^3+1)(2-1)(2^2+2+1) \\ &= 65\times9\times7 \\ &= 3^2\times5\times7\times13 \end{aligned}$$
따라서 $2^{12}-1$을 나누어떨어지도록 하는 30보다 크고 40보다 작은 자연수는 $5\times7=35$, $3\times13=39$이므로 그 합은
$35+39=74$

96) 풀이 참조

주어진 식의 좌변에 c에 대한 내림차순으로 정리하여 인수분해하면
$$\begin{aligned} &a^3-a^2b+ab^2-ac^2+bc^2-b^3 \\ &=-(a-b)c^2+a^3-b^3-a^2b+ab^2 \\ &=-(a-b)c^2+(a-b)(a^2+ab+b^2)-ab(a-b) \\ &=(a-b)(-c^2+a^2+b^2) \end{aligned}$$
에서 $a=b$ 또는 $a^2+b^2=c^2$이다.
따라서 주어진 삼각형은 $a=b$인 이등변삼각형 또는 빗변의 길이가 c인 직각삼각형이다.

97) ③

제1관의 세로의 길이가 $x+3$이고
넓이는 $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$이므로
제1관의 가로의 길이는 $x+4$이다.
따라서 제2관의 가로의 길이가 $x+4$이고
넓이는 $x^2+5x+4=(x+4)(x+1)$이므로
제2관의 세로의 길이는 $x+1$이다.
따라서 제3관의 세로의 길이가 $x+1$이고
넓이는 $x^3+4x^2+11x+8$이다.
$f(x)=x^3+4x^2+11x+8$이라 하면 $f(-1)=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & 4 & 11 & 8 \\ & & -1 & -3 & -8 \\ \hline & 1 & 3 & 8 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+4x^2+11x+8=(x+1)(x^2+3x+8)$
따라서 제3관의 가로의 길이는 x^2+3x+8이므로
$a=3$, $b=8$이다.
$\therefore\ ab=24$

98) ①

한 모서리의 길이가 x인 정육면체의 부피는 x^3이고,
[그림 1]에서 높이 방향으로 구멍을 뚫은 부분은
세 모서리의 길이가 각각 y, y, x인
직육면체 모양이므로
그 부피는 $y\times y\times x=xy^2$이다.
마찬가지로 [그림 2]에서 각 면에 뚫은
구멍의 부피도 모두 xy^2이다.

이때, 뚫은 세 개의 구멍에서 겹치는 부분은
한 모서리의 길이가 y인 정육면체 모양이므로
그 부피는 y^3이다.
따라서 구하는 [그림 2]의 입체의 부피는

$$\begin{aligned}x^3-3xy^2+2y^3&=x^3-y^3-3xy^2+3y^3\\&=(x-y)(x^2+xy+y^2)-3y^2(x-y)\\&=(x-y)(x^2+xy-2y^2)\\&=(x-y)(x-y)(x+2y)\\&=(x-y)^2(x+2y)\end{aligned}$$

<다른풀이>
본 풀이에서 구한 [그림 2]의 입체의 부피
$x^3-3xy^2+2y^3$을
다음과 같이 인수분해할 수도 있다.
$x^3-3xy^2+2y^3$을 x에 대한 식으로 보자.
$f(x)=x^3-3y^2x+2y^3$이라 하면
$f(y)=y^3-3y^3+2y^3=0$이므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} y & 1 & 0 & -3y^2 & 2y^3 \\ & & y & y^2 & -2y^3 \\ \hline & 1 & y & -2y^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$\begin{aligned}x^3-3xy^2+2y^3&=(x-y)(x^2+xy-2y^2)\\&=(x-y)(x-y)(x+2y)\\&=(x-y)^2(x+2y)\end{aligned}$$

99) 871

100) -5

최고차항의 계수가 1인 다항식 $f(x)$의 최고차항을 x^n이라 하고 주어진 등식에 대입하여
최고차항을 비교하면
$x\times 2^nx^n=8x\times x^n$에서 $2^n=8$ $\qquad\therefore n=3$
즉, $f(x)$는 삼차다항식이다.
주어진 등식의 양변에 $x=0$를 대입하면
$7f(0)=0\times f(1)$ $\qquad\therefore f(0)=0$ ……㉠
주어진 등식의 양변에 $x=-1$를 대입하면
$6f(-2)=-8f(0)=0$ (∵ ㉠)
$\therefore f(-2)=0$ ……㉡
주어진 등식의 양변에 $x=-3$를 대입하면
$4f(-6)=-24f(-2)=0$ (∵ ㉡)
$\therefore f(-6)=0$ ……㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 인수정리에 의하여 $f(x)$는
$x,\ x+2,\ x+6$을 반드시 인수로 갖는다.
따라서 $f(x)=x(x+2)(x+6)$이므로 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는
$f(-1)=-1\times1\times5=-5$

<다른풀이>
최고차항의 계수가 1인 $f(x)$는 삼차다항식이고
$f(0)=0$이므로 $f(x)=x^3+ax^2+bx$라 하고, 이것을 주어진 등식에 대입하면
$(x+7)(8x^3+4ax^2+2bx)$
$=8x\{(x+1)^3+a(x+1)^2+b(x+1)\}$
양변의 삼차항의 계수를 비교하면
$4a+56=8(3+a),\ 4a=32$ $\qquad\therefore a=8$
양변의 일차항의 계수를 비교하면
$7\times2b=8(1+8+b),\ 6b=72$ $\qquad\therefore b=12$
$\therefore f(x)=x^3+8x^2+12x$
따라서 $f(x)$를 $x+1$로 나눈 나머지는
$f(-1)=-1+8-12=-5$

101) ④

$x^3+y^3+z^3=3xyz$ ……㉠
에서
$x^3+y^3+z^3-3xyz$
$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$
$=\dfrac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$
이므로 $x+y+z=0$ 또는 $x=y=z$이다.
(ⅰ) $x+y+z=0$인 경우
$x=-y-z$이므로 양변을 제곱하면
$x^2=y^2+2yz+z^2$에서 $y^2+z^2-x^2=-2yz$
마찬가지 방법으로
$z^2+x^2-y^2=-2zx,\ x^2+y^2-z^2=-2xy$이므로

$$\begin{aligned}&\frac{2x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{2y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{2z^2}{x^2+y^2-z^2}\\&=\frac{2x^2}{-2yz}+\frac{2y^2}{-2zx}+\frac{2z^2}{-2xy}\\&=-\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}\\&=-\frac{3xyz}{xyz}\ (\because ㉠)\\&=-3\end{aligned}$$

(ⅱ) $x=y=z$인 경우
$y=x,\ z=x$를 대입하면

$$\frac{2x^2}{y^2+z^2-x^2}+\frac{2y^2}{z^2+x^2-y^2}+\frac{2z^2}{x^2+y^2-z^2}$$
$$=\frac{2x^2}{x^2}+\frac{2x^2}{x^2}+\frac{2x^2}{x^2}=6$$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 모든 값의 합은
$(-3)+6=3$이다.

102) 5

해결단계

❶ 단계	n^4+4를 인수분해한다.
❷ 단계	n^4+4가 소수임을 이용하여 n의 값을 구한다.
❸ 단계	n의 값에 따른 소수을 구한다.

$n^4+4=a$ (a는 소수)라 하면
$n^4+4=(n^4+4n^2+4)-4n^2=(n^2+2)^2-(2n)^2$
$=(n^2+2n+2)(n^2-2n+2)$이므로
$n^2+2n+2,\ \ n^2-2n+2$중 하나는 1이어야 한다.
(ⅰ) $n^2+2n+2=1$일 때, $n^2+2n+1=0$
$(n+1)^2=0,\quad \therefore n=-1$
그런데 n은 자연수이므로 모순이다.
(ⅱ) $n^2-2n+2=1$일 때, $n^2-2n+1=0$
$(n-1)^2=0,\quad \therefore n=1$
(ⅰ),(ⅱ) 에서 $n=1$ 이므로 $a=1^4+4=5$
즉, 구하는 소수는 5이다.

103) $24abc$

해결단계

❶ 단계	$b+c-a=A, c+a-b=B, a+b-c=C$로 놓는다.
❷ 단계	주어진 식을 인수분해한 후 a, b, c에 대하여 정리한다.

$b+c-a=A, c+a-b=B, a+b-c=C$로 놓으면
$a+b+c=A+B+C$이므로
$(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$
$=(A+B+C)^3-A^3-B^3-C^3$
$=\{(A+B+C)^3-A^3\}-(B^3+C^3)$
$=\{(A+B+C-A)^3+3A(A+B+C)(A+B+C-A)\}$
$\qquad -\{(B+C)^3-3BC(B+C)\}$
$=(B+C)^3+3A(A+B+C)(B+C)-(B+C)^3+3BC(B+C)$
$=3(B+C)(A^2+AB+AC+BC)$
$=3(B+C)\{A^2+(B+C)A+BC\}$
$=3(B+C)(A+B)(A+C)$
$=3\{(c+a-b)+(a+b-c)\}\{(b+c-a)+(c+a-b)\}$
$\qquad \times\{(b+c-a)+(a+b-c)\}$
$=3\times 2a\times 2c\times 2b=24abc$

104) ①

다항식 x^3+3x^2-7x+2를
$A(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_1(x)$,
$B(x)$로 나누었을 때의 몫을 $Q_2(x)$라 하면
그때의 나머지가 모두 $2x-3$이므로
$x^3+3x^2-7x+2=A(x)Q_1(x)+2x-3$
$x^3+3x^2-7x+2=B(x)Q_2(x)+2x-3$
각 식의 양변에서 $2x-3$을 빼면
$x^3+3x^2-9x+5=A(x)Q_1(x)$
$x^3+3x^2-9x+5=B(x)Q_2(x)$
즉, $A(x)$, $B(x)$는 x^3+3x^2-9x+5의 인수이다.
$f(x)=x^3+3x^2-9x+5$라 하면 $f(1)=0$이므로
조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} 1 & 1 & 3 & -9 & 5 \\ & & 1 & 4 & -5 \\ \hline & 1 & 4 & -5 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3+3x^2-9x+5=(x-1)(x^2+4x-5)$
$\qquad\qquad\qquad\quad =(x-1)^2(x+5)$
따라서 서로 다른 두 이차식 $A(x)$, $B(x)$는
$(x-1)^2$, $(x-1)(x+5)$이다.
$\therefore\ A(x)+B(x)=(x-1)^2+(x-1)(x+5)$
$\qquad\qquad\qquad\quad =2(x-1)(x+2)$
따라서 다항식 $A(x)+B(x)$를 $x+1$로 나누었을 때의 나머지는 나머지정리에 의하여
$A(-1)+B(-1)=-4$이다.

105) 20

$N=a^4-3a^2+9$
$\quad =\{(a^2)^2+6a^2+9\}-9a^2$
$\quad =(a^2+3)^2-(3a)^2$
$\quad =(a^2+3a+3)(a^2-3a+3)\qquad \cdots\cdots$ ㉠
이때, N이 소수이므로 $a^2+3a+3=1$ 또는
$a^2-3a+3=1$이다.

(i) $a^2+3a+3=1$인 경우

$a^2+3a+2=0$, $(a+2)(a+1)=0$에서

$a=-2$ 또는 $a=-1$이므로 a가 자연수라는 조건에 모순이다.

(ii) $a^2-3a+3=1$인 경우

$a^2-3a+2=0$, $(a-1)(a-2)=0$에서

$a=1$ 또는 $a=2$이고 ㉠에 각각 대입하면

$N=7$ 또는 $N=13$

(i), (ii)에서 가능한 소수 N의 값의 합은

$7+13=20$이다.

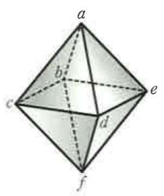
106) ①

$$\begin{aligned}
&x^{27}+x^{26}+x^{24}+x^{23}+x+3\\
&=x^{27}+x^{26}+x^{25}+x^{24}+x^{23}-x^{25}+x+3\\
&=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)-x^{25}+x+3\\
&=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)-(x^{25}-1)+x+2\\
&=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)\\
&\quad-(x^5-1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)+x+2\\
&=x^{23}(x^4+x^3+x^2+x+1)\\
&-(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)+x+2\\
&=(x^4+x^3+x^2+x+1)\{x^{23}-(x-1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)\}\\
&\quad+x+2
\end{aligned}$$

따라서 구하는 나머지는 $x+2$이다.

107) 15

오른쪽 그림과 같이 여섯 개의 꼭짓점에 적힌 자연수를 a, b, c, d, e, f라 하면 여덟 개의 정삼각형의 면에 적힌 수의 합은



$$\begin{aligned}
&abc+acd+abc+ade+fbc+fcd+fbe+fde\\
&=(a+f)(bc+cd+be+de)\\
&=(a+f)\{c(b+d)+e(b+c)\}\\
&=(a+f)(b+d)(c+e)\\
&=105
\end{aligned}$$

이때, a, b, c, d, e, f는 모두 자연수이고,

$105=7\times5\times3$이므로

$$\begin{aligned}
&(a+f)(b+d)(c+e)\\
&=7+5+3\\
&=15
\end{aligned}$$

108) $(x+y+z)^3$

109) $11-2i$

$$\begin{aligned}
(3+4i)(1-2i)&=3-6i+4i-8i^2\\
&=3-2i-8\cdot(-1)\\
&=11-2i
\end{aligned}$$

110) -4

$\sqrt{-2}\sqrt{-8}=\sqrt{2}i\cdot\sqrt{8}i=\sqrt{16}i^2=-4$

111) 2, 3, 9

112) 18

복소수 z에 대하여 $z^2<0$이면 z는 순허수이다.

조건 (가)에서 $(1-i+z)^2<0$이므로

$1-i+z$는 순허수이다.

즉, $1-i+a+bi=(a+1)+(b-1)i$가 순허수이므로

$a=-1$, $b\neq1$

조건 (나)에서

$z^2=(a+bi)^2=(-1+bi)^2=1-b^2-2bi=c-8i$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$1-b^2=c$, $-2b=-8$이므로 $b=4$, $c=-15$

$\therefore a+b-c=-1+4-(-15)=18$

113) ②

$\{a(1+i)+b(1-i)\}^2=-4<0$이므로

복소수 $a(1+i)+b(1-i)$는 순허이다.

$a(1+i)+b(1-i)=(a+b)+(a-b)i$에서

$a+b=0$ …… ㉠
이때 $\{(a-b)i\}^2=-4$이므로
$a-b=2$ 또는 $a-b=-2$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면
$a=1,\ b=-1$ 또는 $a=-1,\ b=1$이므로
$ab=(-1)\times 1=-1$

다른 풀이

$a(1+i)+b(1-i)$가 -4의 제곱이므로
$a(1+i)+b(1-i)$는 $2i$ 또는 $-2i$이다.
(ⅰ) $(a+b)+(a-b)i=2i$일 때
$a+b=0$이고 $a-b=2$이므로
$a=1,\ b=-1$
(ⅱ) $(a+b)+(a-b)i=-2i$일 때
$a+b=0$이고 $a-b=-2$이므로
$a=-1,\ b=1$
$\therefore\ ab=-1$

114) ③

$z_1=1+i$
$z_2=iz_1=i(1+i)=i+i^2=i-1$
$z_3=iz_2=i(i-1)=i^2-i==-1-i$
$z_4=iz_3=i(-1-i)=-i-i^2=-i+1$
$z_5=iz_4=i(-i+1)=-i^2+i=1+i$
이므로 $z_n=z_{n+4}$이다.
$\therefore\ z_{1000}=z_{996}=z_{992}=\ \cdots\ =z_4=1-i$

다른 풀이

$z_2=iz_1$
$z_3=iz_2=i^2z_1$
$z_4=iz_3=i^3z_1$
$z_5=iz_4=i^4z_1=z_1\ (\because\ i^4=1)$
그러므로 $z_n=z_{n+4}$이다.
$z_{1000}=z_4=i^3z=-i(1+i)=1-i$

115) ③, ④

① $\alpha=a+bi,\ \overline{\alpha}=a-bi$ ($a,\ b$는 실수)에서
$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a=0$이므로
$\alpha=bi$이고 $\alpha^2=-b^2\le 0$ (거짓)
② (반례) $\alpha=1+i,\ \beta=2-i$ (거짓)
③ $\alpha\overline{\alpha}=1$이면 $\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$이므로 $\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\alpha+\overline{\alpha}$는 실수이다. (참)
④ $\alpha=a+bi,\ \beta=c+di$ ($a,\ b,\ c,\ d$는 실수)이면
$\alpha\beta=(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i=0$
$ac-bd=0$ …… ㉠
$ad+bc=0$ …… ㉡
(ⅰ) $c\ne 0$이면 ㉠에서 $a=\dfrac{bd}{c}$이고, 이를 ㉡에 대입하여 정리하면
$b(c^2+d^2)=0, c\ne 0$이므로 $b=0$
$b=0$ 이면 ㉠에서 $a=0$이므로 $\alpha=0$이다.
(ⅱ) $c=0$이면 ㉠, ㉡에서 $d=0$ 또는 $a=b=0$이므로
$\alpha=0$ 또는 $\beta=0$이다. (참)
⑤ (반례) $\alpha=1,\ \beta=i$ (거짓)
따라서 선지 중 옳은 것은 ③, ④이다.

116) 8

$z^2=4\sqrt{3}+4i$이므로 $\overline{z}^2=4\sqrt{3}-4i$이다.
$z^2\times\overline{z}^2=(4\sqrt{3}+4i)(4\sqrt{3}-4i)$
$=48+16=64$
$\therefore\ z\overline{z}=8\ (\because\ z\overline{z}\ge 0)$

다른 풀이

$z=a+bi$ ($a,\ b$는 실수)라 하면
$z^2=a^2-b^2+2abi=4\sqrt{3}+4i$
이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=4\sqrt{3},\ ab=2$
$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+4a^2b^2$
$=(4\sqrt{3})^2+4\times 2^2=64$
$\therefore\ z\overline{z}=a^2+b^2=8$ ($\because\ a,\ b$는 실수)

117) ②

$\overline{\alpha}\beta=4$에서 $\overline{\overline{\alpha}\beta}=\alpha\overline{\beta}=4$이므로
$\beta=\dfrac{4}{\overline{\alpha}},\ \dfrac{4}{\overline{\beta}}=\alpha$

$\therefore \left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)^2=\left(\frac{4}{\alpha}+\alpha\right)^2=(5i)^2=-25$

118) ④

$z+\frac{1}{z}$ 이 실수이므로 $z+\frac{1}{z}=\overline{z+\frac{1}{z}}$

$\overline{z+\frac{1}{z}}=\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}$ 이므로 $\overline{z}+\frac{1}{\overline{z}}=z+\frac{1}{z}$ 에서

$\overline{z}-z+\frac{1}{\overline{z}}-\frac{1}{z}=0$

$\overline{z}-z-\frac{\overline{z}-z}{z\overline{z}}=(\overline{z}-z)\left(1-\frac{1}{z\overline{z}}\right)=0$

$z=\overline{z}$ 또는 $z\overline{z}=1$

이때, $z=\overline{z}$ 이면 z는 실수이므로 $z\overline{z}=1$

다른 풀이

$z=a+bi\,(a,\ b$는 실수, $b\neq0)$라 하면

$z+\frac{1}{z}=a+bi+\frac{1}{a+bi}$

$=a+bi+\frac{a-bi}{(a+bi)(a-bi)}$

$=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}$

$=\left(a+\frac{a}{a^2+b^2}\right)+\left(b-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$

이므로 $z+\frac{1}{z}$ 이 실수이기 위해서는 허수부분이 0 이어야 한다.

따라서 $b-\frac{b}{a^2+b^2}=0$ 에서 $b\left(1-\frac{1}{a^2+b^2}\right)=0$

$\therefore a^2+b^2=1\,(b\neq0)$

$\therefore z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2=1$

119) ①

$z=a+bi\,(a,\ b$는 실수, $b\neq0)$라 하면 $\overline{z}=a-bi$

$z\overline{z}+\frac{z}{\overline{z}}=(a+bi)(a-bi)+\frac{a+bi}{a-bi}$

$=(a^2+b^2)+\frac{a^2-b^2+2abi}{a^2+b^2}$

$=\left(a^2+b^2+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)+\frac{2ab}{a^2+b^2}i=5 \quad \cdots\cdots$ ㉠

이때, 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$\frac{2ab}{a^2+b^2}=0,\ a=0\,(\because b\neq0)$

이를 ㉠에 대입하면

$b^2-1=5$ 이므로 $b^2=6$

$\therefore (z-\overline{z})^2=(2bi)^2=-4b^2=-24$

120) ③

ㄱ. $z^4<0$ 이므로 z^2은 순허수이다.

$z^2=ki\,(k\neq0)$라 하면

$\overline{z}^2=\overline{z^2}=-ki$ 이므로 $\overline{z}^2$은 순허수이다. (참)

ㄴ. $z=a+bi\,(a,\ b$는 실수)에 대하여

$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi=(a+b)(a-b)+2abi$ 가

순허수이므로 $(a+b)(a-b)=0,\ 2ab\neq0$ 이다.

즉, 0 이 아닌 두 실수 $a,\ b$에 대하여

$a=b$ 또는 $a=-b$ 이어야 한다.

그러므로 $z=a+ai$ 또는 $z=a-ai$ 이다.

$z=a+ai$ 인 경우 z의 실수부분과 허수부분은 같지만

$z=a-ai$ 인 경우 z의 실수부분과 허수부분은 같지 않다. (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 $z=a\pm ai\,(a\neq0)$라 하면 $\overline{z}=a\mp ai$ 이므로

$z+\overline{z}=4$ 에서 $2a=4,\ a=2$ 이다.

즉, $z=2\pm2i,\ \overline{z}=2\mp2i$ 이므로 $z\overline{z}=4+4=8$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

121) 25

$z=\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$

$z^2=\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=-i$

$z^4=(z^2)^2=(-i)^2=-1$

$z^8=(z^4)^2=(-1)^2=1$

이므로 복소수 z의 거듭제곱은 $z,\ z^2,\ \cdots,\ z^8$ 이 반복된다.

따라서 $z^n=1$ 을 만족시키는 자연수 n의 꼴은

$n=8k$ (k는 자연수)이므로 $1\le n\le200$ 을 만족시키는 자연수 n은 $8\times1,\ 8\times2,\ \cdots,\ 8\times25$ 로 모두 25 개이다.

122) ①

$f(1)=i-2i^2$

$f(2)=2i^2-3i^3$
$f(3)=3i^3-4i^4$
$f(4)=4i^4-5i^5$
$\vdots$
$f(16)=16i^{16}-17i^{17}$
$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(16)$
$=(i-2i^2)+(2i^2-3i^3)+(3i^3-4i^4)+\cdots+(16i^{16}-17i^{17})$
$=i-17i^{17}$
$=i-17i$ ($\because$ 자연수 n에 대하여 $i^n=i^{n+4}$)
$=-16i$

123) ④

두 실수 $a,\ b\ (b\neq 0)$에 대하여
$z=a+bi$라 하면 $\overline{z}=a-bi$이므로
$z^2=\overline{z}$에서 $(a+bi)^2=a-bi$
$a^2-b^2+2abi=a-bi$
이때, 복소수가 서로 같을 조건에 의하여
$a^2-b^2=a$ …… ㉠
$2ab=-b$ …… ㉡
㉡에서 $2ab+b=0,\ b(2a+1)=0$
$\therefore a=-\dfrac{1}{2}\ (\because b\neq 0)$
이를 ㉠에 대입하면 $b^2=\dfrac{3}{4}$
$\therefore z+\overline{z}=2a=-1,\ z\overline{z}=a^2+b^2=1$
한편, $z^2=\overline{z}$에서 $\overline{z}^2=z$이므로
$z^3=zz^2=z\overline{z},\ z^4=zz^3=z^2\overline{z}=\overline{z}^2=z$
$z^5=zz^4=z^2=\overline{z},\ z^6=zz^5=z\overline{z}$
$\therefore\ z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1$
$=z\overline{z}+\overline{z}+z+z\overline{z}+\overline{z}+z+1$
$=2(z+\overline{z})+2z\overline{z}+1$
$=2\times(-1)+2\times1+1=1$

124) 75

$\dfrac{1}{i}=-i,\ \dfrac{1}{i^2}=-1,\ \dfrac{1}{i^3}=i,\ \dfrac{1}{i^4}=1$이므로
$\dfrac{1}{i}-\dfrac{1}{i^2}+\dfrac{1}{i^3}-\dfrac{1}{i^4}+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{i^n}$
$=(-i+1+i-1)+(-i+1+i-1)+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{i^n}$
$=1-i$
에서 $n=4k+2$ (k는 음이 아닌 정수)이므로
$1\le n\le 300$에서 $1\le 4k+2\le 300$
$\therefore -\dfrac{1}{4}\le k\le\dfrac{149}{2}=74.5$
위 부등식을 만족시키는 음이 아닌 정수 k의 개수가 75이므로
구하는 자연수 n의 개수는 75이다.

125) 24

$z^2=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2=\dfrac{2}{-2i}=i$
$z^4=(z^2)^2=-1$
$z^8=(z^4)^2=1$이고
$w^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$
$w^3=w\times w^2=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\times\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+3}{4}=1$
이때, 등식 $z^n=w^n$이 성립하려면
n은 3과 8의 공배수, 즉 24의 배수이어야 한다.
따라서 구하는 자연수 n의 최솟값은 24이다.

126) ②

$\sqrt{x}\sqrt{y}=-\sqrt{xy}$에서 $x<0,\ y<0$이고
$\dfrac{\sqrt{z}}{\sqrt{y}}=-\sqrt{\dfrac{z}{y}}$에서 $z>0$이다.
따라서 $x+y<0,\ z-y>0,\ x-z<0$이므로
$|x+y|+\sqrt{(z-y)^2}-|x-z|$
$=-(x+y)+(z-y)-\{-(x-z)\}$
$=-2y$

127) ③

$\sqrt{x}\sqrt{x+4}=-\sqrt{x^2+4x}$가 성립하려면
$x\le 0,\ x+4\le 0$을 동시에 만족시켜야 하므로
$x\le -4$ …… ㉠
$\dfrac{\sqrt{x+6}}{\sqrt{x-5}}=-\sqrt{\dfrac{x+6}{x-5}}$이 성립하려면
$x+6\ge 0,\ x-5<0$을 동시에 만족시켜야 하므로
$-6\le x<5$ …… ㉡

㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 x의 값의 범위는
$-6 \le x \le -4$이므로
이를 만족시키는 정수 x는 -6, -5, -4로 3개다.

128) 2

129) 16

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-4<0$
이므로 방정식 $x^2-x+1=0$의 두 허근은 z, $\overline{z}$이다.
따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$z+\overline{z}=1$ …… ㉠
$z\overline{z}=1$ …… ㉡
$\therefore\ z^n(1-z)^{2n+1}=z^n\times\overline{z}^{2n+1}$ ($\because$ ㉠)
$=(z\overline{z})^n\times\overline{z}^{n+1}=\overline{z}^{n+1}$ ($\because$ ㉡) …… ㉢
이때, $\overline{z}$는 방정식 $x^2-x+1=0$의 근이므로
$\overline{z}^2-\overline{z}+1=0$에서 $(\overline{z}+1)(\overline{z}^2-\overline{z}+1)=0$
$\therefore\ \overline{z}^3=-1,\ \overline{z}^6=1$
따라서 $z^n(1-z)^{2n+1}$의 값이 양의 실수이기 위해서는
㉢에서 $n+1=6k$ (k는 자연수)
즉, $n=6k-1$꼴이어야 한다.
주어진 조건에 의하여 $n\le 100$이므로
이를 만족시키는 k는 $1, 2, 3, \cdots, 16$이다.
따라서 구하는 자연수 n의 개수는 16이다.

130) (1) $\pm(3+i)$ (2) $\pm 20(3-i)$

(1) $z=a+bi$ (a, b는 실수)로 놓으면, 문제의 조건으로부터
$z^2=(a+bi)^2=8+6i$
곧, $a^2-b^2+2abi=8+6i$
$\therefore\ a^2-b^2=8,\ 2ab=6$
$b=\dfrac{3}{a}$을 $a^2-b^2=8$에 대입하면
$a^2-\dfrac{9}{a^2}=8 \qquad \therefore\ a^4-8a-9=0$
$\therefore\ (a^2-9)(a^2+1)=0$
$\therefore\ a^2=9$ ($\because$ a는 실수)
$\therefore\ a=\pm3,\ b=\pm1$
$\therefore\ z=\pm(3+i)$

(2) $z^2=8+6i$에서 $z^2-8=6i$
양변에 제곱하면
$z^4-16z^2+64=36i^2$
$\therefore\ z^4-16z^2=-100$
$\therefore\ z^3-16z-\dfrac{100}{z}=\dfrac{z^4-16z^2-100}{z}$
$=\dfrac{-200}{\pm(3+i)}=\mp 20(3-i)$

131) ⑤

ㄱ. $\dfrac{z^2}{1-z}$이 실수이므로 그 켤레복소수인
$\overline{\left(\dfrac{z^2}{1-z}\right)}=\dfrac{\overline{z^2}}{1-\overline{z}}$은 실수이다. (참)
ㄴ. ㄱ에서 $\dfrac{z^2}{1-z}=\dfrac{\overline{z^2}}{1-\overline{z}}$이므로
$z^2(1-\overline{z})=\overline{z}^2(1-z)$, $z^2-\overline{z}^2-z^2\overline{z}+z\overline{z}^2=0$
$(z+\overline{z})(z-\overline{z})-z\overline{z}(z-\overline{z})=0$
$(z-\overline{z})(z+\overline{z}-z\overline{z})=0$이므로 $z=\overline{z}$ 또는 $z+\overline{z}=z\overline{z}$
한편, z는 실수가 아니므로 $z+\overline{z}=z\overline{z}$ (참)
ㄷ. 두 실수 a, b $(b\ne 0)$에 대하여
$z=a+bi$라고 하면 $z+\overline{z}=(a+bi)+(a-bi)=2a$
$z\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2>0$이고
ㄴ에서 $z+\overline{z}=z\overline{z}$ 이므로
복소수 z의 실수부분은 양수이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

132) ②

$z=a+bi$ (a, b는 실수)라 할 때, $z^4<0$을
만족시키려면
$z^2=(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$가 순허수가 되어야
하므로
z^2의 실수부분은 $a^2-b^2=0$이고, 허수부분은
$2ab\ne 0$이어야 한다.
즉, $a+b=0$ 또는 $a-b=0$이고, ……(ⅰ)
$a\ne 0$, $b\ne 0$이어야 한다. ……(ⅱ)
주어진 복소수는
$(2+i)x^2+(3i-2)x-12+2i$
$=(2x^2-2x-12)+(x^2+3x+2)i$

$=2(x-3)(x+2)+(x+1)(x+2)i$이므로
(i) $a+b=0$ 또는 $a-b=0$
$a+b=2(x-3)(x+2)+(x+1)(x+2)$
$=(3x-5)(x+2)=0$
이므로 $x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=-2$
$a-b=2(x-3)(x+2)-(x+1)(x+2)$
$=(x-7)(x+2)=0$
이므로 $x=7$ 또는 $x=-2$
따라서 $x=-2$ 또는 $x=\frac{5}{3}$ 또는 $x=7$
(ii) $a=2x^2-2x-12=2(x-3)(x+2)\neq 0$과
$b=x^2+3x+2=(x+1)(x+2)\neq 0$에서
$x\neq -2$, $x\neq -1$, $x\neq 3$
(i), (ii)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 실수 x의 값은 $\frac{5}{3}$ 또는 7이다.
따라서 모든 실수 x의 값의 합은 $\frac{5}{3}+7=\frac{26}{3}$이다.

133) ④

$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1+2i-1}{2}=i$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2=\frac{2}{1+2i-1}=-i$
이므로
$z_n=\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{2n}-\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n}=\left\{\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}^n-\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^n$
$=i^n-(-i)^n$
따라서 $z_{4k-3}=2i$, $z_{4k-2}=0$, $z_{4k-1}=-2i$, $z_{4k}=0$
(k는 자연수)
ㄱ. 서로 다른 z_n의 값은 $2i$, 0, $-2i$로 모두 3개다.
(거짓)
ㄴ. $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k-3}=2i$
$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k-2}=2i$
$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k-1}=0$
$z_1+z_2+z_3+\cdots+z_{4k}=0$
즉, $z_1+z_2+z_3+\cdots+z_n$으로 가능한 서로 다른 값은 $2i$, 0이고 그 총합은 $2i$이다. (참)
ㄷ. $z_l\times z_m<0$을 만족시키기 위해선 $2i\times 2i$ 또는 $(-2i)\times(-2i)$이어야 한다.
(i) $2i\times 2i$인 경우
l과 m이 모두 $4k-3$ 꼴이어야 하므로 가능한 10보다 작은 자연수는 1, 5, 9이다.
따라서 순서쌍 $(l,\ m)$은
$(1,\ 1)$, $(1,\ 5)$, $(5,\ 1)$, $(5,\ 5)$,
$(1,\ 9)$, $(9,\ 1)$, $(9,\ 9)$, $(5,\ 9)$, $(9,\ 5)$의 9개이다.
(ii) $(-2i)\times(-2i)$인 경우
l과 m이 모두 $4k-1$ 꼴이어야 하므로 가능한 10보다 작은 자연수는 3, 7이다.
따라서 순서쌍 $(l,\ m)$은
$(3,\ 3)$, $(3,\ 7)$, $(7,\ 3)$, $(7,\ 7)$의 4개이다.
(i), (ii)에서 구하는 순서쌍 $(l,\ m)$의 개수는 13이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

134) $x^2-4x+5=0$

$x^2-\{(2+i)+(2-i)\}x+(2+i)(2-i)=0$
$\therefore\ x^2-4x+5=0$

135) $-5<k\leq -4$

$x^2-2x+k+5=0$ 의 두 근을 $\alpha,\ \beta$ 라 하면
(i) $\frac{D}{4}=(-1)^2-(k+5)\geq 0$ $\therefore\ k\leq -4$
(ii) $\alpha+\beta=2>0$
(iii) $\alpha\beta=k+5>0$ $\therefore\ k>-5$
(i), (ii), (iii)에서 공통 범위를 구하면 $-5<k\leq -4$

136) $-2<k\leq -1$

주어진 이차방정식의 판별식을 D, 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
(i) $\frac{D}{4}=(-1)^2-(k+2)\geq 0$, $-1-k\geq 0$ $\therefore\ k\leq -1$
(ii) $\alpha+\beta=-2<0$
(iii) $\alpha\beta=k+2>0$ $\therefore\ k>-2$
이상에서 공통 범위를 구하면 $-2<k\leq -1$

137) $k>4$

$x^2+2x-k+4=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$\alpha\beta=-k+4<0 \quad \therefore\ k>4$

$=2+1+2+1+0$
$=6$

138) $k<1$

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로
$\alpha\beta=k-3<0 \quad \therefore\ k<3 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, 음의 근의 절댓값이 양의 근보다 작으므로
$\alpha+\beta=-2(k-1)>0 \quad \therefore\ k<1 \quad \cdots\cdots$ ㉠
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면
$k<1$

139) 2

주어진 이차방정식의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 두 근의 부호가 서로 다르므로
$\alpha\beta=\dfrac{-m+1}{3}<0 \quad \therefore m>1 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또 두 실근의 절댓값이 같으므로
$\alpha+\beta=-\dfrac{m^2+m-6}{3}=0, \quad m^2+m-6=0$
$(m+3)(m-2)=0 \quad \therefore\ m=-3$ 또는 $m=2 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 구하는 m의 값은 2이다.

140) ③

x에 대한 방정식 $(1-n)x^2+2\sqrt{2}x-1=0$은
(i) $n=1$인 경우
주어진 방정식은 $2\sqrt{2}x-1=0$이므로 $x=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$이다.
$\therefore f(1)=1$
(ii) $n\neq1$인 경우
주어진 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=(\sqrt{2})^2-(-1)\times(1-n)=3-n$이므로
$f(0)=f(2)=2,\ f(3)=1,\ f(4)=0$
(i), (ii)에 의하여
$f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$

141) 4

$|x^2-(2a+1)x+3a+1|=2$의 한 근이 a가 되려면
$|a^2-(2a+1)a+3a+1|=2$
$|a^2-2a-1|=2$에서
$a^2-2a-1=2$ 또는 $a^2-2a-1=-2$
$a^2-2a-3=0$ 또는 $a^2-2a+1=0$
$(a+1)(a-3)=0$ 또는 $(a-1)^2=0$
$\therefore a=-1$ 또는 $a=3$ 또는 $a=1$
따라서 구하는 모든 양수 a의 값의 합은 $3+1=4$

142) 60

$[x]^2-3[x]-10=0$에서 $([x]+2)([x]-5)=0$
$\therefore [x]=-2$ 또는 $[x]=5$
따라서 $-2\le x<-1$ 또는 $5\le x<6$이므로
$abcd=-2\times(-1)\times5\times6=60$

143) ⑤

x의 값의 범위가 $0<x<3$이므로 다음과 같은 범위에 따라 방정식 $x^2-2[x]+x-2=0$의 근을 구할 수 있다.
(i) $0<x<1$일 때, $[x]=0$
$x^2-2[x]+x-2=0$, $x^2+x-2=0$, $(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$
따라서 $0<x<1$에서 주어진 방정식의 근은 존재하지 않는다.
(ii) $1\le x<2$일 때, $[x]=1$
$x^2-2[x]+x-2=0$, $x^2+x-4=0$
$\therefore x=\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$
따라서 $1\le x<2$에서 주어진 방정식의 근은
$x=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

(iii) $2 \le x < 3$일 때, $[x]=2$

$x^2-2[x]+x-2=0$, $x^2+x-6=0$, $(x+3)(x-2)=0$

$\therefore x=-3$ 또는 $x=2$

따라서 $2 \le x < 3$에서 주어진 방정식의 근은 $x=2$

(i)~(iii)에서 방정식 $x^2-2[x]+x-2=0$의 근은

$x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=2$이므로 모든 근의 곱은

$\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\times 2=-1+\sqrt{17}$

144) 7

이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$

$\begin{cases} f(\alpha)=2\beta=4-2\alpha \\ f(\beta)=2\alpha=4-2\beta \end{cases}$ 에서

$f(\alpha)+2\alpha-4=0$, $f(\beta)+2\beta-4=0$이다.

즉, 방정식 $f(x)+2x-4=0$의 두 근이 α, β이고 $f(x)$의 이차항의 계수는 1이므로

$f(x)+2x-4=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=x^2-2x-1$

$\therefore f(x)=(x^2-2x-1)-2x+4$

$=x^2-4x+3$

따라서 $a=-4$, $b=3$이므로

$b-a=3-(-4)=7$

145) ④

이차방정식 $x^2-4x+5=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=4-5<0$이므로 허근을 갖는다.

이때, 두 근이 α, β이므로 $\overline{\alpha}=\beta$, $\overline{\beta}=\alpha$이다.

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=5$이므로

$\alpha^2\overline{\beta}+\overline{\alpha}\beta^2=\alpha^3+\beta^3=(a+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=4^3-3\times5\times4$

$=4$

146) ④

이차방정식 $x^2+px+q=0$의 두 근은 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p$ …… ㉠

$\alpha\beta=q$ …… ㉡

이차방정식 $x^2+qx+r=0$의 두 근은 3α, 3β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$3(\alpha+\beta)=-q$ …… ㉢

$9\alpha\beta=r$ …… ㉣

㉠을 ㉢에 대입하면 $-3p=-q$에서 $p=\frac{q}{3}$

㉡을 ㉣에 대입하면 $9q=r$

$\therefore \frac{p}{r}=\frac{\frac{q}{3}}{9q}=\frac{1}{27}$

147) 13

$z=p+qi$(p, q는 실수)라 하자.

$(2i+z)^2>0$에서 $2i+z$는 실수이어야 한다.

따라서 $q=-2$이므로 $z=p-2i$이다.

한편, z는 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 허근이므로 그 켤레복소수인 $\overline{z}=p+2i$를 나머지 한 근으로 갖는다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $z+\overline{z}=-6$에서

$2p=-6$, $p=-3$

따라서 $z=-3-2i$, $\overline{z}=-3+2i$이므로

$\alpha=z\overline{z}=(-3-2i)(-3+2i)=9+4=13$

148) ④

이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-3<0$이므로 α는 허수이다.

따라서 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근은 α, $\overline{\alpha}$이므로

$\alpha+\overline{\alpha}=2$, $\alpha\overline{\alpha}=3$이다.

$\therefore z+\overline{z}=\frac{\alpha}{2\alpha-1}+\frac{\overline{\alpha}}{2\overline{\alpha}-1}$

$=\frac{\alpha(2\overline{\alpha}-1)+\overline{\alpha}(2\alpha-1)}{(2\alpha-1)(2\overline{\alpha}-1)}$

$=\frac{4\alpha\overline{\alpha}-(\alpha+\overline{\alpha})}{4\alpha\overline{\alpha}-2(\alpha+\overline{\alpha})+1}$

$=\frac{12-2}{12-4+1}=\frac{10}{9}$

149) 24

방정식 $x^2+2x-k=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2$ …… ㉠

이때, ㉠에서 α 또는 β가 음수이고

$|\alpha|+|\beta|=10$이므로 α와 β의 부호는 서로 다르다.

…… ㉡

한편, $\alpha\beta=-k$이므로

$(|\alpha|+|\beta|)^2=\alpha^2+\beta^2+2|\alpha\beta|$에서

$100=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2\alpha\beta$ ($\because$ ㉡)

$100=4+2k+2k$

$\therefore\ k=24$

150) 3

방정식 $(\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4})x^2-x-n=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha_n+\beta_n=\frac{1}{\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}}=-\sqrt{n+3}+\sqrt{n+4}$$

$\therefore\ (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{21})+(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{21})$

$=(\alpha_1+\beta_1)+(\alpha_2+\beta_2)+\cdots+(\alpha_{21}+\beta_{21})$

$=(-\sqrt{4}+\sqrt{5})+(-\sqrt{5}+\sqrt{6})+\cdots+(-\sqrt{24}+\sqrt{25})$

$=-2+5=3$

151) ⑤

$|x^2-2x-k|=3$에서 …… ㉠

$x^2-2x-k=3$ 또는 $x^2-2x-k=-3$

$x^2-2x-k-3=0$ 또는 $x^2-2x-k+3=0$

각각의 판별식을 D_1, D_2라 하면 ㉠이 네 실근을 갖기 위해서 $D_1\ge 0$, $D_2\ge 0$이어야 한다.

$\frac{D_1}{4}=1+k+3\ge 0$이므로 $k\ge -4$

$\frac{D_2}{4}=1+k-3\ge 0$이므로 $k\ge 2$

$\therefore\ k\ge 2$ …… ㉡

㉠의 네 실근의 곱이 16이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$(-k-3)(-k+3)=16$

$k^2-9=16$ $\therefore\ k=5$ 또는 $k=-5$

$\therefore\ k=5$($\because$ ㉡)

152) 5

두 실수 a, b $(b\ne 0)$에 대하여 $\alpha=a+bi$라 하면

$\beta=a-bi$이다.

$2\alpha+\beta^2=1$에서 $2(a+bi)+(a-bi)^2=1$

$(a^2+2a-b^2)+2b(1-a)i=1$

이므로 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a^2+2a-b^2=1$, $2b(1-a)=0$이어야 한다.

$2b(1-a)=0$에서 $a=1$ ($\because$ $b\ne 0$)이므로

$a^2+2a-b^2=1$에서 $b^2=2$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$p=-(\alpha+\beta)=-2\alpha=-2$

$q=\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2=1+2=3$

$\therefore\ q-p=3-(-2)=5$

153) 풀이 참조

(1) 이차방정식 $x^2-2x-1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-1$이다.

(2) $\frac{\beta^2}{1+\alpha}+\frac{\alpha^2}{1+\beta}$

$=\frac{\beta^2(1+\beta)+\alpha^2(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$=\frac{\alpha^3+\beta^3+\alpha^2+\beta^2}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$

$=\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\frac{2^3-3\times(-1)\times 2+2^2-2\times(-1)}{1+2+(-1)}$

$=10$

$\frac{\beta^2}{1+\alpha}\times\frac{\alpha^2}{1+\beta}=\frac{\alpha^2\beta^2}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$=\frac{(\alpha\beta)^2}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$

$=\frac{(-1)^2}{1+2+(-1)}$

$=\frac{1}{2}$

(3) $\frac{\beta^2}{1+\alpha}$, $\frac{\alpha^2}{1+\beta}$을 두 근으로 하는 이차방정식의 두 근의

합은 10, 두 근의 곱은 $\frac{1}{2}$이고, x^2의 계수가 2이므로

$2\left(x^2-10x+\frac{1}{2}\right)=0$에서 $2x^2-20x+1=0$이다.

154) ⑤

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근이 α, β이므로 0이 아닌 실수 a에 대하여

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)$ …… ㉠

라 하자.

$f(2x-1)+4=a(2x-1-\alpha)(2x-1-\beta)+4$

$=a\{4x^2-2(\alpha+\beta+2)x+(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)\}+4$

$=a(4x^2-8x+8)+4$

$=4ax^2-8ax+8a+4$

이므로 이차방정식 $f(2x-1)+4=0$의 두 근의 곱은

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{8a+4}{4a}=1$ $\therefore$ $a=-1$

㉠에서

$f(x)=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$

$=-(x^2-2x+5)$

$\therefore$ $f(2)=-(4-4+5)=-5$

155) 16

이차항의 계수가 1이므로 조건 (가)에 의하여

$f(x)=x^2+kx+8$(k는 상수)

방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$

$\therefore$ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2=7$

조건 (나)에서

$f(\alpha)+f(\beta)=(\alpha^2+k\alpha+8)+(\beta^2+k\beta+8)$

$=(\alpha^2+\beta^2)+k(\alpha+\beta)+16$

$=7+3k+16$

$=3k+23=2$

이므로 $k=-7$이고 $f(x)=x^2-7x+8$

$\therefore$ $f(8)=64-56+8=16$

156) ③

두 실수 a, b $(b\neq 0)$에 대하여 $\alpha=a+bi$라 하면 $\overline{\alpha}=a-bi$

이고 이차방정식 $x^2+4x+k=0$ …… ㉠

의 두 근은 α, $\overline{\alpha}$이다.

ㄱ. ㉠의 판별식을 D라 하면

㉠은 허근을 가지므로

$\frac{D}{4}=2^2-k<0$

$\therefore$ $k>4$ (참)

ㄴ. ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\overline{\alpha}=(a+bi)+(a-bi)=2a=-4$

$\alpha=-2$이므로

α의 실수부분은 -2이다. (거짓)

ㄷ. ㄱ에서 $\alpha\overline{\alpha}=k>4$이고

ㄴ에서 $\alpha+\overline{\alpha}=-4$이므로

$(1+\alpha)(1+\overline{\alpha})=(\alpha+\overline{\alpha})+\alpha\overline{\alpha}+1$

$>-4+4+1=1$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

157) ⑤

$x^2+px+1=0$에서 이차방정식의

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-p$ …… ㉠

$\alpha\beta=1$ …… ㉡

ㄱ. $\alpha\beta=1>0$이므로 α, β의 부호는 서로 같다.

(ⅰ) $\alpha>0$, $\beta>0$인 경우

$|\alpha+\beta|=\alpha+\beta$, $|\alpha|+|\beta|=\alpha+\beta$이므로

$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$이다.

(ⅱ) $\alpha<0$, $\beta<0$인 경우

$|\alpha+\beta|=-(\alpha+\beta)$,

$|\alpha|+|\beta|=(-\alpha)+(-\beta)$이므로

$|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$이다.

$\therefore$ $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$ (참)

ㄴ. ㉡에서 $\beta=\frac{1}{\alpha}$이므로

$0<\alpha<1$이면 $\frac{1}{\alpha}>1$, 즉 $\beta>1$이다. (참)

ㄷ. 이차방정식 $x^2+px+1=0$은 두 실근을 가지므로 이차방정식 $x^2+px+1=0$의 판별식을 D라 하면

$D=p^2-4\geq 0$ …… ㉢

$\therefore$ $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

$=p^2-2$ ($\because$ ㉠, ㉡)

$=(p^2-4)+2\geq 2$ ($\because$ ㉢)

즉, $\alpha^2+\beta^2$의 최솟값은 2이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

158) ③

α, β를 두 근으로 하고
이차방의 계수가 1인 이차방정식은
$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$
이고, $\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=7$이므로 $x^2-2x+7=0$ ……㉠
이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=(-1)^2-7=-6<0$
이므로 이차방정식 ㉠은 서로 다른 두 허근 α, β를 갖는다.
이때, 두 허근은 서로 켤레복소수 관계이므로
$\alpha=\overline{\beta}$, $\overline{\alpha}=\beta$
ㄱ. ㉡에 의하여 $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}$ (참)
ㄴ. ㉡에 의하여
$\alpha+\overline{\beta}=\alpha+\alpha=2\alpha$, $\overline{\alpha}+\beta=\beta+\beta=2\beta$이다.
이때, $\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\overline{\beta}\neq\overline{\alpha}+\beta$ (거짓)
ㄷ. 이차방정식 ㉠의 한 근이 α이므로
$\alpha^2-2\alpha+7=0$에서 $\alpha^2=2\alpha-7=2\overline{\beta}-7$ ($\because$ ㉡) (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

159) ⑤

$x+\frac{1}{x}=-1$에서 $\frac{x^2+1}{x}=-1$, $x^2+x+1=0$이다.
즉, 방정식 $x^2+x+1=0$의 한 근이 ω이고, 나머지 한 근은 $\overline{\omega}$이므로 $\omega^2+\omega+1=0$, $\overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$
이때, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\omega+\overline{\omega}=-1$, $\omega\overline{\omega}=1$
이고 $(x-1)(x^2+x+1)=0$, $x^3-1=0$에서
$\omega^3=\overline{\omega}^3=1$이다.

$f(1)=\frac{\overline{\omega}^4+1}{\overline{\omega}^4}=\frac{\overline{\omega}+1}{\overline{\omega}}=\frac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}}=-\overline{\omega}$

$f(2)=\frac{\overline{\omega}^8+1}{\overline{\omega}^8}=\frac{\overline{\omega}^2+1}{\overline{\omega}^2}=\frac{-\overline{\omega}}{\overline{\omega}^2}=-\frac{1}{\overline{\omega}}$

$=-\frac{\omega}{\overline{\omega}\times\omega}=-\omega$

$f(3)=\frac{\overline{\omega}^{12}+1}{\overline{\omega}^2}=\frac{1+1}{1}=2$

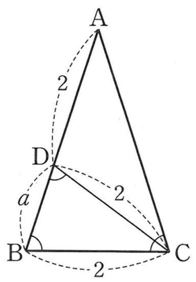
$f(4)=\frac{\overline{\omega}^{16}+1}{\overline{\omega}^{16}}=\frac{\overline{\omega}+1}{\overline{\omega}}=\frac{-\overline{\omega}^2}{\overline{\omega}}=-\overline{\omega}$

⋮

그러므로 자연수 k에 대하여 $f(k)=f(k+3)$이다.
$\therefore$ $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(101)$
$=(-\overline{\omega}-\omega+2)\times33+(-\overline{\omega}-\omega)=3\times33+1=100$

160) ②

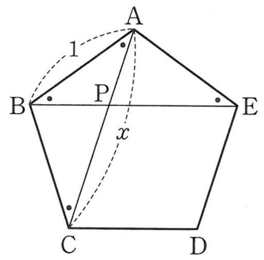
조건 (가)에 의하여 삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$인 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}$
조건 (나)에 의하여 삼각형 CBD는 $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{CD}}$인 이등변삼각형이므로 $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{CDB}$
따라서 두 삼각형 ABC와 CBD는 서로 닮음이다.
$\overline{\mathrm{BD}}=a$ $(a>0)$라 하면



조건 (나)에 의하여 $\overline{\mathrm{AB}}=a+2$이므로
$(a+2):2=2:a$, $a(a+2)=4$, $a^2+2a-4=0$
$\therefore$ $a=-1+\sqrt{5}$ ($\because$ $a>0$)
$m=-(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}})=-a-4=-3-\sqrt{5}$
$n=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}=2(a+2)=2+2\sqrt{5}$
$\therefore$ $m+n=(-3-\sqrt{5})+(2+2\sqrt{5})=-1+\sqrt{5}$

161) ①

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{BC}}$, $\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{BAE}$이므로
두 삼각형 ABC, EAB는 서로 합동이다.
따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하면 $\overline{\mathrm{BE}}=x$



$\square PCDE$ 는 평행사변형이므로 ($\because \overline{PE}//\overline{CD}$, $\overline{PC}//\overline{DE}$)
$\overline{PC}=1$ 이므로 $x:1=1:x-1$
이때, 두 삼각형 ABC, EAB는 이등변삼각형이므로
$\angle PAB=\angle PBA$
따라서 두 삼각형 ABC, APB는 닮음비가 $x:1$인
닮음도형이므로 $\overline{PA}=\frac{1}{x}$에서 $\overline{PC}=x-\frac{1}{x}$
이때, $\overline{AC}:\overline{PC}=\overline{PC}:\overline{PA}$에서 $\overline{PC}^2=\overline{AC}\times\overline{PA}$이므로
$\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x\times\frac{1}{x}$, $x-\frac{1}{x}=1$ ($\because x>1$)
$x^2-x-1=0$에서 $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ($\because x>1$)
$\therefore \overline{AC}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

162) ④

조건 (가)에서 $f\left(\frac{\alpha}{3}\right)-3=0$, $f\left(\frac{\beta}{3}\right)-3=0$이므로 이차방정식
$f\left(\frac{x}{3}\right)-3=0$의 두 근이 α, β이다.
따라서 $f(x)$의 이차항의 계수를 $a(a\neq 0)$라 하면
$f\left(\frac{x}{3}\right)-3=a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}=a(x^2+2x-1)$
$f\left(\frac{x}{3}\right)=a(x^2+2x-1)+3$
이때, 조건 (나)에서 $f(0)=1$이므로
$f(0)=a\times(-1)+3=1$에서 $a=2$
$\therefore f(1)=f\left(\frac{2}{3}\right)=2(3^2+2\times 3-1)+3=31$

163) $f(x)=-x^2+x+2$

$x^2+2x+4=0$ 의 두 근이 α,β 이므로
$\alpha^2+2\alpha+4=0$, $\beta^2+2\beta+4=0$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-2$, $\alpha\beta=4$
$\frac{\alpha^2}{2}=-2-\alpha=\beta$, $\frac{\beta^2}{2}=-2-\beta=\alpha$ 이므로
$f\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)=-3\alpha$ 에서 $f(\beta)=-3(-2-\beta)=6+3\beta$
$f(\beta)-3\beta-6=0$
$f\left(\frac{\beta^2}{2}\right)=-3\beta$ 에서 $f(\alpha)=-3(-2-\alpha)=6+3\alpha$
$f(\alpha)-3\alpha-6=0$
즉, 이차방정식 $f(x)-3x-6=0$의 두 근이 α,β 이고
$f(x)$의 이차항의 계수를 k 라 하면
$f(x)-3x-6=k\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}$
$=k(x^2+2x+4)$
$f(x)=k(x^2+2x+4)+3x+6$
이때, $f(1)=2$ 이므로 $f(1)=7k+9=2$ $\therefore k=-1$
$\therefore f(x)=-(x^2+2x+4)+3x+6$
$=-x^2+x+2$

164) ③

우선,
$w+z=-\sqrt{3}$
$wz=1$
$w^3+z^3=(w+z)^3-3wz(w+z)$
$=-3\sqrt{3}+3\sqrt{3}=0$

$(1+z+z^2+\cdots+z^8)(1+w+w^2+\cdots+w^8)$
$=\frac{(1-z)(1+z+z^2+\cdots+z^8)(1+w+w^2+\cdots+w^8)(1+w)}{(1-z)(1-w)}$
$=\frac{(1-z^9)(1-w^9)}{1-(z+w)+zw}$
$=\frac{1-((w^3+z^3)^3-3w^3z^3(w^3+z^3))+(zw)^9}{1-(z+w)+zw}$
$=\frac{2}{2+\sqrt{3}}=4-2\sqrt{3}$

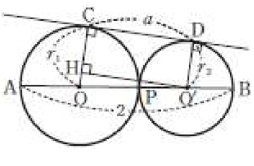
<다른풀이>
$x^2+\sqrt{3}x+1=0$의 두 근은 근의 공식에 의하여
$x=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$ 또는 $x=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$ 이므로
$z=\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$, $w=\frac{-\sqrt{3}-i}{2}$라 하면
$z^2=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$, $w^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$
$z^3=i$, $w^3=-i$
$z^6=-1$, $w^6=-1$
$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8$

$=(1+z+z^2)+z^3(1+z+z^2)+z^6(1+z+z^2)$
$=(1+z+z^2)+i(1+z+z^2)+(-1)\times(1+z+z^2)$
$=i(z-\sqrt{3}z)$ $(\because\ z^2+1=-\sqrt{3}z)$
$=z(1-\sqrt{3})i$
$1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6+w^7+w^8$
$=(1+w+w^2)+w^3(1+w+w^2)+w^6(1+w+w^2)$
$=(1+w+w^2)+(-i)(1+w+w^2)+(-1)\times(1+w+w^2)$
$=-i(w-\sqrt{3}w)$ $(\because\ w^2+1=-\sqrt{3}w)$
$=-w(1-\sqrt{3})i$
한편, $x^2+\sqrt{3}x+1=0$의 두 근이 z, w이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $zw=1$
$\therefore$ $(1+z+z^2+\cdots+z^8)(1+w+w^2+\cdots+w^8)$
$=\{z(1-\sqrt{3})i\}\times\{-w(1-\sqrt{3})i\}$
$=-zw(1-\sqrt{3})^2i^2$
$=(-1)\times(1-2\sqrt{3}+3)\times(-1)$
$=4-2\sqrt{3}$

<다른풀이>
$x^2+\sqrt{3}x+1=0$의 한 근이 z이므로
$z^2+\sqrt{3}z+1=0$
$z^2+1=-\sqrt{3}z$의 양변을 각각 제곱하면
$(z^2+1)^2=(-\sqrt{3}z)^2$, $z^4+2z^2+1=3z^2$
$z^4-z^2+1=0$, $(z^2+1)(z^4-z^2+1)=0$이므로
$z^6+1=0$에서 $z^6=-1$
$1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6+z^7+z^8$
$=(1+z+z^2)+z^3(1+z+z^2)+z^6(1+z+z^2)$
$=z^3(1+z+z^2)=z^3\times(z-\sqrt{3}z)$ $(\because\ z^2+1=-\sqrt{3}z)$
$=z^4(1-\sqrt{3})$
$x^2+\sqrt{3}x+1=0$의 한 근이 w이므로
마찬가지 방법에 의하여
$1+w+w^2+w^3+w^4+w^5+w^6+w^7+w^8=w^4(1-\sqrt{3})$
한편 $x^2+\sqrt{3}x+1=0$의 두 근이 z, w이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $zw=1$
$\therefore$ $(1+z+z^2+\cdots+z^8)(1+w+w^2+\cdots+w^8)$
$=\{z^4(1-\sqrt{3})\}\times\{w^4(1-\sqrt{3})\}$
$=(zw)^4(1-\sqrt{3})^2=1^4\times(1-2\sqrt{3}+3)$
$=4-2\sqrt{3}$

165) $x^2-x+\frac{1}{4}a^2=0$

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AP}$, $\overline{BP}$를 지름으로 하는 원의 중심을 각각 O, O'이라 하고 두 원 O, O'의 반지름의 길이를 각각



r_1, r_2 $(r_1>r_2)$라 하면
$\overline{AB}=2(r_1+r_2)=2$에서
$r_1+r_2=1$ ……㉠
또한, 중심 O'에서 선분 OC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\overline{OC}=r_1$, $\overline{O'D}=r_2$이므로
$\overline{OH}=r_1-r_2$, $\overline{O'H}=\overline{CD}=a$, $\overline{OO'}=r_1+r_2$
직각삼각형 $OO'H$에서 피타고라스 정리에 의하여
$(r_1-r_2)^2+a^2=(r_1+r_2)^2$
$(r_1+r_2)^2-4r_1r_2+a^2=(r_1+r_2)^2$
$a^2=4r_1r_2$ $\quad\therefore r_1r_2=\frac{1}{4}a^2$ …… ㉡
따라서, r_1, r_2를 두 근으로 하고, x^2계수가 1인 이차 방정식은 ㉠, ㉡ 에서 $x^2-x+\frac{1}{4}a^2=0$

166) $x^2-95x+2046=0$

167) ②

주어진 이차식을 x에 대하여 정리하면
$x^2+(k-y)x+2y^2-3y+2$이다.
이때, x에 대한 이차방정식
$x^2+(k-y)x+2y^2-3y+2=0$의 근은
$x=\frac{-(k-y)\pm\sqrt{(k-y)^2-4(2y^2-3y+2)}}{2}$
x에 대한 이차방정식의 판별식을 D라 하면
$D=(k-y)^2-4(2y^2-3y+2)$이므로
$x^2+(k-y)x+2y^2-3y+2$
$=\left\{x-\frac{-(k-y)+\sqrt{D}}{2}\right\}\left\{x-\frac{-(k-y)-\sqrt{D}}{2}\right\}$
이때, x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되기 위해선 근호 안의 식 D가 완전제곱식이 되어야 한다.
즉, $D=(k-y)^2-4(2y^2-3y+2)$
$\quad=-7y^2+(12-2k)y+k^2-8$
에서 y에 대한 이차방정식
$-7y^2+(12-2k)y+k^2-8=0$의 판별식을 D_1이라 하면
$D_1=0$을 만족시켜야 한다.
$\frac{D_1}{4}=(6-k)^2+7(k^2-8)=0$
$8k^2-12k-20=0$, $2k^2-3k-5=0$

$(2k-5)(k+1)=0$

$\therefore k=\frac{5}{2}(\because k>0)$

168) $-2 \leq x < -1$ 또는 $-5 \leq x < -4$

정수 n에 대하여 $n \leq \frac{x}{3} < n+1$이라 하자,

(i) $3n \leq x < 3n+1$일 때,

$\left[\frac{x}{3}\right]^2+[x]+1=0$에서 $n^2+3n+1=0$을 만족시키는

정수 n은 존재하지 않는다.

(ii) $3n+1 \leq x < 3n+2$일 때,

$\left[\frac{x}{3}\right]^2+[x]+1=0$에서 $n^2+(3n+1)+1=0$

$n^2+3n+2=0$, $(n+1)(n+2)=0$에서

$n=-1$ 또는 $n=-2$이므로

$-2 \leq x < -1$ 또는 $-5 \leq x < -4$

(iii) $3n+2 \leq x < 3n+3$일 때,

$\left[\frac{x}{3}\right]^2+[x]+1=0$에서 $n^2+(3n+2)+1=0$

$n^2+3n+3=0$을 만족시키는

정수 n은 존재하지 않는다.

(i)~(iii)에서 구하는 x의 값의 범위는

$-2 \leq x < -1$ 또는 $-5 \leq x < -4$

169) 풀이 참조

이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 허근 z를 가지므로

판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a<0$이므로 $0<a<4$ ……㉠

$z^2-az+a=0$에서 $z^2=az-a$이므로

$z^3=z^2\times z=az^2-az=a(az-a)-az$

$=(a^2-a)z-a^2$

a는 실수이고 z는 허수이므로

복소수 z^3이 실수이기 위해선

$a^2-a=0$이어야 한다.

$a(a-1)=0$ $\therefore$ $a=1$ ($\because$ ㉠)

<다른풀이>

이차방정식 $x^2-ax+a=0$이 허근 z를 가지므로

판별식을 D라 하면

$D=a^2-4a<0$이므로 $0<a<4$ ……㉠

두 실수 p, q $(q\neq 0)$에 대하여 $z=p+qi$라 하면

$\overline{z}=p-qi$도 이차방정식 $x^2-ax+a=0$의 근이므로

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$z+\overline{z}=a$에서 $2p=a$, $p=\frac{a}{2}$ ……㉡

$z\overline{z}=a$에서 $p^2+q^2=a$ ……㉢

$z^3=(p+qi)^3=p^3+3p^3qi-3pq^2-q^3i$

$=(p^3-3pq^2)+q(3p^2-q^2)i$

이므로 z^3이 실수가 되기 위해선

$q(3p^2-q^2)=0$, 즉 $3p^2-q^2=0$ ($\because$ $q\neq 0$)이어야 한다.

㉢을 대입하면 $3p^2-(a-p^2)=0$, $4p^2-a=0$

㉡을 대입하면 $4\times\left(\frac{a}{2}\right)^2-a=0$, $a^2-a=0$

$a(a-1)=0$ $\therefore$ $a=1$ ($\because$ ㉠)

170) ①

이차방정식의 두 실근을 α, β라 하면

두 근의 부호가 서로 다르므로 $\alpha\beta<0$이고,

양수인 근의 절댓값이 음수인 근의 절댓값보다 크므로

$\alpha+\beta>0$을 만족시켜야 한다.

$2(k-1)^2x^2+3(k-3)x-2k+1=0$이 이차방정식이므로

$2(k-1)^2\neq 0$, 즉 $k\neq 1$

한편, 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\frac{-3(k-3)}{2(k-1)^2}>0$ ……㉠

$\alpha\beta=\frac{-2k+1}{2(k-1)^2}<0$ ……㉡

이때, $2(k-1)^2>0$이므로

㉠에서 $-3(k-3)>0$ $\therefore$ $k<3$

㉡에서 $-2k+1<0$ $\therefore$ $k>\frac{1}{2}$

따라서 $\frac{1}{2}<k<3$, $k\neq 1$이므로

조건을 만족시키는 정수 k는 2의 1개이다.

171) ③

$\overline{\mathrm{BE}}=\alpha$, $\overline{\mathrm{CE}}=\beta$라 하면 $\overline{\mathrm{BE}}+\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{BC}}$이므로

$\alpha+\beta=2a$ …… ㉠

$\alpha\beta = b^2 \to \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2a}{b^2}$

$\frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{b^2}$, $x^2 - \frac{2a}{b^2}x = \frac{1}{b^2} = 0$

한편, 직각삼각형 AED에서

$\overline{\mathrm{DE}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 - \overline{\mathrm{AE}}^2 = a^2 - b^2$, $\overline{\mathrm{DE}} = \sqrt{a^2 - b^2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BE}} \times \overline{\mathrm{CE}} = (\overline{\mathrm{BD}} + \overline{\mathrm{DE}}) \times (\overline{\mathrm{CD}} - \overline{\mathrm{DE}})$

$\alpha\beta = (a + \sqrt{a^2 - b^2})(a - \sqrt{a^2 - b^2}) = b^2$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}$을 두 근으로 하고 최고차항의

계수가 1인

이차방정식은

$x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$

$\therefore\ x^2 - \frac{2a}{b^2}x + \frac{1}{b^2} = 0$

172) ㄴ, ㄷ

$(x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) = 0$

$3x^2 - 2(a+b+c)x + ab + bc + ca = 0$ …… ㉠

이차방정식 ㉠의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4} = (a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)$

$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$

$= \frac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geq 0$

ㄱ. 임의의 세 양수 a, b, c에 대하여 $D \geq 0$이므로 주어진 방정식이 항상 실근을 갖는다. (거짓)

ㄴ. 주어진 방정식이 중근을 가지면 $D = 0$이므로
$a = b = c$이다. (참)

ㄷ. 정육면체가 아닐 때, $D > 0$이므로 주어진 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β라 하면 ㉠에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha + \beta = \frac{2(a+b+c)}{3}$, $\alpha\beta = \frac{ab+bc+ca}{3}$이고

$a > 0, b > 0, c > 0$이므로 $\alpha + \beta > 0$, $\alpha\beta > 0$이다.

그러므로 두 근은 모두 양수이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

173) 11

174) $k = -1$, $(2x - y + 1)(x + y - 1)$

175) 5

176) (1) $k = 3$, -1 (2) $k = 11$

177) 66

$x^2 + x + 1 = 0$의 한 허근을 ω라 하면 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$,

$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$이므로 $\omega^3 = 1$

근과 계수의 관계에 의해

$\omega + \overline{\omega} = -1$ $\omega\overline{\omega} = 1$

$f(1) = (\omega + 1)(\overline{\omega} + 1) = \omega\overline{\omega} + \omega + \overline{\omega} + 1 = 1 - 1 + 1 = 1$

$f(2) = (\omega^2 + 1)\left((\overline{\omega})^2 + 1\right) = -\omega \times (-\overline{\omega}) = 1$

$f(3) = (\omega^3 + 1)\left((\overline{\omega})^3 + 1\right) = 4$

$f(4) = (\omega^4 + 1)\left((\overline{\omega})^4 + 1\right) = (\omega^3 \times \omega + 1)\left((\overline{\omega})^3 \times \overline{\omega} + 1\right)$

$= (\omega + 1)(\overline{\omega} + 1) = 1$

$f(5) = (\omega^5 + 1)\left((\overline{\omega})^5 + 1\right) = (\omega^3 \times \omega^2 + 1)\left((\overline{\omega})^3 \times (\overline{\omega})^2 + 1\right)$

$= (\omega^2 + 1)\left((\overline{\omega})^2 + 1\right) = 1$

$f(6) = (\omega^6 + 1)\left((\overline{\omega})^6 + 1\right) = (\omega^3 \times \omega^3 + 1)\left((\overline{\omega})^3 \times (\overline{\omega})^3 + 1\right) = 4$

$f(1) \times f(2) \times f(3) \times \cdots \times f(100) = (1 \times 1 \times 4)^{33} \times 1$

$= (2^2)^{33} = 2^{66}$

$\therefore\ m = 66$

178) ③

주어진 식을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2 - y^2 - ax - by - 2 = x^2 - ax - (y^2 + by + 2)$ …… ㉠

이 식이 계수가 정수인 x, y에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해되려면 x에 대한 다항식 ㉠의 상수항은 다음과 같아야 한다.

(ⅰ) $y^2 + by + 2 = (y+1)(y+2) = y^2 + 3y + 2$인 경우

y의 계수를 비교하면 $b=3$이다.
이때, ㉠에서
$$x^2-ax-(y+1)(y+2)=\{x-(y+1)\}\{x+(y+2)\}$$
$$=x^2+x-(y+1)(y+2)$$
인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=-1$이고,
$$x^2-ax-(y+1)(y+2)=\{x+(y+1)\}\{x-(y+2)\}$$
$$=x^2-x-(y+1)(y+2)$$
인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=1$이다.
(ⅱ) $y^2+by+2=(y-1)(y-2)=y^2-3y+2$인 경우
y의 계수를 비교하면 $b=-3$이다.
이때, ㉠에서
$$x^2-ax-(y-1)(y-2)=\{x-(y-1)\}\{x+(y-2)\}$$
$$=x^2-x-(y-1)(y-2)$$
인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=1$이고,
$$x^2-ax-(y-1)(y-2)=\{x+(y-1)\}\{x-(y-2)\}$$
$$=x^2+x-(y-1)(y-2)$$
인 경우 x의 계수를 비교하면 $a=-1$이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 가능한 $a+b$의 값은
$a=-1,\ b=3$에서 $a+b=2$
$a=1,\ b=3$에서 $a+b=4$
$a=1,\ b=-3$에서 $a+b=-2$
$a=-1,\ b=-3$에서 $a+b=-4$
따라서 선지 중 $a+b$의 값이 될 수 없는 것은 ③이다.

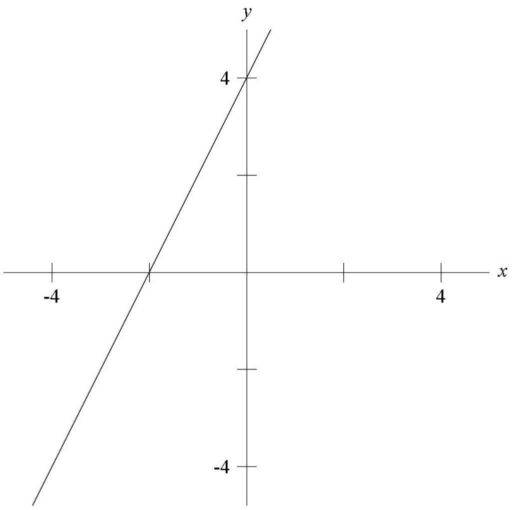
179) ③

$z=a+bi$ (a, b는 실수, $b\neq 0$)라 두면
$$\frac{1+z^2}{z}=\frac{1+(a+bi)^2}{a+bi}=\left(\frac{a}{a^2+b^2}+a\right)+\left(\frac{-b}{a^2+b^2}+b\right)i$$
실수이므로 $\frac{-b}{a^2+b^2}+b=0$이고 $b\neq 0$이므로
$$\frac{-1}{a^2+b^2}+1=0$$
$$a^2+b^2=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$$
$$\frac{\overline{z}}{1-z}=\frac{a-bi}{1-(a+bi)}=\left(\frac{a(1-a)+b^2}{(1-a)^2+b^2}\right)+\left(\frac{(2ab-b)}{(1-a)^2+b^2}\right)i$$
실수이므로 $2ab-b=0$이고 $b\neq 0$이므로
$$2a-1=0,\ a=\frac{1}{2}$$
이를 ㉠에 대입하면
$$b=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\therefore\ z=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$z+\overline{z}=1,\ z\overline{z}=1$이므로
z, $\overline{z}$를 두 근으로 하는 이차방정식을 구해보면
$$x^2-x+1=0$$
$$(x+1)(x^2-x+1)=0$$
$$x^3=-1,\ x^6=1$$
즉, $z^3=-1,\ (\overline{z})^3=-1,\ z^6=1,\ (\overline{z})^6=1$
$$z^2-z+1=0$$
$$f(1)=z+\overline{z}=1$$
$$f(2)=z^2+(\overline{z})^2=(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}=1-2=-1$$
$$f(3)=z^3+(\overline{z})^3=-2$$
$$f(4)=z^4+(\overline{z})^4=-z-\overline{z}=-1$$
$$f(5)=z^5+(\overline{z})^5=-z^2-(\overline{z})^2=1$$
$$f(6)=z^6+(\overline{z})^6=2$$
$$\vdots$$
$f(m)=1$을 만족시키는 자연수 m은 6으로 나누어 나머지가 1이거나 5인 수이다.
이를 만족하는 두 자리 자연수는
$11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 25,\ 29,\ 31,\ 35,\ 37,\ 41,\ 43,\ 47,\ 49,\ 53,\ 55,\ 59,\ 61,\ 65,\ 67,\ 71,\ 73,\ 77,\ 79,\ 83,\ 85,\ 89,\ 91,\ 95,\ 97$
m의 개수는 30개

180) 3

181) 풀이참조

$$-\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1$$

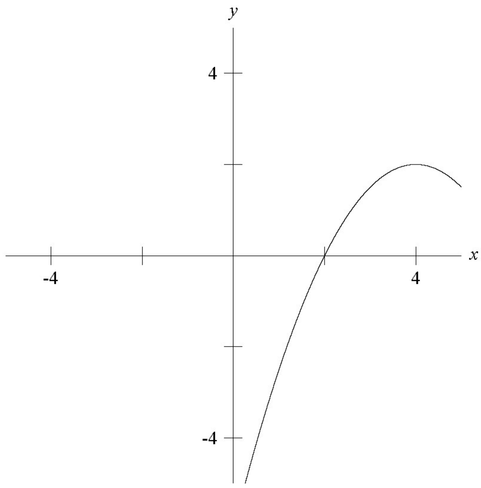


182) 풀이 참조

(1) 기울기가 양수, y절편이 양수인 직선이므로 제 1, 2, 3 사분면을 지난다.
(2) 기울기가 음수, y절편이 양수인 직선이므로 제 1, 2, 4 사분면을 지난다.
(3) 기울기가 양수이고, 원점을 지나는 직선이므로 제 1, 3 사분면을 지난다.

183) 풀이 참조

$y=-\dfrac{1}{2}(x-4)^2+2$



184) 0, 2

이차방정식 $3x^2-6x=0$에서
$3x(x-2)=0 \quad \therefore x=0$ 또는$x=2$

185) (1) 1 (2) 2 (3) 없다.

(1) 이차방정식 $x^2-x+1=x$ 에서 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 1=0$$

이므로 $x^2-2x+1=0$은 중근을 가진다.
따라서 주어진 이차 함수의 그래프와 직선의 교점은 1개이다.
(2) 이차방정식$x^2-x+1=3x-2$에서 $x^2-4x+3=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-1\cdot 3=1>0$$

이므로 $x^2-4x+3=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.
따라서 주어진 이차 함수의 그래프와 직선의 교점은 2개다.
(3) 이차방정식$x^2-x+1=-x-4$에서 $x^2+5=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(0)^2-4\cdot 1\cdot 5=-20<0$$

이므로 $x^2+5=0$은 서로 다른 두 허근을 가진다.
따라서 주어진 이차 함수의 그래프와 직선의 교점은 없다.

186) 한 점에서 만난다(접한다).

$2x^2-3x+4=x+2$, 즉 $x^2-2x+1=0$의 판별식을 D라 하면

$$\frac{D}{4}=(-1)^2-1\cdot 1=0$$

따라서 주어진 이차함수의 그래프와 직선은 한 점에서 만난다(접한다.).

187) 2

$f(x)-g(x)=0$에서 $f(x)=g(x)$ …… ㉠

㉠을 만족시키는 해는 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 교점의 x좌표이므로

$x=-2$ 또는 $x=4$

따라서 구하는 모든 해의 합은 2이다.

188) ②

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이

직선 $x=-1$이므로

$f(x)=a(x+1)^2+b$ (a, b는 상수)라 하자.

방정식 $f(x)-3=0$이 중근을 가지므로

$a(x+1)^2+b-3=0$의 좌변이 완전제곱식이어야 한다. 즉, $b-3=0$이므로 $b=3$ $f(x)=a(x+1)^2+3$이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 y절편이 1이므로 점 $(0,\ 1)$을 지난다.

즉, $f(0)=a+3=1$이므로

$a=-2$

따라서 $f(x)=-2(x+1)^2+3$이고,

$-2(x+1)^2+3=0$, $2x^2+4x-1=0$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표의 곱은 이 방정식의 두 근의 곱과 같으므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $-\frac{1}{2}$이다.

189) ④

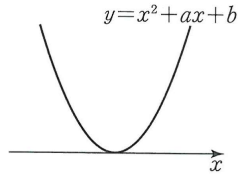
ㄱ. 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축에 접하므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의

판별식을 D라 하면

$D=a^2-4b=0$에서 $b=\frac{a^2}{4}\geq 0$을 만족시킨다. (참)

ㄴ. 다음 그림과 같이 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 x축에

접할 때 실수 전체에서 함숫값은 항상 0 이상이다.



$x=-1$일 때 함숫값이 $1-a+b\geq 0$이므로 $a-b\leq 1$이다.

(반례) 이차함수 $y=x^2+ax+b$의 그래프가 $x=-1$에서 x축에 접할 때, $x=-1$에서 함숫값이 0이므로 $1-a+b=0$, 즉 $a-b=1$이다. (거짓)

ㄷ. $x=-2$일 때, 함숫값이 $4-2a+b\geq 0$이므로 $2a-b\leq 4$이다. 즉, $2a-b<5$를 만족시킨다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

190) ①

방정식 $x^2+2x-2+k=0$의 판별식을 D 라 하면

$\frac{D}{4}=1+2-k>0$에서 $k<3$

ㄱ. $f(x)=(x+1)^2+k-3$에서 꼭짓점의 좌표는 $(-1,\ k-3)$이고, $k<3$에서 $k-3<0$이므로 꼭짓점은 x축보다 아래에 있다. (참)

ㄴ. $y=f(x)$의 그래프의 y절편은 $-2+k$이고,

$k<3$에서

$-2+k<1$이다.

(반례) $-2+k=0$일 때, $f(x)=x^2+2x$의 그래프의 y절편은 0이지만 방정식 $f(x)=0$은 두 실근을 갖는다. (거짓)

ㄷ. $k<3$에서 $3-k>0$이므로 함수 $y=-x^2+3-k$의 그래프는 y절편이 0보다 크고, 위로 볼록하므로 x축과 만난다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.

191) ⑤

ㄱ. 주어진 그래프에서 $x=\frac{1}{2}$일 때 함수

$y=ax^2+bx+c$의

함숫값이 음수이므로

$a\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+b\times\frac{1}{2}+c<0$에서 $\frac{a}{4}+\frac{b}{2}+c<0$

$\therefore\ a+2b+4c<0$ (참)

ㄴ. 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 직선 $x=-2$에 대하여 대칭이므로 이 이차함수의 그래프와 x축이 만나는 점의 x좌표는 각각 $-2-k$, $-2+k$ (k는 상수)로 놓을 수 있다.

따라서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 실근의 합은 $(-2-k)+(-2+k)=-4$이다. (거짓)

ㄷ. ㄴ에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근의 합이 -4이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-\frac{b}{a}=-4$　　$\therefore\ b=4a$　　……㉠

한편, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 x축과 두 점에서 만나므로 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식을 D라 하면 $D=b^2-4ac>0$이고, ㉠을 대입하면 $(4a)^2-4ac>0$이므로 $16a^2-4ac>0$

또한 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의

그래프가 위로 볼록하므로 $a<0$이고,

부등식 $16a^2-4ac>0$의 양변을 $4a$로 나누면

$4a-c<0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

192) ④

방정식 $|f(x)|-2=0$의 실근은 $|f(x)|=2$에서 방정식 $f(x)=2$의 실근 또는 방정식 $f(x)=-2$의 실근이다.

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 꼭짓점의 좌표가 $(1,\ -2)$이므로

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $y=2$와 서로 다른 두 점에서 만나고 직선 $y=-2$와는 한 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(x)=2$의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 방정식 $f(x)=-2$의 서로 다른 실근의 개수는 1이므로 구하는 값은 3이다.

193) 24

직선 $y=4x-a^2$이 이차함수 $y=x^2-2ax+2$의 그래프와 접하므로 방정식 $x^2-2ax+2=4x-a^2$

$x^2-(2a+4)x+a^2+2=0$　　……㉠

이 중근을 가져야 한다.

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-(a^2+2)=4a+2=0$

이므로 $a=-\frac{1}{2}$이다. 이를 ㉠에 대입하면

$x^2-3x+\frac{9}{4}=0$, $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=0$, $x=\frac{3}{2}$

이므로 접점의 x좌표는 $p=\frac{3}{2}$이고,

이를 직선 $y=4x-\frac{1}{4}$에 대입하면 $q=\frac{23}{4}$

$\therefore\ a+p+4q=\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}+23=24$

194) ①

두 이차함수 $y=f(x)$, $y=-g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 각각 -3, 1이므로 방정식 $f(x)+g(x)=0$의 두 실근이 -3, 1 이다.

$\therefore\ f(x)+g(x)=2(x+3)(x-1)$　　……㉠

또한 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=-2g(x)$의 그래프의 두 교점의 x좌표가 각각 $-\frac{11}{3}$, 1이므로 방정식

$f(x)+2g(x)=0$의 두 실근이 $-\frac{11}{3}$, 1이다.

$\therefore\ f(x)+2g(x)=3\left(x+\frac{11}{3}\right)(x-1)=(3x+11)(x-1)$　……㉡

㉡에서 ㉠을 빼면 $g(x)=(x+5)(x-1)$이므로 방정식 $g(x)=0$의 두 근은 $x=-5$ 또는 $x=1$이다.

따라서 구하는 두 근의 합은 $-5+1=-4$

195) ③

방정식 $2x^2+kx+6=mx-8$

$2x^2+(k-m)x+14=0$　　……㉠

의 한 실근이 -1이므로 $x=-1$을 대입하면

$2-(k-m)+14=0$, $k-m=16$

이를 ㉠에 대입하고

$h(x)=f(x)-g(x)=2x^2+16x+14$라고 하자.

방정식 $h(x)=0$의 두 실근을 α, β라 하면

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-8$, $\alpha\beta=7$이다.

방정식 $h(2x-1)=0$의 두 근을 p, q라 하면

$2p-1=\alpha$, $2q-1=\beta$이고 양변을 각각 더해주면

$2(p+q)-2=\alpha+\beta$, $2(p+q)=-6$ ($\because\ \alpha+\beta=-8$)

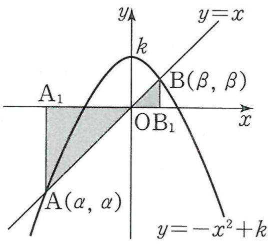
$\therefore\ p+q=-3$

196) ④

원점을 지나는 직선 l의 방정식을 $y=ax\ (a<0)$라 하면 이차함수 $y=-x^2$의 그래프와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표는 방정식 $-x^2=ax,\ x^2+ax=0$의 실근이다.
$x^2+ax=x(x+a)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-a$이므로
점 A의 좌표는 $(-a,\ -a^2)$이다.
이 때, $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{OB}}=3:1$에서 $\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{3}\overline{\mathrm{OA}}$이다.
두 점 A, B에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A′, B′이라 하면 두 삼각형 OAA′, OBB′은 서로 닮음이고 닮음비가 $3:1$이다.
따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{1}{3}a,\ \frac{1}{3}a^2\right)$이고, 이차함수
$y=kx^2$에 대입하면
$\frac{1}{3}a^2=k\times\left(\frac{1}{3}a\right)^2,\ \frac{1}{3}a^2=k\frac{1}{9}a^2,\ \frac{k}{9}=\frac{1}{3}$
$\therefore\ k=3$

197) 12

이차함수 $y=-x^2+k\ (k>0)$의 그래프와 직선 $y=x$의 교점을 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha),\ \mathrm{B}(\beta,\ \beta)\ (\alpha<\beta)$라 하면 그래프는 다음과 같다.



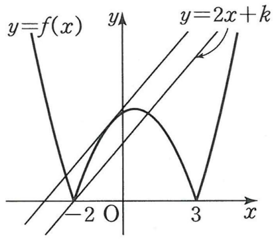
방정식 $-x^2+k=x,\ x^2+x-k=0$의
두 실근이 $\alpha,\ \beta$이므로
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=-k$
한편, 두 삼각형 $\mathrm{AOA_1},\ \mathrm{BOB_1}$의 넓이는 각각
$\frac{1}{2}\alpha^2,\ \frac{1}{2}\beta^2$이므로
$f(k)=\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=\frac{1}{2}(1+2k)=k+\frac{1}{2}$
$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1+\frac{1}{2}+2+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{2}+4+\frac{1}{2}$
$=12$

198) -8

이차함수 $y=f(x)$의 그래프의
꼭짓점의 좌표가 $(0,\ -2)$이므로
$f(x)=kx^2-2$ (k는 0이 아닌 상수)라 하자.
이 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(a,\ 2)$를 지나므로
$f(a)=ka^2-2=2$에서 $k=\frac{4}{a^2}$
$\therefore\ f(x)=\frac{4}{a^2}x^2-2$
이때, 직선 $y=g(x)$는 원점과 점 $(a,\ 2)$를 지나므로
$g(x)=\frac{2}{a}x$ 이다.
$f(x)-g(x)=\frac{4}{a^2}x^2-2-\frac{2}{a}x$
$=\frac{2}{a^2}(2x^2-ax-a^2)$
$=\frac{2}{a^2}(2x+a)(x-a)=0$
이므로 $x=-\frac{a}{2}$ 또는 $x=a$
방정식 $f(x)=g(x)$의 두 근의 차가 6이므로
$a-\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{3}{2}a=6\ (\because\ a>0)$에서 $a=4,\ k=\frac{1}{4}$
따라서 $f(x)=\frac{1}{4}x^2-2$이므로 방정식
$f(x)=0,\ \frac{1}{4}x^2-2=0,$
$x^2-8=0$의 두 근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -8이다.

199) $\frac{41}{4}$

함수 $f(x)=\begin{cases}(x-3)(x+2) & (x\le -2 \text{ or } x\ge 3)\\ -(x-3)(x+2) & (-2<x<3)\end{cases}$
의 그래프와 직선 $y=2x+k$의 교점의 개수가 3이상이 되기 위해서는 k의 값이
이차함수 $y=-(x-3)(x+2)$의 그래프와 접할 때보다는 작거나 같고, 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때보다는 크거나 같아야 한다.



(ⅰ) 이차함수 $y=-(x-3)(x+2)$의 그래프와
직선 $y=2x+k$가 접할 때
방정식 $2x+k=-(x-3)(x+2),\ x^2+x+k-6=0$의

판별식을 D라 하면

$D=1-4(k-6)=0$에서 $k=\dfrac{25}{4}$

(ⅱ) 직선 $y=2x+k$가 점 $(-2,\ 0)$을 지날 때

$y=2x+k$에 $x=-2,\ y=0$을 대입하면

$0=-4+k$에서 $k=4$

(ⅰ), (ⅱ)에서 k의 값의 범위는 $4\le k\le \dfrac{25}{4}$이므로

$M=\dfrac{25}{4},\ m=4$

$\therefore\ M+m=\dfrac{41}{4}$

200) ⑤

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$의 교점의 x좌표가 $2,\ -3$이므로 방정식 $f(x)-2=0$은 $2,\ -3$을 두 실근으로 갖는다. 따라서, $f(x)-2=a(x-2)(x+3)$ (a는 0이 아닌 상수)이고

$f(1)=6$이므로 $x=1$을 대입하면

$6-2=a\times(-1)\times 4 \quad \therefore\ a=-1$

따라서, $f(x)=-(x-2)(x+3)+2=-x^2-x+8$이고, 방정식 $-x^2-x+8=-2x+k,\ x^2-x+k-8=0$의 두 실근이 $x_1,\ x_2$이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$x_1+x_2=1,\ x_1x_2=k-8$ ……㉠

ㄱ. $k=1$일 때, 직선은 $y=-2x+1$이므로

$y_1=-2x_1+1,\ y_2=-2x_2+1$이고,

$y_1y_2=(-2x_1+1)(-2x_2+1)=4x_1x_2-2(x_1+x_2)+1$

$=-28-2+1=-29$ (거짓)

ㄴ. ㉠에서 k의 값에 관계없이 항상 $x_1+x_2=1$이다. (참)

ㄷ. $y_1=-2x_1+k,\ y_2=-2x_2+k$이므로

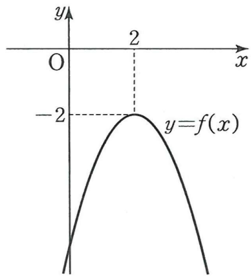
$y_1+y_2=-2(x_1+x_2)+2k=-2+2k=2(k-1)$

$k>1$일 때, $y_1+y_2=2(k-1)>0$이다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

201) ④

함수 $f(x)=-x^2+4x-6=-(x-2)^2-2$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(2,\ -2)$이고 그 그래프는 다음과 같다.



$a\le 2$이면 $a\le x\le 5$에서

함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(2)=-2$

이므로 조건을 만족시키지 않는다. $\therefore\ a>2$

이때, $a\le x\le 5$에서 함수 $f(x)$의

최댓값은 $f(a)$이므로

$f(a)=-3$이다.

$f(a)=-a^2+4a-6=-3$에서

$a^2-4a+3=0,\ (a-1)(a-3)=0$

$\therefore\ a=3\ (\because\ a>2)$

202) ②

$f(x)=2(x+1)^2+1-2a$에서

함수 $f(x)$의 최솟값은 $1-2a$이므로

$1-2a\ge 5 \quad \therefore\ a\le -2$ ……㉠

$g(x)=-(x-3)^2+3b+7$에서

함수 $g(x)$의 최댓값은 $3b+7$이므로

$3b+7\le 2 \quad \therefore\ b\le -\dfrac{5}{3}$ ……㉡

㉠, ㉡에서 정수 a의 최댓값은 -2이고,

정수 b의 최댓값도 -2이므로

구하는 $a+b$의 최댓값은 -4이다.

203) 29

$g(x)$는 일차식이고 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차식이므로 $g(x)-f(x)$는 최고차항의 계수가 -2인 이차식이다. 이때, 함수 $y=g(x)-f(x)$가 $x=3$에서 최댓값 4를 가지므로

$g(x)-f(x)=-2(x-3)^2+4=-2x^2+12x-14$

한편, 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가

$x=\alpha,\ x=\beta$에서 만나므로 방정식 $g(x)-f(x)=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이다. 따라서 이차방정식

$-2x^2+12x-14=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

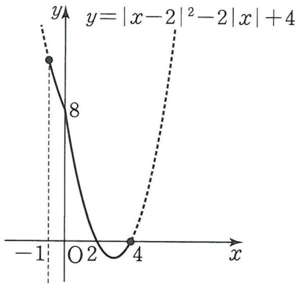
$\alpha+\beta=6,\ \alpha\beta=7$
$\therefore\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta=36-7=29$

204) ④

$f(-3)=f(9)$에서 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=\dfrac{-3+9}{2}=3$이므로
$f(x)=x^2-6x+a$ (a는 상수)라 하자. ……㉠
ㄱ. $f(x)=(x-3)^2+a-9$이므로 $x=3$일 때 최솟값을 갖는다.
따라서 함수 $f(x)$의 최솟값은 $f(3)$이다. (참)
ㄴ. $1\le x\le 6$에서 함수 $f(x)$는 $x=3$일 때, 최솟값을 갖고, $x=6$일 때 최댓값을 갖는다.
따라서 최댓값과 최솟값의 차는 ㉠에서
$f(6)-f(3)=(36-36+a)-(9-18+a)=9$ (거짓)
ㄷ. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않기 위한 조건은 방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면
$\dfrac{D}{4}=9-a<0$ ($\because$ ㉠)에서 $a>9$이다.
즉, $f(0)=a>9$이면 함수 $y=f(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다. (참)
따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

205) ②

모든 실수 x에 대하여 $|x-2|^2=(x-2)^2$이므로
$y=|x-2|^2-2|x|+4=(x-2)^2-2|x|+4$
x의 부호에 따라서 범위를 나누면 다음과 같다.
(ⅰ) $x<0$일 때
$y=(x-2)^2-2|x|+4=(x-2)^2-2\times(-x)+4$
$\quad=x^2-2x+8=(x-1)^2+7$ ……㉠
(ⅱ) $x\ge 0$일 때
$y=(x-2)^2-2|x|+4=(x-2)^2-2x+4$
$\quad=x^2-6x+8=(x-3)^2-1$ ……㉡
(ⅰ), (ⅱ)에서 함수 $y=|x-2|^2-2|x|+4$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 주어진 함수는
$x=-1$일 때 ㉠에서 최댓값 11을 갖고,
$x=3$일 때 ㉡에서 최솟값 -1을 갖는다.
따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은
$11+(-1)=10$

206) 풀이 참조

함수 $y=(x^2-4x+3)^2-12(x^2-4x+3)+30$에서
$t=x^2-4x+3$으로 치환하면
$t=(x-2)^2-1$에서 $-1\le x\le 3$이므로
$x=2$일 때 $t=-1$로 최솟값을 갖고,
$x=-1$일 때 $t=8$로 최댓값을 갖는다.
그러므로 주어진 함수는
$y=(x^2-4x+3)^2-12(x^2-4x+3)+30=t^2-12t+30$
이므로 함수 $y=t^2-12t+30=(t-6)^2-6$은
$-1\le t\le 8$에서
$t=6$일 때 최솟값 $m=-6$을 갖고,
$t=-1$일 때 최댓값 $M=43$을 갖는다.

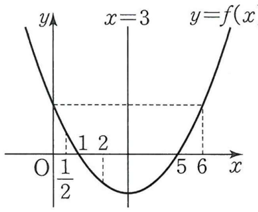
207) ⑤

$y=x^2-2ax+2a^2=(x-a)^2+a^2$의 그래프는 꼭짓점의 좌표가 $(a,\ a^2)$이고 축이 직선 $x=a$이다.
따라서 a의 값의 범위에 따라 $1\le x\le 3$에서 이차함수 $y=x^2-2ax+2a^2$의 최댓값 M, 최솟값 m을 각각 구해 보면 다음과 같다.
(ⅰ) $a<1$일 때
$M=f(3)=9-6a+2a^2,\ m=f(1)=1-2a+2a^2$이므로
$M-m=8-4a=2\quad\therefore\ a=\dfrac{3}{2}$
그런데 $a=\dfrac{3}{2}$은 $a<1$을 만족시키지 않는다.
(ⅱ) $1\le a\le 3$일 때
(ⅱ—ㄱ)

$1 \le a \le 2$일 때
$M = f(3)$, $m = f(a) = a^2$이므로
$M - m = a^2 - 6a + 9 = 2$, $a^2 - 6a + 7 = 0$
$\therefore\ a = 3 - \sqrt{2}$ ($\because\ 1 \le a \le 2$)
(ii—ㄴ)
$2 < a \le 3$일 때
$M = f(1)$, $m = f(a) = a^2$이므로
$M - m = a^2 - 2a + 1 = 2$, $a^2 - 2a - 1 = 0$
$\therefore\ a = 1 + \sqrt{2}$ ($\because\ 2 < a \le 3$)
(iii) $a > 3$일 때
$M = f(1)$, $m = f(3)$이므로
$M - m = 4a - 8 = 2 \qquad \therefore\ a = \dfrac{5}{2}$
그런데 $a = \dfrac{5}{2}$는 $a > 3$을 만족시키지 않는다.
(i)~(iii)에서 조건을 만족시키는 모든 실수 a의 값의 합은
$(3 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2}) = 4$

208) ⑤

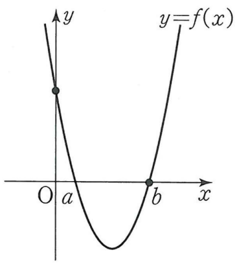
조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 $f(3)$이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 아래로 볼록하며 꼭짓점의 x좌표가 3이고, 직선 $x = 3$에 대하여 대칭이다.
이때, 조건 (가)에 의하여 함수 $y = f(x)$의 그래프가 점 $(1,\ 0)$을 지나므로 점 $(5,\ 0)$도 지나며 그 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 점 $(5,\ 0)$을 지나므로 $f(5) = 0$ (참)
ㄴ. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 직선 $x = 3$에 대하여 대칭이므로 $f(6) = f(0)$이다. 또한 $x < 3$일 때 x의 값이 클수록 그에 대한 함숫값은
작아지므로 $f(2) < f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(0)$이다.
$\therefore\ f(2) < f\left(\dfrac{1}{2}\right) < f(6)$ (참)
ㄷ. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 두 점 $(1,\ 0)$, $(5,\ 0)$을 지나므로 방정식 $f(x) = 0$의 두 근이 1, 5이다.
$f(x) = a(x-1)(x-5)$ $(a > 0)$라 하면
$f(0) = k$이므로 $f(0) = 5a = k$이다.
방정식 $f(x) = kx$에 대입하면
$f(x) = 5ax$, $a(x-1)(x-5) - 5ax = 0$
$(x-1)(x-5) - 5x = 0$ ($\because\ a \ne 0$), $x^2 - 11x + 5 = 0$
이므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은 11이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

209) ④

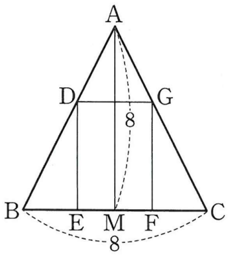
ㄱ. 방정식 $f(x) = (x-a)(x-b) = 0$의 근은
$x = a$ 또는 $x = b$이므로
$a \ne b$인 경우 서로 다른 두 실근을 갖고,
$a = b$인 경우 1개의 중근을 갖는다. (거짓)
ㄴ. 이차함수 $y = f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 점의 좌표가 $(a,\ 0)$, $(b,\ 0)$이므로 직선 $x = \dfrac{a+b}{2}$에 대하여 대칭이다. 즉, 함수 $y = f(x)$의 그래프의 꼭짓
점의 x좌표가
$x = \dfrac{a+b}{2}$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은
$$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = \left(\dfrac{a+b}{2} - a\right)\left(\dfrac{a+b}{2} - b\right)$$
$$= \dfrac{b-a}{2} \times \dfrac{a-b}{2} = -\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2$$ (참)
ㄷ. $0 < a < b$인 경우 함수 $y = f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



즉, $0 \le x \le b$에서 함수 $f(x)$는 $x = 0$일 때 최대이고,
최댓값은 $f(0) = ab$이다. (참)
따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ 이다.

210) 16

다음과 같이 이등변삼각형의 꼭짓점을 A, B, C,
직사각형의 꼭짓점을 D, E, F, G, 선분 EF의 중점을 M이라 하자.



삼각형 ABM과 삼각형 DBE가 서로 닮음이고,
$\overline{\mathrm{BM}} : \overline{\mathrm{AM}} = 1 : 2$이므로 $\overline{\mathrm{DE}} = 2\overline{\mathrm{BE}}$이다.
$\overline{\mathrm{EM}} = a \ (0 < a < 4)$라 하면
$\overline{\mathrm{BE}} = 4 - a$, $\overline{\mathrm{DE}} = 2(4-a)$
이므로 직사각형 DEFG의 넓이는

$$\begin{aligned} 2a \times 2(4-a) &= -4(a^2 - 4a) \\ &= -4(a-2)^2 + 16 \ (0 < a < 4) \end{aligned}$$

따라서 $a = 2$일 때 직사각형의 넓이의 최댓값은 16이다.

211) ③

단면인 직사각형의 세로의 길이가 x이므로 가로의 길이는 $a - 2x$이다.
즉, 단면인 직사각형의 넓이는

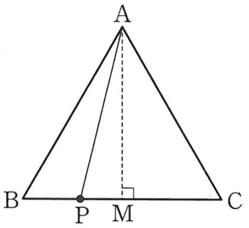
$$\begin{aligned} x(a-2x) = -2x^2 + ax &= -2\left(x^2 - \frac{a}{2}x + \frac{a^2}{16}\right) + \frac{a^2}{8} \\ &= -2\left(x - \frac{a}{4}\right)^2 + \frac{a^2}{8} \end{aligned}$$

이므로 $x = \frac{a}{4}$일 때, 단면의 넓이의 최댓값은 $\frac{a^2}{8}$이다.

이때, $\frac{a}{4} = 15$이므로 $a = 60$이고, 이 단면의 넓이의 최댓값은 $\frac{a^2}{8} = \frac{60^2}{8} = 450(\mathrm{cm}^2)$이다.

212) ②

점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{AM}} = 2\sqrt{3}$이다.



이때, $\overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2$이 최소가 되려면 점 P가 선분 BM 위에 존재해야 한다.
$\overline{\mathrm{PM}} = t \ (0 \le t \le 2)$라 하면

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{AP}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 &= \overline{\mathrm{PM}}^2 + \overline{\mathrm{AM}}^2 + \overline{\mathrm{BP}}^2 \\ &= t^2 + (2\sqrt{3})^2 + (2-t)^2 \\ &= 2t^2 - 4t + 16 = 2(t^2 - 2t + 8) \\ &= 2(t-1)^2 + 14 \end{aligned}$$

이므로 $t = 1$일 때 최솟값 14를 갖는다.

213) 50

판매 금액이 $a\%$ 증가할 때, 판매 대수는 $2a$ 감소하므로 한 달 동안 총 판매 금액을 $f(a)$라 할 때 $f(a)$를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} f(a) &= 100(1 + 0.01a)(300 - 2a) \\ &= (100 + a)(300 - 2a) \\ &= -2a^2 + 100a + 30000 \\ &= -2(a - 25)^2 + 31250 \end{aligned}$$

따라서 노트북의 이번 달의 판매 금액이 지난달의 판매 금액보다 25% 증가할 때, 총 판매 금액이 31250(만 원)으로 최대가 된다.

$\therefore \ \frac{b}{a^2} = \frac{31250}{25^2} = 50$

214) ③

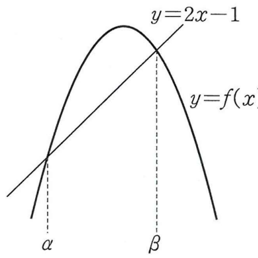
$y = -x^2 + 8x = -(x-4)^2 + 16$이므로 이 이차함수의 그래프는 직선 $x = 4$에 대하여 대칭이다.
점 A의 좌표를 $(a, \ -a^2 + 8a) \ (0 < a < 4)$라 하면
점 D의 x좌표는 $8 - a$이므로 $\overline{\mathrm{AD}} = 8 - 2a$이다.
따라서 직사각형 ABCD의 둘레의 길이는

$$\begin{aligned} 2(\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AD}}) = 2(-\mathrm{a}^2 + 8\mathrm{a} + 8 - 2\mathrm{a}) &= -2(a^2 - 6a - 8) \\ &= -2(a-3)^2 + 34 \end{aligned}$$

이므로 $a = 3$일 때 최댓값 34를 갖는다.

215) 14

이차함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 2x - 1$이 두 점 α, $\beta \ (\alpha < \beta)$에서 만나므로 그래프는 다음과 같다.



직선 $x=m$ $(\alpha \le m \le \beta)$이 곡선과 직선에 의하여 잘리는 선분의 길이는 $f(m)-(2m-1)$이다.

이때, $f(m)-(2m-1)$은 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이고, $m=2$일 때 최댓값 3을 가지므로

$f(x)-(2x-1)=-(x-2)^2+3$

$=-x^2+4x-1$

α, β는 방정식 $f(x)-(2x-1)=0$의 두 실근이므로 $-x^2+4x-1=0$에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $\alpha+\beta=4$, $\alpha\beta=1$

$\therefore\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-2=14$

216) ②

점 P에서 y축에 평행한 직선을 그어 직선 $y=x+1$과 만나는 점을 R라 하면

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$

$\mathrm{P}(a,\ b)$일 때,

$\overline{\mathrm{PR}}=(a^2+3)-(a+1)$

$=a^2-a+2$

$=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}$

이므로 $a=\dfrac{1}{2}$일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$는 최솟값 $m=\dfrac{7}{4}$을 갖는다.

점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가 함수 $y=x^2+3$의 그래프 위의 점이므로

$b=a^2+3=\dfrac{1}{4}+3=\dfrac{13}{4}$

$\therefore\ a+b+m=\dfrac{1}{2}+\dfrac{13}{4}+\dfrac{7}{4}=\dfrac{11}{2}$

217) ④

이차함수$y=x^2+2ax+a^2-12$의 그래프와 직선 $y=2x-n$이 서로 다른 두 점에서 만나므로

방정식 $x^2+2ax+a^2-12=2x-n$,

$x^2+2(a-1)x+a^2+n-12=0$이 서로 다른 두 실근을 가진다. 이 방정식의 판별식 D라 하면

$D=(a-1)^2-(a^2+n-12)=-2a-n+13>0$

에서 $n<13-2a$ …… ㉠

ㄱ. $a=2$를 ㉠에 대입하면 $n<13-4=9$이고, 이 부등식을 만족시키는 자연수 n의 개수는 8이므로 $f(2)=8$이다. (참)

ㄴ. (반례) $x_1=0.1$, $x_2=0.2$이면 ㉠에 대입했을 때,

$n<13-0.2=12.8$에서 $f(0.1)=12$이고

$n<13-0.4=12.6$에서 $f(0.2)=12$이다.

즉, $x_1<x_2$ 이지만 $f(x_1)=f(x_2)$이다. (거짓)

ㄷ. $a=0$일 때, $n<13$에서 $f(0)=12$

$a=1$일 때, $n<13-2=11$에서 $f(1)=10$

$a=2$일 때, $n<13-4=9$에서 $f(2)=8$

$a=3$일 때, $n<13-6=7$에서 $f(3)=6$

$a=4$일 때, $n<13-8=5$에서 $f(4)=4$

$a=5$일 때, $n<13-10=3$에서 $f(5)=2$

$a\ge 6$일 때, $n<13-2a\le 1$이므로 $f(a)=0$이다.

$\therefore\ f(0)+f(1)+f(2)+\cdots+f(100)=12+10+8+6+4+2$
$=42$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

218) 9

방정식 $3\{f(x)\}^2+10f(x)-25=0$ 에서

$f(x)=t$로 치환하면

$3t^2+10t-25=0$, $(3t-5)(t+5)=0$에서

$t=\dfrac{5}{3}$ 또는 $t=-5$

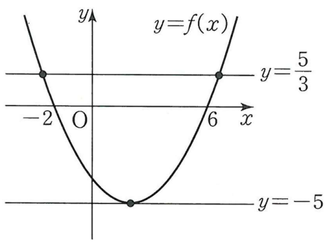
방정식 $f(x)=\dfrac{5}{3}$를 만족시키는

서로 다른 실근의 개수는

함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{5}{3}$의

교점의 개수와 같고,

방정식 $f(x)=-5$를 만족시키는 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=-5$의 교점의 개수와 같으므로 서로 다른 실근의 개수 m은 $m=2+1=3$



한편, 방정식 $f(x)=0$의 두 실근이 -2, 6이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 $x=\dfrac{-2+6}{2}=2$이므로 조건을 만족시키는 서로 다른 모든 실근의 합 n은

$n=(-2-k)+(6+k)+2=6$ $(k>0)$

$\therefore\ m+n=9$

219) $a=-2$ 또는 $a=2$

220) ②

221) 54

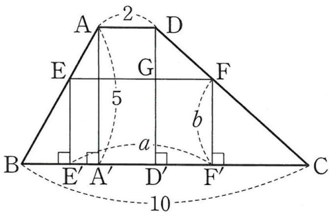
222) 20

223) $d<\alpha<a<b<\beta<c$

224) $\frac{7}{2}$

225) 125

점 D에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D', 두 변 AB, DC 위에 존재하는 직사각형의 꼭짓점을 각각 E, F라 하고, 두 점 E, F에서 변 BC에 내린 수선의 발을 각각 E', F'이라 하자.



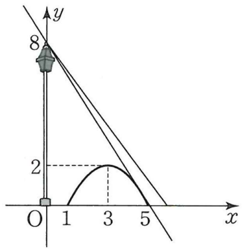
이 사다리꼴의 영역 안에 그린 직사각형 $\mathrm{EE'F'F}$의 가로의 길이를 a, 세로의 길이를 b라 할 때, 직사각형의 넓이는 ab이다.

한편, $\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{D'C}}=8$이고, ……㉠

두 삼각형 $\mathrm{AA'B}$와 $\mathrm{EE'B}$가 서로 닮음이고,
두 삼각형 $\mathrm{DD'C}$와 $\mathrm{FF'C}$가 서로 닮음이므로
$\overline{\mathrm{AA'}}:\overline{\mathrm{A'B}}=\overline{\mathrm{EE'}}:\overline{\mathrm{E'B}}$이고
$\overline{\mathrm{DD'}}:\overline{\mathrm{D'C}}=\overline{\mathrm{FF'}}:\overline{\mathrm{F'C}}$이다.
이때, $\overline{\mathrm{AA'}}=\overline{\mathrm{DD'}}$, $\overline{\mathrm{EE'}}=\overline{\mathrm{FF'}}$이므로
$\overline{\mathrm{AA'}}:(\overline{\mathrm{A'B}}+\overline{\mathrm{D'C}})=\overline{\mathrm{EE'}}:(\overline{\mathrm{E'B}}+\overline{\mathrm{F'C}})$ ……㉡
㉠, ㉡에 의하여 $5:8=b:(10-a)$이므로
$b=\frac{5}{8}(10-a)$
따라서 구하는 직사각형의 넓이는
$ab=\frac{5}{8}a(10-a)=-\frac{5}{8}(a-5)^2+\frac{125}{8}$이고,
$a=5$일 때 최대이므로 $S=\frac{125}{8}$이다.
$\therefore\ 8S=125$

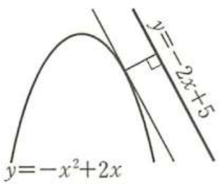
226) ②

다음과 같이 지면을 x축, 가로등을 y축으로 하여 좌표평면 위에 놓으면



가로등 불빛은 점 $(0,\ 8)$이고, 포물선의 꼭짓점의 좌표는 $(3,\ 2)$이고, 점 $(1,\ 0)$을 지난다.
포물선의 방정식을 $y=k(x-3)^2+2\ (k\neq 0)$라 하고, $x=1$, $y=0$을 대입하면 $k=-\frac{1}{2}$이므로
$y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$
지면에 비춘 빛이 비닐하우스와 가장 가까우려면 빛이 지나는 경로가 포물선에 접할 때이다.
점 $(0,\ 8)$을 지나는 직선을 $y=mx+8\ (m<0)$이라 하면, 방정식
$-\frac{1}{2}(x-3)^2+2=mx+8,\ x^2+(2m-6)x+21=0$의
판별식을 D라 할 때,
$\frac{D}{4}=(m-3)^2-21=0,\ m^2-6m-12=0$
$\therefore\ m=3-\sqrt{21}\ (\because\ m<0)$
따라서 직선 $y=(3-\sqrt{21})x+8$이고, 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표는
$\frac{8}{\sqrt{21}-3}=\frac{8(\sqrt{21}+3)}{12}=\frac{2(\sqrt{21}+3)}{3}$

227) $(2,\ 0)$

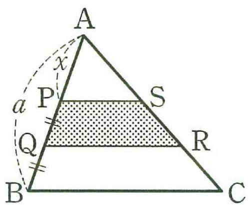


직선 $y=-2x+5$에 평행인 직선의 방정식은
$y=-2x+b$이고, 이것이 포물선과 접할 때의 접점이 구하는 점이다.
접할 때의 b의 값은

$$-x^2+2x=-2x+b$$

곧, $x^2-4x+b=0$ …… ①
에서 $\mathrm{D}/4=4-b=0$ $\quad\therefore\ b=4$
이 값을 ①에 대입하면 $x=2$ $\quad\therefore\ y=0$ $\quad\therefore\ (2,\ 0)$

228) 8



$\overline{\mathrm{AB}}=a,\ \overline{\mathrm{AP}}=x\ (0<x<a)$ 로 놓으면
$\overline{\mathrm{AQ}}=\mathrm{a}-\dfrac{\mathrm{a-x}}{2}=\dfrac{\mathrm{a+x}}{2}$
$\triangle\mathrm{ABC}\ \backsim\ \triangle\mathrm{APS}$ 이므로
$a^2:x^2=24:\triangle\mathrm{APS}$

$$\therefore\ \triangle\mathrm{APS}=\frac{24}{a^2}x^2$$

$\triangle\mathrm{ABC}\ \backsim\ \triangle\mathrm{AQR}$ 이므로
$a^2:\left(\dfrac{a+x}{2}\right)^2=24:\triangle\mathrm{AQR}$

$$\therefore\ \triangle AQR=\frac{24}{a^2}\left(\frac{a+x}{2}\right)^2$$

$\square\mathrm{PQRS}$의 넓이를 S 라고 하면

$$\begin{aligned}\mathrm{S}&=\triangle\mathrm{AQR}-\triangle\mathrm{APS}\\&=\frac{24}{a^2}\left\{\left(\frac{a+x}{2}\right)^2-x^2\right\}\\&=\frac{6}{a^2}(-3x^2+2ax+a^2)\\&=\frac{6}{a^2}\left\{-3\left(x-\frac{a}{3}\right)^2+\frac{4}{3}a^2\right\}\end{aligned}$$

따라서 $x=\overline{\mathrm{AP}}=\dfrac{\mathrm{a}}{3}$ 일 때 최댓값은

$$\frac{6}{a^2}\times\frac{4}{3}a^2=8$$

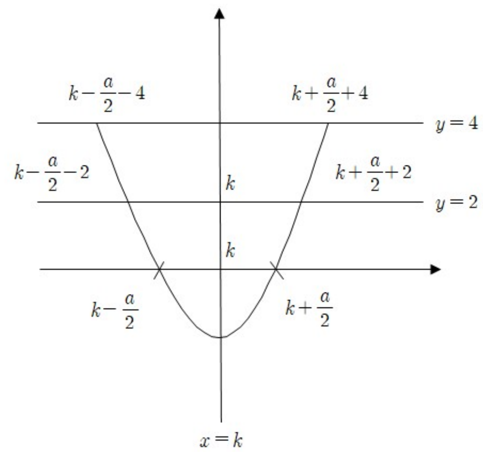
229) ④

한 개당 가격을 x원 씩 올리면 한 개당 이익이 $(100+x)$이고 $10x$ 개 덜 팔리므로, x원 올릴 때의 이익을 y원이라고 하면

$$\begin{aligned}y&=(100+x)(5000-10x)\\&=-10x^2+4000x+500000\\&=-10(x-200)^2+900000\end{aligned}$$

따라서 $x=200$ 일 때 y 는 최대이므로 한 개당 가격은
$300+200=500$ 원

230) ②



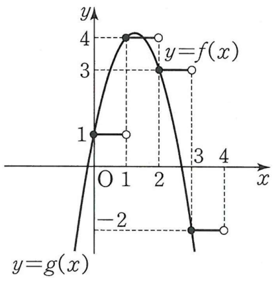
$x=k$를 대칭축이라 하면
$f(x)=\left(a-k+\dfrac{a}{2}\right)\left(x-k-\dfrac{a}{2}\right)$
$f(x)-2=\left(x-k+\dfrac{a}{2}+2\right)\left(x-k-\dfrac{a}{2}-2\right)$
$f(x)-6=\left(x-k+\dfrac{a}{2}+4\right)\left(x-k-\dfrac{a}{2}-4\right)$
$f(k)-\dfrac{a^2}{4}=2+\left(\dfrac{a}{2}+2\right)\left(-\dfrac{a}{2}-2\right)=6+\left(\dfrac{a}{2}+4\right)\left(-\dfrac{a}{2}-4\right)$
$-\dfrac{a^2}{4}=2-\dfrac{a^2}{4}-a-a-4=6-\dfrac{a^2}{4}-2a-2a-16$
$0=-2-2a$
$\therefore\ a=-1\ \rightarrow f(k)=-\dfrac{a^2}{4}=-\dfrac{1}{4}$

<다른풀이>
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 서로 다른 두 점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면 $\beta-\alpha=a$이고,
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)\ \ (k\neq 0)$이다,
이차함수$y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=2$와
만나는 두 점 사이의

거리가 $a+4$이므로 두 교점의 x좌표는
각각 $\alpha-2$, $\beta+2$이다.
즉, 방정식 $f(x)=2$의 두 실근이 $\alpha-2$, $\beta+2$이므로
$f(\beta+2)=2k(\beta-\alpha+2)=2$에서
$k(a+2)=1$ …… ㉠
이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=6$과 만나는 두 점 사이의 거리가 $a+8$이므로 두 교점의 x좌표는 각각 $\alpha-4$, $\beta+4$이다.
즉, 방정식 $f(x)=6$의 두 실근이 $\alpha-4$, $\beta+4$이므로
$f(\beta+4)=4k(\beta-\alpha+4)=6$에서
$2k(a+4)=3$ …… ㉡
㉠, ㉡의 양변을 각각 나누면
$\dfrac{a+2}{2(a+4)}=\dfrac{1}{3}$, $3(a+2)=2(a+4)$
$\therefore\ a=2$
이를 ㉠에 대입하면 $k=\dfrac{1}{4}$
따라서 $f(x)=\dfrac{1}{4}(x-\alpha)(x-\beta)$이므로
$$m=f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{1}{4}\times\frac{\beta-\alpha}{2}\times\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$=-\frac{1}{16}a^2=-\frac{1}{4}$$

231) ③

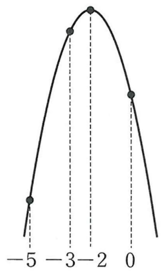
$y=-2[x]^2+5[x]+1=-2\left([x]-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{33}{8}$이고,
$f(x)=-2\left([x]-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{33}{8}$, $g(x)=-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{33}{8}$이라 하면
$0\le x<1$ 일 때, $[x]=0$이므로 $f(x)=g(0)$,
$1\le x<2$ 일 때, $[x]=1$이므로 $f(x)=g(1)$,
$2\le x<3$ 일 때, $[x]=2$이므로 $f(x)=g(2)$,
⋮
정수 k에 대하여 $k\le x<k+1$일 때, $[x]=k$이므로 $f(x)=g(k)$이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



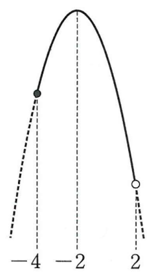
함수 $g(x)=-2\left(x-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{33}{8}$은 $x=\dfrac{5}{4}$일 때, 최댓값을 갖는다. 이때, $f(x)=-2\left([x]-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{33}{8}$에서 $[x]$의 값이 항상 정수이므로 함수 $f(x)$는 $[x]$가 $\dfrac{5}{4}$에 가장 가까운 정수일 때, 최댓값을 갖는다. 즉, 함수 $f(x)$는 $[x]=1$일 때, 최댓값 $-2+5+1=4$를 가지므로
$a=1$, $b=4$이다.
$\therefore\ a+b=5$

232) ④

조건 (가)에 의하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=-2$이고, 조건 (나)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다. 따라서 조건을 만족시키는 이차함수는 $f(x)=a(x+2)^2+b$ (a, b는 실수, $a<0$)이다.
① 함수 $y=f(x)$의 그래프는 위로 볼록하다.(참)
② $f(x)=a(x+2)^2+b$ $(a<0)$이므로 $x=-2$에서 최댓값을 갖는다.(참)
③ 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같으므로
$f(-3)>f(0)>f(-5)$이다. (참)



④ $f(x)=a(x+2)^2+b=ax^2+4ax+4a+b$에서 방정식
$f(x)=0$의 두 근의 합은 -4이다. (거짓)
⑤ $-4\le x<2$에서함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



그러므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 존재하지 않는다. (참)
따라서 선지 중 옳지 않은 것은 ④이다.

233) 28

$2x+3y=10$에서 x, y가 모두 양수이므로

$0<x<5$, $0<y<\frac{10}{3}$

주어진 식에 $3y=10-2x$를 대입하면

$(\sqrt{3+2x}+\sqrt{1+3y})^2=(\sqrt{3+2x}+\sqrt{11-2x})^2$

$=3+2x+11-2x+2\sqrt{(3+2x)(11-2x)}$

$=14+2\sqrt{-4x^2+6x+33}$

$=14+2\sqrt{-4(x-2)^2+49}$

에서 $-4(x-2)^2+49$가 $x=2$일 때 최댓값 49를 가지므로 $(\sqrt{3+2x}+\sqrt{1+3y})^2$은 $x=2$일 때 최댓값 28을 갖는다.

234) 243

방정식 $x^2-4x+2=-2x^2+2x+8$, $3x^2-6x-6=0$,

$x^2-2x-2=0$의 두 근이 α, β이므로

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-2$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=12$, $|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$

(사각형 ABCD의 넓이)

=(삼각형 ACD의 넓이)+(삼각형 BCD의 넓이)이고,

삼각형 ACD의 밑변이 선분 CD일 때 높이를 h_1,

삼각형 BCD의 밑변이 선분 CD일 때 높이를 h_2라 하면

(사각형 ABCD의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times \mathrm{h}_1+\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times \mathrm{h}_2$

$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CD}}\times(\mathrm{h}_1+\mathrm{h}_2)$

이때, $h_1+h_2=|\alpha-\beta|=2\sqrt{3}$으로 일정하므로 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이가 최대일 때 사각형 ADBC의 넓이가 최대이다.

직선 CD의 방정식이 $x=m$ $(\alpha<m<\beta)$일 때,

$\overline{\mathrm{CD}}=(-2m^2+2m+8)-(m^2-4m+2)$

$=-3m^2+6m+6=-3(m-1)^2+9$

이므로 $\overline{\mathrm{CD}}$의 최댓값은 9이고, 이때의 사각형 ADBC의 넓이의

최댓값은

$k=\frac{1}{2}\times 9\times 2\sqrt{3}=9\sqrt{3}$

$\therefore\ k^2=(9\sqrt{3})^2=243$

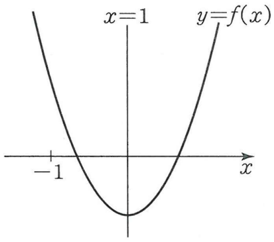
235) ④

236) 728

237) 2

$f(x)=x^2-2x+k-1$이라 하면 $f(x)=(x-1)^2+k-2$이므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 직선 $x=1$이다.

그러므로 이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 두 근이 모두 -1보다 크려면 다음 그림과 같이 이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 x좌표가 모두 -1보다 커야 한다.



이차방정식 $x^2-2x+k-1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1-(k-1)\geq 0$에서 $k\leq 2$ ……㉠

또한 $f(-1)>0$이므로

$f(-1)=1+2+k-1>0$에서 $k>-2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 $-2<k\leq 2$이므로 모든 정수 k의 값의 합은 $-1+0+1+2=2$

238) ①

이차방정식 $x^2+3x+a=0$의 한 근은 -3보다 작고 다른 한 근은 1보다 크므로 $f(x)=x^2+3x+a$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 두 교점의 x좌표 중 하나는 -3보다 작고 다른 하나는 1보다 커야 한다.

그러므로 $f(-3)<0$이고, $f(1)<0$이다.

$f(x)=x^2+3x+a=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+a-\frac{9}{4}$이고 이 이차함수의 그래프의 축이 직선 $x=-\frac{3}{2}$이므로 $f(1)<0$이면 반드시 $f(-3)<0$이다.

즉, 한 교점의 x좌표가 1보다 크면 다른 한 교점의 x좌표는 반드시 -3보다 작게 된다.

따라서 $f(1)<0$만 만족시키면 되므로

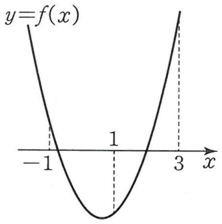
$f(1)=4+a<0$

$\therefore\ a<-4$

239) ①

이차방정식 $x^2+2kx-k=0$의 두 근이 각각 -1과 1사이, 1과 3사이에 하나씩 존재하려면

$f(x)=x^2+2kx-k$라 할 때, 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



즉, $x=-1$, $x=3$일 때의 함숫값은 양수, $x=1$일 때의 함숫값은 음수이어야 한다.

(ⅰ) $f(-1)=1-2k-k>0$에서 $k<\frac{1}{3}$

(ⅱ) $f(3)=9+6k-k>0$에서 $k>-\frac{9}{5}$

(ⅲ) $f(1)=1+2k-k<0$에서 $k<-1$

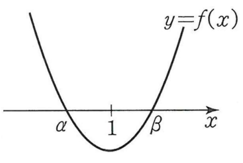
(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 k의 값의 범위는 $-\frac{9}{5}<k<-1$이다.

240) $a \le -\frac{3}{2}$

이차함수 $y=x^2+2ax+3$의 그래프와 직선 $y=2x-1$의 두 교점의 x좌표를 각각 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 하면

방정식 $x^2+2ax+3=2x-1$, $x^2+(2a-2)x+4=0$의 서로 다른 두 실근이 $\alpha,\ \beta$이고 점 $(1,\ 1)$이 선분 AB 위에 있어야 하므로 $\alpha \le 1 \le \beta$를 만족시켜야 한다.

따라서 $f(x)=x^2+(2a-2)x+4$라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같이 $x=1$에서의 함숫값이 0보다 작거나 같아야 한다.



즉, $f(1)=1+2a-2+4 \le 0$에서

$a \le -\frac{3}{2}$

241) ③

방정식 $x^3-4x^2+(m-14)x+2m-4=0$에 $x=-2$를 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

-2	1	-4	$m-14$	$2m-4$
		-2	12	$-2m+4$
	1	-6	$m-2$	0

$(x+2)(x^2-6x+m-2)=0$이다.

이때, 1보다 작거나 같은 근은 오직 한 개이므로 방정식 $x^2-6x+m-2=0$의 서로 다른 두 근은 모두 1보다 크다.

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=9-(m-2)>0$에서 $m<11$ ……㉠

함수 $y=x^2-6x+m-2$의 그래프의 축이 $x=3$이므로

이 함수의 x절편이 모두 1보다 크려면 $x=1$일 때의 함숫값이 0보다 커야 한다.

$1-6+m-2>0$에서 $m>7$ ……㉡

㉠, ㉡에서 m의 값의 범위가 $7<m<11$이므로 구하는 정수 m의 값의 합은 $8+9+10=27$

242) 풀이 참조

$x^3-kx^2+k-1=0$에서 $x=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

1	1	$-k$	0	$k-1$
		1	$-k+1$	$-k+1$
	1	$-k+1$	$-k+1$	0

$(x-1)\{x^2-(k-1)x-(k-1)\}=0$

이고, 이 방정식이 중근을 갖는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) 방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$이 $x=1$을 근으로 갖는 경우 $x=1$을 대입하면

$1-(k-1)-(k-1)=0$에서 $2k=3$

$\therefore\ k=\frac{3}{2}$

(ⅱ) 방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$이

중근을 갖는 경우 방정식 $x^2-(k-1)x-(k-1)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(k-1)^2+4(k-1)=0$

$(k-1)(k-1+4)=0$, $(k-1)(k+3)=0$

$\therefore\ k=1$ 또는 $k=-3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 k의 값의 합은

$\frac{3}{2}+1-3=-\frac{1}{2}$

243) ④

사차방정식 $x^4+(2-2a)x^2+10-5a=0$에서 $x^2=X$라 하면

$X^2+2(1-a)X+10-5a=0$ ……㉠

주어진 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 두 허근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 서로 다른 부호의 두 실근을 가져야 한다.

즉, ㉠의 두 근의 곱은 음수이어야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$10-5a<0$ $\therefore\ a>2$

$\therefore\ p=2$

244) ④

사차방정식 $x^4+ax^2+a^4-8a^2+2b^2-4b+18=0$에서

$x^2=X$라 하면

$X^2+aX+a^4-8a^2+2b^2-4b+18=0$ ……㉠

주어진 사차방정식이 두 허근과 하나의 중근을 가지려면 이차방정식 ㉠이 음의 실근과 0을 근으로 가져야 한다. 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$-a<0$ $\therefore\ a>0$ ……㉡

$a^4-8a^2+2b^2-4b+18=0$

$(a^4-8a^2+16)+2(b^2-2b+1)=0$

$(a^2-4)^2+2(b-1)^2=0$

따라서 $a^2=4$에서 $a=2$ ($\because$ ㉡)이고, $b=1$이므로

$a+b=3$

245) $x=\frac{1}{2}$

삼차방정식 $2x^3-(2k+1)x^2+(5k+2)x-2k-1=0$에서

$k(-2x^2+5x-2)+(2x^3-x^2+2x-1)=0$

이때, k의 값에 관계없이 항상 성립하려면

$-2x^2+5x-2=0$이고, $2x^3-x^2+2x-1=0$이어야 한다.

$-2x^2+5x-2=(-2x+1)(x-2)=0$

에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=2$ ……㉠

$2x^3-x^2+2x-1=0$, $x^2(2x-1)+(2x-1)=0$

$(x^2+1)(2x-1)=0$

에서 $x=\frac{1}{2}$ 또는 $x=\pm i$ ……㉡

㉠, ㉡에서 구하는 근은

$x=\frac{1}{2}$

246) 10

$f(-2)=f(1)=f(3)=k$ (k는 상수)라 하면 방정식

$f(x)-k=0$의 세 근이 -2, 1, 3이므로

$f(x)-k=(x+2)(x-1)(x-3)$

이때, 방정식 $f(x)=0$의 한 근이 $x=2$이므로

$f(2)=0$이고, 위 식에 대입하면

$f(2)-k=4\times1\times(-1)$ $\therefore\ k=4$

$$\begin{aligned}\therefore\ f(x)&=(x+2)(x-1)(x-3)+4\\&=x^3-2x^2-5x+10\\&=(x-2)(x^2-5)\\&=(x-2)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})\end{aligned}$$

따라서 방정식 $f(x)=0$의 나머지 두 근은 $x=\sqrt{5}$ 또는 $x=-\sqrt{5}$이므로

$\alpha^2+\beta^2=5+5=10$

247) 11

$\frac{1}{\alpha\beta}$, $\frac{1}{\beta\gamma}$, $\frac{1}{\gamma\alpha}$을 세 근으로 하는 삼차방정식이

$x^3-x^2+3x-1=0$이므로

삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=\frac{-a}{-c}=\frac{a}{c}=1$ …… ㉠

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}+\frac{1}{\gamma\alpha}\times\frac{1}{\alpha\beta}&=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\\&=\frac{1}{\alpha\beta\gamma}\times\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}\end{aligned}$$

$=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{(\alpha\beta\gamma)^2}$

$=\frac{b}{c^2}=3$ …… ㉡

$\frac{1}{\alpha\beta}\times\frac{1}{\beta\gamma}\times\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{1}{(\alpha\beta\gamma)^2}=\frac{1}{c^2}=1$ …… ㉢

㉢에서 $c^2=1$이므로 ㉠에서 $a^2=1$

㉡에서 $\frac{b}{c^2}=b=3$이므로 $b^2=9$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=11$

248) ①

방정식 $f(3x+1)=0$의 세 근을 α, β, γ라 하고
$\alpha'=3\alpha+1$, $\beta'=3\beta+1$, $\gamma'=3\gamma+1$이라 하면
α', β', γ'은 방정식 $f(x)=0$의 근이다.
따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha'+\beta'+\gamma'=-3$
$\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha'=-9$
$\alpha'\beta'\gamma'=5$

$$\therefore\ \alpha\beta\gamma=\frac{\alpha'-1}{3}\times\frac{\beta'-1}{3}\times\frac{\gamma'-1}{3}$$
$$=\frac{\alpha'\beta'\gamma'-(\alpha'\beta'+\beta'\gamma'+\gamma'\alpha')+(\alpha'+\beta'+\gamma')-1}{27}$$
$$=\frac{5+9-3-1}{27}=\frac{10}{27}$$

따라서 $p=27$, $q=10$이므로 $p+q=27+10=37$

<다른풀이>
$f(x)=x^3+3x^2-9x-5$ …… ㉠
에서 방정식 $f(x)=0$의 세 근을 α, β, γ라 하면
$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ …… ㉡
㉠에서 $x=1$을 대입하면
$f(1)=1+3-9-5=-10$
㉡에 $x=1$을 대입하면
$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$
$\therefore\ (\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)=-(-10)=10$ …… ㉢
방정식 $f(3x+1)=0$에서 $3x+1=t$라 하면
$f(t)=0$, $x=\dfrac{t-1}{3}$
따라서 방정식 $f(3x+1)=0$의 세 근의 곱은
$\dfrac{\alpha-1}{3}\times\dfrac{\beta-1}{3}\times\dfrac{\gamma-1}{3}=\dfrac{10}{27}$ ($\because$ ㉢)
따라서 $p=27$, $q=10$이므로 $p+q=27+10=37$

249) ⑤

$x^4-2x^3-x+2=(x-1)(x-2)(x^2+x+1)$이므로 ω는 방정식 $x^2+x+1=0$의 근이다.
즉, $\omega^2+\omega+1=0$이고 양변에 $\omega-1$을 곱하면
$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$에서 $\omega^3-1=0$
$\therefore\ \omega^3=1$

$$\therefore\ 1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\cdots+\omega^{100}$$
$$=(1+\omega+\omega^2)+\omega^3(1+\omega+\omega^2)+\omega^6(1+\omega+\omega^2)$$
$$+\cdots+\omega^{96}(1+\omega+\omega^2)+\omega^{99}(1+\omega)$$
$$=\omega^{99}(1+\omega)=(\omega^3)^{33}(1+\omega)$$
$$=1+\omega$$

250) 17

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이다.
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 이차방정식
$x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$이다.
$\left(\dfrac{\omega^3+2\omega^2+\omega+1}{\omega^4+\omega^3-\omega}\right)^n$에서
분모를 정리하면
$\omega^4+\omega^3-\omega=\omega+1-\omega=1$
분자를 정리하면
$$\omega^3+2\omega^2+\omega+1=1+\omega^2+(\omega^2+\omega+1)$$
$$=1+\omega^2=-\omega\ \text{이므로}$$
$$\left(\frac{\omega^3+2\omega^2+\omega+1}{\omega^4+\omega^3-\omega}\right)^n=(-\omega)^n=(-1)^n\times\omega^n$$
이고 이 값이 음의 실수가 되려면 n은 홀수이면서 3의 배수가 되어야 한다.
따라서 n은 100 이하의 3의 배수 중에서 6의 배수를 제외해주면 되므로 구하는 자연수 n의 개수는
$33-16=17$

251) ④

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$이다.
$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서 이차방정식
$x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^2+\omega+1=0$이다.

$$f(1)=\frac{\omega}{1+\omega}=\frac{\omega}{-\omega^2}=-\frac{1}{\omega}$$
$$f(2)=\frac{\omega^2}{1+\omega^2}=\frac{\omega^2}{-\omega}=-\omega$$
$$f(3)=\frac{\omega^3}{1+\omega^3}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$
$$f(4)=\frac{\omega^4}{1+\omega^4}=\frac{\omega}{1+\omega}=f(1)$$
$$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(300)$$
$$=\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)$$
$$=100\times\left(-\frac{1}{\omega}-\omega+\frac{1}{2}\right)=100\times\left(-\frac{\omega^2+1}{\omega}+\frac{1}{2}\right)$$
$$=100\times\frac{3}{2}=150$$

252) ③

$x+y=A$, $xy=B$라 하면

$x+y+xy=A+B=-2$ ……㉠

$x^2y+y^2x=xy(x+y)=AB=-24$ ……㉡

㉠, ㉡을 이용하여 A, B를 두 근으로 하고 이차항의 계수가 1인 이차방정식은

$t^2+2t-24=0$, $(t+6)(t-4)=0$이므로

두 근 A, B는 -6 또는 4이다.

따라서 xy의 값이 될 수 있는 것은 -6 또는 4이므로 구하는 합은 $-6+4=-2$

253) 9

$$\begin{cases}(x+2)(y+2)=a & \cdots\cdots ㉠\\(x-4)(y-4)=a & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$$

㉠에서 ㉡을 빼면

$(x+2)(y+2)-(x-4)(y-4)=0$

$xy+2(x+y)+4-\{xy-4(x+y)+16\}=0$

$6(x+y)=12$에서 $x+y=2$ ……㉢

㉠에 ㉢을 대입하면

$(x+2)(4-x)=a$, $x^2-2x+a-8=0$

이고, 주어진 연립방정식의 해가 오직 한 쌍만 존재하기 위해서는 이차방정식 $x^2-2x+a-8=0$이 중근을 가져야 한다.이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=1-(a-8)=0$

$\therefore\ a=9$

254) $x=500$, $y=300$, $z=200$

X, Y, Z의 총 무게가 1kg 이므로

$x+y+z=1000$ ……㉠

조건 (가), (나)에 의하여

$x\times\dfrac{1}{100}+y\times\dfrac{2}{100}+z\times\dfrac{3}{100}=17$

$x+2y+3z=1700$ ……㉡

조건 (다)에 의하여

$x+y=4z$ ……㉢

㉠, ㉢에서 $5z=1000$이므로 $z=200$

㉠, ㉡에 $z=200$을 대입해서 연립하여 풀면

$x=500$, $y=300$

$\therefore\ x=500$, $y=300$, $z=200$

255) ②

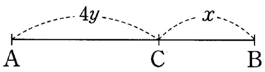
갑의 속력을 $x\text{km}/$시, 을의 속력을 $y\text{km}/$시, 갑과 을이 만난 지점을 C라 하자.

갑과 을이 만날 때까지 걸린 시간을 t시간이라 하면

A지점에서 C지점까지 거리는 $xt\text{km}$

B지점에서 C지점까지 거리는 $yt\text{km}$

이때, 두 사람이 만나고 난 후 갑이 1시간 후에 B지점, 을이 4시간 후에 A지점에 도착하므로 A지점에서 C지점까지 거리는 $4y\text{km}$, B지점에서 C지점까지 거리는 $x\text{km}$이다.



그러므로

$xt=4y$ ……㉠

$yt=x$ ……㉡

㉡에서 $t=\dfrac{x}{y}$이고 ㉠에 대입하면

$\dfrac{x^2}{y}=4y$, $x^2=4y^2$이므로 $x=2y\ (\because\ x>0,\ y>0)$

이때, C지점까지 갈 때, 갑이 을보다 8km를 더 걸었다고 했으므로 $4y-x=8$이고 $x=2y$를 대입하면 $2y=8$이므로 $x=8$, $y=4$

그러므로 A지점에서 B지점까지의 거리 S는

$S=x+4y=24$

$\therefore\ x+S=8+24=32$

256) 8

A, B, C세 사람이 한 시간 동안 부품을 조립하는 작업량을 각각

a, b, c라 하자.

A, B두 사람이 하나의 부품을 조립하는 데 걸리는 시간이 15분이므로

$\left(\dfrac{a}{60}+\dfrac{b}{60}\right)\times 15=1\quad\therefore\ a+b=4$ ……㉠

B, C두 사람이 하나의 부품을 조립하는 데 걸리는 시간이 12분이므로

$\left(\dfrac{b}{60}+\dfrac{c}{60}\right)\times 12=1\quad\therefore\ b+c=5$ ……㉡

C, A두 사람이 하나의 부품을 조립하는 데 걸리는 시간이 10분이므로

$\left(\dfrac{c}{60}+\dfrac{a}{60}\right)\times 10=1\quad\therefore\ c+a=6$ ……㉢

㉠, ㉡, ㉢을 모두 더하면

$2(a+b+c)=15\quad\therefore\ a+b+c=\dfrac{15}{2}$ ……㉣

A, B, C세 사람이 하나의 부품을 조립하는데 걸리는 시간을 k분이라 하면

$\frac{a+b+c}{60}\times k=1$

㉣을 위 식에 대입하면 $\frac{1}{60}\times\frac{15}{2}\times k=1$

$\therefore\ k=8$

따라서 세 사람이 함께 하나의 부품을 조립하면 8분이 걸린다.

257) ⑤

이차방정식 $x^2+(m-1)x+2m+3=0$의 두 근을 α, β $(\alpha\le\beta)$ 라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=1-m$ $\cdots\cdots$㉠

$\alpha\beta=2m+3$ $\cdots\cdots$㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면

$2\alpha+2\beta+\alpha\beta=5,\ (\alpha+2)(\beta+2)=9$

두 근 $\alpha,\ \beta$는 모두 정수이므로

(ⅰ) $\alpha+2=1,\ \beta+2=9$일 때 $\alpha=-1,\ \beta=7$

(ⅱ) $\alpha+2=3,\ \beta+2=3$일 때 $\alpha=1,\ \beta=1$

(ⅲ) $\alpha+2=-3,\ \beta+2=-3$일 때 $\alpha=-5,\ \beta=-5$

(ⅳ) $\alpha+2=-9,\ \beta+2=-1$일 때 $\alpha=-11,\ \beta=-3$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 ㉠에 의하여 $m=1-(\alpha+\beta)$이므로

$m=-5$또는 $m=-1$또는 $m=11$ 또는 $m=15$

따라서 구하는 m의 값의 합은

$(-5)+(-1)+11+15=20$

258) 27

$m:n=1:2$이므로 $n=2m$

이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta\,(\alpha\le\beta)$라 하면 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-m$ $\cdots\cdots$㉠

$\alpha\beta=n=2m$ $\cdots\cdots$㉡

㉠$\times 2+$㉡을 하면

$2\alpha+2\beta+\alpha\beta=0,\ 2\alpha+2\beta+\alpha\beta+4=4$

$(\alpha+2)(\beta+2)=4$

두 근 $\alpha,\ \beta$는 모두 정수이므로

(ⅰ) $\alpha+2=1,\ \beta+2=4$일 때

$\alpha=-1,\ \beta=2$ 이므로 $m+n=-3$

(ⅱ) $\alpha+2=2,\ \beta+2=2$일 때

$\alpha=0,\ \beta=0$ 이므로 $m+n=0$

(ⅲ) $\alpha+2=-2,\ \beta+2=-2$일 때

$\alpha=-4,\ \beta=-4$ 이므로 $m+n=24$

(ⅳ) $\alpha+2=-4,\ \beta+2=-1$일 때

$\alpha=-6,\ \beta=-3$ 이므로 $m+n=27$

(ⅰ)~(ⅳ)에 의하여 $m+n$의 최댓값은 27이다.

259) 8

$x^2+y^2-2x+4y-8=0$에서

$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=13$

$(x-1)^2+(y+2)^2=13$이고 $x,\ y$가 정수이므로

(ⅰ) $(x-1)^2=2^2,\ (y+2)^2=3^2$인 경우

$x-1=2$ 또는 $x-1=-2$이므로 $x=3$ 또는 $x=-1$

$y+2=3$ 또는 $y+2=-3$이므로 $y=1$ 또는 $y=-5$

가능한 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(3,\ 1),\ (3,\ -5),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -5)$이다.

(ⅱ) $(x-1)^2=3^2,\ (y+2)^2=2^2$인 경우

$x-1=3$ 또는 $x-1=-3$이므로 $x=4$ 또는 $x=-2$

$y+2=2$ 또는 $y+2=-2$이므로 $y=0$ 또는 $y=-4$

가능한 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$는

$(4,\ 0),\ (4,\ -4),\ (-2,\ 0),\ (-2,\ -4)$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $x=-2,\ y=-4$일 때 xy는 최댓값 8을 갖는다.

260) 42

방정식 $ax^3-2bx^2+4(a+b)x-16a=0$에서 $x=2$를 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

2	a	$-2b$	$4(a+b)$	$-16a$
		$2a$	$4a-4b$	$16a$
	a	$2a-2b$	$8a$	0

$(x-2)\{ax^2+2(a-b)x+8a\}=0$

주어진 방정식이 서로 다른 세 정수를 근으로 가지므로 방정식 $ax^2+2(a-b)x+8a=0$은 $x=2$를 근으로 갖지 않아야 한다.

이차방정식 $ax^2+2(a-b)x+8a=0$이 $\cdots\cdots$㉠

2가 아닌 서로 다른 정수근을 가져야 하므로 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

두 근의 합은 $\frac{-2(a-b)}{a}=\frac{2b}{a}-2$

두 근의 곱은 $\frac{8a}{a}=8$

따라서 방정식 ㉠의 2가 아닌 서로 다른 두 정수근은 $1,\ 8$ 또는 $-1,\ 8$ 또는 $-2,\ -4$이다.

(ⅰ) 방정식 ㉠의 두 근이 $1,\ 8$인 경우

두 근의 합은 $1+8=\frac{2b}{a}-2$에서 $b=\frac{11}{2}a$이므로

가능한 정수 $a,\ b$의 순서쌍은

$(2,\ 11),\ (4,\ 22),\ (-2,\ -11),\ (-4,\ -22)$로 4개이다.

(ⅱ) 방정식 ㉠의 두 근이 $-1,\ -8$인 경우

두 근의 합은 $-1-8=\frac{2b}{a}-2$에서 $b=-\frac{7}{2}a$이므로

가능한 정수 $a,\ b$의 순서쌍은

$(2,\ -7),\ (4,\ -14),\ (6,\ -21),\ (8,\ -28),$

$(-2,\ 7),\ (-4,\ 14),\ (-6,\ 21),\ (-8,\ 28)$로 8개이다.

(ⅲ) 방정식 ㉠의 두 근이 $-2,\ -4$인 경우

두 근의 합은 $-2-4=\frac{2b}{a}-2$에서 $b=-2a$이므로

가능한 정수 $a,\ b$의 순서쌍은

$(1,\ -2),\ (2,\ -4),\ (3,\ -6),\ \cdots,\ (15,\ -30),$

$(-1,\ 2),\ (-2,\ 4),\ (-3,\ 6),\ \cdots,\ (-15,\ 30)$로 30개다.

(ⅰ)~(ⅲ)에서 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는

$4+8+30=42$이다.

261) ⑤

방정식 $x^3-2x^2+x=k^3-2k^2+k$에서

$x^3-2x^2+x-k^3+2k^2-k=0$이고, $x=k$를 대입하면 방정식을 만족시키므로 조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{c|cccc} k & 1 & -2 & 1 & -k^3+2k^2-k \\ & & k & k^2-2k & k^3-2k^2+k \\ \hline & 1 & k-2 & k^2-2k+1 & 0 \end{array}$$

$(x-k)\{x^2+(k-2)x+k^2-2k+1\}=0$

이 방정식이 중근을 가지려면 방정식

$x^2+(k-2)x+k^2-2k+1=0$이 $x=k$를 한 근으로 갖거나 방정식 $x^2+(k-2)x+k^2-2k+1=0$이 중근을 가져야 한다.

(ⅰ) 방정식 $x^2+(k-2)x+k^2-2k+1=0$이 $x=k$를 한 근으로 갖는 경우

이 방정식에 $x=k$를 대입하면

$k^2+k(k-2)+k^2-2k+1=0$

$3k^2-4k+1=0,\ (3k-1)(k-1)=0$

$\therefore\ k=\frac{1}{3}$ 또는 $k=1$

(ⅱ) 방정식 $x^2+(k-2)x+k^2-2k+1=0$이 중근을 갖는 경우

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(k-2)^2-4(k^2-2k+1)=0$

$-3k^2+4k=0,\ -k(3k-4)=0$

$\therefore\ k=0$ 또는 $k=\frac{4}{3}$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$\frac{1}{3}+1+0+\frac{4}{3}=\frac{8}{3}$

262) ④

$|x^2-4x|-x+k=3$에서

$f(x)=|x^2-4x|,\ g(x)=x-k+3$이라 하자.

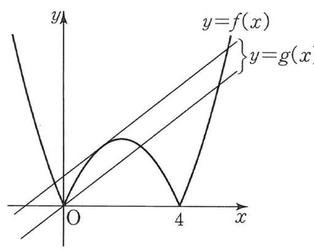
주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 가지려면 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 세 점에서 만나야 한다.

함수 $f(x)=|x^2-4x|$에서

$x^2-4x\geq 0$인 경우, 즉 $x\leq 0$ 또는 $x\geq 4$일 때 $f(x)=x^2-4x$이고

$x^2-4x<0$인 경우, 즉 $0<x<4$일 때 $f(x)=-x^2+4x$이다.

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & (x\leq 0 \text{ 또는 } x\geq 4) \\ -x^2+4x & (0<x<4) \end{cases}$ 의 그래프와 직선 $y=g(x)$가 서로 다른 세 점에서 만나는 경우는 다음과 같다.



(ⅰ) 직선 $y=g(x)$가 이차함수 $y=-x^2+4x$의 그래프와 접하는 경우

$x-k+3=-x^2+4x,\ x^2-3x-k+3=0$에서

이 방정식이 중근을 가져야 하므로 판별식을 D라 하면

$D=9-4(-k+3)=0,\ 4k=3$에서 $k=\frac{3}{4}$

(ⅱ) 직선 $y=g(x)$가 점 $(0,\ 0)$을 지나는 경우

$g(0)=-k+3=0$에서 $k=3$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 실수 k의 값의 합은

$\frac{3}{4}+3=\frac{15}{4}$

263) -9

이차방정식 $x^2-2(2k+1)x+3k^2+4k+9=0$에서 근의 공식에 의하여

$x=2k+1\pm\sqrt{(2k+1)^2-(3k^2+4k+9)}$

$=2k+1\pm\sqrt{k^2-8}$

에서 두 근이 모두 정수가 되려면 제곱근 안이 완전제곱수가 되어야 한다.

$k^2-8=m^2$ (m은 정수)이라 하면

$k^2-m^2=8$

$(k+m)(k-m)=8$

(ⅰ) $k+m=8$, $k-m=1$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $k=\frac{9}{2}$, $m=\frac{7}{2}$

(ⅱ) $k+m=4$, $k-m=2$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $k=3$, $m=1$

(ⅲ) $k+m=2$, $k-m=4$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $k=3$, $m=-1$

(ⅳ) $k+m=1$, $k-m=8$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $k=\frac{9}{2}$, $m=-\frac{7}{2}$

(ⅴ) $k+m=-8$, $k-m=-1$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $k=-\frac{9}{2}$, $m=-\frac{7}{2}$

(ⅵ) $k+m=-4$, $k-m=-2$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $k=-3$, $m=-1$

(ⅶ) $k+m=-2$, $k-m=-4$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $k=-3$, $m=1$

(ⅷ) $k+m=-1$, $k-m=-8$인 경우

두 식을 연립하여 풀면 $k=-\frac{9}{2}$, $m=\frac{7}{2}$

(ⅰ)~(ⅷ)에서 정수 k의 값은 3 또는 -3이므로 모든 k의 값의 곱은 -9이다.

264) 10

265) 6

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-2=0$의 계수가 모두 실수이므로 $\alpha=p+qi$ (p, q는 실수, $q\neq 0$)라 할 때, α를 허근으로 가지면 켤레복소수 $\overline{\alpha}$도 근으로 갖는다.

$\frac{\alpha^2}{2}=\overline{\alpha}$에서 $\frac{(p+qi)^2}{2}=p-qi$

$p^2-q^2+2pqi=2p-2qi$

이때, 복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$2pq=-2q$ ……㉠

$p^2-q^2=2p$ ……㉡

㉠에서 $q(p+1)=0$이므로 $p=-1$ ($\because\ q\neq 0$)

㉡에 $p=-1$을 대입하면 $q^2=3$에서 $q=\sqrt{3}$ 또는 $q=-\sqrt{3}$

그러므로 삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-2=0$의 두 허근은 $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$이다.

이 방정식의 나머지 한 실근을 k라 하면 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$k(-1+\sqrt{3}i)(-1-\sqrt{3}i)=4k=2$에서 $k=\frac{1}{2}$

두 근이 $-1+\sqrt{3}i$, $-1-\sqrt{3}i$인 이차방정식은

$x^2+2x+4=0$이고 나머지 실근이 $x=\frac{1}{2}$이므로 주어진 삼차방정식은

$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+2x+4)=0$, $x^3+\frac{3}{2}x^2+3x-2=0$

이므로 $a=\frac{3}{2}$, $b=3$ $\therefore\ 2a+b=6$

266) ①

삼차방정식 $x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로 $\omega^3=1$

$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)=0$에서

이차방정식 $x^2+x+1=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+1=0$

ㄱ. $f(3)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}=\frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^3}=\frac{0}{1}=0$ (참)

ㄴ. $f(3k-2)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-2}}$

$=\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)+\frac{1}{\omega^3}\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}\right)$

$+\cdots+\frac{1}{\omega^{3(k-1)}}\times\frac{1}{\omega}$

$=0+1\times 0+\cdots+1\times\frac{1}{\omega}=\frac{1}{\omega}$ (거짓)

ㄷ. 자연수 k에 대하여

(ⅰ) $n=3k$일 때

$f(3k)=0$이므로 $\{f(n)\}^2+f(n)=0+0=0$

(ⅱ) $n=3k-1$일 때

$f(3k-1)=\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^3}+\cdots+\frac{1}{\omega^{3k-2}}+\frac{1}{\omega^{3k-1}}$

$=\frac{1}{\omega^{3(k-1)}}\times\left(\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}\right)$

$=\frac{\omega+1}{\omega^2}=\frac{-\omega^2}{\omega^2}=-1$

이므로 $\{f(n)\}^2+f(n)=(-1)^2+(-1)=0$

(ⅲ) $n=3k-2$일 때

ㄴ에서 $f(3k-2)=\frac{1}{\omega}$이므로

$\{f(n)\}^2+f(n)=\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega}=-1\neq 0$

즉, (ⅰ), (ⅱ)일 때 주어진 조건을 만족시키므로 구하는 값은 $90-30=60$ ($\because$ $10\leq 3k-2<100$, $4\leq k<34$) (거짓)

따라서 보기에서 옳은 것은 ㄱ이다.

267) $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{1}{5}\end{cases}$, $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

방정식 $2x^2+3xy+y^2-3x-y-2=0$의 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+3x(y-1)+y^2-y-2=0$

$2x^2+3x(y-1)+(y-2)(y+1)=0$

$(x+y-2)(2x+y+1)=0$

$\therefore$ $x+y-2=0$ 또는 $2x+y+1=0$ ……㉠

방정식 $2x^2-5xy+2y^2+x+y-1=0$의 좌변을 x에 대한 내림차순으로 정리하면

$2x^2+x(1-5y)+2y^2+y-1=0$

$2x^2+x(1-5y)+(2y-1)(y+1)=0$

$(x-2y+1)(2x-y-1)=0$

$\therefore$ $x-2y+1=0$ 또는 $2x-y-1=0$ ……㉡

㉠, ㉡에서 다음과 같이 케이스 분류하면

(ⅰ) $x+y-2=0$이고, $x-2y+1=0$인 경우
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

(ⅱ) $x+y-2=0$이고, $2x-y-1=0$인 경우
두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=1$

(ⅲ) $2x+y+1=0$이고, $x-2y+1=0$인 경우
두 식을 연립하여 풀면 $x=-\frac{3}{5}$, $y=\frac{1}{5}$

(ⅳ) $2x+y+1=0$이고, $2x-y-1=0$인 경우
두 식을 연립하여 풀면 $x=0$, $y=-1$

(ⅰ)~(ⅳ)에서 구하는 해는

$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$, $\begin{cases}x=-\frac{3}{5}\\y=\frac{1}{5}\end{cases}$, $\begin{cases}x=0\\y=-1\end{cases}$

268) 3

이차함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2x+1$이 접하므로 방정식 $f(x)=2x+1$이 중근을 갖는다.

$\{f(x)-2x\}^3-2\{f(x)-2x\}^2-5\{f(x)-2x\}+6=0$에서

$f(x)-2x=t$라 하면

$t^3-2t^2-5t+6=0$

$t=1$을 대입하면 등식이 성립하므로 조립제법을 이용하여 좌변을 인수분해하면

1	1	-2	-5	6
		1	-1	-6
	1	-1	-6	0

$(t-1)(t^2-t-6)=0$

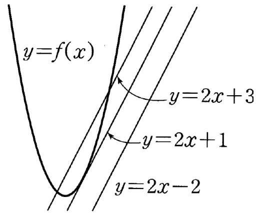
$(t-1)(t-3)(t+2)=0$

$\therefore$ $t=1$ 또는 $t=3$ 또는 $t=-2$

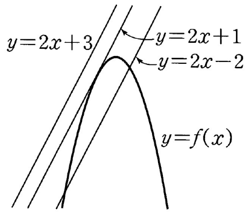
즉, $f(x)-2x=1$ 또는 $f(x)-2x=3$

또는 $f(x)-2x=-2$에서

$f(x)=2x+1$ 또는 $f(x)=2x+3$ 또는 $f(x)=2x-2$이다.



[그림1]



[그림2]

이차함수 $y=f(x)$의 그래프는

[그림1]과 같이 아래로 볼록한 경우와

[그림2]와 같이 위로 볼록한 경우 모두 세 직선 $y=2x+1$, $y=2x+3$, $y=2x-2$와 만나는 점의 개수가 항상 3이다.

따라서 방정식 $f(x)=2x+1$ 또는 $f(x)=2x+3$ 또는 $f(x)=2x-2$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

269) ③

끝내야 할 일의 양을 1이라 하고, A, B, C가 1시간 동안 하는 일의 양을 각각 a, b, c라 하면 주어진 조건에 의하여

$\begin{cases}(a+b+c)\times\frac{45}{60}=1\\(a+b)\times\frac{72}{60}=1\\(a+c)\times\frac{80}{60}=1\end{cases}$

이고 정리하면

$\begin{cases}a+b+c=\frac{4}{3} & \cdots\cdots ㉠\\a+b=\frac{5}{6} & \cdots\cdots ㉡\\a+c=\frac{3}{4} & \cdots\cdots ㉢\end{cases}$

㉠에서 ㉡을 빼면 $c=\frac{4}{3}-\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$

㉠에서 ㉡을 빼면 $b=\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$

따라서 B가 혼자 1시간 일하고 남은 일의 양은

$1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$

이고, C가 x시간 동안 남은 일을 이어서 하면

$\frac{1}{2}x=\frac{5}{12}$ $\qquad\therefore\ x=\frac{5}{6}$

즉, C가 남은 일을 끝마치는 데 50분이 걸린다.

270) $480\mathrm{m}^2$

271) 13

$P(1)=P(3)=P(4)=-1$에서

$P(1)+1=P(3)+1=P(4)+1=0$

이므로 삼차방정식 $P(x)+1=0$의 세 근이 $1,\ 3,\ 4$이다.

$1,\ 3,\ 4$를 세 근으로 하고 x^3의 계수가 1인 삼차방정식은

$x^3-(1+3+4)x^2+(1\cdot3+3\cdot4+4\cdot1)x-1\cdot3\cdot4=0$

$\therefore\ x^3-8x^2+19x-12=0$

즉 $P(x)+1=x^3-8x^2+19x-12$이므로

$P(x)=x^3-8x^2+19x-13$

따라서 삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 방정식 $P(x)=0$의 모든 근의 곱은 13이다.

272) $5^{10}<3^{15}$

$\frac{5^{10}}{3^{15}}=\frac{(5^2)^5}{(3^3)^5}=\left(\frac{25}{27}\right)^5<1$이므로 $5^{10}<3^{15}$

273) ②

$a^2=16=12+2\sqrt{4}$

$b^2=(\sqrt{5}+\sqrt{7})^2=12+2\sqrt{35}$

$c^2=(\sqrt{2}+\sqrt{10})^2=12+2\sqrt{20}$

$\sqrt{4}<\sqrt{20}<\sqrt{35}$이므로 $a^2<c^2<b^2$

이때 $a,\ b,\ c$가 모두 양수이므로 $a<c<b$

274) ③

$x^2=X$로 놓으면 주어진 방정식은

$X^2-kX+k^2-2k-8=0$ $\qquad\cdots\cdots$㉠

이때 사차방정식이 서로 다른 두 실근과 서로 다른 두 허근을 가지려면 방정식 ㉠의 두 근이 서로 다른 부호이어야 하므로

(두 근의 곱)$=k^2-2k-8<0$

$(k+2)(k-4)<0$ $\therefore\ -2<k<4$

따라서 자연수 k는 $1,\ 2,\ 3$의 3개다.

275) $m\ge4$

이차방정식 $x^2+2(m-1)x+m+5=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하고 판별식을 D라 할 때, 두 근이 모두 음수이므로

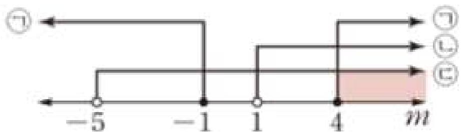
(i) $\frac{D}{4}=(m-1)^2-(m+5)\ge0$

$m^2-3m-4\ge0,\ (m+1)(m-4)\ge0$

$\therefore m\le-1$ 또는 $m\ge4$ $\qquad\cdots\cdots$ ㄱ

(ii) $\alpha+\beta=-2(m-1)<0,\ m-1>0$ $\qquad\therefore m>1$ $\cdots\cdots$ ㄴ

(iii) $\alpha\beta=m+5>0$ $\qquad\therefore m>-5$ $\cdots\cdots$ ㄷ



이상에서 공통부분을 구하면 $m\ge4$

276) ①

주어진 조건에서

$|x-(-2)|+|x-5|\ge9$

$|x+2|+|x-5|\ge9$

이므로 범위를 나누어서 풀이하면 다음과 같다.

(i) $x<-2$인 경우

$-(x+2)-(x-5)\ge9,\ -2x\ge6$

이므로 $x\le-3$

(ii) $-2\le x<5$인 경우

$(x+2)-(x-5)\ge9,\ 7\ge9$

이므로 조건을 만족시키는 실수 x가 존재하지 않는다.

(iii) $x\ge5$인 경우

$(x+2)+(x-5)\ge9,\ 2x\ge12$

이므로 $x\ge6$

(i)~(iii)에서 구하는 실수 x값의 범위는

$x\le-3$ 또는 $x\ge6$

277) ③

$(k+1)x^2+k-2 \le x^2-kx$에서

$kx^2+kx+k-2 \le 0$ ……㉠

(i) $k=0$일 때

㉠에 대입하면 $-2 \le 0$이므로 부등식을 만족시킨다.

(ii) $k>0$일 때

이차부등식 $kx^2+kx+k-2 \le 0$을 만족시키는 실수 x의 값이 존재하려면 이차함수 $y=kx^2+kx+k-2$가 x축과 적어도 한 점에서 만나야 하므로 방정식 $kx^2+kx+k-2=0$ 의 판별식을 D라 하면

$D=k^2-4k(k-2) \ge 0,\ 3k^2-8k \le 0,\ k(3k-8) \le 0$

$\therefore\ 0<k \le \dfrac{8}{3}$

(i), (ii)에서 k의 값의 범위는 $0 \le k \le \dfrac{8}{3}$이므로

정수 k는 $0,\ 1,\ 2$ 로 3개이다.

278) $-5 \le x < 4$

$[x+4]=[x+2]+2$이므로 주어진 부등식에 대입하면

$[x+2]^2-2([x+2]+2)-11 \le 0$

$[x+2]^2-2[x+2]-15 \le 0$

$([x+2]-5)([x+2]+3) \le 0$

이므로 $-3 \le [x+2] \le 5$

따라서 $-3 \le x+2 < 6$에서 x의 값의 범위는

$-5 \le x < 4$

279) 56

부등식 $f(x) \le g(x)$의 해가 $-2 \le x \le 3$이므로

$f(x)-g(x)=h(x)$라 하면 부등식 $h(x) \le 0$의 해가

$-2 \le x \le 3$이므로 함수 $h(x)$의 최고차항의 계수가 양수이고

이차방정식 $h(x)=0$의 두 실근은 $x=-2$ 또는 $x=3$이다.

그러므로 함수 $h(x)$를 구하면

$h(x)=a(x+2)(x-3)\ (a>0)$

이때, $f(1)-g(1)=-24$이므로

$h(1)=a\times 3\times(-2)=-24$에서 $a=4$

$\therefore\ h(x)=4(x+2)(x-3)$

$\therefore\ f(5)-g(5)=h(5)=4\times 7\times 2=56$

280) $2 \le k < 6$

조건 (가)에서 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근 사이에 2가 있으므로 $f(2)=4-2(2k+1)+k^2-14<0$

$k^2-4k-12<0,\ (k-6)(k+2)<0$

$\therefore\ -2<k<6$ ……㉠

이때, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이 $x=\dfrac{2k+1}{2}$이고,

이 축이 조건 (나)에서 직선 $x=\dfrac{1+4}{2}=\dfrac{5}{2}$와 같거나

오른쪽에 존재해야 하므로 $\dfrac{2k+1}{2} \ge \dfrac{5}{2},\ 2k+1 \ge 5$

$\therefore\ k \ge 2$ ……㉡

㉠, ㉡에서 구하는 실수 k의 값의 범위는

$2 \le k < 6$

281) 118

방정식 $x^2+2kx+2k^2-4k-12=0$이 적어도 하나의 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=k^2-(2k^2-4k-12) \ge 0$

$-k^2+4k+12 \ge 0,\ k^2-4k-12 \le 0$

$(k-6)(k+2) \le 0$

$\therefore\ -2 \le k \le 6$ ……㉠

이때, 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2k,\ \alpha\beta=2k^2-4k-12$이므로

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta &= (\alpha+\beta)^2-\alpha\beta \\ &= (-2k)^2-(2k^2-4k-12) \\ &= 2k^2+4k+12 \\ &= 2(k+1)^2+10\end{aligned}$$

이므로 ㉠에서 $k=-1$일 때 최솟값 10을 갖고

$k=6$일 때 최댓값 $2\times 7^2+10=108$을 갖는다.

$\therefore\ 10+108=118$

282) ④

부등식 $0 \le f(x) < g(x)$을 만족시키려면 함수 $f(x)$의 함숫값이 0보다 크거나 같아야 하므로 x축 또는 x축보다 위쪽에 있어야 한다. 즉, 부등식 $f(x) \ge 0$을 만족시키는 범위는

$x \le a$ 또는 $x \ge d$ ……㉠

$f(x)$의 함숫값보다 $g(x)$의 함숫값이 더 커야 하므로

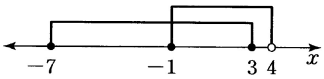
함수 $y=g(x)$의 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프보다

더 위쪽에 있어야 한다.
즉 $f(x) < g(x)$를 만족시키는 범위는
$b < x < e$ ……㉡
㉠, ㉡을 동시에 만족시키는 범위는 $d \le x < e$ 이다.

283) ③

$$\begin{cases} |x+2| \le 5 & \cdots\cdots ㉠ \\ [x]^2 - 2[x] - 8 < 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $-5 \le x+2 \le 5 \quad \therefore \ -7 \le x \le 3$
㉡에서
$([x]-4)([x]+2) < 0, \ -2 < [x] < 4 \quad \therefore \ -1 \le x < 4$
이를 수직선에 나타내면 다음과 같다.

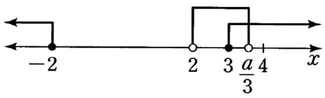


따라서 구하는 x의 값이 범위는 $-1 \le x \le 3$이다.

284) ④

$$\begin{cases} x^2 - x - 6 \ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ 3x^2 - (a+6)x + 2a < 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x-3)(x+2) \ge 0 \quad \therefore x \le -2$ 또는 $x \ge 3$
㉡에서 $(3x-a)(x-2) < 0$
이므로 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x가 3뿐인 경우는 다음과 같다.

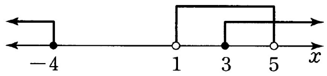


그러므로 부등식 $(3x-a)(x-2) < 0$의 해는
$2 < x < \frac{a}{3}$이고, $3 < \frac{a}{3} \le 4$이다.
따라서 구하는 실수 a의 값의 범위는 $9 < a \le 12$이다.

285) 5

$$\begin{cases} x^2 + x - 12 \ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2 - 6x + 5 < 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠에서 $(x+4)(x-3) \ge 0 \quad \therefore \ x \le -4$ 또는 $x \ge 3$
㉡에서 $(x-1)(x-5) < 0 \quad \therefore \ 1 < x < 5$
이를 수직선에 나타내면 다음과 같다.

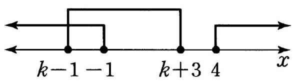


그러므로 주어진 연립부등식의 해는 $3 \le x < 5$이다.
이때, 방정식 $[x]^2 + a[x] + b = 0$의 해가 $3 \le x < 5$이려면 $[x] = 3$ 또는 $[x] = 4$를 만족시켜야 하므로
$([x]-3)([x]-4) = 0$에서 $[x]^2 - 7[x] + 12 = 0$이므로
$a = -7, \ b = 12$
$\therefore \ a + b = 5$

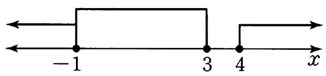
286) ③

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \ge 0 & \cdots\cdots ㉠ \\ x^2 - 2(k+1)x + (k+3)(k-1) \le 0 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

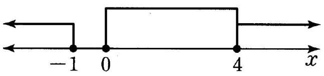
㉠에서 $(x-4)(x+1) \ge 0$
$\therefore \ x \ge 4$ 또는 $x \le -1$
㉡에서 $x^2 - 2(k+1)x + (k+3)(k-1) \le 0$
$\{x-(k+3)\}\{x-(k-1)\} \le 0$
$\therefore \ k-1 \le x \le k+3$
(ⅰ) $k-1 < -1$인 경우
$k < 0$이고, 연립부등식의 해는 $k-1 \le x \le -1$이므로 수직선에 나타내면 다음과 같다.



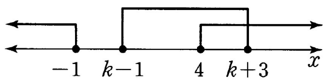
부등식을 만족시키는 정수인 x가 2개이려면 $k-1 = -2$에서 $k = -1$
(ⅱ) $k-1 = -1$ 또는 $k+3 = 4$인 경우
$k-1 = -1$, 즉 $k = 0$일 때
연립부등식의 해는 $x = -1$로 1개다.



$k+3 = 4$, 즉 $k = 1$일 때
연립부등식의 해는 $x = 4$로 1개다.



(ⅲ) $k+3 > 4$, 즉 $k > 1$인 경우
$k > 1$이고, 연립부등식의 해는 $4 \le x \le k+3$이므로 수직선에 나타내면 다음과 같다.



부등식을 만족시키는 정수인 x가 2개이려면 $k+3=5$에서 $k=2$

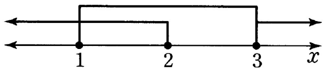
(ⅰ)~(ⅲ)에서 조건을 만족시키는 정수 k의 값의 합은

$-1+2=1$

287) 2

연립부등식 $\begin{cases} x^2+ax+b \geq 0 \\ x^2+cx+d \leq 0 \end{cases}$ 의 해가

$x=3$ 또는 $1 \leq x \leq 2$이므로 각각의 부등식이 나타내는 범위가 다음과 같아야 한다.



그러므로 부등식 $x^2+ax+b \geq 0$의 해는

$x \leq 2$ 또는 $x \geq 3$ ……㉠

부등식 $x^2+cx+d \leq 0$의 해는

$1 \leq x \leq 3$ ……㉡

㉠에서 방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근이 $x=2$ 또는 $x=3$

이므로 $x^2+ax+b=(x-2)(x-3)=x^2-5x+6$

$\therefore\ a=-5,\ b=6$

㉡에서 방정식 $x^2+cx+d=0$의 두 실근이 $x=1$ 또는 $x=3$

이므로 $x^2+cx+d=(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$

$\therefore\ c=-4,\ d=3$

$\therefore\ (a+b)-(c+d)=(-5+6)-(-4+3)=2$

288) 풀이 참조

주어진 방정식이 실근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D_1이라 하면

$\dfrac{D_1}{4}=(2k-a)^2-(k^2+4k-a) \geq 0$

$4k^2-4ak+a^2-(k^2+4k-a) \geq 0$

$3k^2-2(2a+2)k+a^2+a \geq 0$

이때, 모든 실수 k에 대하여 이 부등식이 항상 성립해야 하므로

방정식 $3k^2-2(2a+2)k+a^2+a=0$이 허근 또는 중근을 가져야 한다.

이 방정식의 판별식을 D_2라 하면

$\dfrac{D_2}{4}=(2a+2)^2-3(a^2+a) \leq 0$

$4a^2+8a+4-3(a^2+a) \leq 0$

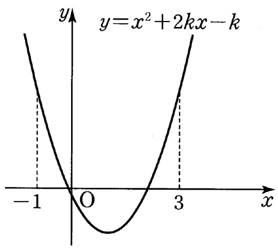
$a^2+5a+4 \leq 0,\ (a+4)(a+1) \leq 0$

이므로 구하는 실수 a의 값의 범위는

$-4 \leq a \leq -1$

289) ⑤

$f(x)=x^2+2kx-k$라 하면 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$라 할 때, $-1<\alpha<\beta<3$이어야 하므로 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



즉, $f(x)=(x+k)^2-k^2-k$에서 이차함수의 그래프의 축이 두 직선 $x=-1,\ x=3$ 사이에 있어야 한다.

또한 $f(-k)<0$이고, $f(-1)>0,\ f(3)>0$이어야 한다.

(ⅰ) $-1<-k<3$

$-3<k<1$

(ⅱ) $f(-k)<0$

$-k^2-k<0$

$\therefore\ k>0$ 또는 $k<-1$

(ⅲ) $f(-1)>0,\ f(3)>0$

$1-2k-k>0,\ 9+6k-k>0$

$\therefore\ -\dfrac{9}{5}<k<\dfrac{1}{3}$

(ⅰ)~(ⅲ)을 모두 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$-\dfrac{9}{5}<k<-1$ 또는 $0<k<\dfrac{1}{3}$

290) 5

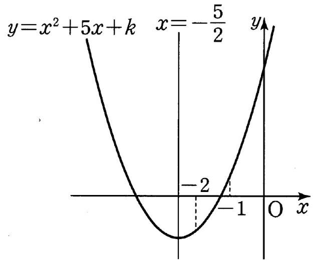
이차방정식 $x^2+3x+2=0,\ (x+1)(x+2)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=-2$

이므로 이차방정식 $x^2+5x+k=0$의 한 근이 -2와 -1사이에 존재해야 한다.

이때, 이차함수 $y=x^2+5x+k=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2+k-\dfrac{25}{4}$에서

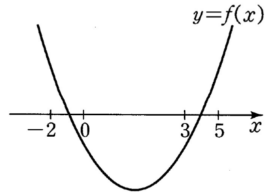
이 함수의 그래프의 축이 $x=-\frac{5}{2}$이므로 그래프는 다음과 같다.



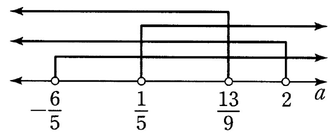
즉, $f(-2)<0$이고, $f(-1)>0$이므로
$f(-2)=4-10+k<0$에서 $k<6$
$f(-1)=1-5+k>0$에서 $k>4$
따라서 $4<k<6$에서 구하는 정수 k의 값은 5이다.

291) $\frac{1}{5}<a<\frac{13}{9}$

이차방정식 $x^2-2(a+1)x+a-2=0$에서
$f(x)=x^2-2(a+1)x+a-2$라 하면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음과 같다.



그러므로 $f(-2)>0,\ f(0)<0$이고, $f(3)<0,\ f(5)>0$이다.
$f(-2)=4+4(a+1)+a-2=5a+6>0$에서 $a>-\frac{6}{5}$
$f(0)=a-2<0$에서 $a<2$
$f(3)=9-6(a+1)+a-2=-5a+1<0$에서 $a>\frac{1}{5}$
$f(5)=25-10(a+1)+a-2=-9a+13>0$에서
$a<\frac{13}{9}$
이므로 위 조건을 모두 만족시키는 범위를 수직선에 나타내면 다음과 같다.



따라서 구하는 a의 값의 범위는 $\frac{1}{5}<a<\frac{13}{9}$이다.

292) $1<a<2$

모든 실수 x에 대하여 부등식
$ax^2-2\sqrt{2}x+3>a$, 즉 $ax^2-2\sqrt{2}x+3-a>0$
이 성립해야 하므로 (i) $a>0$

(ii) 방정식$ax^2-2\sqrt{2}x+3-a=0$의 판별식을 D라 할 때
$$\frac{D}{4}=(\sqrt{2})^2-a(3-a)<0$$
$$a^2-3a+2<0, \qquad (a-1)(a-2)<0$$
$$\therefore 1<a<2$$
(i),(ii)의 공통 범위를 구하면
$1<a<2$

293) ⑤

294) $-1\leqq k<\frac{\sqrt{2}}{2}$

인수분해하면,
$(x+1)(x^2+2kx+2k^2-1)=0$

$x^2+2kx+2k^2-1=0$에서 적어도 하나의 양수근을 가져야한다.

대개의 경우 반대경우를 빼주는게 더 적절하다.
$D\geq 0$의 범위를 구하고,
ⅰ) 둘 다 음수 근
ⅱ) 한 근은 음수, 한 근은 0
ⅲ) 0으로 중근

세 가지경우를 빼주면 된다.
음수로 중근을 갖는 경우는 ⅰ)에 포함되므로 굳이 빼줄 필요없다.

ⅰ) $D\geq 0,\ f(0)>0$, 축<0
ⅱ) $D\geq 0,\ f(0)=0$, 축<0
ⅲ) $D=0, f(0)=0, 축=0$

또한 ⅰ)ⅱ)를 합쳐서
ⅳ) $D\geq 0,\ f(0)\geq 0$, 축<0으로 구해도 된다.

$D \geq 0$범위는 $-1 \leq k \leq 1$이고 ⅳ)의 범위는 $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq k \leq 1$이고, ⅲ)의 공통된 범위는 존재하지 않으므로,
빼주면,

$-1 \leqq k < \frac{\sqrt{2}}{2}$

295) 14

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1) \geq g(x_1)$이 성립하기 위해서는 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x) \geq g(x)$가 성립해야 한다.

$x^2+4x+6 \geq -x^2-2ax-2$, $2x^2+2(a+2)x+8 \geq 0$

$x^2+(a+2)x+4 \geq 0$

이때, 방정식 $x^2+(a+2)x+4=0$이 중근 또는 허근을 가져야 하므로 이 방정식의 판별식을 D라 하면

$\mathrm{D}=(a+2)^2-16 \leq 0$, $a^2+4a-12 \leq 0$, $(a+6)(a-2) \leq 0$

$\therefore\ -6 \leq a \leq 2$

즉, 정수 a는 -6, -5, -4, $\cdots$, 2의 9개이므로

$p=9$

임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 부등식 $f(x_1) \geq g(x_2)$가 성립하기
위해서는 함수 $y=f(x)$의 최솟값이 함수 $y=g(x)$의 최댓값보다 크거나 같아야 하므로

$f(x)=(x+2)^2+2$, $g(x)=-(x+a)^2+a^2-2$

에서 $2 \geq a^2-2$, $a^2-4 \leq 0$, $(a+2)(a-2) \leq 0$

$\therefore\ -2 \leq a \leq 2$

따라서 정수 a는 -2, -1, 0, 1, 2의 5개이므로

$q=5$

$\therefore\ p+q=14$

296) ③

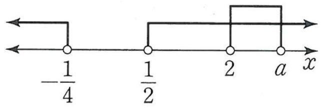
$8x^2 > 2x+1$ 에서 $(4x+1)(2x-1)>0$

$\therefore\ x<-\frac{1}{4}$ 또는 $x>\frac{1}{2}$

$x^2-(2+a)x+2a<0$ 에서 $(x-a)(x-2)>0$ …… ㉠

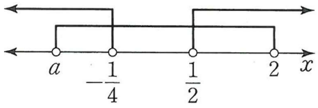
ㄱ. $a=2$일 때 ㉠에서 $(x-2)^2<0$ 이므로 ㉠을 만족시키는 x의 값이 존재하지 않는다. (참)

ㄴ. $4<a \leq 5$ 일 때 ㉠의 해는 $2<x<a$



위의 그림에서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값은 3, 4이다. (참)

ㄷ. 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 -1, 1만 존재하도록 하려면 다음 그림과 같아야 한다.



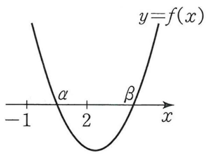
즉, 실수 a의 값의 범위는 $-2 \leq a < -1$이다. (거짓)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

297) ④

$\alpha < \beta$라 두고 $f(x)=x^2-(k+1)x+k-4$라 할 때, 경우를 나누어 보면 다음과 같다.

(ⅰ) $-1 \leq \alpha \leq 2 < \beta$ 인 경우



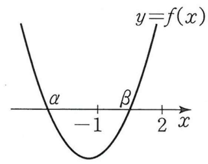
$f(-1) \geq 0$, $f(2) \leq 0$이 되어야 하므로

$f(-1)=1+k+1+k-4=2k-2 \geq 0$에서 $k \geq 1$

$f(2)=4-2k-2+k-4=-k-2 \leq 0$에서 $k \geq -2$

그러므로 실수 k의 값의 범위는 $k \geq 1$

(ⅱ) $\alpha < -1 \leq \beta \leq 2$ 인 경우



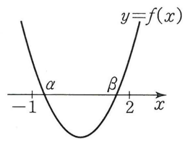
$f(-1) \leq 0$, $f(2) \geq 2$이 되어야 하므로

$f(-1)=1+k+1+k-4=2k-2 \leq 0$에서 $k \leq 1$

$f(2)=4-2k-2+k-4=-k-2 \geq 0$에서 $k \leq -2$

그러므로 실수 k의 값의 범위는 $k \leq -2$

(ⅲ) $-1 \leq \alpha < \beta \leq 2$ 인 경우



이차방정식 $x^2-(k+1)x+k-4=0$의 판별식을 D라 하면

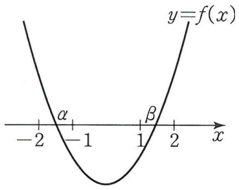
$\mathrm{D}=(k+1)^2-4(k-4)=k^2-2k+17=(k-1)^2+16>0$ 이므로 주어진 방정식은 k의 값에 관계없이 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

또한 $f(-1) \geq 0$, $f(2) \geq 0$이고 이차함수 $y=f(x)$의 그래프

의 축이 두 직선 $x=-1$, $x=2$사이에 존재해야 하므로
$f(-1)=1+k+1+k-4=2k-2\geq 0$에서 $k\geq 1$
$f(2)=4-2k-2+k-4=-k-2\geq 0$에서 $k\leq -2$
축이 $x=\dfrac{k+1}{2}$이므로 $-1<\dfrac{k+1}{2}<2$에서
$-3<k<3$
그러므로 조건을 만족시키는 실수 k의 값이 존재하지 않는다.
(ⅰ)~(ⅲ)에서 구하는 실수 k의 값의 범위는
$k\leq -2$ 또는 $k\geq 1$

298) ③

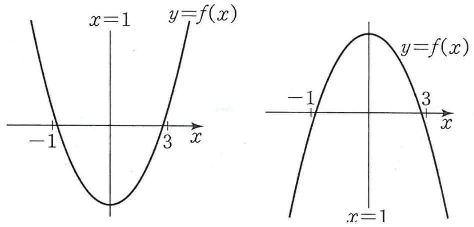
이차방정식 $x^2+(2k-1)x+k-3=0$의 두 근 α, β가 각각 $[\alpha]=-2$, $[\beta]=1$을 만족시키므로
$-2\leq\alpha<-1$, $1\leq\beta<2$이다.
$f(x)=x^2+(2k-1)x+k-3$ 이라 하면 이차함수 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



그러므로 $f(-2)\geq 0$, $f(-1)<0$, $f(1)\leq 0$, $f(2)>0$을 만족시켜야 한다.
(ⅰ) $f(-2)=4-4k+2+k-3=-3k+3\geq 0$ 에서
$k\leq 1$
(ⅱ) $f(-1)=1-2k+1+k-3=-k-1<0$ 에서
$k>-1$
(ⅲ) $f(1)=1+2k-1+k-3=3k-3\leq 0$ 에서 $k\leq 1$
(ⅳ) $f(2)=4+4k-2+k-3=5k-1>0$ 에서 $k>\dfrac{1}{5}$
(ⅰ)~(ⅳ)에서 실수 k의 값의 범위는 $\dfrac{1}{5}<k\leq 1$이다.
$\therefore\ p+q=\dfrac{6}{5}$

299) ④

조건 (가)에 의하여 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이므로 방정식 $f(x)=0$의 두 근도 $x=1$에 대하여 대칭이다.
$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$, $\alpha+\beta=2$
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=\dfrac{q}{p}=2$
이므로 $q=2p$
$\therefore\ f(x)=px^2-2px+r$ $\cdots\cdots$ ㉠
조건 (나)를 만족시키려면 함수 $y=f(x)$의 그래프가 다음의 두 가지경우이다.

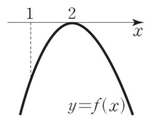


그러므로 $f(-1)$과 $f(1)$의 부호가 서로 달라야 하므로
$f(-1)f(1)<0$
㉠에 대입하면
$f(-1)=p+2p+r=3p+r$, $f(1)=p-2p+r=-p+r$ 이므로
$f(-1)f(1)=(3p+r)(-p+r)<0$
양변을 각각 p^2으로 나누어 주면
$\dfrac{(3p+r)(-p+r)}{p^2}=\left(3+\dfrac{r}{p}\right)\left(-1+\dfrac{r}{p}\right)<0$ ($\because\ p^2>0$)
$\therefore\ -3<\dfrac{r}{p}<1$

300) ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

이차부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$은 x^2의 계수가 a이고, 해가 $x=2$뿐이므로 $a(x-2)^2\geq 0$ $(a<0)$과 같다.
즉, $ax^2+bx+c=ax^2-4ax+4a$ 이므로
$b=-4a$, $c=4a$
ㄱ. $a<0$ (참)
ㄴ. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근은 중근인 2뿐이므로 판별식을 D라 하면 $D=b^2-4ac=0$ (참)
ㄷ. $a+b+c=a-4a+4a=a<0$ ($\because$ ㄱ) (참)
ㄹ. $b=-4a$, $c=4a$ (참)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ이다.

<다른풀이>
이차 부등식 $ax^2+bx+c\geq 0$의 해가 $x=2$뿐이므로 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형은 오른쪽 그림과 같다.



ㄱ. $a<0$ (참) ㄷ. $f(1)=a+b+c<0$ (참)

301) ④

$x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$이므로 주어진 부등식의 양변에 x^2+x+1을 곱하면

$(a+1)x^2+(a-2)x+(a+1)>b(x^2+x+1)$

$(a-b+1)x^2+(a-b-2)x+(a-b+1)>0$

$a-b=t$로 놓으면

$(t+1)x^2+(t-2)x+(t+1)>0$

이때, 위의 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립해야 하므로

(ⅰ) $t+1>0 \therefore t>-1$

(ⅱ) 이차방정식 $(t+1)x^2+(t-2)x+(t+1)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(t-2)^2-4(t+1)^2<0$에서

$-3t^2-12t<0,\ t(t+4)>0$

$\therefore\ t<-4$ 또는 $t>0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $t>0$이므로

$a-b>0 \qquad \therefore\ a>b$

302) $a>-2$

$a(x^2+x+1)>2x$에서 $ax^2+(a-2)x+a>0$이므로

$f(x)=ax^2+(a-2)x+a$라 하면

(ⅰ) $a<0$일 때,

부등식 $f(x)>0$을 만족하는 x의 값이 존재하기 위해서는 방정식 $f(x)=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a-2)^2-4a^2>0$에서 $3a^2+4a-4<0$

$(a+2)(3a-2)<0 \qquad \therefore\ -2<a<\frac{2}{3}$

그런데 $a<0$이므로 $-2<a<0$

(ⅱ) $a=0$일 때,

$f(x)=-2x$이므로 부등식 $f(x)>0$을 만족하는 x의 값은 $x>0$일 때 존재한다.

(ⅲ) $a>0$일 때,

부등식 $f(x)>0$을 만족하는 x의 값이 항상 존재한다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 구하는 상수 a의 값의 범위는 $a>-2$이다.

303) 4개

$k=0,1,2,3$

304) ③

점 P는 직선 $y=x-2$위의 점이므로

$\mathrm{P}(a, a-2)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2=\{(a+1)^2+(a-3)^2\}+\{(a-1)^2+(a-5)^2\}$

$=4a^2-16a+36=4(a-2)^2+20$

따라서 $a=2$, 즉 점P의 좌표가 $(2,0)$일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$은 최솟값 20을 갖는다.

305) 풀이 참조

$\mathrm{A}(x_1,y_1), \mathrm{B}(x_2,y_2), \mathrm{C}(x_3,y_3)$이라 하고 ,$\mathrm{P}(a,b)$라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$

$=\left\{(a-x_1)^2+(b-y_1)^2\right\}+\left\{(a-x_2)^2+(b-y_2)^2\right\}$

$+\left\{(a-x_3)^2+(b-y_3)^2\right\}$

$=3a^2-2(x_1+x_2+x_3)a+3b^2-2(y_1+y_2+y_3)b$

$+x_1^2+x_2^2+x_3^3+y_1^2+y_2^2+y_3^2$

$=3\left(a-\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)^2+3\left(b-\frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)^2$

$-\frac{(x_1+x_2+x_3)^2}{3}-\frac{(y_1+y_2+y_3)^2}{3}$

$+x_1^2+x_2^2+x_3^3+y_1^2+y_2^2+y_3^2$

이므로 $a=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, b=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$ 일 때, 최솟값을 갖는다.

즉, 점P의 좌표가 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$일 때,최솟값을 가지므로 점P가 삼각형ABC의 무게중심일 때, $\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{CP}}^2$은 최솟값을 갖는다.

306) $a=21$, $b=120\sqrt{2}$

두 도로를 좌표평면 위에 놓으면 t분 후 갑의 위치는 점 $(0, -720+40t)$, 을의 위치는 점 $(960-40t, 0)$이다. 두 점 사이의 거리는

$\sqrt{(960-40t)^2+(-720+40t)^2}$

$=40\sqrt{(t-24)^2+(t-18)^2}$

$=40\sqrt{2t^2-84t+900}$

$=40\sqrt{2(t-21)^2+18}$

이므로 $t=21$일 때 최솟값 $120\sqrt{2}$를 갖는다.

따라서 $a=21$, $b=120\sqrt{2}$이다.

307) ②

판매점 A를 원점, 판매점 B, 판매점 C를 각각 점 $B(-2,-1)$, $C(1,3)$이 되도록 좌표평면 위에 놓고, 창고의 위치를 점 $P(a,b)$라 하자. 창고에서 세 판매점까지의 거리가 모두 같으므로

$\overline{AP}=\overline{BP}=\overline{CP}$이어야 한다.

$\overline{AP}=\sqrt{a^2+b^2}$,
$\overline{BP}=\sqrt{(a+2)^2+(b+1)^2}$,
$\overline{CP}=\sqrt{(a-1)^2+(b-3)^2}$

이므로 $\overline{AP}^2=\overline{BP}^2$에서 $a^2+b^2=(a+2)^2+(b+1)^2$

$\therefore\ 4a+2b+5=0$ ……㉠

$\overline{AP}^2=\overline{CP}^2$에서 $a^2+b^2=(a-1)^2+(b-3)^2$

$\therefore\ 2a+6b-10=0$ ……㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면

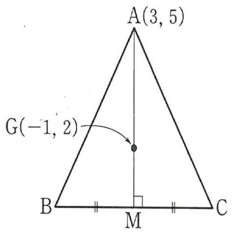
$a=-\dfrac{5}{2}$, $b=\dfrac{5}{2}$

따라서 판매점에서 창고까지의 거리는

$\overline{AP}=\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$이다.

308) ④

정삼각형 ABC의 무게중심을 G, 선분 BC의 중점을 M이라 하자.



$A(3,5)$, $G(-1,2)$에 대하여

$\overline{AG}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

이때, $\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$이므로 $\overline{AG}:\overline{AM}=2:3$이다.

$\therefore\ \overline{AM}=\dfrac{3}{2}\overline{AG}=\dfrac{3}{2}\times 5=\dfrac{15}{2}$

$\overline{AM}$은 정삼각형 ABC의 높이이므로

$\overline{AM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$에서 $\dfrac{15}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$

$\therefore\ \overline{AB}=5\sqrt{3}$

따라서 삼각형 ABC의 둘레의 길이는

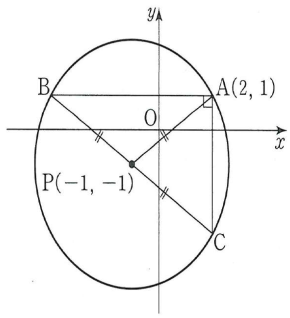
$3\times 5\sqrt{3}=15\sqrt{3}$

309) ②

삼각형 ABC의 외심을 $P(-1,-1)$이라 하면 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는

$\overline{PA}=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$이다.

한편, 삼각형 ABC의 외심이 변 BC 위에 있으므로 삼각형 ABC는 $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형이고, 선분 BC의 중점이 P이다.



따라서 $\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}=\sqrt{13}$이고, $\overline{BC}=2\overline{PB}=2\sqrt{13}$이므로 $\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2=(2\sqrt{13})^2=52$

310) 5

세 점 $\mathrm{A}(-1,-1)$, $\mathrm{B}(0,-\mathrm{k})$, $\mathrm{C}(2,-2)$에 대하여

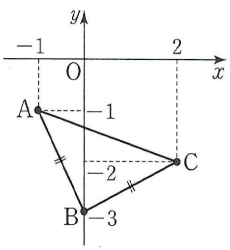
$\overline{AB}=\sqrt{1^2+(k-1)^2}=\sqrt{k^2-2k+2}$
$\overline{BC}=\sqrt{2^2+(k-2)^2}=\sqrt{k^2-4k+8}$
$\overline{CA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

이므로 삼각형 ABC가 이등변삼각형이 되는 경우는 다음과 같다.

(i) $\overline{AB}=\overline{BC}$일 때 $\overline{AB}^2=\overline{BC}^2$에서

$k^2-2k+2=k^2-4k+8$

$2k=6$이므로 $k=3$



(ii) $\overline{BC}=\overline{CA}$일 때 $\overline{BC}^2=\overline{CA}^2$에서

$k^2-4k+8=10$, $k^2-4k-2=0$

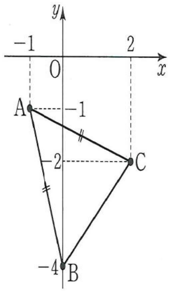
$\therefore\ k=2\pm\sqrt{6}$

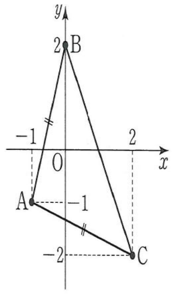
즉 조건을 만족시키는 정수 k값은 존재하지 않는다.

(iii) $\overline{CA}=\overline{AB}$일 때 $\overline{CA}^2=\overline{AB}^2$에서 $k^2-2k+2=10$

$k^2-2k-8=0$, $(k-4)(k+2)=0$

$\therefore\ k=4$ 또는 $k=-2$



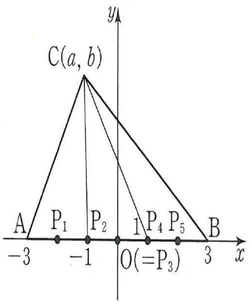


(i)~(iii)에서 구하는 모든 정수 k의 값의 합은

$3+4+(-2)=5$이다.

311) 28

직선 AB를 x축으로 하고 점 P_3이 원점이 되도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓으면 다음과 같다.



이때, $\overline{AB}=6$이므로

$A(-3,0)$, $P_2(-1,0)$, $P_4(1,0)$, $B(3,0)$

$C(a,b)$라 하자.

$\overline{BC}=2\sqrt{7}$이므로 $(a-3)^2+b^2=28$ ……㉠

$\overline{CA}=4$이므로 $(a+3)^2+b^2=16$ ……㉡

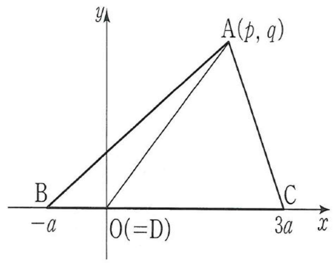
㉠−㉡에서 $-12a=12$ $\quad\therefore\ a=-1$

이를 ㉡에 대입하면 $b^2=12$

$$\begin{aligned}\therefore\ \overline{CP_2}^2+\overline{CP_4}^2 &= \{(a+1)^2+b^2\}+\{(a-1)^2+b^2\}\\ &= 2a^2+2b^2+2\\ &= 2\times(-1)^2+2\times 12+2=28\end{aligned}$$

312) ③

좌표평면 위에 점 D를 원점, 선분 BC를 x축으로 되도록 놓고 $B(-a,0)$, $C(3a,0)$, $A(p,q)$ $\quad(a>0,\ p>0,\ q>0)$ 라 하면 다음과 같다.



$\overline{AB}=5$, $\overline{AC}=3$, $\overline{AD}=\sqrt{15}$이므로

$(p+a)^2+q^2=25$ ……㉠

$(p-3a)^2+q^2=9$ ……㉡

$p^2+q^2=15$ ……㉢

㉠−㉢을 하면 $2ap+a^2=10$ ……㉣

㉡−㉢을 하면 $-6ap+9a^2=-6$에서

$2ap-3a^2=2$ ……㉤

㉣−㉤을 하면 $4a^2=8$에서

$a^2=2$ $\qquad\therefore\ a=\sqrt{2}\ \ (\because a>0)$

$\therefore\ \overline{BC}=4a=4\sqrt{2}$

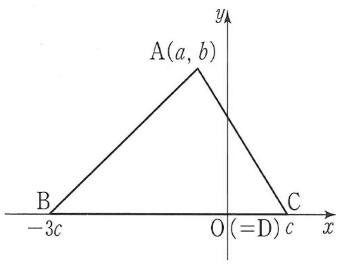
313) $\dfrac{3}{4}$

$\overline{BD}=3\overline{DC}$에서 $\overline{BD}:\overline{DC}=3:1$이므로

변 BC 위의 점 D는 선분 BC를 $3:1$로 내분하는 점이다.

직선 BC를 x축으로 하고, 점 D가 원점이 되도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓고,

$A(a,b)$, $B(-3c,0)$, $C(c,0)$이라 하면 다음과 같다.



$3\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=k(\overline{AB}^2+3\overline{AC}^2)$에서

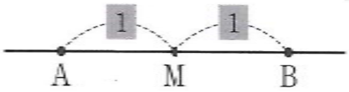
$3(a^2+b^2)+(-3c)^2=k[(a+3c)^2+b^2+3\{(a-c)^2+b^2\}]$

$3a^2+3b^2+9c^2=k(4a^3+4b^2+12c^2)$

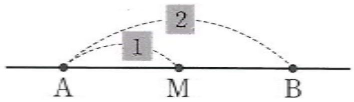
$\therefore\ k=\dfrac{3a^2+3b^2+9c^2}{4a^2+4b^2+12c^2}=\dfrac{3}{4}\quad(\because\ a^2+b^2+3x^2\neq 0)$

314) ④

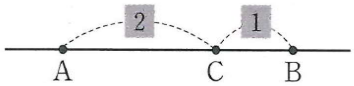
① 선분 AB를 $1:1$로 외분할 수 없다. (참)
② 선분 AB를 $1:1$로 내분하는 점은 선분 AB의 중점이다. (참)

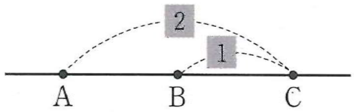


③ 선분 AB의 중점을 M이라 하면 점 A는 선분 BM을 $2:1$로 외분하는 점이다. (참)

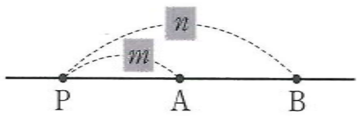


④ $\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$을 만족시키는 직선 AB 위의 점 C는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 또는 $2:1$로 외분하는 점이다. (거짓)



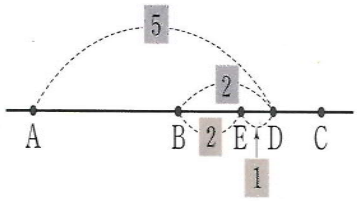


⑤ 두 자연수 m, n에 대하여 $m<n$일 때, 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 P에 대하여 $\overline{PA}<\overline{PB}$이다. (참)



315) ⑤

점 A, B, C, D, E를 직선 위에 나타내면 다음과 같다.



$\overline{AE}=\overline{AB}+\overline{BE}=\frac{3}{2}\overline{BD}+\frac{2}{3}\overline{BD}=\frac{13}{6}\overline{BD}$

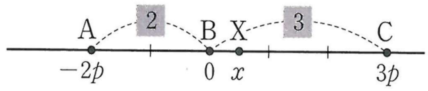
$\therefore\ \frac{\overline{AE}}{\overline{BD}}=\frac{13}{6}$

316) ⑤

두 점 $A(-5,1), B(1,-3)$에 대하여 선분 AB를 $(1-t):t\ (0<t<1)$로 내분하는 점의 좌표는
$\left(\frac{(1-t)\times1+t\times(-5)}{(1-t)+t}, \frac{(1-t)\times(-3)+t\times1}{(1-t)+t}\right)$
$\therefore\ (-6t+1, 4t-3)$
이 점이 제3사분면에 있기 위해서는 $-6t+1<0$ 이고 $4t-3<0$이어야 한다.
따라서 $\frac{1}{6}<t<\frac{3}{4}$이므로 $a=\frac{1}{6}$, $b=\frac{3}{4}$이다.
$\therefore\ a+b=\frac{11}{12}$

317) ③

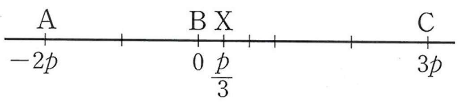
$3\overline{AB}=2\overline{BC}$에서 $\overline{AB}:\overline{BC}=2:3$이고 B지점은 A지점과 C지점 사이에 위치하므로 점 B는 선분 AC를 $2:3$으로 내분하는 점이다.



따라서 직선도로를 수직선으로, 점 B를 원점으로 생각하면 $A(-2p), B(0), C(3p)$로 놓을 수 있다. (p는 상수)
보관 창고의 위치를 $X(x)$라 하면 운반비용은 $\overline{XA}^2+\overline{XB}^2+\overline{XC}^2$의 값에 비례하므로

$$\begin{aligned}\overline{XA}^2+\overline{XB}^2+\overline{XC}^2&=(x+2p)^2+x^2+(x-3p)^2\\&=3x^2-2px+13p^2\\&=3(x-\frac{p}{3})^2+\frac{38}{3}p^2\end{aligned}$$

에서 운반비용은 $x=\frac{p}{3}$일 때 최소이다.



따라서 $\overline{AB}=6\overline{BX}$에서 $\overline{AX}:\overline{BX}=7:1$이므로
보관 창고의 위치는 선분 AB를 $7:1$로 외분하는 점이다.

318) ⑤

선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점을
$D\left(\frac{1\times2+2\times(-1)}{1+2}, \frac{1\times5+2\times1}{1+2}\right)$ $\therefore\ D\left(0, \frac{7}{3}\right)$
선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점은

$E\left(\frac{1\times5+2\times2}{1+2}, \frac{1\times(-3)+2\times5}{1+2}\right)$ $\therefore\ E\left(3, \frac{7}{3}\right)$

선분 CA를 $1:2$로 내분하는 점은

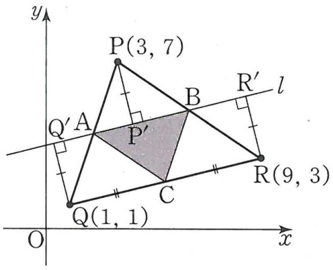
$F\left(\frac{1\times(-1)+2\times5}{1+2}, \frac{1\times1+2\times(-3)}{1+2}\right)$ $\therefore\ F\left(3, -\frac{5}{3}\right)$

따라서 삼각형 DEF의 무게중심의 좌표는

$\left(\frac{0+3+3}{3}, \frac{\frac{7}{3}+\frac{7}{3}+\left(-\frac{5}{3}\right)}{3}\right)$, 즉 $(2, 1)$이다.

319) ⑤

세 점 P, Q, R에서 직선 l에 내린 수선의 발을 각각 P', Q', R'이라 하면



두 삼각형 $PP'A, QQ'A$가 합동이고, 두 삼각형 $PP'B, RR'B$가 각각 합동이므로 두 점 A와 B는 각각 선분 PQ, 선분 PR의 중점이다.

따라서 세 점 A, B, C는 각각 세 선분 PQ, PR, QR의 중점이므로 두 삼각형 PQR와 ABC의 무게중심은 서로 일치한다.

이때, 세 점 $P(3,7), Q(1,1), R(9,3)$에 대하여 삼각형 PQR의 무게중심의 좌표는

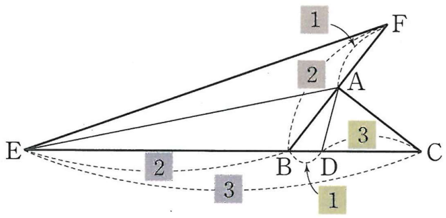
$\left(\frac{3+1+9}{3}, \frac{7+1+3}{3}\right)$, 즉 $\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right)$이므로

삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표는 $\left(\frac{13}{3}, \frac{11}{3}\right)$이다.

$\therefore\ x+y=\frac{13}{3}+\frac{11}{3}=8$

320) 16

삼각형 ABC와 세 점 D, E, F를 나타내면 다음과 같다.



(삼각형 ABC의 넓이)$=S$라 하자.

점 D는 선분 BC를 $1:3$으로 내분하는 점이므로

(삼각형 ABD의 넓이)$=\frac{1}{4}S$ ……㉠

점 E는 선분 BC를 $2:3$으로 외분하는 점이므로

(삼각형 AEB의 넓이)$=2S$

점 F는 선분 AB를 $1:2$로 외분하는 점이므로

(삼각형 FEB의 넓이)$=4S$ ……㉡

(삼각형 FEB의 넓이)$=k\times$(삼각형 ABD의 넓이)에서

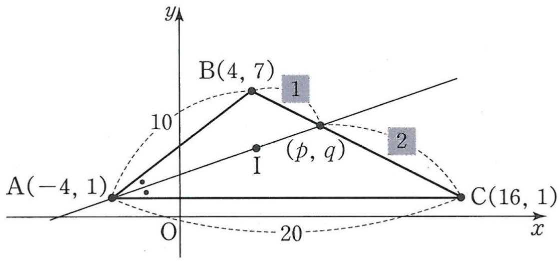
㉠,㉡에 의하여 $4S=k\times\frac{1}{4}S$ $\therefore\ k=16$

321) 13

삼각형 ABC의 세 내각의 이등분선의 교점이

삼각형 ABC의 내심 I이므로

직선 AI는 삼각형 ABC의 내각 BAC를 이등분한다.



세 점 $\mathrm{A}(-4,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 7)$, $\mathrm{C}(16,\ 1)$에 대하여

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{8^2+6^2}=10$, $\overline{\mathrm{AC}}=|16-(-4)|=20$

이므로 $\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=1:2$이다.

따라서 각의 이등분선의 성질에 의하여 두 직선 AI와 BC가 만나는 점 $(p,\ q)$는 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점과 같다.

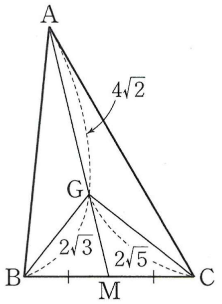
따라서 점 $(p,\ q)$는 $\left(\frac{1\times16+2\times4}{1+2}, \frac{1\times1+2\times7}{1+2}\right)$,

즉 $(8,\ 5)$이므로 $p+q=13$

322) 200

323) ②

직선 AG가 선분 BC와 만나는 점을 M이라 하면 선분 BC의 중점이 M이고, $\overline{AG}:\overline{GM}=2:1$이므로 $\overline{GM}=2\sqrt{2}$이다.



삼각형 BCG에서 중선정리에 의하여

$\overline{BG}^2+\overline{CG}^2=2(\overline{GM}^2+\overline{BM}^2)$

$(2\sqrt{3})^2+(2\sqrt{5})^2=2\{(2\sqrt{2})^2+\overline{BM}^2\}$

$32=2(8+\overline{BM}^2)$ $\therefore$ $\overline{BM}=2\sqrt{2}$

이때, 삼각형 BCG에서 $\overline{GM}=\overline{BM}=\overline{CM}$이므로 삼각형 BCG는 $\angle BGC=90°$인 직각삼각형이다.

$\therefore$ (삼각형 BCG의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times\sqrt{5}=2\sqrt{15}$

$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)$=3\times$(삼각형 BCG의 넓이)

$=3\times2\sqrt{15}=6\sqrt{15}$

324) ⑤

세 점 $A(0,\ 3)$, $B(-5,\ -9)$, $C(4,\ 0)$에서

$\overline{AB}=\sqrt{(-5)^2+(-12)^2}=13$, $\overline{AC}=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$이다.

$\overline{AD}=\overline{AC}=5$이고 두 직선 DC와 AP는 서로 평행하므로

$\overline{BP}:\overline{CP}=\overline{BA}:\overline{DA}=13:5$

즉, 점 P는 선분 BC를 $13:5$로 외분하는 점이다.

따라서 점 P의 좌표는

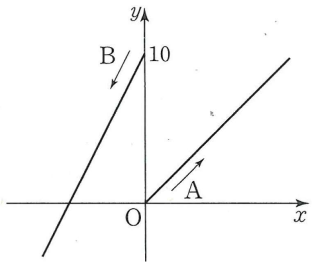
$\left(\frac{13\times4-5\times(-5)}{13-5},\ \frac{13\times0-5\times(-9)}{13-5}\right)$

$\therefore$ $\left(\frac{77}{8},\ \frac{45}{8}\right)$

325) $\frac{1}{5}$

326) ①

좌표평면 위에 지점 O를 원점, 동서 방향을 x축, 남북 방향을 y축이라 하고 두 학생 A, B의 위치를 각각 두 점 A, B라 하자.



학생 A는 원점에서 출발하여 직선 $y=x$를 따라 움직이므로 t시간 후 A의 위치를 $P(a,\ a)$라 하면

$\overline{OP}=a\sqrt{2}=2\sqrt{2}\times t$에서 $a=2t$, 즉, $P(2t,\ 2t)$이다.

한편, 학생 B는 점 $(0,\ 10)$에서 출발하여

t시간마다 x축 방향으로 $-t$만큼, y축 방향으로 $-2t$만큼 움직이므로 t시간 후 B의 위치를 Q라 하면 $Q(-t,\ 10-2t)$이다.

t시간 후 두 사람 사이의 거리는

$\overline{PQ}=\sqrt{(3t)^2+(4t-10)^2}=\sqrt{25t^2-80t+100}$

$=\sqrt{25\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+36}$

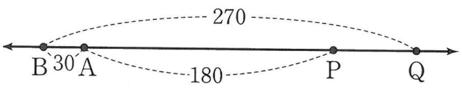
이므로 $\frac{8}{5}$시간 후 두 사람 사이의 거리가 6km로 최소이다.

따라서 $x=\frac{8}{5}\times60=96$, $y=6$이다.

$\therefore$ $x+y=96+6=102$

327) ③

수직선 위에 처음 두 사람 A, B의 위치를 각각 점 A, B로 나타내면 다음과 같다.



B의 속력은 A의 속력의 1.5배이므로 B가 결승점까지 270m를 달리는 동안 A는 180m를 달린다.

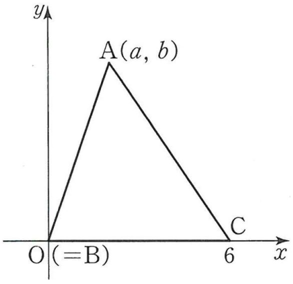
따라서 점 B에서 Q까지의 거리가 B, A에서 P까지의 거리가 180m이다.

$\overline{AP}=180$, $\overline{AQ}=240$, $\overline{PQ}=60$이므로 점 A는 선분 PQ를 $180:240=3:4$로 외분한다.

$\therefore$ $m-n=3-4=-1$

328) ③

두 점 B, C의 좌표가 각각 $(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$, 점 A가 제1사분면 위에 오도록 삼각형 ABC를 좌표평면 위에 놓자.



점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 $(a>0,\ b>0)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{10}$이므로 $a^2+b^2=40$ ……㉠

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(a-6)^2+b^2}=2\sqrt{13}$이므로

$(a-6)^2+b^2=52$ ……㉡

㉠에서 ㉡을 빼면 $12a-36=-12$이므로 $a=2$이고,

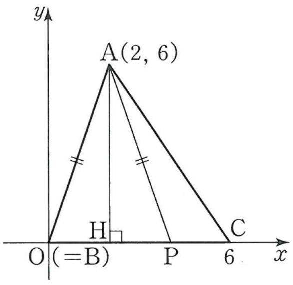
이를 ㉠에 대입하면 $b=6$ $(\because\ b>0)$

$\therefore$ A$(2,\ 6)$

ㄱ. $m=n$일 때, 점 P는 선분 BC의 중점이므로 P$(3,\ 0)$

$\therefore$ $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(3-2)^2+(0-6)^2}=\sqrt{37}$ (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AP}}$일 때, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면 H$(2,\ 0)$이다.



이때, 삼각형 ABP가 이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{HP}}$에서 P$(4,\ 0)$이다.

즉, $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PC}}=4:2=2:1$이므로 $m=2,\ n=1$

$\therefore$ $m-n=1$ (거짓)

ㄷ. 점 P의 좌표를 $(p,\ 0)$ $(p>0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(p-2)^2+(0-6)^2}=3\sqrt{5}$에서

$p^2-4p+40=45$

$p^2-4p-5=0,\ (p-5)(p+1)=0$

즉, $p=5$ $(\because\ p>0)$이므로 P$(5,\ 0)$이다.

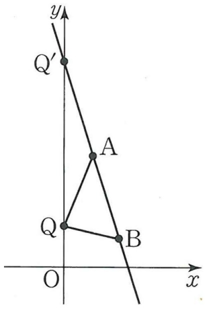
$\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PC}}=5:1$이므로

$m=5,\ n=1$ $\quad\therefore$ $m+2n=7$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

329) 59

직선 AB와 y축의 교점을 Q′이라 하자.



y축 위의 점 Q에 대하여

(ⅰ) 점 Q가 점 Q′에 위치하지 않을 때

삼각형 ABQ에 대하여

$\overline{\mathrm{AQ}}<\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BQ}}$에서 $\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{BQ}}<\overline{\mathrm{AB}}$이고

$\overline{\mathrm{AQ}}>\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BQ}}$에서 $\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{BQ}}>-\overline{\mathrm{AB}}$이므로

$-\overline{\mathrm{AB}}<\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{BQ}}<\overline{\mathrm{AB}}$에서 $|\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{BQ}}|<\overline{\mathrm{AB}}$

(ⅱ) 점 Q가 점 Q′에 위치할 때

$|\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{BQ}}|=|\overline{\mathrm{AQ'}}-\overline{\mathrm{BQ'}}|=|-\overline{\mathrm{AB}}|=\overline{\mathrm{AB}}$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $|\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{BQ}}|\leq\overline{\mathrm{AB}}$

따라서 점 Q가 점 Q′에 위치할 때 $|\overline{\mathrm{AQ}}-\overline{\mathrm{BQ}}|$는 최댓값 $\overline{\mathrm{AB}}$를 갖는다.

두 점 A$(1,\ 4)$, B$(2,\ 1)$을 지나는 직선 AB의 방정식은

$y-4=\dfrac{1-4}{2-1}(x-1)$ $\qquad\therefore$ $y=-3x+7$

즉, 점 Q′의 y좌표는 7이므로 $a=7$이다.

또한 $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{1^2+(-3)^2}=\sqrt{10}$이므로 $b=\sqrt{10}$

$\therefore$ $a^2+b^2=7^2+(\sqrt{10})^2=59$

330) ③

점 P가 선분 AC를 $m:n$으로 내분하는 점이므로

$p=\dfrac{mc+na}{m+n}$ ……㉠

또한 점 P가 선분 BC를 $m:n$으로 외분하는 점이므로

$p=\dfrac{mc-nb}{m-n}$ ……㉡

즉, ㉠, ㉡에 의하여 $\dfrac{mc+na}{m+n}=\dfrac{mc-nb}{m-n}$ ……㉢

ㄱ. $a=1,\ b=5,\ m=1,\ n=2$이면 ㉢에서

$\dfrac{c+2}{3}=\dfrac{c-10}{-1}$, $-c-2=3c-30$

$\therefore$ $c=7$ (참)

ㄴ. (반례) $a=0,\ c=3,\ m=2,\ n=1$이면

㉢에서 $\dfrac{6+0}{3}=\dfrac{6-b}{1}$

즉, $p=2,\ b=4$이므로 $a<p<c<b$ (거짓)

ㄷ. ㉠에서 $(m+n)p=mc+na$ ……㉣

㉡에서 $(m-n)p=mc-nb$ ……㉤

㉣에서 ㉤을 빼면

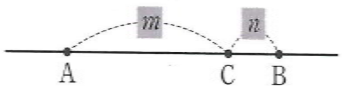
$2np=na+nb$

$\therefore\ p=\dfrac{a+b}{2}$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

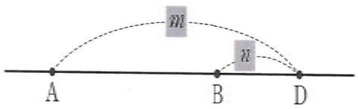
331) ④

$\overline{AB}=k\ (k>0)$라 하면 점 C가 선분 AB를 $m:n$으로 내분하는 점이므로 $\overline{AC}=\dfrac{m}{m+n}k$



점 D가 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점이므로

$\overline{AD}=\dfrac{m}{m-n}k$



$\dfrac{1}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{k}$, $\dfrac{1}{\overline{AC}}=\dfrac{m+n}{mk}$, $\dfrac{1}{\overline{AD}}=\dfrac{m-n}{mk}$에서

$\dfrac{m+n}{mk}+\dfrac{m-n}{mk}=\dfrac{2m}{mk}=\dfrac{2}{k}$를 만족시킨다.

$\therefore\ \dfrac{1}{\overline{AC}}+\dfrac{1}{\overline{AD}}=\dfrac{2}{\overline{AB}}$

332) ①

네 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 1)$, $\mathrm{D}(2,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD는 정사각형이다.

대각선 AC는 각 A를 이등분하므로 삼각형 APD에서

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QD}}$

이때, 점 Q가 선분 DP를 $3:1$로 내분하므로

$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{PQ}}:\overline{\mathrm{QD}}=1:3$이다.

$\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AB}}$에서 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{AB}}=1:3$이므로 점 P는 선분 AB를 $1:2$로 내분하는 점이다. 즉, 점 P의 좌표는 $\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$이다.

점 Q는 선분 DP를 $3:1$로 내분하는 점이므로 점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{1+2}{4},\ \dfrac{4+3}{4}\right)$ $\quad\therefore\ \mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{7}{4}\right)$

$\therefore\ m+n=\dfrac{5}{2}$

<다른풀이>

네 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 1)$, $\mathrm{D}(2,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 사각형 ABCD는 정사각형이다.

직선 AB의 방정식은 $\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{2}=1$에서 $y=-2x+2$이므로 점 P의 좌표를 $(a,\ -2a+2)$ (a는 실수)라 하자.

선분 DP를 $3:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\dfrac{3a+2}{4},\ \dfrac{3(-2a+2)+3}{4}\right)$ $\quad\therefore\ \mathrm{Q}\left(\dfrac{3a+2}{4},\ \dfrac{-6a+9}{4}\right)$

이때, 직선 AC의 방정식은 $y=\dfrac{1-2}{3-0}x+2$에서

$y=-\dfrac{1}{3}x+2$이고, 점 Q가 직선 AC 위의 점이므로

$\dfrac{-6a+9}{4}=-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3a+2}{4}+2=\dfrac{-3a+22}{12}$

$-3a+22=-18a+27,\ 15a=5$ $\quad\therefore\ a=\dfrac{1}{3}$

따라서 $\mathrm{Q}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{7}{4}\right)$이므로 $m+n=\dfrac{5}{2}$

333) $(2,\ -3)$

주어진 식이 k의 값에 관계없이 항상 성립하므로

$x+2y+4=0,\ 3x-y-9=0$

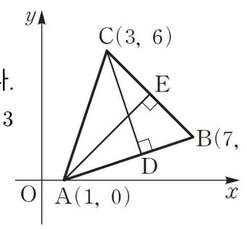
위의 두 식을 연립하여 풀면 $x=2,\ y=-3$

따라서 구하는 점의 좌표는 $(2,\ -3)$

334) ④

오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 E, 점 C에서 변 AB에 내린 수선의 발을 D라 하면 직선 AB의 기울기는

$\dfrac{2-0}{7-1}=\dfrac{1}{3}$



이므로 직선 CD의 기울기는 -3이다.

점 $\mathrm{C}(3,-6)$을 지나고 기울기가 -3인 직선의 방정식은

$y-6=-3(x-3)$

$\therefore y=-3x+15$ …… ㉠

또, 직선 BC의 기울기는

$\dfrac{2-6}{7-3}=-1$

이므로 직선 AE의 기울기는 1이다.

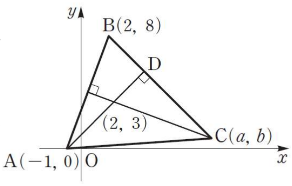
점 $A(1,0)$을 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은

$y=x-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=4$, $y=3$

따라서 수심의 좌표는 $(4,\ 3)$이다.

335) 10



오른쪽 그림과 같이 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 D라 하면

직선 BC의 기울기는 $\frac{8-b}{2-a}$이고,

직선 AD의 기울기는

$\frac{3-0}{2-(-1)}=1$이므로 $\frac{8-b}{2-a}\times 1=-1$,$8-b=-2+a$

$\therefore a+b=10$

336) 풀이 참조

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

직선 AB의 방정식 $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$에서

$(x_2-x_1)(y-y_1)=(y_2-y_1)(x-x_1)$

$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-x_1(y_2-y_1)+y_1(x_2-x_1)=0$

$\therefore\ (y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-x_1y_2+x_2y_1=0$

따라서 점 $O(0,\ 0)$과 직선 AB사이의 거리는

$\frac{|-x_1y_2+x_2y_1|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$

삼각형 OAB의 밑변을 $\overline{AB}$라 하면

$\overline{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$이고,

높이는 점 O와 직선 AB사이의 거리이므로

삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\times\frac{|-x_1y_2+x_2y_1|}{\sqrt{(y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2}}$

$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|$

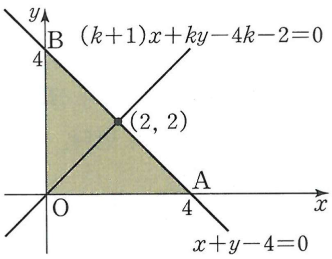
337) 1

사선정리에 의해

$\frac{1}{2}|1\times 4-2\times 3|=1$

338) ①

직선 $x+y-4=0$이 x축, y축과 각각 만나는 점을 A, B라 하면 $A(4,\ 0)$, $B(0,\ 4)$이고 직선 $x+y-4=0$ 과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형 OAB는 다음과 같다.



$(k+1)x+ky-4k-2=0$에서 $k(x+y-4)+x-2=0$

이 직선이 k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는 $x+y-4=0$, $x-2=0$에서

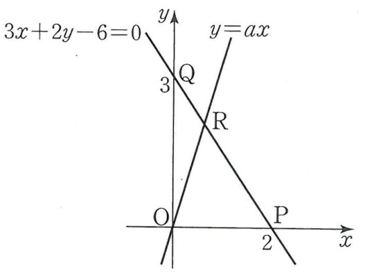
$x=2$, $y=2$이므로 $(2,\ 2)$이다.

이때, 점 $(2,\ 2)$는 선분 AB의 중점이므로 직선 $(k+1)x+ky-4k-2=0$이 삼각형 OAB의 넓이를 이등분하기 위해서는 원점 O를 지나야 한다.

즉, $-4k-2=0$ $\therefore\ k=-\frac{1}{2}$

339) ③

직선 $3x+2y-6=0$이 x축, y축과 만나는 점은 각각 $P(2,\ 0)$, $Q(0,\ 3)$이므로 다음과 같다.



삼각형 OPR의 넓이가 삼각형 OPQ의 넓이의 $\frac{2}{3}$배이므로

$\overline{PR}=\frac{2}{3}\overline{PQ}$에서 $\overline{PR}:\overline{RQ}=2:1$이다.

즉, 점 R는 선분 PQ를 $2:1$로 내분하는 점이므로

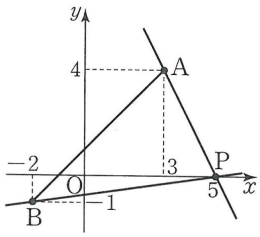
$R\left(\frac{2}{3},\ 2\right)$이다.

따라서 직선 OR의 방정식은 $y=\frac{2}{\frac{2}{3}}x=3x$ 이다.

$\therefore\ a=3$

340) ⑤

직선 $l : kx+3y-5k=0$이라 하자.
$k(x-5)+3y=0$에서 이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(5,\ 0)$을 지난다.



$P(5,\ 0)$이라 하면 직선 l이 선분 AB와 만나기 위해서는 직선 l의 기울기가 직선 AP의 기울기보다 크거나 같고, 직선 BP의 기울기보다 작거나 같아야 한다.

직선 AP의 기울기는 $\frac{0-4}{5-3}=-2$

직선 BP의 기울기는 $\frac{0-(-1)}{5-(-2)}=\frac{1}{7}$

직선 l의 기울기는 $-\frac{k}{3}$이므로 $-2\le-\frac{k}{3}\le\frac{1}{7}$

$\therefore\ -\frac{3}{7}\le k\le 6$

341) (1) $\frac{1}{2}<m<2$ (2) $-1>m$ 또는 $2<m$

(3) $-1<m<\frac{1}{2}$

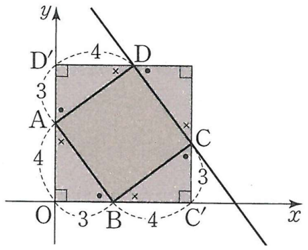
342) (1) $-1<m<-\frac{1}{3}$

(2) $-1>m$ 또는 $1<m$

(3) $-\frac{1}{3}<m<1$

343) 41

점 C에서 x축에 내린 수선의 발을 C′, 점 D에서 y축에 내린 수선의 발을 D′이라 하면 세 삼각형 AOB, BC′C, DD′A는 서로 합동이다.



따라서 두 점 C, D의 좌표는 $(7,\ 3)$, $(4,\ 7)$이다.

구하는 직선 CD의 방정식은 $y-3=\frac{7-3}{4-7}(x-7)$

즉 $4x+3y-37=0$이므로 $a=4,\ b=-37$

$\therefore\ a-b=41$

<다른풀이>
두 점 C, D 중 한 점의 좌표만 구해서 직선 CD의 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.
두 직선 AB, CD는 서로 평행하다.

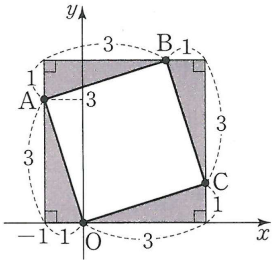
직선 AB의 기울기가 $-\frac{4}{3}$이므로 직선 CD의 기울기도 $-\frac{4}{3}$이고 직선 CD는 점 $C(7,\ 3)$을 지나므로 직선의 방정식은

$y-3=-\frac{4}{3}(x-7)$ $\therefore\ 4x+3y-37=0$

따라서 $a=4,\ b=-37$이므로 $a-b=41$

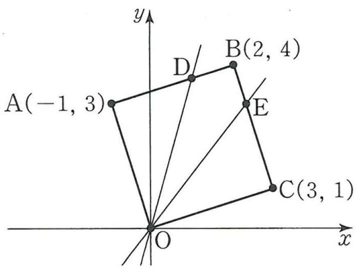
344) $y=\frac{11}{3}x,\ y=\frac{9}{7}x$

$A(-1,\ 3)$이므로 점 C가 제1사분면 위에 있도록 정사각형 OABC를 그리면 다음과 같다.



이때, 두 점 A, C를 각각 지나고 x축에 수직인 직선 및 점 B를 지나고 y축에 수직인 직선을 그렸을 때, 세 직선과 x축으로 둘러싸인 정사각형과 정사각형 OABC에 의해 만들어지는 색칠한 네 삼각형이 서로 합동임을 이용하여 두 점 B, C의 좌표를 구하면

$B(2,\ 4)$, $C(3,\ 1)$이다.



점 O를 지나면서 정사각형 OABC의 넓이를 3등분하는 두 직선이 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자.
$\overline{OA}=\sqrt{10}$이므로 정사각형 OABC의 넓이는 10이다.
$\overline{AD}=k$라 하면 삼각형 OAD의 넓이는 정사각형 OABC의 넓이의 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{1}{2}\times\sqrt{10}\times k=\frac{1}{3}\times 10 \quad \therefore\ k=\frac{2\sqrt{10}}{3}$

그러므로 점 D는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이고, 마찬가지로 점 E는 선분 BC를 $1:2$로 내분하는 점이다.

점 D의 좌표는 $\left(\frac{4+(-1)}{3},\ \frac{8+3}{3}\right) \quad \therefore\ D\left(1,\ \frac{11}{3}\right)$

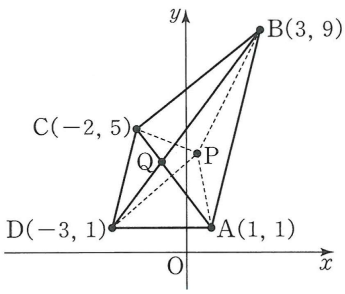
점 E의 좌표는 $\left(\frac{3+4}{3},\ \frac{1+8}{3}\right) \quad \therefore\ E\left(\frac{7}{3},\ 3\right)$

직선 OD의 방정식은 $y=\frac{11}{3}x$, 직선 OE의 방정식은 $y=\frac{9}{7}x$이다. 따라서 구하는 두 직선의 방정식은

$y=\frac{11}{3}x$, $y=\frac{9}{7}x$이다.

345) ⑤

선분 AC와 선분 BD의 교점을 Q라 하자.
$\overline{PA}+\overline{PC}\geq\overline{AC}$, $\overline{PB}+\overline{PD}\geq\overline{BD}$이고
$\overline{AC}=\overline{QA}+\overline{QC}$, $\overline{BD}=\overline{QB}+\overline{QD}$이므로
$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}\geq\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}+\overline{QD}$이다.



따라서 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$는 점 P가 점 Q에 위치할 때, 최솟값을 갖는다.
직선 AC의 방정식은

$y-1=\frac{1-5}{1-(-2)}(x-1) \quad \therefore\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$ ……㉠

직선 BD의 방정식은

$y-1=\frac{9-1}{3-(-3)}(x+3) \quad \therefore\ y=\frac{4}{3}x+5$ ……㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=-1,\ y=\frac{11}{3}$

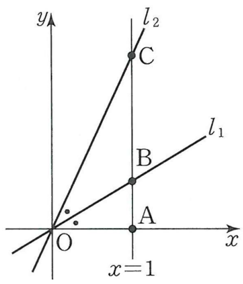
따라서 구하는 점 P의 좌표는 $\left(-1,\ \frac{11}{3}\right)$이다.

346) ②

$l:\ (k-1)x+(2k+1)y-6k=0$ ……㉠
ㄱ. $k=1$일 때, ㉠에서 $3y-6=0$, 즉 $y=2$이다.
그러므로 직선 l은 x축에 평행하다. (참)
ㄴ. ㉠에서 $(x+2y-6)k-x+y=0$ ……㉡
k의 값에 관계없이 항상 지나는 점의 좌표는
$x+2y-6=0$, $-x+y=0$을 연립하여 풀면
$x=2,\ y=2$이므로 $(2,\ 2)$이다.
그러므로 직선 l은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(2,\ 2)$를 지난다. (참)
ㄷ. ㉡에서 직선 $x+2y-6=0$을 만드는 실수 k는 존재하지 않는다.
그러므로 직선 l은 두 직선 $x+2y-6=0$, $x-y=0$의 교점을 지나는 직선 중 직선 $x+2y-6=0$을 제외한 직선을 나타낸다. (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

347) $2\sqrt{2}$

직선 l_1의 기울기를 $a\ (a>0)$라 하면 조건 (가)에 의하여 직선 l_2의 기울기는 $4a$이다.
이때, 직선 $x=1$이 x축 및 두 직선 l_1, l_2와 만나는 점을 각각 A, B, C라 하자.



$\overline{AB}=a$, $\overline{AC}=4a$이므로 $\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$이다.
조건 (나)에 의하여 각 AOC의 이등분선이 직선 l_1이므로
$\overline{OA}:\overline{OC}=\overline{AB}:\overline{BC}=1:3$
$\therefore\ \overline{OC}=3\ (\because\ \overline{OA}=1)$

따라서 직각삼각형 OAC에서 피타고라스의 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{OC}}^2$이므로 $1+(4a)^2=9$

$a^2=\frac{1}{2}\quad\therefore\ a=\frac{\sqrt{2}}{2}\ (\because\ a>0)$

$\therefore$ (직선 l_2의 기울기)$=4a=2\sqrt{2}$

348) ③

직선 l의 기울기를 k라 하면 직선 l의 방정식은 $y-2=k(x-4)$에서 $y=k(x-4)+2$이므로

$\mathrm{D}(0,\ -4k+2)$, $\mathrm{E}(6,\ 2k+2)$이다.

사다리꼴 DOAE의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{OD}}+\overline{\mathrm{AE}})\times\overline{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}\{(-4k+2)+(2k+2)\}\times 6$

$=6(-k+2)$

한편, 직사각형 OABC의 넓이가 $6\times3=18$이므로 사다리꼴 DOAE의 넓이는 $18\times\frac{3}{5}=\frac{54}{5}$이다.

즉, $6(-k+2)=\frac{54}{5}$이므로 $k=\frac{1}{5}$

349) ④

점 $(a,\ b)$가 직선 $3x+4y-2=0$ 위를 움직이므로 $3a+4b-2=0$에서 $b=-\frac{3}{4}a+\frac{1}{2}$이다.

점 $(a+b,\ a-b)$는 점 $\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2},\ \frac{7}{4}a-\frac{1}{2}\right)$이므로

$\begin{cases}\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}=X & \cdots\cdots ㉠\\ \frac{7}{4}a-\frac{1}{2}=Y & \cdots\cdots ㉡\end{cases}$ 라 하자.

㉠에서 $a=4X-2$, ㉡에서 $a=\frac{4}{7}Y+\frac{2}{7}$이므로

$4X-2=\frac{4}{7}Y+\frac{2}{7}\qquad\therefore\ 7X-Y-4=0$

따라서 구하는 자취의 방정식은 $7x-y-4=0$이다.

[다른 풀이1]

점 $(a,\ b)$가 직선 $3x+4y-2=0$ 위를 움직이므로

$3a+4b-2=0\qquad\cdots\cdots㉠$

점 $(a+b,\ a-b)$에서 $a+b=X,\ a-b=Y$라 하면

$a=\frac{X+Y}{2},\ b=\frac{X-Y}{2}$이므로 이를 ㉠에 대입하면

$\frac{3(X+Y)}{2}+\frac{4(X-Y)}{2}-2=0,\ 3(X+Y)+4(X-Y)-4=0$

$\therefore\ 7X-Y-4=0$

따라서 구하는 자취의 방정식은 $7x-y-4=0$이다.

[다른 풀이2]

점 $(a,\ b)$가 직선 $3x+4y-2=0$ 위의 임의의 점이므로 이 직선 위의 두 점 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$에 대하여 점 $(a+b,\ a-b)$의 자취는 두 점 $\left(0+\frac{1}{2},\ 0-\frac{1}{2}\right)$과 $\left(\frac{2}{3}+0,\ \frac{2}{3}-0\right)$,

즉 두 점 $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$과 $\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$를 지난다.

따라서 구하는 자취의 방정식은

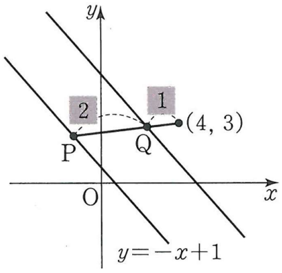
$y+\frac{1}{2}=\frac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{2}\right),\ y+\frac{1}{2}=7\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$\therefore\ 7x-y-4=0$

350) ④

직선 AB의 방정식은 $y+1=-(x-2)$에서 $y=-x+1$

점 P가 직선 AB 위의 점이므로 $\mathrm{P}(a,\ -a+1)$이라 하고, 점 Q의 좌표를 $(X,\ Y)$라 하면 점 Q가 두 점 $(a,\ -a+1)$, $(4,\ 3)$을 이은 선분을 $2:1$로 내분한다.



즉, 점 $(X,\ Y)$는 $\left(\frac{8+a}{3},\ \frac{6+(-a+1)}{3}\right)$이므로

$\left(\frac{8+a}{3},\ \frac{-a+7}{3}\right)$

$X=\frac{8+a}{3}$에서 $a=3X-8$이고,

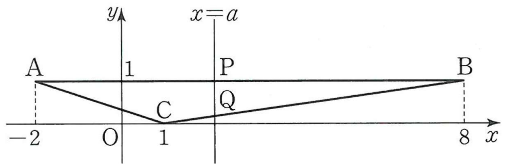
$Y=\frac{-a+7}{3}$에서 $a=-3Y+7$이므로

$3X-8=-3Y+7\qquad\therefore\ X+Y-5=0$

따라서 구하는 자취의 방정식은 $x+y-5=0$이다.

351) $x=8-\sqrt{35}$

삼각형 ABC를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



삼각형 ABC의 밑변을 AB라 하면 $\overline{\mathrm{AB}}=8-(-2)=10$이고, 높이는 1이므로 삼각형 ABC의 넓이는

$\frac{1}{2}\times 10\times 1=5$이다.

삼각형 ABC의 넓이를 이등분하고 x축에 수직인 직선의 방정식을 $x=a$라 하자.

$1<a<8$이므로 직선 $x=a$가 두 선분 AB, BC와 만나는 점을 각각 P, Q라 하면 삼각형 BPQ의 넓이가 $\frac{5}{2}$이어야 한다.

직선 BC의 방정식은 $y=\frac{1-0}{8-1}(x-1)$에서

$y=\frac{1}{7}(x-1)$이므로 점 Q의 좌표는 $\left(a,\ \frac{1}{7}(a-1)\right)$이고, 점 P의 좌표는 $(a,\ 1)$이다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=1-\frac{1}{7}(a-1)=\frac{8-a}{7}$이고 $\overline{\mathrm{BP}}=8-a$이므로

(삼각형 BPQ의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{BP}}\times\overline{\mathrm{PQ}}$

$=\frac{1}{2}\times(8-a)\times\frac{8-a}{7}=\frac{(8-a)^2}{14}$

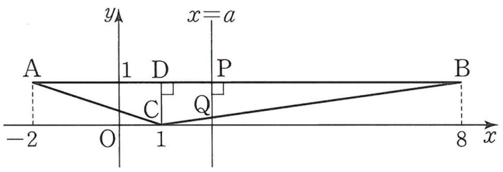
즉, $\frac{(8-a)^2}{14}=\frac{5}{2}$이므로

$(a-8)^2=35\qquad \therefore\ a=8-\sqrt{35}\ \ (\because\ 1<a<8)$

따라서 구하는 직선의 방정식은 $x=8-\sqrt{35}$이다.

<다른풀이>

직선 PQ의 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.



직선 $x=1$이 선분 AB와 만나는 점을 D라 하면 두 삼각형 BPQ, BDC는 닮음이다.

삼각형 BDC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 7\times 1=\frac{7}{2}$이므로 두 삼각형 BPQ, BDC의 넓이의 비는 $\frac{5}{2}:\frac{7}{2}=5:7$

즉, 두 삼각형 BPQ, BDC의 닮음비는 $\sqrt{5}:\sqrt{7}$이다.

$\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{5}:\sqrt{7}$에서

$\overline{\mathrm{BP}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\overline{\mathrm{BD}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\times 7=\sqrt{35}$

따라서 $a=8-\sqrt{35}$이므로 구하는 직선의 방정식은 $x=8-\sqrt{35}$이다.

352) ④

직선 $(k^2+2k-3)x+(k+3)y=2$에서

$(k+3)(k-1)x+(k+3)y=2$ ……㉠

직선 ㉠과 직선 $(k-4)x+(k-1)y=-1$이 수직이 되는 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $k+3\neq 0,\ k-1\neq 0$일 때,

두 직선의 기울기는 각각 $\frac{(k+3)(k-1)}{-(k+3)}$, $\frac{k-4}{-(k-1)}$이므로

두 직선이 서로 수직이려면

$\frac{(k+3)(k-1)}{-(k+3)}\times\frac{k-4}{-(k-1)}=-1$에서 $k-4=-1\qquad\therefore\ k=3$

(ⅱ) $k+3=0$ 또는 $k-1=0$일 때,

$k=-3$인 경우, $(k+3)(k-1)x+(k+3)y=2$는 직선의 방정식이 아니다.

$k=1$인 경우, 두 직선은 각각 $y=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$이므로 서로 수직이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 두 직선이 수직이 되는 모든 실수 k의 값의 합은 $3+1=4$이다.

353) ③

ㄱ. $a=0$일 때 $l:y=2$, $m:x=-2$이므로 두 직선 l과 m은 서로 수직이다. (참)

ㄴ. $l:ax-y+a+2=0$에서 $a(x+1)-y+2=0$이므로 직선 l은 a의 값에 관계없이 항상 점 $(-1,\ 2)$를 지난다. (거짓)

ㄷ. $a=0$일 때, ㄱ에서 두 직선은 서로 수직이다.

$a\neq 0$일 때, 두 직선 l, m의 기울기는 각각 a, $-\frac{4}{a}$이므로

두 직선이 서로 평행하기 위해서는 $a=-\frac{4}{a}$를 만족시켜야 한다. $a^2=-4$를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않으므로 두 직선이 서로 평행하기 위한 실수 a의 값은 존재하지 않는다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

354) ⑤

두 직선 $(k+4)x+2(k+2)y+1=0$,

$(4-k)x+4(k+2)y+2=0$이 서로 평행하려면

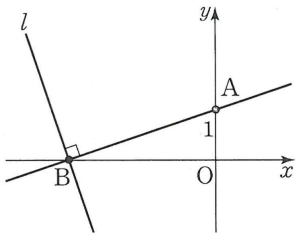
(ⅰ) $k\neq -2$일 때, $\frac{k+4}{4-k}=\frac{2(k+2)}{4(k+2)}\neq\frac{1}{2}$이어야 한다.

이때, $\frac{2(k+2)}{4(k+2)}=\frac{1}{2}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $k=4$일 때, 두 직선은 각각 $8x+12y+1=0$, $24y+2=0$에서 $8x+12y+1=0$, $y=-\frac{1}{12}$이므로 서로 평행하지 않다.
(ⅲ) $k=-2$일 때, 두 직선은 각각 $2x+1=0$, $6x+2=0$에서 $x=-\frac{1}{2}$, $x=-\frac{1}{3}$이므로 서로 평행하다. (ⅰ)~(ⅲ)에서 $k=-2$이고, 이때 두 직선 사이의 거리는
$m=\left|-\frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{2}\right)\right|=\frac{1}{6}$이다.
$\therefore\ k+m=-2+\frac{1}{6}=-\frac{11}{6}$

355) ④

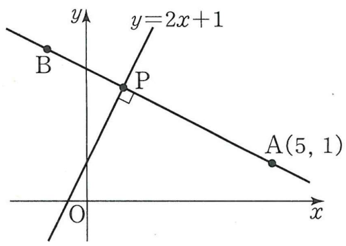
$\mathrm{A}(0,\ 1)$, $l: 2x+(k-1)y+6=0$이라 하고, 점 A를 지나는 직선과 직선 l이 x축 위에서 만나는 점을 B라 하자.



$2x+(k-1)y+6=0$에 $y=0$을 대입하면 $x=-3$이므로 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$이다. 즉, 직선 AB와 직선 l은 점 $(-3,\ 0)$에서 수직으로 만난다. 직선 AB의 기울기는 $\frac{1}{3}$이므로 직선 l의 기울기는 -3이다.
$l: 2x+(k-1)y+6=0$에서 $y=-\frac{2}{k-1}x-\frac{6}{k-1}$이므로
$-\frac{2}{k-1}=-3,\ k-1=\frac{2}{3}\quad \therefore\ k=\frac{5}{3}$

356) ③

선분 AB와 직선 $y=2x+1$이 수직으로 만나는 점이 P이므로 점 A에서 직선 $y=2x+1$에 내린 수선의 발이 P이다.



직선 AP와 직선 $y=2x+1$이 수직이므로 직선 AP의 방정식은 $y-1=-\frac{1}{2}(x-5)\quad \therefore\ x+2y-7=0$
두 직선 $x+2y-7=0$, $y=2x+1$의 교점이 P이므로 두 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=3$에서 $\mathrm{P}(1,\ 3)$이다.
$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=2:1$이고, 점 P가 선분 AB 위에 존재하므로 점 B는 선분 AP를 $3:1$로 외분하는 점이다.
따라서 점 B의 좌표는 $\left(\frac{3-5}{2},\ \frac{9-1}{2}\right)$, 즉 $(-1,\ 4)$이므로
$a=-1,\ b=4\quad \therefore\ a+b=3$

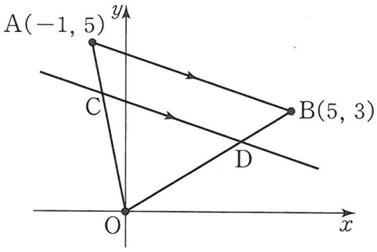
357) ②

세 직선 중 두 직선이 수직일 때, 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 된다.
두 직선 $2x-y=0$과 $x+y-1=0$은 서로 수직이 아니므로 직선 $ax-y+3=0$이 직선 $2x-y=0$ 또는 직선 $x+y-1=0$과 수직일 때, 세 직선으로 둘러싸인 도형이 직각삼각형이 된다.
(ⅰ) 직선 $ax-y+3=0$이 직선 $2x-y=0$과 수직일 때
두 직선의 기울기가 각각 a, 2이므로
$2a=-1\ \therefore\ a=-\frac{1}{2}$
(ⅱ) 직선 $ax-y+3=0$이 직선 $x+y-1=0$과 수직일 때
두 직선의 기울기가 각각 a, -1이므로
$-a=-1\quad \therefore\ a=1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 상수 a의 값의 합은 $-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$

358) ④

삼각형 OAB의 넓이를 이등분하고 선분 AB와 평행한 직선

이 선분 OA, OB와 만나는 점을 각각 C, D라 하면 두 삼각형 OCD, OAB는 닮음이다.



이때, 두 삼각형의 넓이의 비가 $1:2$이므로 두 삼각형의 닮음비는 $1:\sqrt{2}$이어야 한다.
따라서 선분 OA를 $1:(\sqrt{2}-1)$로 내분하는 점이 C이므로 점 C의 좌표는

$$\left(\frac{1\times(-1)+(\sqrt{2}-1)\times 0}{1+(\sqrt{2}-1)},\ \frac{1\times 5+(\sqrt{2}-1)\times 0}{1+(\sqrt{2}-1)}\right)$$

$$\therefore \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$$

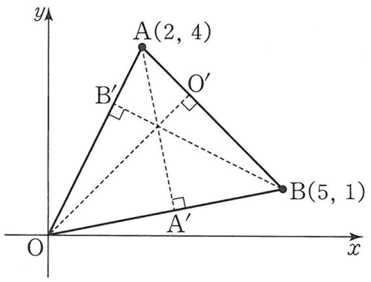
직선 AB의 기울기는 $\frac{3-5}{5-(-1)}=-\frac{1}{3}$이므로 직선 AB와 평행한 직선 CD의 방정식은

$$y-\frac{5\sqrt{2}}{2}=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

따라서 이 직선의 y절편은 $-\frac{\sqrt{2}}{6}+\frac{5\sqrt{2}}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{3}$이다.

359) $\left(\frac{7}{3},\ \frac{7}{3}\right)$

세 꼭짓점 O, A, B에서 대변에 내린 수선의 발을 각각 O′, A′, B′이라 하자.



직선 AB의 기울기가 $\frac{1-4}{5-2}=-1$이므로 직선 AB와 수직인 직선 OO′의 방정식은 $y=x$

직선 OA의 기울기가 $\frac{4}{2}=2$이므로 직선 OA와 수직인 직선 BB′의 방정식은

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-5) \qquad \therefore\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$$

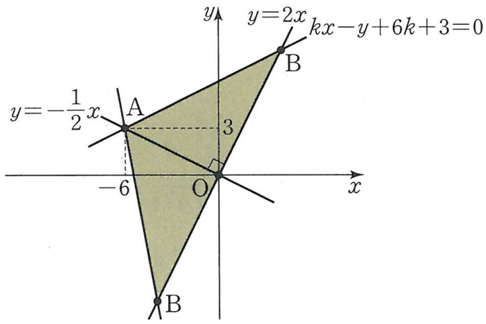
두 직선 OO′, BB′의 교점의 x좌표는

$y=-\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$에서 $x=\frac{7}{3}$

따라서 구하는 점의 좌표는 $\left(\frac{7}{3},\ \frac{7}{3}\right)$이다.

360) ④

두 직선 $x+2y=0,\ 2x-y=0$은 각각 $y=-\frac{1}{2}x,\ y=2x$이므로 서로 수직이고 모두 원점을 지난다. 직선 $kx-y+6k+3=0$에서
$k(x+6)-(y-3)=0$이므로 이 직선은 k의 값에 관계없이 항상 점 $(-6,\ 3)$을 지나고, 기울기가 양수 k인 직선이다.
따라서 주어진 세 직선으로 둘러싸인 부분은 다음과 같다.



A$(-6,\ 3)$이라 하면 점 A는 직선 $y=-\frac{1}{2}x$ 위의 점이다.
두 직선 $y=2x,\ kx-y+6k+3=0$이 만나는
점을 B$(a,\ 2a)$라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{(-6)^2+3^2}=3\sqrt{5}$

$\overline{\mathrm{OB}}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}\,|a|$

삼각형 AOB의 넓이는 30이므로

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{5}\times\sqrt{5}\,|a|=30$

$\therefore\ |a|=4$

점 B가 직선 $kx-y+6k+3=0$위의 점이므로

점 B가 $(4,\ 8)$일 때, $k=\frac{1}{2}$

점 B가 $(-4,\ -8)$일 때, $k=-\frac{11}{2}$

$\therefore\ k=\frac{1}{2}\ (\because\ k>0)$

361) 풀이 참조

(ⅰ) $a\neq 0,\ b\neq 0$일 때, 직선 $l: ax+by+c=0$의 기울기는 $\boxed{-\frac{a}{b}}$이고, 점P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H$(x_2,\ y_2)$라 하면 직선 PH와 직선 l이 수직이므로

$\boxed{-\frac{a}{b}}\times\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-1$이다.

이 식을 정리하여

$\frac{x_2-x_1}{a}=\frac{y_2-y_1}{b}=k$ (k는 상수) ……㉠

라 하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{(\mathrm{x}_2-\mathrm{x}_1)^2+(\mathrm{y}_2-\mathrm{y}_1)^2}=\sqrt{(ak)^2+(bk)^2}$

$=|k|\times\boxed{\sqrt{a^2+b^2}}$ ……㉡

한편, 점 H가 직선 l위의 점이므로 $ax_2+by_2+c=0$이다.

㉠에 의하여 $a(x_1+ak)+b(y_1+bk)+c=0$이므로

$k=\boxed{-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}}$이다.

이를 ㉡에 대입하여 정리하면

$\overline{\mathrm{PH}}=\boxed{\frac{|\mathrm{ax}_1+\mathrm{by}_1+\mathrm{c}|}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^2}}}$이다. ……㉢

(ⅱ) $a=0,\ b\neq0$ 또는 $a\neq0,\ b=0$일 때, 직선 $ax+by+c=0$은 x축 또는 y축에 평행하고 이때에도 ㉢이 성립한다.

따라서 (가): $-\frac{a}{b}$, (나) : $\sqrt{a^2+b^2}$,

(다) : $-\frac{ax_1+by_1+c}{a^2+b^2}$, (라) : $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

362) 3

직선 $k(x+y)-x+3y+4=0$에서

$(k-1)x+(k+3)y+4=0$

원점 $(0,\ 0)$과 직선 $(k-1)x+(k+3)y+4=0$ 사이의 거리는

$\frac{4}{\sqrt{(k-1)^2+(k+3)^2}}$ ……㉠

이 값이 최대가 되려면 분모가 최소가 되어야 한다.

즉, $(k-1)^2+(k+3)^2=2k^2+4k+10=2(k+1)^2+8$

에서 $k=-1$일 때, ㉠의 최댓값은 $\frac{4}{\sqrt{8}}=\sqrt{2}$이다.

따라서 $a=-1,\ b=\sqrt{2}$이므로

$a^2+b^2=3$

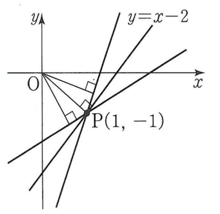
<다른풀이>

직선 $k(x+y)-x+3y+4=0$이 k값에 관계없이 항상 성립하려면 $x+y=0,\ -x+3y+4=0$

두 식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=-1$

즉, 주어진 직선은 k의 값에 관계없이 항상

점$(1,\ -1)$을 지난다.



$\mathrm{P}(1,\ -1)$이라 하고, 점P를 지나는 직선을 l이라 하면 직선 l이 직선 OP와 수직일 때, 원점과 직선 l사이의 거리가 최대이고 이때의 최댓값은 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2}$이므로 $b=\sqrt{2}$이다.

직선 OP의 기울기가 -1이므로 직선 OP와 수직일 때 직선 l의 방정식은

$y+1=x-1$, 즉 $x-y-2=0$이다.

두 직선 $(k-1)x+(k+3)y+4=0$과 $x-y-2=0$이 일치해야 하므로 $\frac{k-1}{1}=\frac{k+3}{-1}=\frac{4}{-2}$에서

$k=-1$, $\therefore\ a=-1$

$\therefore\ a^2+b^2=(-1)^2+\sqrt{2^2}=3$

363) ⑤

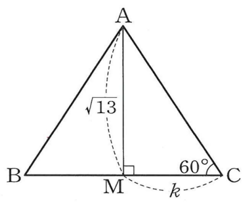
점 $\mathrm{A}(1,\ -3)$과 직선 $2x-3y+2=0$사이의 거리는

$\frac{|2+9+2|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{13}{\sqrt{13}}=\sqrt{13}$이고

삼각형 ABC가 정삼각형이므로

선분 BC의 중점을 M이라 하고, $\overline{\mathrm{CM}}=\mathrm{k}$라 하면

삼각형 ABC는 다음과 같다.



$\angle\mathrm{C}=60°$이고, 삼각형 AMC가 직각삼각형이므로

$k:\sqrt{13}=1:\sqrt{3}$에서 $k=\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{39}}{3}$

$\therefore$ (삼각형 ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times2\times\frac{\sqrt{39}}{3}\times\sqrt{13}$

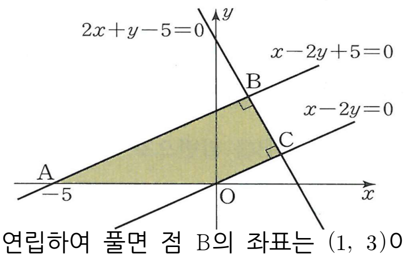
$=\frac{13\sqrt{3}}{3}$

364) ④

점 $\mathrm{A}(-5,\ 0)$과 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리는

$\dfrac{|-10-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=3\sqrt{5}$이므로 $\overline{AB}=3\sqrt{5}$이다.
점 $O(0,\ 0)$과 직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{OC}=\sqrt{5}$이다.
한편, 두 직선 AB, OC가 서로 평행하므로
$\overline{BC}$는 두 직선 AB, OC 사이의 거리와 같다.
직선 $2x+y-5=0$의 기울기가 -2이므로
이 직선과 수직인 직선 OC의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다.
즉, 직선 OC의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x$이다.
점 $A(-5,\ 0)$과 직선 $x-2y=0$ 사이의 거리는
$\dfrac{|-5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$이므로 $\overline{BC}=\sqrt{5}$이다.
$\therefore$ (사각형 OABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{OC})\times\overline{BC}$
$=\dfrac{1}{2}\times(3\sqrt{5}+\sqrt{5})\times\sqrt{5}$
$=10$

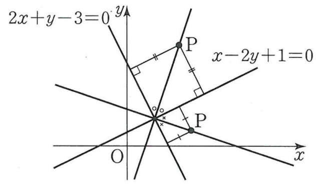
<다른풀이>
$l:2x+y-5=0$ ……㉠
이라 하면 두 직선 AB, OC는 직선 l과 서로 수직이다. 따라서 두 직선 AB, OC의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이므로
직선 AB의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}(x+5)$에서
$x-2y+5=0$ ……㉡
직선 OC의 방정식은 $y=\dfrac{1}{2}x$에서
$x-2y=0$ ……㉢



㉠, ㉡을 연립하여 풀면 점 B의 좌표는 $(1,\ 3)$이고,
㉠, ㉢을 연립하여 풀면 점 C의 좌표는 $(2,\ 1)$이므로
$\overline{AB}=\sqrt{(1+5)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{5}$
$\overline{OC}=\sqrt{(2-0)^2+(1-0)^2}=\sqrt{5}$
$\overline{BC}=\sqrt{(2-1)^2+(1-3)^2}=\sqrt{5}$
$\therefore$ (사각형 OABC의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{OC})\times\overline{BC}$
$=\dfrac{1}{2}\times(3\sqrt{5}+\sqrt{5})\times\sqrt{5}$
$=10$

365) $x+3y-4=0,\ 3x-y-2=0$

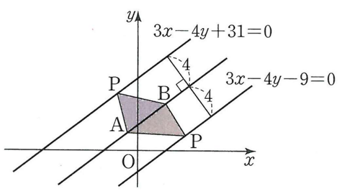
두 직선 $2x+y-3=0,\ x-2y+1=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 위의 점을 $P(a,\ b)$라 하면
점 P와 두 직선 $2x+y-3=0,\ x-2y+1=0$ 사이의 거리가 서로 같다.



즉, $\dfrac{|2a+b-3|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{|a-2b+1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}$에서
$|2a+b-3|=|a-2b+1|$
(ⅰ) $2a+b-3=a-2b+1$인 경우
$a+3b-4=0$이므로 각의 이등분선의 방정식은
$x+3y-4=0$
(ⅱ) $2a+b-3=-(a-2b+1)$인 경우
$3a-b-2=0$이므로 각의 이등분선의 방정식은
$3x-y-2=0$
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 방정식은
$x+3y-4=0,\ 3x-y-2=0$이다.

366) $3x-4y-9=0,\quad 3x-4y+31=0$

$A(-1,\ 2),\ B(3,\ 5)$에서 $\overline{AB}=\sqrt{4^2+3^2}=5$
이때, 삼각형 ABP의 넓이가 10이므로
$10=\dfrac{1}{2}\times5\times4$에서 선분 AB를 밑변으로 하는 삼각형 ABP의 높이는 4이어야 한다. 즉, 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 4이므로 점 P가 나타내는 도형은 직선 AB와 평행하고 직선 AB와의 거리가 4인 직선이다.
직선 AB의 기울기는 $\dfrac{5-2}{3-(-1)}=\dfrac{3}{4}$이므로 점 P가 나타내는 직선의 방정식을 $3x-4y+k=0$ (k는 상수)이라 하면 점 A와 이 직선 사이의 거리가 4이어야 하므로
$\dfrac{|-3-8+k|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4,\ |k-11|=20$
$\therefore\ k=-9$ 또는 $k=31$



따라서 구하는 도형의 방정식은
$3x-4y-9=0,\ 3x-4y+31=0$ 이다.

367) ④

$\overline{\mathrm{OA}}=2\overline{\mathrm{AC}}$에서 $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:1$이므로

두 점 A, C를 $\mathrm{A}(2a,\ 0)$, $\mathrm{C}(3a,\ 0)$ $(a>0)$이라 하자.

이때, 직선 l_1의 기울기가 -3이므로 $\mathrm{B}(0,\ b)$라 하면

$\dfrac{0-b}{2a-0}=-3$ $\quad\therefore\ b=6a\quad\therefore\ B(0,\ 6a)$

한편, 두 삼각형 ACP와 BDP의 넓이가 서로 같으므로 두 삼각형 AOB, COD의 넓이가 서로 같다.

(삼각형 AOB의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OA}}\times\overline{\mathrm{OB}}$

$=\dfrac{1}{2}\times 2a\times 6a=6a^2$ $\quad\cdots\cdots$㉠

점 $\mathrm{D}(0,\ d)$라 하면

(삼각형 COD의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{OC}}\times\overline{\mathrm{OD}}$

$=\dfrac{1}{2}\times 3a\times d=\dfrac{3ad}{2}$ $\quad\cdots\cdots$㉡

㉠=㉡에서 $6a^2=\dfrac{3ad}{2}$이므로 $d=4a$

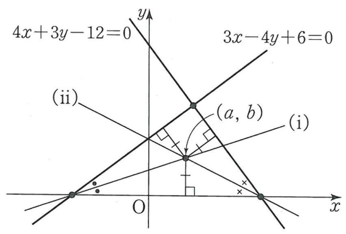
$\therefore\ \mathrm{D}(0,\ 4a)$라

따라서 직선 l_2의 기울기는

$\dfrac{0-4a}{3a-0}=-\dfrac{4}{3}$

368) 2

삼각형의 내심은 삼각형의 세 내각의 이등분선의 교점이고, 세 내각의 이등분선은 항상 한 점에서 만나므로 세 내각 중 두 내각의 이등분선을 각각 구해서 두 직선의 교점의 좌표를 구하면 된다.



(i) 두 직선 $y=0$, $3x-4y+6=0$에 이르는 거리가 같은 점 $(x,\ y)$의 자취의 방정식은

$|y|=\dfrac{|3x-4y+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}$

$\therefore\ x-3y+2=0$ 또는 $3x+y+6=0$

이 중 내심 $(a,\ b)$를 지나는 직선의 기울기는 양수이므로

$x-3y+2=0$

(ii) 두 직선 $y=0$, $4x+3y-12=0$에 이르는 거리가 같은 점 $(x,\ y)$의 자취 방정식은 마찬가지 방법에 의하여

$|y|=\dfrac{|4x+3y-12|}{\sqrt{4^2+3^2}}$

$\therefore\ x+2y-3=0$ 또는 $2x-y-6=0$

이 중 내심 $(a,\ b)$를 지나는 직선의 기울기는 음수이므로

$x+2y-3=0$

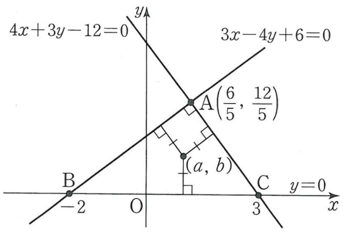
(i), (ii)에서 두 내각의 이등분선 $x-3y+2=0$과 $x+2y-3=0$의 방정식을 연립하여 풀면 $x=1,\ y=1$

따라서 내심의 좌표는 $(1,\ 1)$이다.

$\therefore\ a+b=2$

<다른풀이>

두 직선 $3x-4y+6=0$, $4x+3y-12=0$이 서로 수직이므로 주어진 세 직선으로 둘러싸인 삼각형은 직각삼각형이고, 이를 좌표평면 위에 나타내면 다음과 같다.



두 직선 $3x-4y+6=0$, $4x+3y-12=0$의 교점의 좌표는 $\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$이고, 두 직선

$3x-4y+6=0$, $4x+3y-12=0$의

x절편은 각각 $-2,\ 3$이므로

$\mathrm{A}\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{12}{5}\right)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$, $\mathrm{C}(3,\ 0)$이라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\left(\dfrac{16}{5}\right)^2+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}=4$, $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{\left(\dfrac{9}{5}\right)^2+\left(\dfrac{12}{5}\right)^2}=3$,

$\overline{\mathrm{BC}}=5$이다.

즉, 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{1}{2}\times 4\times 3=6$

한편, 내심 $(a,\ b)$에서 변 BC에 이르는 거리가 $|b|$이므로 내접원의 반지름의 길이는 $|b|$이다.

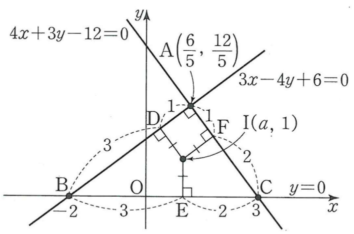
따라서 삼각형 ABC의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times|b|\times(\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}})=\dfrac{1}{2}\times|b|\times(4+5+3)=6|b|$

이므로 $6|b|=6$에서 $b=1$ $(\because b>0)$

내심을 I라 하고, 점 I에서 세 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 D, E, F라 하면

$\overline{\mathrm{ID}}=\overline{\mathrm{IE}}=\overline{\mathrm{IF}}=1$이다.



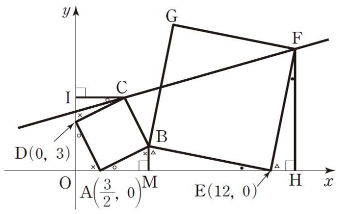
사각형 ADIF가 정사각형이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=1$에서

$\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{BD}}=3$이므로 $a=-2+3=1$

$\therefore\ a+b=1+1=2$

369) $(2, 1)$

370) $y=\frac{2}{7}x+\frac{51}{14}$



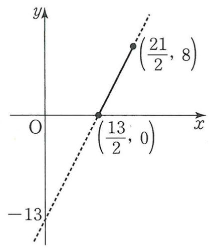
위의 그림과 같이 두 점 B, F에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 M, H, 점 C에서 y축에 내린 수선의 발을 I라 하자.
(i) 두 직각삼각형 OAD, MBA의 빗변의 길이가 같고
$\angle \mathrm{OAD}=\angle \mathrm{MBA}$이므로
$\triangle \mathrm{OAD} \equiv \triangle \mathrm{MBA}$ (RHA 합동)
이때, $\overline{\mathrm{OD}}=\overline{\mathrm{MA}}=3$이므로 점 M의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ 0\right)$,
$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{MB}}=\frac{3}{2}$이므로 점 B의 좌표는 $\left(\frac{9}{2},\ \frac{3}{2}\right)$
(ii) 두 직각삼각형 IDC, OAD의 빗변의 길이가 같고
$\angle \mathrm{IDC}=\angle \mathrm{OAD}$이므로
$\triangle \mathrm{IDC} \equiv \triangle \mathrm{OAD}$ (RHA 합동)
이때, $\overline{\mathrm{DI}}=\overline{\mathrm{AO}}=\frac{3}{2}$, $\overline{\mathrm{IC}}=\overline{\mathrm{OD}}=3$이므로 점 C의 좌표는 $\left(3,\ \frac{9}{2}\right)$, (iii) 두 직각삼각형 BME, EHF의 빗변의 길이가 같고 $\angle \mathrm{BEM}=\angle \mathrm{EFH}$이므로
$\triangle \mathrm{BME} \equiv \triangle \mathrm{EHF}$ (RHA 합동)
이때, $\overline{\mathrm{FH}}=\overline{\mathrm{EM}}=\frac{15}{2}$, $\overline{\mathrm{EH}}=\overline{\mathrm{BM}}=\frac{3}{2}$이므로 점 F의 좌표는 $\left(\frac{27}{2},\ \frac{15}{2}\right)$

따라서 직선 CF의 방정식은 $y-\frac{9}{2}=\dfrac{\frac{15}{2}-\frac{9}{2}}{\frac{27}{2}-3}(x-3)$에서

$y=\frac{2}{7}x+\frac{51}{14}$

371) ①

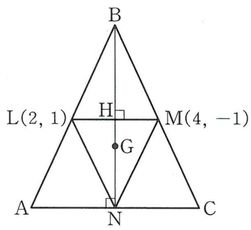
직사각형 ABCD의 네 꼭짓점을 좌표평면 위의 네 점 $\mathrm{A}(0,\ 8)$, $\mathrm{B}(0,\ 0)$, $\mathrm{C}(16,\ 0)$, $\mathrm{D}(16,\ 8)$로 나타내고
점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
점 P가 직사각형 내부 및 둘레 위의 점이므로
$0 \le x \le 16,\ 0 \le y \le 8$이다. ……㉠
$\overline{\mathrm{AP}}^2-\overline{\mathrm{CP}}^2=16$이므로
$x^2+(y-8)^2-\{(x-16)^2+y^2\}=16$
$-16y+64+32x-256=16$
$\therefore\ y=2x-13$
이때, ㉠에 의하여 점 P의 자취는 두 점 $\left(\frac{13}{2},\ 0\right)$, $\left(\frac{21}{2},\ 8\right)$을 잇는 선분이므로 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



따라서 점 P의 자취가 나타내는 도형의 길이는
$\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$

372) 180

삼각형 ABC에서 두 변 AB, BC의 중점 L, M에 대하여 직선 LM과 직선 AC가 서로 평행하므로
직선 BN과 직선 LM이 서로 수직일 때,
직선 BN과 직선 AC가 서로 수직이다.

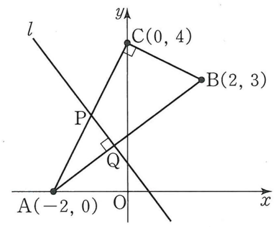


즉, 점 B가 선분 AC의 수직이등분선 위의 점이므로
삼각형 ABC는 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형이고,
삼각형 LBM는 $\overline{\mathrm{LB}}=\overline{\mathrm{BM}}$인 이등변삼각형이다.
따라서 점 N은 선분 LM의 수직이등분선 위의 점이다. 직선 BN과 LM의 교점을 H라 하면
점 H는 선분 LM의 중점이므로 점 H의 좌표는
$\left(\frac{2+4}{2},\ \frac{1+(-1)}{2}\right)$ $\therefore\ \mathrm{H}(3,\ 0)$
직선 LM의 기울기가 $\frac{-1-1}{4-2}=-1$이므로
선분 LM의 수직이등분선의 방정식은 $y=x-3$이다.
점 $\mathrm{N}(a,\ b)$가 이 직선 위의 점이므로 $b=a-3$에서
$\mathrm{N}(a,\ a-3)$
한편, $\overline{\mathrm{GH}}=4\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{HN}}=3\times\overline{\mathrm{GH}}=12\sqrt{2}$이다.
$\overline{\mathrm{HN}}=\sqrt{(a-3)^2+(a-3)^2}=\sqrt{2}\,|a-3|=12\sqrt{2}$에서

$|a-3|=12$이므로 $a=15$ 또는 $a=-9$
점 G가 제 1사분면 위의 점이므로 $a=15$, $b=12$
$\therefore\ ab=180$

373) $y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$

$\overline{AC}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{BC}=\sqrt{(-2)^2+1^2}=\sqrt{5}$에서
삼각형 ABC의 넓이는 $\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\sqrt{5}=5$이므로
삼각형 APQ의 넓이는 $\dfrac{1}{5}\times5=1$이다.



두 삼각형 ABC, APQ가 닮음이므로
$\overline{AQ}:\overline{PQ}=\overline{AC}:\overline{BC}=2:1$이다.
$\overline{PQ}=a$, $\overline{AQ}=2a$라 하면 삼각형 APQ의 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times a\times2a=a^2=1$이므로
$a=1\ (\because\ a>0)$ ……㉠
따라서 $\overline{AQ}=2$이므로 점 A와 직선 l 사이의 거리가 2이다.
직선 AB의 기울기가 $\dfrac{3}{4}$이므로 직선 l의 기울기는 $-\dfrac{4}{3}$이다.
$l:y=-\dfrac{4}{3}x+k$, 즉 $4x+3y-3k=0$이라 하면
점 $A(-2,\ 0)$과 직선 l 사이의 거리는 $\dfrac{|-8-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$에서
$|3k+8|=10$
$\therefore\ k=\dfrac{2}{3}\ (\because\ k>0)$
따라서 직선 l의 방정식은
$y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$

다른풀이
㉠ 이후의 풀이를 다음과 같이 할 수 있다.
$\overline{AQ}=2$이고, $\overline{AB}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+(\sqrt{5})^2}=5$ 이므로
$\overline{BQ}=3$이다.
즉, 점 Q는 선분 AB를 $3:2$으로 내분하는 점이므로
점 Q의 좌표는 $\left(\dfrac{4+(-6)}{2+3},\ \dfrac{6+0}{2+3}\right)$ $\therefore\ Q\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{6}{5}\right)$
한편, 직선 AB의 기울기가 $\dfrac{3-0}{2-(-2)}=\dfrac{3}{4}$이므로
직선 l의 기울기는 $-\dfrac{4}{3}$이다.
따라서 직선 l의 방정식은 $y-\dfrac{6}{5}=-\dfrac{4}{3}\left\{x-\left(-\dfrac{2}{5}\right)\right\}$
$\therefore\ y=-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$

374) $\sqrt{5}$

직선 BC의 방정식이 $y=2x+1$이므로
$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ 2x_2+1)$, $C(x_3,\ 2x_3+1)$이라 하자.
삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표가 $\left(1,\ \dfrac{4}{3}\right)$이므로
$\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}=1$에서 $x_1+x_2+x_3=3$ …… ㉠
$\dfrac{y_1+2x_2+1+2x_3+1}{3}=\dfrac{4}{3}$에서
$y_1+2x_2+2x_3+2=4$
$\therefore\ x_2+x_3=1-\dfrac{y_1}{2}$ …… ㉡
㉡을 ㉠에 대입하면
$x_1+1-\dfrac{y_1}{2}=3$, $\dfrac{y_1}{2}=x_1-2$
$\therefore\ y_1=2x_1-4$
즉, 점 A는 직선 $y=2x-4$ 위의 점이다.
이때, 두 직선 $y=2x-4$, $y=2x+1$은 서로 평행하므로 두 직선 사이의 거리는 선분 AH의 길이와 같다.
따라서 선분 AH의 길이는 직선 $y=2x-4$ 위의 한 점 $(0,\ -4)$와 직선 $y=2x+1$, 즉 $2x-y+1=0$ 사이의 거리와 같으므로
$$\overline{AH}=\dfrac{|4+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

375) 14

$x^2+y^2-6x+4y=0$에서
$(x-3)^2+(y+2)^2=13$
원의 중심 $(3,\ -2)$와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리
$\dfrac{|6+6+14|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=2\sqrt{13}$
원의 반지름의 길이가 $\sqrt{13}$이므로 원 위의 점 P와 직선 $2x-3y+14=0$ 사이의 거리를 d라 하면
$2\sqrt{13}-\sqrt{13}\le d\le2\sqrt{13}+\sqrt{13}$, 즉 $\sqrt{13}\le d\le3\sqrt{13}$
따라서 정수 d는 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10이고 각각의 거리에 해당하는 점 P가 2개씩 있으므로 구하는 점 P의 개수는

14이다

$\overline{C'H}=3-2=1$

직각삼각형 $CC'H$에서

$\overline{AB}=\overline{CH}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-1^2}=7$

376) ①

두 원 $x^2+(y-4)^2=4$,

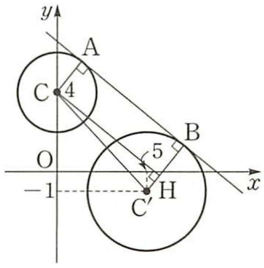
$(x-5)^2+(y+1)^2=9$의

중심을 각각 C, C′이라 하면

$C(0,\ 4),\ C'(5,\ -1)$

$\therefore\ \overline{CC'}=\sqrt{5^2+(-1-4)^2}$

$=5\sqrt{2}$



두 접점을 A, B라 하고 점 C

에서 $\overline{C'B}$에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{C'H}=3-2=1$

따라서 구하는 공통외접선의 길이는

$\overline{AB}=\overline{CH}=\sqrt{(5\sqrt{2})^2-1^2}=7$

377) ③

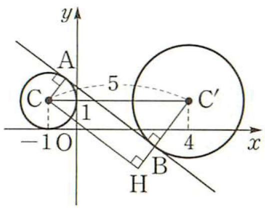
두 원 $(x+1)^2+(y-1)^2=1$,

$(x-4)^2+(y-1)^2=4$의 중심을

각각 C, C′이라 하면

$C(-1,\ 1),\ C'(4,\ 1)$

$\therefore\ \overline{CC'}=5$



두 접점을 A, B라 하고 점 C에서 $\overline{C'B}$

의 연장선에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{C'H}=1+2=3$

따라서 구하는 공통내접선의 길이는

$\overline{AB}=\overline{CH}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

378) ①

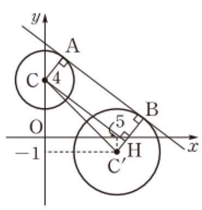
두 원 $x^2+(y-4)^2=4$,

$(x-5)^2+(y+1)^2=9$의 중심을 각각

C, C′이라 하면

$C(0,4),\ C'(5,-1)$

$\therefore \overline{CC'}=\sqrt{5^2+(-1-4)^2}=5\sqrt{2}$



점 C에서 $\overline{C'B}$에 내린 수선의 발을

H라 하면

379) 3

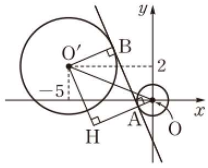
두 원 $O: x^2+y^2=1$,

$O': (x+5)^2+(y-2)^2=r^2$의 중심

O, O'의 좌표는

$O(0,0),\ O'(-5,2)$

$\therefore \overline{OO'}=\sqrt{(-5)^2+2^2}=\sqrt{29}$



점 O′에서 $\overline{OA}$의 연장선에 내린

수선의 발을 H라 하면

$\overline{OH}=r+1$

직각삼각형 $OH'O$에서

$r+1=\sqrt{(\sqrt{29})^2-(\sqrt{13})^2}=4$

$\therefore r=3$

380) $\sqrt{33}, 3$

$x^2+y^2-8x+10y+32=0$에서

$(x-4)^2+(y+5)^2=9$

$x^2+y^2+2x+4y+1=0$에서

$(x+1)^2+(y+2)^2=4$

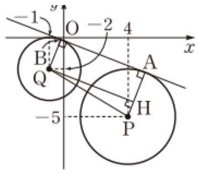
두 원의 중심을 각각 P, Q라 하면

$P(4,-5),\ Q(-1,-2)$

$\therefore \overline{PQ}=\sqrt{(-1-4)^2+(-2+5)^2}=\sqrt{34}$

점 Q에서 $\overline{PA}$에 내린 수선의 발을

H라 하면



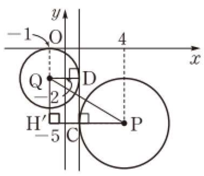
$\overline{PH}=3-2=1$

직각삼각형 QPH에서

$\overline{AB}=\overline{QH}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-1^2}=\sqrt{33}$

점 Q에서 $\overline{PC}$의 연장서에 내린 수서

의 발을 H′이라 하면



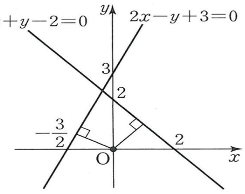
$\overline{PH'}=3+2=5$

직각삼각형 $QH'P$에서

$\overline{CD}=\overline{QH'}=\sqrt{(\sqrt{34})^2-5^2}=3$

381) $\frac{9}{5}$

$(x+y-2)(2x-y+3)=0$은 직선 $x+y-2=0$ 또는 직선 $2x-y+3=0$을 나타낸다.
이때, x^2+y^2은 직선 위의 점 (x, y)와 원점 사이의 거리의 제곱과 같다.

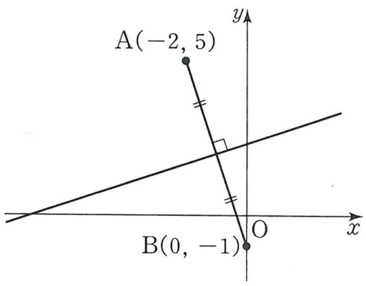


원점과 직선 $x+y-2=0$사이의 거리는
$\frac{|-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{2}$
원점과 직선 $2x-y+3=0$사이의 거리는
$\frac{|3|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{3}{\sqrt{5}}$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 $\frac{9}{5}$이다.

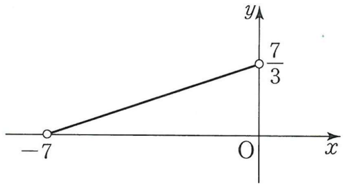
<다른풀이>
$(x+y-2)(2x-y+3)=0$에서
$x+y-2=0$ 또는 $2x-y+3=0$
(ⅰ) $x+y-2=0$일 때
$x^2+y^2=x^2+(-x+2)^2=2x^2-4x+4$
$=2(x-1)^2+2$
이므로 $x=1$일 때 최솟값 2를 갖는다.
(ⅱ) $2x-y+3=0$일 때
$x^2+y^2=x^2+(2x+3)^2=5x^2+12x+9$
$=5\left(x+\frac{6}{5}\right)^2+\frac{9}{5}$
이므로 $x=-\frac{6}{5}$일 때, 최솟값 $\frac{9}{5}$를 갖는다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 최솟값은 $\frac{9}{5}$이다.

382) ③

$A(-2, 5)$, $B(0, -1)$이라 하자.
원이 두 점 $A(-2, 5)$, $B(0, -1)$을 지날 때,
원의 중심에서 두 점 A, B까지의 거리가 서로 같으므로 원의 중심이 그리는 도형은 선분 AB의 수직이등분선의 일부이다.



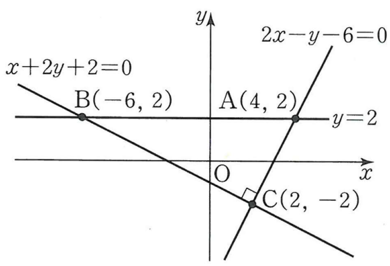
선분 AB의 중점의 좌표는
$\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{5+(-1)}{2}\right)$ $\therefore (-1, 2)$
직선 AB의 기울기가 $\frac{-1-5}{0-(-2)}=-3$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은
$y-2=\frac{1}{3}(x+1)$ $\therefore x-3y+7=0$
이 직선의 x절편이 -7, y절편이 $\frac{7}{3}$이므로 원의 중심이 제2사분면에 있을 때 원의 중심이 그리는 도형은 다음과 같다.



따라서 원의 중심이 그리는 도형의 길이는
$\sqrt{7^2+\left(\frac{7}{3}\right)^2}=\frac{7\sqrt{10}}{3}$

383) ①

두 직선 $2x-y-6=0$, $y=2$의 교점의 좌표는 $(4, 2)$
두 직선 $x+2y+2=0$, $y=2$의 교점의 좌표는 $(-6, 2)$ 두 직선 $2x-y-6=0$, $x+2y+2=0$의 교점의 좌표는 두 식을 연립하여 풀면 $x=2$, $y=-2$이므로 $(2, -2)$이다. 이때, $A(4, 2)$, $B(-6, 2)$, $C(2, -2)$라 하면 다음과 같다.



이때, 두 직선 $2x-y-6=0$, $x+2y+2=0$은 서로 수직이므로 삼각형 ACB는 $\angle ACB=90°$인 직각삼각형이다. 따라서 외접원의 중심은 선분 AB의 중점인 $(-1, 2)$이고, 반지름의 길이는 두 점 $(-1, 2)$, $(4, 2)$ 사이의 거리와 같으므

로 5이다. 따라서 외접원의 방정식은 $(x+1)^2+(y-2)^2=25$ 이므로

$a=-1,\ b=2,\ r=25$

$\therefore\ a+b+r=26$

384) ②

방정식 $\frac{a}{2}x^2+y^2-4x+6y+b=0$이 원을 나타내므로

x^2의 계수와 y^2의 계수가 같아야 한다.

즉, $\frac{a}{2}=1$에서 $a=2$

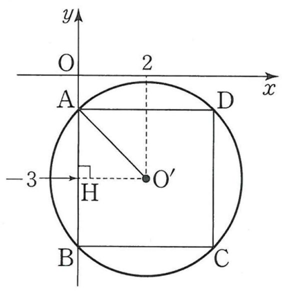
원 $x^2+y^2-4x+6y+b=0$에서

$(x-2)^2+(y+3)^2=13-b$ …… ㉠

이므로 중심이 $(2,\ -3)$이다.

원의 중심을 $\mathrm{O}'(2,\ -3)$이라 하고, 다음과 같이

점 O'에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



정사각형 ABCD가 원에 내접하므로

네 삼각형 ABO', BCO', CDO', DAO'이 서로 합동이다. 따라서 $\angle \mathrm{O'AH}=45°$이므로 삼각형 $\mathrm{O'AH}$는

직각이등변삼각형이고, $\overline{\mathrm{O'H}}=2$이므로

$\overline{\mathrm{AO'}}=\sqrt{2}\times\overline{\mathrm{O'H}}=2\sqrt{2}$

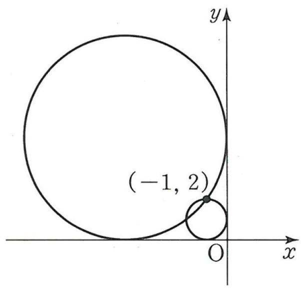
즉, 원의 반지름의 길이가 $2\sqrt{2}$이므로 ㉠에서

$13-b=(2\sqrt{2})^2\quad\therefore\ b=5$

$\therefore\ a+b=2+5=7$

385) $4\sqrt{2}$

점 $(-1,\ 2)$를 지나면서 x축과 y축에 모두 접하는 원의 중심은 다음과 같이 제2사분면 위에 있다.



따라서 원의 반지름의 길이를 r라 하면

중심이 $(-r,\ r)$이므로 원의 방정식은

$(x+r)^2+(y-r)^2=r^2$

이 원이 점 $(-1,\ 2)$를 지나므로

$(-1+r)^2+(2-r)^2=r^2$

$r^2-6r+5=0,\ (r-5)(r-1)=0$

$\therefore\ r=1$ 또는 $r=5$

따라서 구하는 두 원의 중심은 각각 $(-1,\ 1)$, $(-5,\ 5)$이므로

두 원의 중심 사이의 거리는 $\sqrt{(-4)^2+4^2}=4\sqrt{2}$ 이다.

386) ⑤

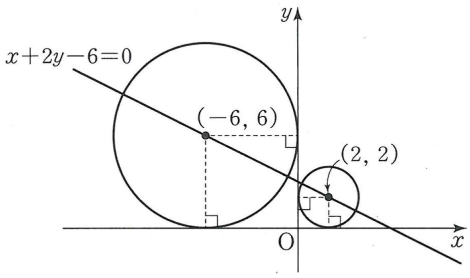
x축, y축에 동시에 접하는 원의 중심의 좌표는

$(a,\ a)$ 또는 $(a,\ -a)$이다.

또한 중심이 직선 $x+2y-6=0$ 위에 있어야 하므로

중심이 $(a,\ a)$일 때, $a+2a-6=0$에서 $a=2$

중심이 $(a,\ -a)$일 때, $a-2a-6=0$에서 $a=-6$



$a=2$일 때 원의 반지름의 길이는 2이므로

원의 넓이는 4π이고,

$a=-6$일 때 원의 반지름의 길이는 6이므로

원의 넓이는 36π이다.

따라서 구하는 두 원의 넓이의 합은 40π이다.

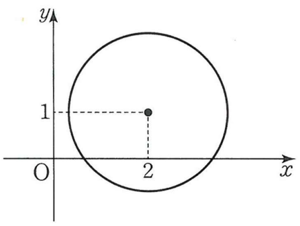
387) ③

원 $x^2+y^2-4x-2y=a-3$에서

$(x-2)^2+(y-1)^2=a+2$

즉, 주어진 원의 중심이 $(2,\ 1)$이고

반지름의 길이가 $\sqrt{a+2}$ 이다.



이때, 이 원이 x축과 만나려면 반지름의 길이가

중심의 y좌표의 절댓값보다 크거나 같아야 하므로

$\sqrt{a+2} \ge 1$

이 원이 y축과 만나지 않으려면 반지름의 길이가

중심의 x좌표의 절댓값보다 작아야 하므로

$\sqrt{a+2} < 2$

즉, $1 \le \sqrt{a+2} < 2$에서

$1 \le a+2 < 4$

$\therefore\ -1 \le a < 2$

388) ②

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

두 점 $(-4,\ 0)$, $(2,\ 0)$으로부터 거리의 비가 $2:1$이므로

$\sqrt{(x+4)^2+y^2}=2\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

양변을 각각 제곱하면

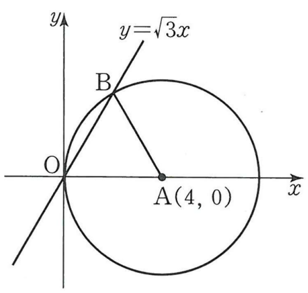
$(x+4)^2+y^2=4(x-2)^2+4y^2$

$x^2+y^2-8x=0 \qquad \therefore\ (x-4)^2+y^2=16$

따라서 점 P가 나타내는 도형은 중심이 $(4,\ 0)$이고

반지름의 길이가 4인 원이다.

원의 중심을 A라 하고, 원이 직선 $y=\sqrt{3}x$와 만나는 두 점 중 원점 O가 아닌 점을 B라 하자.



직선 OB의 기울기가 $\sqrt{3}$ 이므로 $\angle \mathrm{AOB}=60°$이고,

삼각형 OAB가 $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AB}}$인 이등변삼각형이므로

$\angle \mathrm{ABO}=60°$, $\angle \mathrm{OAB}=60°$

즉, 원이 직선 $y=\sqrt{3}x$에 의하여 잘리는 두 호의 길이 중

짧은 것의 길이는 $8\pi \times \dfrac{60°}{360°}=\dfrac{4}{3}\pi$이고,

긴 것의 길이는 $8\pi-\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{20}{3}\pi$이다.

따라서 구하는 두 호의 길이의 차는

$\dfrac{20}{3}\pi-\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{16}{3}\pi$이다.

〈다른풀이〉

두 점 $\mathrm{A}(-4,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$이라 하면 두 점 A, B로부터 거리의 비가 $2:1$인 점 P가 나타내는 도형의 방정식은 다음과 같이 구할 수 있다. 점 P가 나타내는 도형은

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점 $(0,\ 0)$과

선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점 $(8,\ 0)$을

지름의 양 끝점으로 하는 원이다. 따라서 중심이 $(4,\ 0)$이고

반지름의 길이가 4인 원이므로

$(x-4)^2+y^2=16$이다. 이후 풀이는 본풀이와 같다.

389) $x^2+y^2=4$

$\mathrm{B}(x_1,\ x_1)$이라 하면 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는 $\left(\dfrac{2x_1-6}{3},\ \dfrac{2y_1}{3}\right)$

점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면

$x=\dfrac{2x_1-6}{3}$, $y=\dfrac{2y_1}{3}$

$\therefore\ x_1=\dfrac{3x+6}{2}$, $y_1=\dfrac{3}{2}y \qquad \cdots\cdots$ ㉠

이때, 점 $\mathrm{B}(x_1,\ y_1)$이 원 $x^2+y^2-6x=0$ 위의 점이므로

$(x_1)^2+(y_1)^2-6x_1=0$

$\left(\dfrac{3x+6}{2}\right)^2+\left(\dfrac{3}{2}y\right)^2-6\times\dfrac{3x+6}{2}=0$ ($\because$ ㉠)

$(x+2)^2+y^2-4(x+2)=0 \qquad \therefore\ x^2+y^2=4$

따라서 구하는 도형의 방정식은 $x^2+y^2=4$이다.

〈다른풀이〉

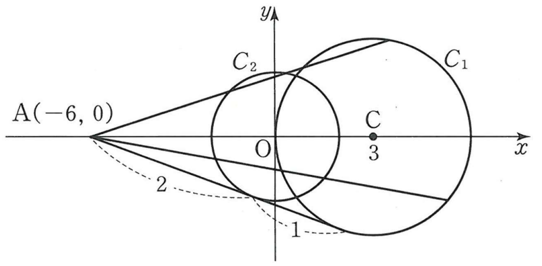
원 $C_1 : x^2+y^2-6x=0$이라 하면

$C_1 : (x-3)^2+y^2=9$

이 원은 중심이 $(3,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3이다.

점 $\mathrm{A}(-6,\ 0)$과 원 C_1 위의 점 B에 대하여

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점이 나타내는 도형을 C_2라 하면 두 도형 C_1, C_2는 닮음비가 $3:2$인 닮은 도형이다.



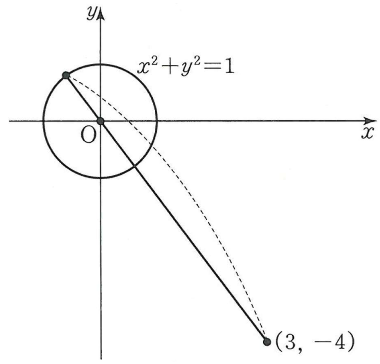
원 C_1의 반지름의 길이가 3이므로 원 C_2의 반지름의 길이는 2이고, 원 C_1의 중심을 $\mathrm{C}(3,\ 0)$이라 하면
원 C_2의 중심은 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점이므로 $(0,\ 0)$이다. 따라서 구하는 원 C_2의 방정식은 $x^2+y^2=4$이다.

390) ⑤

점 P의 좌표를 $(x_1,\ y_1)$, 점 G의 좌표를 $(x,\ y)$라 하면
$x=\dfrac{5+(-2)+x_1}{3}$, $y=\dfrac{-2+(-4)+y_1}{3}$이므로
$x_1=3x-3$, $y_1=3y+6$ …… ㉠
이때, 점 P가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로
$(x_1)^2+(y_1)^2=4$
즉, $(3x-3)^2+(3y+6)^2=4$ ($\because$ ㉠)이므로
$(x-1)^2+(y+2)^2=\dfrac{4}{9}$
따라서 점 G가 나타내는 도형은
반지름의 길이가 $\dfrac{2}{3}$인 원이므로
그 길이는 $\dfrac{4}{3}\pi$이다.

391) 36

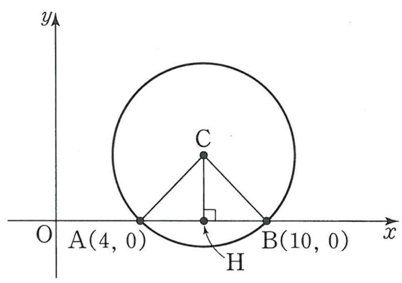
두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$에 대하여 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$가
$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=4$를 만족시키므로
$(a+1)^2+b^2+(a-1)^2+b^2=4$, $2a^2+2b^2=2$
$\therefore\ a^2+b^2=1$
따라서 점 P의 자취는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원이다.
이때, $(a-3)^2+(b+4)^2$은 두 점 $(a,\ b)$, $(3,\ -4)$ 사이의 거리의 제곱과 같다.



점 $(3,\ -4)$와 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 $(a,\ b)$ 사이의 거리의 최댓값은 원의 중심 $(0,\ 0)$과 점 $(3,\ -4)$ 사이의 거리에 반지름의 길이 1을 더한 값이므로
$\sqrt{3^2+(-4)^2}+1=6$
따라서 $(a-3)^2+(b+4)^2$의 최댓값은
$6^2=36$이다.

392) 20

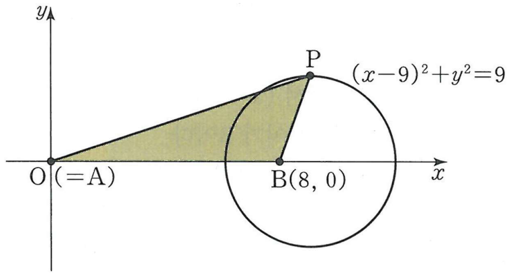
원의 중심을 C라 하고, 원의 중심에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$인 이등변삼각형 ABC에서
점 H는 선분 AB의 중점이므로 점 H의 좌표는
$\left(\dfrac{4+10}{2},\ 0\right)$ $\quad\therefore\ (7,\ 0)$
$\overline{\mathrm{AH}}=3$, $\overline{\mathrm{AC}}=5$이므로 직각삼각형 AHC에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{CH}}=\sqrt{5^2-3^2}=4$이다.
$\therefore\ \mathrm{C}(7,\ 4)$
이때, 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 원의 중심 $\mathrm{C}(7,\ 4)$ 사이의 거리는
$\sqrt{7^2+4^2}=\sqrt{65}$이므로
점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$과 원 위의 점 P 사이의 거리를 k라 할 때,
$\sqrt{65}-5\le k\le\sqrt{65}+5$
따라서 자연수 k의 값은 $4,\ 5,\ 6,\ \cdots,\ 13$이고,
각 값에 대하여 점 P가 2개씩 존재하므로
구하는 점 P의 개수는 $10\times 2=20$이다.

393) ③

두 지점 A, B를 각각 좌표평면 위의 두 점 $A(0,\ 0)$, $B(8,\ 0)$으로 놓고, 지점 P를 점 $P(a,\ b)$라 하자.
지점 A에서 출발하는 배의 속력이 지점 B에서 출발하는 배의 속력보다 3배 빠르므로 $\overline{AP}=3\overline{BP}$이다.
즉, $\sqrt{a^2+b^2}=3\sqrt{(a-8)^2+b^2}$ 이므로
양변을 각각 제곱하면 $a^2+b^2=9(a^2-16a+64+b^2)$
$a^2-18a+b^2+72=0 \quad \therefore (a-9)^2+b^2=9$
따라서 점 P의 자취는 원 $(x-9)^2+y^2=9$이다.

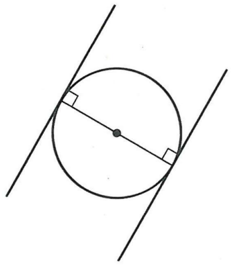


이때, 삼각형 ABP에서 선분 AB를 밑변으로 놓으면 높이가 최대일 때 넓이도 최대가 된다.
삼각형 ABP의 높이는 점 P의 y좌표의 최댓값과 같으므로 점 P의 좌표가 $(9,\ 3)$ 또는 $(9,\ -3)$일 때 최댓값 3을 갖는다. 따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은 $\frac{1}{2}\times8\times3=12$ (km^2)이다.

<다른풀이>
$\overline{AP}=3\overline{BP}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형을 다음과 같이 구할 수 있다.
$\overline{AP}=3\overline{BP}$에서 $\overline{AP}:\overline{BP}=3:1$을 만족시키는 점 P의 자취는 선분 AB를 $3:1$로 내분하는 점 $(6,\ 0)$과
선분 AB를 $3:1$로 외분하는 점 $(12,\ 0)$을
지름의 양 끝점으로 하는 원이다.
따라서 중심이 $(9,\ 0)$이고 반지름의 길이가 3인 원
$(x-9)^2+y^2=9$를 나타낸다.
이후 풀이는 본풀이와 같다.

394) ⑤

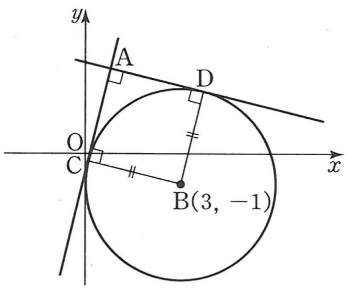
평행한 두 직선 $2x-y+1=0$, $px-y+q=0$은 기울기가 같으므로 $p=2$이다.
다음과 같이 평행한 두 직선에 동시에 접하는 원의 지름의 길이는 두 직선 사이의 거리와 같다.



원의 넓이가 5π이므로 반지름의 길이는 $\sqrt{5}$이고
지름의 길이는 $2\sqrt{5}$이다. 직선 $2x-y+1=0$ 위의 점 $(0,\ 1)$과 직선 $2x-y+q=0$ 사이의 거리는
$\frac{|-1+q|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|q-1|}{\sqrt{5}}$
$\frac{|q-1|}{\sqrt{5}}=2\sqrt{5}$, $|q-1|=10$
$\therefore q=11$ $(\because q>0)$
$\therefore p+q=2+11=13$

395) ②

점 $A(1,\ k)$라 하고, 원 $(x-3)^2+(y+1)^2=9$의 중심을 $B(3,\ -1)$, 점 $A(1,\ k)$에서 원에 그은 두 접선이 원과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하자.

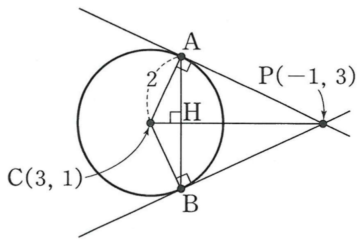


이때, 사각형 ABCD의 네 각이 모두 직각이고, $\overline{BC}=\overline{BD}=3$이므로 사각형 ACBD는 정사각형이다.
따라서 $\overline{AB}=3\sqrt{2}$이므로 $\sqrt{(-2)^2+(k+1)^2}=3\sqrt{2}$
양변을 각각 제곱하면 $(-2)^2+(k+1)^2=18$
$(k+1)^2=14$, $k+1=\sqrt{14}$ $(\because k>0)$
$\therefore k=\sqrt{14}-1$

396) ②

원 $x^2+y^2-6x-2y+6=0$에서 $(x-3)^2+(y-1)^2=4$이므로 중심이 $(3,\ 1)$이고, 반지름의 길이가 2이다.

중심을 $\mathrm{C}(3,\ 1)$이라 하고, 다음과 같이 직선 CP와 선분 AB의 교점을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$, $\overline{\mathrm{AC}}=2$이므로 직각삼각형 CAP에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2-2^2}=4$

두 삼각형 CAP, AHP가 닮음이므로

$\overline{\mathrm{CP}}:\overline{\mathrm{AP}}=2\sqrt{5}:4$, 즉 $\overline{\mathrm{CP}}:\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{5}:2$

따라서 넓이비는 $5:4$이다.

이때, 삼각형 CAP의 넓이가

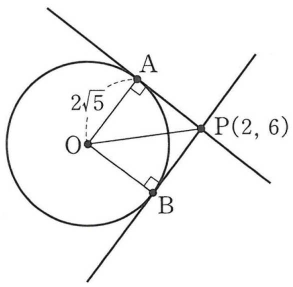
$\frac{1}{2}\times 4\times 2=4$이므로

삼각형 PAB의 넓이는

$2\times\frac{16}{5}=\frac{32}{5}$

397) ②

원 $x^2+y^2=20$은 중심이 $\mathrm{O}(0,\ 0)$이고, 반지름의 길이가 $2\sqrt{5}$이다.



점 $\mathrm{P}(2,\ 6)$에 대하여 $\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$이고, $\overline{\mathrm{OA}}=2\sqrt{5}$이므로 직각삼각형 OAP에서 피타고라스 정리에 의하여 $\overline{\mathrm{AP}}=\sqrt{(2\sqrt{10})^2-(2\sqrt{5})^2}=2\sqrt{5}$

즉, $\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{OB}}$이고, $\angle\mathrm{OAP}=\angle\mathrm{OBP}=90°$이므로 사각형 APBO는 정사각형이다.

따라서 삼각형 PAB의 넓이는

$\frac{1}{2}\times(2\sqrt{5})^2=10$

398) ②

원 $x^2+y^2-8y=0$에서 $x^2+(y-4)^2=16$

원 $x^2+y^2-6x-12=0$에서 $(x-3)^2+y^2=21$

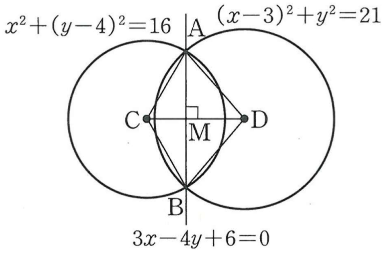
즉, 각각 $\mathrm{C}(0,\ 4)$, $\mathrm{D}(3,\ 0)$이므로

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

두 원의 교점 A, B를 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2-8y-(x^2+y^2-6x-12)=0$

$\therefore\ 3x-4y+6=0$



두 선분 AB와 CD의 교점을 M이라 하면 $\overline{\mathrm{CM}}$은

점 $\mathrm{C}(0,\ 4)$와 직선 $3x-4y+6=0$ 사이의 거리와 같으므로

$\overline{\mathrm{CM}}=\frac{|-16+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=2$

$\overline{\mathrm{AC}}=4$이므로 직각삼각형 AMC에서

피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AM}}=\sqrt{4^2-2^2}=2\sqrt{3}$ $\quad\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AM}}=4\sqrt{3}$

따라서 사각형 ACBD의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 5=10\sqrt{3}$

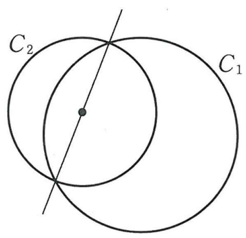
399) ①

$C_1: x^2+y^2+4ax-2ay-3=0$,

$C_2: x^2+y^2-6x+2y+3=0$이라 하자.

원 C_1이 원 C_2의 둘레를 이등분할 때 두 원의 교점을 이은 선분이 원 C_2의 지름이므로 두 원의 교점을 지나는 직선이 원 C_2의

중심을 지난다.



원 $C_2: x^2+y^2-6x+2y+3=0$에서

$(x-3)^2+(y+1)^2=7$이므로 중심이 $(3,\ -1)$이다.

두 원의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(x^2+y^2+4ax-2ay-3)-(x^2+y^2-6x+2y+3)=0$

$(4a+6)x-(2a+2)y-6=0$

$\therefore\ (2a+3)x-(a+1)y-3=0$

이 직선이 점 $(3,\ -1)$을 지나므로

$3(2a+3)+(a+1)-3=0,\ 7a+7=0$

$\therefore\ a=-1$

400) 18

두 점 A, B에 대하여 $\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{AQB}=90^\circ$ 이므로

두 점 P, Q는 선분 AB를 지름으로 하는 원 위에 있다.

선분 AB를 지름으로 하는 원을 C라 하면

원 C의 중심은 선분 AB의 중점과 같으므로

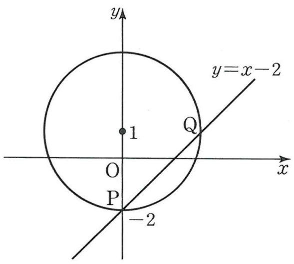
$\left(\dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{-1+3}{2}\right)$, 즉 $(0,\ 1)$이고,

원 C의 반지름의 길이는 점 $(0,\ 1)$과 $(\sqrt{5},\ 3)$

사이의 거리와

같으므로 $\sqrt{\sqrt{5}^2+2^2}=3$ 이다.

따라서 원 C의 방정식은 $x^2+(y-1)^2=9$ 이다.



직선 $y=x-2$와 원 $x^2+(y-1)^2=9$의 교점의 x좌표는

$x^2+(y-3)^2=9$에서 $x^2-3x=0,\ x(x-3)=0$

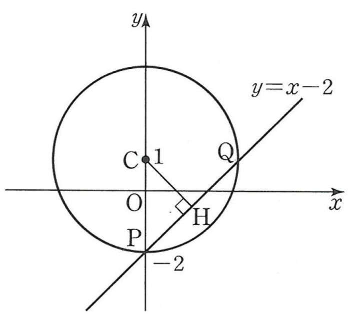
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=3$

즉, 두 점 P, Q의 좌표는 $(0,\ -2)$, $(3,\ 1)$이다.

$\therefore\ l^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2=3^2+3^2=18$

<다른풀이>

원 C의 방정식을 구한 후 l^2의 값을 다음과 같이 구할 수 있다. 원 C의 중심을 $\mathrm{C}(0,\ 1)$이라 하고, 점 C에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{\mathrm{CH}}$는 점 C와 직선 $y=x-2$, 즉 $x-y-2=0$ 사이의 거리와 같으므로 $\overline{\mathrm{CH}}=\dfrac{|-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\overline{\mathrm{CP}}=3$이므로 직각삼각형 PHC에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{3^2-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{PQ}}=2\times\overline{\mathrm{PH}}=3\sqrt{2}$

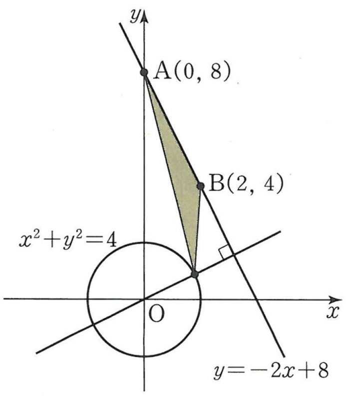
$\therefore\ l^2=\overline{\mathrm{PQ}}^2=18$

401) $8-2\sqrt{5}$

삼각형 PAB의 밑변을 선분 AB라 하면

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2^2+(-4)^2}=2\sqrt{5}$ 로 일정하다.

삼각형 PAB의 높이는 점 P와 직선 AB 사이의 거리이므로 원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최소일 때 삼각형 PAB의 넓이가 최소이다.



직선 AB의 방정식은

$y=\dfrac{4-8}{2-0}x+8\qquad\therefore\ y=-2x+8$

원 위의 점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최솟값은

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $2x+y-8=0$ 사이의 거리에서

반지름의 길이 2를 뺀 값이므로

$\dfrac{|-8|}{\sqrt{2^2+1^2}}-2=\dfrac{8}{\sqrt{5}}-2$

따라서 삼각형 PAB의 넓이의 최솟값은

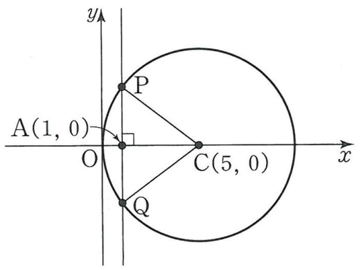
$\dfrac{1}{2}\times2\sqrt{5}\times\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}-2\right)=8-2\sqrt{5}$

402) ③

원 $x^2+y^2-10x=0$에서 $(x-5)^2+y^2=25$이므로

중심이 $(5,\ 0)$이고 반지름의 길이가 5이다.

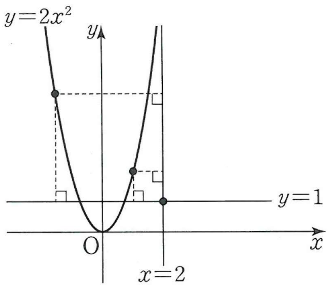
원의 중심을 $C(5,\ 0)$이라 하고, 직선 AC와 수직이면서 점 $A(1,\ 0)$을 지나는 직선이 원과 만나는 두 교점을 각각 P, Q라 하자.



점 $A(1,\ 0)$을 지나는 현 중에서 가장 짧은 것은 $\overline{PQ}$이고, 가장 긴 것은 지름이며 그 길이는 10이다.
$\overline{CP}=5$, $\overline{AC}=4$이므로
직각삼각형 PAC에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{AP}=\sqrt{5^2-4^2}=3$ $\quad \therefore\ \overline{PQ}=2\overline{AP}=6$
따라서 점 $A(1,\ 0)$을 지나는 현의 길이를 k라 하면
$6 \le k \le 10$이고, 이 중 자연수 k는 $6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$이다. 이때, 길이가 $7,\ 8,\ 9$인 현은 각각 2개씩 존재하고, 길이가 $6,\ 10$인 현은 각각 1개씩 존재하므로
구하는 현의 개수는
$3\times2+2\times1=8$

403) 9π

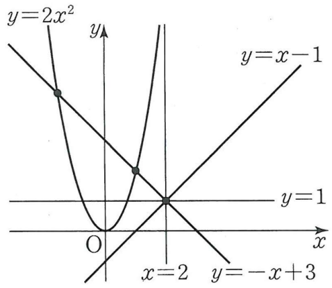
두 직선 $x=2$, $y=1$에 동시에 접하는 원의 중심에서
두 직선 $x=2$, $y=1$까지의 거리는 서로 같다.
원의 중심이 곡선 $y=2x^2$ 위에 있으므로 중심의 좌표를 $(a,\ 2a^2)$이라 하면 $|a-2|=|2a^2-1|$



(ⅰ) $a-2=2a^2-1$일 때
방정식 $2a^2-a+1=0$의 판별식을 D라 하면
$D=(-1)^2-8<0$
방정식을 만족시키는 실근이 존재하지 않는다.
(ⅱ) $a-2=-(2a^2-1)$일 때
$2a^2+a-3=0$에서 $(2a+3)(a-1)=0$
$\therefore\ a=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $a=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 원의 중심은 $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$, $(1,\ 2)$이다.
원의 중심이 $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$일 때, 반지름의 길이는
$\left|-\dfrac{3}{2}-2\right|=\dfrac{7}{2}$
원의 중심이 $(1,\ 2)$일 때, 반지름의 길이는
$|1-2|=1$이다.
따라서 모든 원의 둘레의 길이의 합은
$7\pi+2\pi=9\pi$

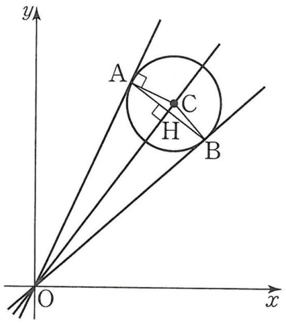
<다른풀이>
두 직선 $x=2$, $y=1$에 동시에 접하는 원의 중심에서
두 직선까지의 거리가 서로 같으므로
원의 중심은 점 $(2,\ 1)$을 지나고 기울기가 1 또는 -1인 직선 위에 있다.
즉, 직선 $y=x-1$ 또는 $y=-x+3$ 위에 있다.



따라서 곡선 $y=2x^2$과
직선 $y=x-1$ 또는 $y=-x+3$의
교점이 구하는 원의 중심이다.
(ⅰ) 방정식 $2x^2=x-1$, 즉 $2x^2-x+1=0$의 판별식을 D라 하면 $D=(-1)^2-8<0$
방정식을 만족시키는 실근이 존재하지 않는다.
(ⅱ) 방정식 $2x^2=-x+3$에서
$2x^2+x-3=0$, $(2x+3)(x-1)=0$
$\therefore\ x=-\dfrac{3}{2}$ 또는 $x=1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 원의 중심은 $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$ 또는 $(1,\ 2)$이다. 원의 중심이 $\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2}\right)$일 때, 반지름의 길이는
$\left|-\dfrac{3}{2}-2\right|=\dfrac{7}{2}$이고, 원의 중심이 $(1,\ 2)$일 때, 반지름의 길이는 $|1-2|=1$이다.
따라서 모든 원의 둘레의 길이의 합은 $7\pi+2\pi=9\pi$

404) 21

다음과 같이 원 $(x-3)^2+(y-4)^2=1$의
중심을 $C(3,\ 4)$, 직선 OC와 직선 AB의 교점을 H라 하자.



직선 OC의 기울기가 $\frac{4}{3}$ 이고, 직선 OC와 직선 AB가 수직이므로 $m=-\frac{3}{4}$

즉, 직선 AB의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}x+n$ 이다.

두 삼각형 OAC, AHC가 닮음이므로

$\overline{OC} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{HC}$

이때, $\overline{OC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$, $\overline{AC}=1$ 이므로

$5 : 1 = 1 : \overline{HC}$에서 $\overline{HC}=\frac{1}{5}$

즉, 원의 중심 C에서 직선 AB에 이르는 거리가 $\frac{1}{5}$ 이다.

점 $C(3,\ 4)$와 직선 $3x+4y-4n=0$ 사이의 거리는

$\frac{|9+16-4n|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$

$|25-4n|=1$, $25-4n=\pm1$

즉, $n=6$ 또는 $n=\frac{13}{2}$ 에서 $n=6$

$\therefore\ 4(m+n)=4\left(-\frac{3}{4}+6\right)=21$

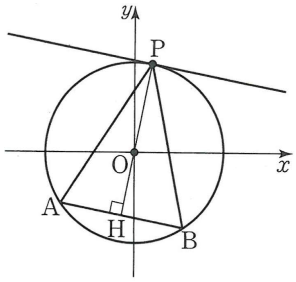
405) 26

삼각형 ABP의 밑변을 선분 AB라 할 때,

$\overline{AB}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

으로 일정하므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형의 넓이가 최대이다. 따라서 다음과 같이 직선 AB와 평행한 원의 접선 중 제1사분면에서 원과 접하는 접선의 접점이 P가 될 때 삼각형 ABP의 넓이가 최대이다.

점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직선 PH는 점 P에서의 접선과 수직이므로 원의 중심인 원점을 지난다.



이때, 이등변삼각형 OAB에서 점 H는 선분 AB의 중점이므로 점 H의 좌표는

$\left(\frac{-3+2}{2},\ \frac{-2+(-3)}{2}\right)$

$\therefore\ \left(-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$

$\overline{OH}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{26}}{2}$ 이고

$\overline{PH}=\overline{OP}+\overline{OH}$ 이므로

$\overline{PH}=\sqrt{13}+\frac{\sqrt{26}}{2}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\left(\sqrt{13}+\frac{\sqrt{26}}{2}\right)$

$=\frac{13}{2}(1+\sqrt{2})$

이므로 $p=2$, $q=13$

$\therefore\ pq=26$

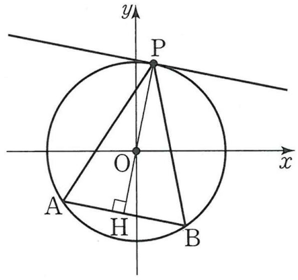
<다른풀이>

삼각형 ABP의 밑변을 선분 AB라 할 때,

$\overline{AB}=\sqrt{5^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

으로 일정하므로 점 P와 직선 AB 사이의 거리가 최대일 때 삼각형의 넓이가 최대이다.

따라서 다음과 같이 직선 AB와 평행한 원의 접선 중 제1사분면에서 원과 접하는 접선의 접점이 P가 될 때 삼각형의 넓이가 최대이다.



두 점 $A(-3,\ -2)$, $B(2,\ -3)$을 지나는 직선 AB의 기울기는

$\frac{-3-(-2)}{2-(-3)}=-\frac{1}{5}$

기울기가 $-\frac{1}{5}$ 인 원 $x^2+y^2=13$ 의 접선의 방정식은

$y=-\frac{1}{5}x\pm\sqrt{13}\times\sqrt{\left(-\frac{1}{5}\right)^2+1}$ 에서

$y=-\frac{1}{5}x+\frac{13\sqrt{2}}{5}$

정리하면 $x+5y-13\sqrt{2}=0$

점 $\mathrm{A}(-3,\ -2)$에서 이 직선까지의 거리는

$\frac{|-3-10-13\sqrt{2}|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\frac{13+13\sqrt{2}}{\sqrt{26}}$

따라서 삼각형 ABP의 넓이의 최댓값은

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PH}}=\frac{1}{2}\times\sqrt{26}\times\frac{13+13\sqrt{2}}{\sqrt{26}}$

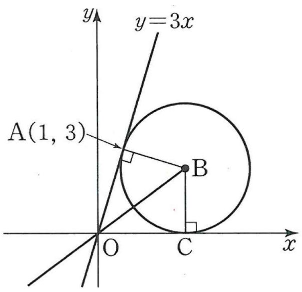
$=\frac{13}{2}(1+\sqrt{2})$

이므로 $p=2,\ q=13$

$\therefore\ pq=26$

406) ④

$\mathrm{A}(1,\ 3)$이라 하고, 원의 중심을 $\mathrm{B}(a,\ b)$ $(a>0,\ b>0)$라 하자. 원이 x축에 접하므로 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 C라 하면 원이 x축과 접하는 접점이 C이다.



원점 O에서 원에 그은 접선의 길이가 서로 같으므로

$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{1^2+3^2}=\sqrt{10}$ 에서

$a=\sqrt{10}\qquad\therefore\ \mathrm{B}(\sqrt{10},\ b)$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서

$\sqrt{(\sqrt{10}-1)^2+(b-3)^2}=b$

양변을 각각 제곱하면

$(10-2\sqrt{10}+1)+(b^2-6b+9)=b^2$

$6b=20-2\sqrt{10}\qquad\therefore\ b=\frac{10-\sqrt{10}}{3}$

$\therefore\ a+b=\sqrt{10}+\frac{10-\sqrt{10}}{3}=\frac{10+2\sqrt{10}}{3}$

407) $-\frac{8\sqrt{7}}{21}$

선분 AB를 지름으로 하는 반원은

원의 중심이 선분 AB의 중점인 원점이고, 반지름의 길이가 1이므로 원 $x^2+y^2=1$의 일부이고,

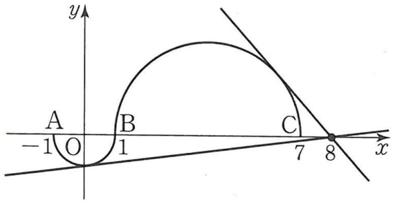
선분 BC를 지름으로 하는 반원은

원의 중심이 선분 BC의 중점인 $\left(\frac{1+7}{2},\ 0\right)$, 즉 $(4,\ 0)$이고

반지름의 길이가 3이므로 원 $(x-4)^2+y^2=9$의 일부이다.

$\frac{y}{x-8}=k$ (k는 실수)라 하면

$y=k(x-8)$ $(\because\ x\neq 8)$



직선 $y=k(x-8)$은 점 $(8,\ 0)$을 지나고

기울기가 k인 직선이므로

원 $x^2+y^2=1$과 제4사분면에서 접할 때 k의 최대이고,

원 $(x-4)^2+y^2=9$와 제1사분면에서 접할 때 k의 값이 최소이다.

직선 $kx-y-8k=0$이 원 $x^2+y^2=1$에 접할 때,

원의 중심 $(0,\ 0)$에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이 1과 같으므로

$\frac{|-8k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=1$

$64k^2=k^2+1\qquad\therefore\ k=\frac{1}{3\sqrt{7}}$ $(\because\ k>0)$

직선 $kx-y-8k=0$이 원 $(x-4)^2+y^2=9$에 접할 때,

원의 중심 $(4,\ 0)$에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이 3과 같으므로

$\frac{|4k-8k|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}}=3$

$16k^2=9k^2+9\qquad\therefore\ k=-\frac{3}{\sqrt{7}}$ $(\because\ k<0)$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{1}{3\sqrt{7}}+\left(-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)=-\frac{8\sqrt{7}}{21}$ 이다.

408) ⑤

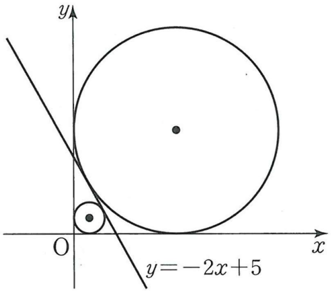
점 $(0,\ 5)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 기울기가 음수인 접선 l의 방정식을 $y=mx+5$ $(m<0)$이라 하면

원의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $mx-y+5=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같으므로

$\frac{|5|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$ 에서 $5=\sqrt{5(m^2+1)}$

양변을 각각 제곱하면 $m^2+1=5\qquad\therefore\ m=-2$

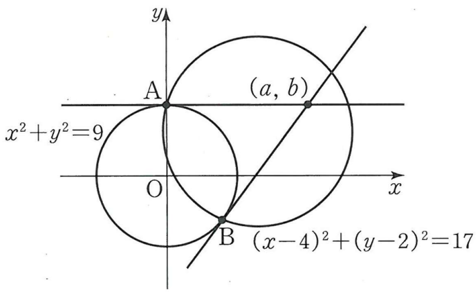
$(\because\ m<0)$
따라서 직선 $l : y=-2x+5$ 이다.
x축, y축 및 직선 l에 동시에 접하면서 중심이 제1사분면 위에 있는 두 원은 다음과 같다.



x축, y축에 동시에 접하므로 원의 중심을 $(r,\ r)$라 하면 이 원의 반지름의 길이는 r이다.
또한 직선 l에 접하므로 원의 중심 $(r,\ r)$와
직선 $2x+y-5=0$ 사이의 거리가 반지름의 길이 r와 같다.
즉, $\dfrac{|2r+r-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}=r$에서 $|3r-5|=\sqrt{5}r$
양변을 각각 제곱하면
$9r^2-30r+25=5r^2 \qquad \therefore\ 4r^2-30r+25=0$
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 두 실근의 합은
$\dfrac{30}{4}=\dfrac{15}{2}$
따라서 구하는 두 원의 반지름의 길이의 합은 $\dfrac{15}{2}$이다.

409) ②

두 원 $x^2+y^2=9$, $(x-4)^2+(y-2)^2=17$의 교점 A, B를 지나는 직선의 방정식은
$(x-4)^2+(y-2)^2-17-(x^2+y^2-9)=0$
$-8x-4y+12=0 \qquad \therefore\ 2x+y-3=0$
$2x+y-3=0$, $x^2+y^2=9$를 연립하여 풀면
$x^2+(-2x+3)^2=9$, $5x^2-12x=0$, $x(5x-12)=0$
$\therefore\ x=0$ 또는 $x=\dfrac{12}{5}$
$2x+y-3=0$에 각각 대입하면 $y=3$, $y=-\dfrac{9}{5}$ 이므로
두 점 A, B의 좌표는 $(0,\ 3)$, $\left(\dfrac{12}{5},\ -\dfrac{9}{5}\right)$이다.



두 점 A, B가 모두 $x^2+y^2=9$ 위의 점이므로
점 $(0,\ 3)$에서의 접선의 방정식은
$3y=9$에서 $y=3$ …… ㉠
점 $\left(\dfrac{12}{5},\ -\dfrac{9}{5}\right)$에서의 접선의 방정식은
$\dfrac{12}{5}x-\dfrac{9}{5}y=9$에서 $4x-3y=15$ …… ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $x=6$, $y=3$이므로 두 접선의 교점의 좌표는 $(6,\ 3)$이다.
$\therefore\ a+b=6+3=9$

410) 24

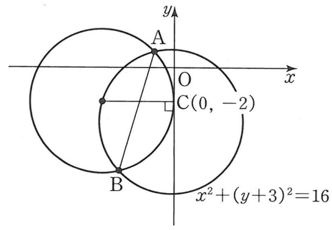
411) ⑤

412) $3\sqrt{3}$

413) $(x-2)^2+(y-2)^2=8$

414) 22

$C(0,\ 02)$라 하면 다음과 같이 호 ACB를 포함하는 원은 원 $x^2+(y+3)^2=16$과 직선 AB에 대하여 대칭이다.



호 ACB를 포함하는 원은 점 $C(0,\ -2)$에서 y축에 접하므로 중심의 y좌표는 -2이다.

또한 이원은 원 $x^2+(y+3)^2=16$과 직선 AB에 대하여 대칭이므로 반지름의 길이는 4이다.

원이 y축에 접할 때, 중심의 x좌표의 절댓값이 반지름의 길이와 같으므로 중심의 x좌표는 -4이다.

따라서 호 ACB를 포함하는 원은 중심이 $(-4,\ -2)$이고 반지름의 길이가 4이므로 원의 방정식은

$(x+4)^2+(y+2)^2=16$

직선 AB는 두 원

$x^2+(y+3)^2=16,\ (x+4)^2+(y+2)^2=16$의

교점을 지나는 적선이므로 직선의 방정식은

$\{x^2+(y+3)^2-16\}-\{(x+4)^2+(y+2)^2-16\}=0$

$-8x+2y-11=0 \qquad \therefore\ y=4x+\dfrac{11}{2}$

따라서 $m=4,\ n=\dfrac{11}{2}$이므로

$mn=22$

415) ⑤

점 P의 좌표를 $(a,\ b)$라 할 때,

$\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$

$=a^2+(b-5)^2+(a-2)^2+(b-3)^2$

$=2a^2+2b^2-4a-16b+38$

$=2\{(a-1)^2+(b-4)^2\}+4 \qquad \cdots\cdots ㉠$

이때, $(a-1)^2+(b-4)^2$은

두 점 $(a,\ b)$, $(1,\ 4)$ 사이의 거리의 제곱과 같으므로

원 $x^2+y^2+4x+3=0$ 위의 점과 점 $(1,\ 4)$

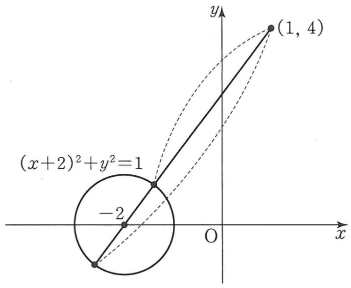
사이의 거리가

최대일 때 ㉠은 최댓값을 갖고,

최소일 때 ㉠은 최솟값을 갖는다.

원 $x^2+y^2+4x+3=0$에서 $(x+2)^2+y^2=1$이므로

중심이 $(-2,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1이다.



원의 중심 $(-2,\ 0)$과 점 $(1,\ 4)$ 사이의 거리는

$\sqrt{3^2+4^2}=5$

즉, 원 위의 점과 점 $(1,\ 4)$ 사이의 거리의

최댓값은 $5+1=6$이고, 최솟값은 $5-1=4$이다.

따라서 ㉠의 최댓값은 $2\times6^2+4=76$이고,

최솟값은 $2\times4^2+4=36$이다.

따라서 구하는 $\overline{AP}^2+\overline{BP}^2$의 최솟값과 최댓값의 합은

$36+76=112$이다.

416) ⑤

원 $x^2+y^2-6x-2y=0$에서 $\qquad \cdots\cdots ㉠$

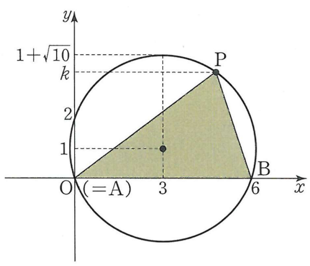
$(x-3)^2+(y-1)^2=10$

즉, 주어진 원은 중심이 $(3,\ 1)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{10}$이다.

㉠에 $y-0$을 대입하면 $x^2-6x=0$에서

$x=0$ 또는 $x=6$

$A(0,\ 0)$, $B(6,\ 0)$이라 하면 다음과 같다.



$\overline{AB}=6$이고, 점 P의 y좌표를 k라 하면

(삼각형 ABP의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\times6\times k=3k$

따라서 $3k$가 자연수이어야 한다.

한편, 제1사분면 위의 점 P에 대하여 점 P의 y좌표의 범위는

$0<k\le1+\sqrt{10}$

이때, ㉠에 $x=0$을 대입하면 $y^2-2y=0$에서

$y=0$ 또는 $y=2$

즉, y좌표가 k인 점 P의 개수는

$0<k\le2$일 때, 1개,

$2<k<1+\sqrt{10}$일 때 2이다.

(ⅰ) $0<3k\le6$일 때

가능한 자연수 $3k$의 값은

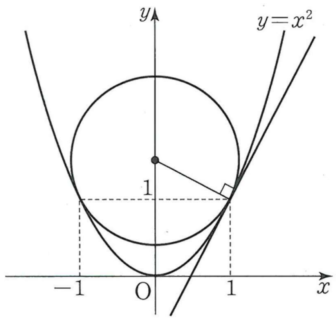
$1,\ 2,\ \cdots,\ 6$
이때, 점 P는 각각 1개씩이므로 총 6개다.
(ⅱ) $2<k<1+\sqrt{10}$, 즉 $6<3k<3+3\sqrt{10}$일 때
가능한 자연수 $3k$의 값은
$7,\ 8,\ \cdots,\ 12$
이때, 점 P는 각각 2개씩이므로 총 $2\times6=12$(개)이다. 따라서 구하는 점 P의 개수는
$6+12=18$이다.

417) 200

원의 중심이 이차함수 $y=x^2$의 그래프 위에 있으므로
원의 중심의 좌표를 $(k,\ k^2)$이라 하자. 이 원이 y축에 접하므로 반지름의 길이는 $|k|$이다.
이 원이 직선 $y=\sqrt{3}x-2$에 접하므로 원의 중심 $(k,\ k^2)$에서 직선 $\sqrt{3}x-y-2=0$까지의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.
즉, $\dfrac{|\sqrt{3}k-k^2-2|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}}=|k|$에서
$|\sqrt{3}k-k^2-2|=2|k|$
(ⅰ) $\sqrt{3}k-k^2-2=2k$인 경우
방정식 $k^2+(2-\sqrt{3})k+2=0$의 판별식을 D_1이라 할 때, $D_1=(2-\sqrt{3})^2-8<0$이므로 조건을 만족시키는 실수 k가 존재하지 않는다.
(ⅱ) $\sqrt{3}k-k^2-2=-2k$인 경우
방정식 $k^2+(-2-\sqrt{3})k+2=0$의 판별식을 D_2라 할 때, $D_2=(-2-\sqrt{3})^2-8>0$이므로 두 실근이 존재하고 두 실근의 곱은 2이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 조건을 만족시키는 두 원의 반지름의 길이 $a,\ b$의 곱은 $ab=2$이다.
$\therefore\ 100ab=200$

418) ①

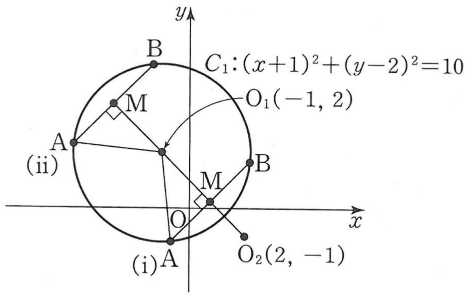
중심이 y축 위에 있고, 곡선 $y=x^2$과 두 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 1)$에서 접하는 원은 다음과 같다.



원과 곡선 $y=x^2$이 두 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 1)$에서 접하므로 각각 두 점 $(1,\ 1)$, $(-1,\ 1)$에서의 원의 접선과 곡선의 접선이 서로 같다.
곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식을
$y=m(x-1)+1$ $(m\neq0)$이라 하면
방정식 $x^2=m(x-1)+1$, 즉 $x^2-mx+m-1=0$이 중근을 가진다. 판별식을 D라 하면
$D=m^2-4m+4=0$에서 $m=2$이다.
즉, 점 $(1,\ 1)$에서의 접선의 방정식은 $y=2x-1$이다.
점 $(1,\ 1)$을 지나면서 직선 $y=2x-1$과 수직인 직선의 방정식은 $y=-\dfrac{1}{2}(x-1)+1$
이 직선이 y축과 만나는 점은 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$이고
이 점이 구하는 원의 중심이므로 원의 반지름의 길이는 원의 중심 $\left(0,\ \dfrac{3}{2}\right)$과 원 위의 점 $(1,\ 1)$ 사이의 거리와 같다.
즉, $\sqrt{1^2+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{5}{4}}$이다.
따라서 원의 넓이는 $\dfrac{5}{4}\pi$이다.

419) ④

$C_1:(x+1)^2+(y-2)^2=10$
$C_2:(x-2)^2+(y+1)^2=k$ $\cdots\cdots$ ㉠
라 하고, 두 원의 중심을 각각 $\mathrm{O_1}(-1,\ 2)$, $\mathrm{O_2}(2,\ -1)$이라 하자. 두 원이 만나는 두 점 A, B에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}}$의 중점을 M이라 하면 점 M은 직선 $\mathrm{O_1O_2}$ 위에 존재하므로 원 C_1 위에 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$가 되는 경우를 나타내면 다음과 같은 두 가지 경우가 생긴다.



$\overline{AB}=2\sqrt{2}$ 에서 $\overline{AM}=\sqrt{2}$

원 C_1의 반지름의 길이는 $\overline{O_1A}=\sqrt{10}$

직각삼각형 AMO_1에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{O_1M}=\sqrt{\sqrt{10}^2-\sqrt{2}^2}=2\sqrt{2}$

또한 두 원의 중심 사이의 거리는

$\overline{O_1O_2}=\sqrt{3^2+(-3)^2}=3\sqrt{2}$

한편, ㉠에서 k의 값은 원 C_2의 반지름의 길이의 제곱과 같으므로

직각삼각형 AMO_2에서 피타고라스 정리에 의하여

$k=\overline{AO_2}^2=\overline{AM}^2+\overline{MO_2}^2=2+\overline{MO_2}^2$

(ⅰ) $\overline{MO_2}=\overline{O_1O_2}-\overline{O_1M}=3\sqrt{2}-2\sqrt{2}=\sqrt{2}$ 이므로

$k=2+2=4$

(ⅱ) $\overline{MO_2}=\overline{O_1O_2}+\overline{O_1M}=3\sqrt{2}+2\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ 이므로

$k=2+50=52$

(ⅰ), (ⅱ)에서 모든 실수 k의 값의 합은

$4+52=56$ 이다.

420) ③

P 지점을 좌표평면 위의 원점, 동쪽 방향, 북쪽 방향을 각각 x축, y축의 양의 방향으로 놓으면 레이더 화면은

원 $x^2+y^2=1300$의 내부를 나타낸다.

배가 서 있던 지점, 즉 P 지점에서 서쪽으로 40km 떨어진 지점을 점 $(-40,\ 0)$이라 하면

배가 이동하는 경로를 나타내는 직선의 기울기는

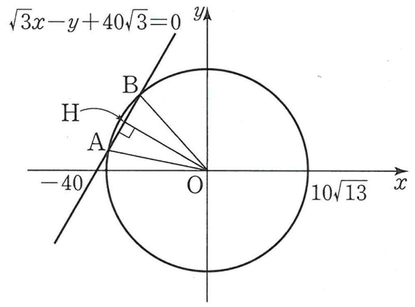
$\tan 60°=\sqrt{3}$ 이다.

따라서 배는 직선 $y=\sqrt{3}(x+40)$,

즉 직선 $\sqrt{3}x-y+40\sqrt{3}=0$을 따라 움직인다.

다음과 같이 원 $x^2+y^2=1300$과

직선 $\sqrt{3}x-y+40\sqrt{3}=0$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하면 배가 레이더 화면에 나타나면서 이동한 거리는 $\overline{AB}$이다. 원의 중심 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하자.



$\overline{AO}=10\sqrt{13}$ 이고, 점과 직선 사이의 거리에 의하여

$\overline{OH}=\dfrac{|40\sqrt{3}|}{\sqrt{\sqrt{3}^2+(-1)^2}}=20\sqrt{3}$ 이므로

직각삼각형 AHO에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}=\sqrt{(10\sqrt{13})^2-(20\sqrt{3})^2}=\sqrt{1300-1200}=10$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=20$

따라서 배가 레이더 화면에 나타나며 이동한 거리가 20km이고, 배의 속력은 시속 4km이므로

배가 레이더 화면에 보였다가 사라질 때까지 걸리는 시간은

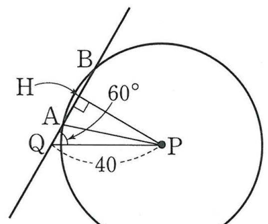
$\dfrac{20}{4}=5$(시간)이다.

<다른풀이>

레이더가 나타내는 화면은 P 지점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $10\sqrt{13}$ 인 원의 내부이다.

P 지점으로부터 서쪽으로 40만큼 떨어진 지점이 배가 서 있던 지점이고, 이 지점을 점 Q라 하자.

배의 진행 방향은 동쪽 방향과 $60°$를 이루므로 배가 이동하는 경로를 나타내면 다음과 같다.



배가 이동하는 경로를 나타내는 직선이 원과 만나는 두 점을 A, B라 하고, 점 P에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 하면 직각삼각형 PHQ에서 $\angle PQH=60°$ 이므로

$\overline{PH}=20\sqrt{3}$ 이고, $\overline{PA}=10\sqrt{13}$ 이므로

직각삼각형 PHA에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{AH}=\sqrt{(10\sqrt{13})^2-(20\sqrt{3})^2}=10$

$\therefore\ \overline{AB}=2\overline{AH}=20$

따라서 배가 레이더 화면에 나타내며 이동한 거리가 20km이고, 배의 속력은 시속 4km이므로

배가 레이더 화면에 보였다가 사라질 때까지 걸리는 시간은

$\dfrac{20}{4}=5$(시간)이다.

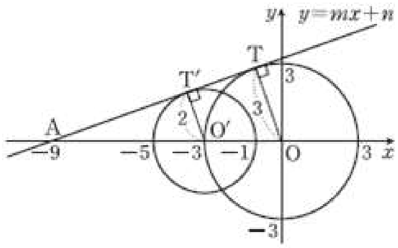
421) $(1,\ 1)$, $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$, $(-3,\ 3)$, $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

x축, y축에 모두 접하는 원의 중심은 $(a,\ a)$ 또는 $(a,\ -a)$이고, 이때 원의 반지름의 길이는 $|a|$이다. (단, a는 실수)
(ⅰ) 중심이 $(a,\ a)$인 경우
이 원이 직선 $3x-4y+6=0$에 접하므로 원의 중심 $(a,\ a)$와 직선 $3x-4y+6=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.
즉, $\frac{|3a-4a+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|$에서
$|-a+6|=5|a|$
$-a+6=5a$일 때, $a=1$이므로 중심은 $(1,\ 1)$이다.
$-a+6=-5a$일 때, $a=-\frac{3}{2}$이므로 중심은 $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$이다.
(ⅱ) 중심이 $(a,\ -a)$인 경우
이 원이 직선 $3x-4y+6=0$에 접하므로 원의 중심 $(a,\ -a)$와 직선 $3x-4y+6=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같다.
즉, $\frac{|3a+4a+6|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=|a|$에서
$|7a+6|=5|a|$
$7a+6=5a$일 때, $a=-3$이므로 중심은 $(-3,\ 3)$이다.
$7a+6=-5a$일 때, $a=-\frac{1}{2}$이므로 중심은 $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.
(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 원의 중심의 좌표는
$(1,\ 1)$, $\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$, $(-3,\ 3)$, $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$이다.

422) $2\sqrt{5}\pi$

423) 풀이참조

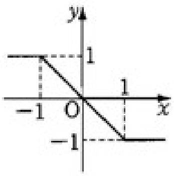
두 원의 중심을 O, O′이라 할 때, 주어진 직선과 두 원 O, O′이 만나는 점을 각각 T, T′이라 하고 x축과 만나는 점을 A라 하면 삼각형 AO′T′과 삼각형 AOT는 닮음이고, 닮음비는 $2:3$이다.



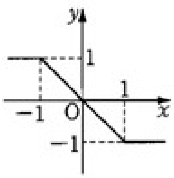
따라서 점 A의 좌표는 $(-9,\ 0)$이므로
$-9m+n=0$, $n=9m$
원점과 직선 $mx-y+n=0$ 사이의 거리는 3이므로
$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$, $\frac{|9m|}{\sqrt{m^2+1}}=3$, $m^2=\frac{1}{8}$
따라서 구하는 값은
$32mn=32\times 9m^2=36$

424) 풀이참조

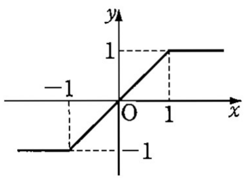
(1) $y=f(-x)$



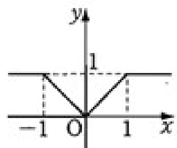
(2) $-y=f(x)$



(3) $-y=f(-x)$



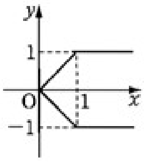
(4) $y=f(|x|)$
$x\geq 0$일 때, $y=f(x)$,
$x<0$일 때, $y=f(-x)$



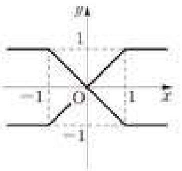
(5) $|y|=f(x)$

$y \geq 0$일 때, $y=f(x)$

$y<0$일 때, $-y=f(x)$

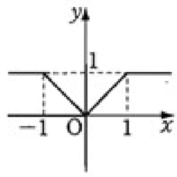


(6) $|y|=f(|x|)$



(7) $y=|f(x)|$

$y=|f(x)|$ 꼴의 그래프를 그리는 방법에 따른다.

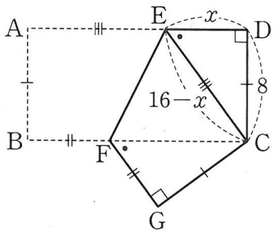


425) 64

다음과 같이 점 A와 점 C가 만나도록 접었을 때 접은 선이 선분 AD와 만나는 점을 E, 선분 BC와 만나는 점을 F라 하고, 점 B가 옮겨지는 점을 G라 하면

$\overline{AE}=\overline{CE}$, $\overline{BF}=\overline{GF}$, $\overline{AB}=\overline{CG}$이고,

두 삼각형 CGF, CDE는 합동이다.



$\overline{DE}=x$라 하면 $\overline{AE}=16-x$이고, $\overline{CD}=8$이므로

직각삼각형 CDE에서 피타고라스 정리에 의하여

$x^2+8^2=(16-x)^2$

$64=-32x+256 \qquad \therefore\ x=6$

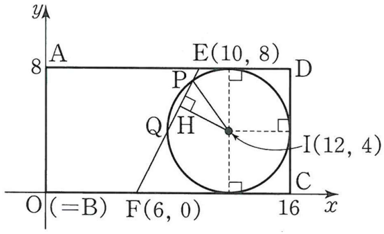
$\therefore\ \overline{AE}=10$, $\overline{BF}=\overline{GF}=\overline{DE}=6$

점 B가 원점, $A(0,\ 8)$, $C(16,\ 0)$, $D(16,\ 8)$이 되도록 사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓으면

$E(10,\ 8)$, $F(6,\ 0)$이므로 직선 EF의 방정식은

$y=\dfrac{8-0}{10-6}(x-6)$

$\therefore\ 2x-y-12=0$



한편, 변 BC, CD, DA에 접하는 원은 반지름의 길이가 4이고, 중심이 $(16-4,\ 4)$, 즉 $(12,\ 4)$이다.

원의 중심을 $I(12,\ 4)$라 하고,

점 I에서 선분 PQ에 내린 수선의 발을 H라 하면

점 $I(12,\ 4)$와 직선 EF 사이의 거리에 의하여

$\overline{IH}=\dfrac{|24-4-12|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

$\overline{PI}=4$이므로 직각삼각형 PHI에서 피타고라스 정리에 의하여

$\overline{PH}=\sqrt{4^2-\left(\dfrac{8}{\sqrt{5}}\right)^2}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ k=\overline{PQ}=2\overline{PH}=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

$\therefore\ 5k^2=64$

426) ⑤

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x)=0$이고, 이를 다시 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x-1)=0$이다. 따라서 방정식 $f(y,\ x-1)=0$이 나타내는 도형은 ⑤와 같다.

<다른풀이>

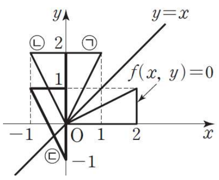
방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 도형의 방정식은 $f(x,\ y-1)=0$이고, 이를 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식은 $f(y,\ x-1)=0$이다.

427) ④

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형이 방정식 $f(y+1,\ -x)=0$이 나타내는 도형이 되기 위해서는 다음과 같이 이동해야 한다.

$$f(x,\ y)=0 \xrightarrow{\text{직선 } y=x\text{에 대하여 대칭이동}} f(y,\ x)=0 \cdots ㉠$$
$$\xrightarrow{y\text{축에 대하여 대칭이동}} f(y,\ -x)=0 \cdots ㉡$$
$$\xrightarrow{y\text{축의 방향으로 }-1\text{만큼 평행이동}} f(y+1,\ -x)=0 \cdots ㉢$$

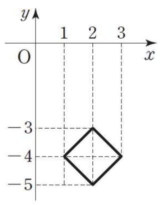
따라서 구하는 도형은 다음 그림의 ㉢과 같다.



428) ㄱ, ㄹ, ㅁ

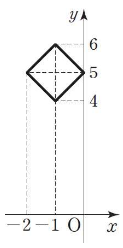
ㄱ. 방정식 $f(x-4,\ y-1)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이나타내는 도형을 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (○)

ㄴ. $f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(-x,\ -y)=0$
$\longrightarrow f(-x,\ -(y+3))=0$
$\longrightarrow f(-x,\ -y-3)=0$



즉, 방정식 $f(-x,\ -y-3)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동한 것이다. (×)

ㄷ. $f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(-y,\ -x)=0$
$\longrightarrow f(-(y-3),\ -x)=0$
$\longrightarrow f(-y+3,\ -x)=0$



즉, 방정식 $f(-y+3,\ -x)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. (×)

ㄹ. $f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(x,\ -y)=0$
$\longrightarrow f(x-4,\ -(y-3))=0$
$\longrightarrow f(x-4,\ -y+3)=0$

즉, 방정식 $f(x-4,\ -y+3)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. (○)

ㅁ. $f(x,\ y)=0 \longrightarrow f(-x,\ y)=0$
$\longrightarrow f(-x,\ y-1)=0$

즉, 방정식 $f(-x,\ y-1)=0$이 나타내는 도형은 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 y축에 대하여 대칭이동한 후, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다. (○)
따라서 도형 B를 나타낼 수 있는 방정식은 ㄱ, ㄹ, ㅁ이다.

429) $y=-3x+3$

직선 l이 점 $\mathrm{A}(2,\ -3)$을 지나므로 직선 l의 기울기를 m이라 하면

$$l : y=m(x-2)-3$$

직선 l을 점 $(1,\ 3)$에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$6-y=m(2-x-2)-3 \quad \therefore\ y=mx+9$$

이것을 다시 x축에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은

$$-y=mx+9 \quad \therefore\ y=-mx-9$$

직선 $y=-mx-9$가 점 $\mathrm{A}(2,\ -3)$을 지나므로
$-3=-2m-9,\ 2m=-6 \qquad \therefore\ m=-3$
따라서 직선 l의 방정식은 $y=-3(x-2)-3$,
즉 $y=-3x+3$이다.

430) ②
점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$을 직선 $y=-2x+2$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A'}(\mathrm{a},\ \mathrm{b})$라 하면
(ⅰ) 선분 $\mathrm{AA'}$의 중점 $\left(\dfrac{a+2}{2},\ \dfrac{b+3}{2}\right)$이 직선 $y=-2x+2$ 위에 있으므로

$$\frac{b+3}{2}=-2\times\frac{a+2}{2}+2 \qquad b+3=-2a-4+4$$
$$\therefore\ 2a+b+3=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

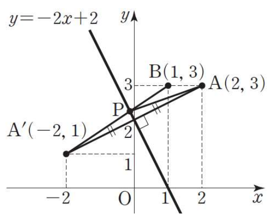
(ⅱ) 직선 $\mathrm{AA'}$이 직선 $y=-2x+2$와 수직이므로

$$\frac{b-3}{a-2}=\frac{1}{2},\ a-2=2b-6$$
$$\therefore\ a-2b+4=0 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2,\ b=1$

$$\therefore\ \mathrm{A'}(-2,\ 1)$$

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{PA'}}+\overline{\mathrm{PB}}\geq\overline{\mathrm{A'B}}$
에서 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$이므로 오른쪽 그림과 같이 점 P는 직선 $y=-2x+2$와 직선 $\mathrm{A'B}$의 교점이다.



두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(1,\ 3)$을 지나는 직선의 방정식은

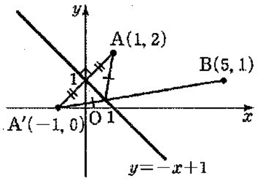
$$y-3=\frac{3-1}{1-(-2)}(x-1) \qquad \therefore\ y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$$

$y=-2x+2$, $y=\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}$을 연립하여 풀면

$x=-\frac{1}{8}$, $y=\frac{9}{4}$

따라서 조건을 만족하는 점 P의 좌표는 $\left(-\frac{1}{8},\ \frac{9}{4}\right)$이다.

431) ④



오른쪽 그림과 같이 벽면과 바닥이 만나는 점을 원점으로 하고 바닥을 x축, 벽면을 y축으로 하여 주어진 그림을 좌표평면 위에 나타내면 $A(1,2)$, $B(5,1)$이고, 거울이 벽면과 만나는 점은 $(0,1)$, 바닥과 만나는 점은 $(1,0)$이므로 거울을 포함하는 직선의 방정식은 $y=-x+1$ 점 $A(1,2)$를 직선 $y=-x+1$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a,b)$라 하면 빛은 항상 최단거리로 움직이므로 빛이 점 A에서 출발하여 거울에 반사된 후 점 B까지 움직인 거리는 점 A'에서 출발하여 점 B까지 움직인 거리와 같다.

(ⅰ) 선분 AA'의 중점 $(\frac{a+1}{2}, \frac{b+2}{2})$가

직선 $y=-x+1$

위에 있으므로 $\frac{b+2}{2}=-\frac{a+1}{2}+1$

$\therefore a+b+1=0$ ⋯⋯ ㉠

(ⅱ) 선분 AA'이 직선 $y=-x+1$과 수직이므로 $\frac{b-2}{a-1}=1$

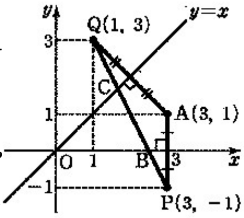
$\therefore a-b+1=0$ ⋯⋯ ㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면 $a=-1, b=0$ $\therefore A'(-1,0)$

따라서 빛이 움직인 거리는

$$\overline{A'B}=\sqrt{[5-(-1)]^2+(1-0)^2}$$
$$=\sqrt{36+1}=\sqrt{37}\ (m)$$

432) ⑤



오른쪽 그림과 같이 지점 O를 좌표평면 위의 원점, 직선도로 l을 x축으로 정하면 직선도로 m은 직선 $y=x$, 정류소 A의 좌표는 $(3,1)$이다. 또한, 점 A를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P라하면 점 P의 좌표는 $(3,-1)$이고, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 Q라 하면 점 Q의 좌표는 $(1,3)$이다.

$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=\overline{PB}+\overline{BC}+\overline{CQ}\geq\overline{PQ}$이므로 만들려고 하는 도로의 길이의 최솟값은 $\overline{PQ}$이고, 두 점 B, C가 직선 PQ 위에 있을 때 최소이다.

두 점 $P(3,-1), Q(1,3)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=-2(x-1)$ $\therefore y=-2x+5$

이때, 직선 $y=-2x+5$와 x축과의 교점은 $B(\frac{5}{2},0)$이고,

직선 $y=x$와의 교점은 $C(\frac{5}{3},\frac{5}{3})$이다.

따라서 두 정류소 B와 C 사이의 거리는

$$\overline{BC}=\sqrt{(\frac{5}{3}-\frac{5}{2})^2+(\frac{5}{3}-0)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{6}\ (km)$$

433) ②

주어진 평행이동에 의하여 점 $\mathrm{A}(a,\ 3)$이 $\mathrm{A}'(4,\ 1)$로, 점 $\mathrm{B}(-2,\ b)$가 $\mathrm{B}'(1,\ 5)$로 각각 옮겨졌으므로 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이다. 즉, $a+3=4$, $b-2=5$이므로 $a=1$, $b=7$

따라서 점 $(1,\ 7)$을 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 $(4,\ 5)$이다.

434) ③

원 $x^2+y^2=1$을 x축의 방향으로 a만큼 평행이동한 원의 방정식은

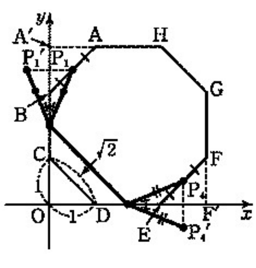
$$(x-a)^2+y^2=1$$

이때, 위의 원이 직선 $3x-4y-4=0$에 접하려면 원의 중심 $(a,\ 0)$과 직선 $3x-4y-4=0$ 사이의 거리가 원의 반지름의 길이와 같아야 하므로

$$\frac{|3a-4|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=1,\ |3a-4|=5$$

$$3a-4=\pm5 \qquad \therefore\ a=3\ (\because\ a>0)$$

435) $2+2\sqrt{2}$



오른쪽 그림과 같이 정팔각형 $ABCDEFGH$의 변 DE를 x축, 변 BC를 y축 위에 놓아 주어진 정팔각형을 좌표평면 위에 놓자. 정팔각형의 한 변의 길이가 $\sqrt{2}$이므로 $\overline{CD}=\sqrt{2}$에서 $\overline{OC}=\overline{OD}=1$ $\therefore C(0,1)$, $D(1,0)$

$E(1+\sqrt{2},\,0)$이고, 점 F에서 x축에 내린 수선의 발을 F'이라 하면 $\overline{EF}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{EF'}=1$에서 $F'(2+\sqrt{2},\,0)$

점 F의 x좌표는 점 F'의 x좌표, y좌표는 점 C의 y좌표와 같으므로 $F(2+\sqrt{2},\,1)$ $B(0,\,1+\sqrt{2})$이고, 점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 A'이라 하면 $\overline{AB}=\sqrt{2}$이므로 $\overline{A'B}=1$에서 $A'(0,\,2+\sqrt{2})$

점 A의 x좌표는 점 D의 x좌표, 점 A의 y좌표는 점 A'의 y좌표와 같으므로 $A(1,\,2+\sqrt{2})$ 변 AB의 중점 P_1과 변 EF의 중점 P_4는 $P_1(\frac{1}{2},\,\frac{3+2\sqrt{2}}{2})$, $P_4(\frac{3+2\sqrt{2}}{2},\,\frac{1}{2})$ 점 P_1에서 두 변 BC와 DE를 거쳐 점 P_4에 이르는 최단거리는 점 P_1에서 y축, x축을 거쳐 점 P_4에 이르는 최단거리와 같고, 이는 점 P_1을 y축에 대하여 대칭이동한 점을 P_1', 점 P_4를 x축에 대하여 대칭이동한 점을 P_4'이라 할 때, 두 점 P_1'과 P_4' 사이의 최단거리와 같다.

따라서 $P_1'(-\frac{1}{2},\,\frac{3+2\sqrt{2}}{2})$, $P_4'(\frac{3+2\sqrt{2}}{2},\,-\frac{1}{2})$이므로

구하는 최단거리는

$$\begin{aligned}\overline{P_1'P_4'} &= \sqrt{(\frac{3+2\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2})^2+(-\frac{1}{2}-\frac{3+2\sqrt{2}}{2})^2}\\ &= \sqrt{2(2+\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}(2+\sqrt{2})\\ &= 2+2\sqrt{2}\end{aligned}$$

436) ②

점 C는 포물선 $y=x^2$ 위의 점이므로 점 C의 x좌표를 $a\,(a>0)$라 하면 $\mathrm{C}(a,\ a^2)$

사각형 ABCD가 정사각형이고, 두 점 B, D가

직선 $y=x$ 위의 점이므로 $\mathrm{B}(a^2,\ a^2)$, $\mathrm{D}(a,\ a)$

점 A는 점 C와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $\mathrm{A}(a^2,\ a)$

점 A가 포물선 $y=-(x-1)^2+1$ 위의 점이므로

$$a=-(a^2-1)^2+1,\ \ a^4-2a^2+a=0$$

$$\therefore\ a(a-1)(a^2+a-1)=0 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

그런데 두점 B, D는 서로 다른 점이므로

$a^2\neq a$에서 $a(a-1)\neq 0$

즉, ㉠에서 $a^2+a-1=0$이므로

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\ (\because\ a>0)$$

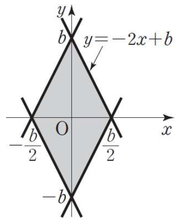
따라서 정사각형 ABCD의 한변의 길이는

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}&=a-a^2=a-(-a+1)\\ &=2a-1=(-1+\sqrt{5})-1\\ &=\sqrt{5}-2\end{aligned}$$

437) 1

f는 y축에 대한 대칭이동, g는 x축에 대한 대칭이동, h는 원점에 대한 대칭이동이다.

따라서 직선 $y=-2x+b\,(b>0)$와 이 직선을 y축, x축, 원점에 대하여 각각 대칭이동시켰을 때 생기는 모든 직선으로 둘러싸인 도형은 오른쪽 그림과 같다. 이때, 이 도형의 넓이가 1이므로



$4\times\frac{1}{2}\times\frac{b}{2}\times b=1$에서 $b^2=1$

$$\therefore\ b=1\ (\because\ b>0)$$

438) ①

점 A의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 점 A를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{P}(b,\ a)$, 점 $(1,\ -2)$에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{Q}(2-a,\ -4-b)$이다.

이때, 점 P와 점 Q가 y축에 대하여 대칭이므로

$$-b=2-a,\ \ a=-4-b$$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=-3$

따라서 구하는 점 A의 좌표는 $(-1,\ -3)$이다.

439) -2

포물선 $y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3$을 점 $(-1,\ a)$에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$2a-y=(-2-x-2)^2-3$$

$$\therefore\ y=-(x+4)^2+2a+3\ \cdots\cdots ㉠$$

이때, 포물선 ㉠은 위로 볼록하고, 꼭짓점의 좌표가 $(-4,\ 2a+3)$이므로 x축과 만나지 않으려면

$$2a+3<0 \qquad\qquad \therefore\ a<-\frac{3}{2}$$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -2이다.

<다른풀이>

포물선 $y=x^2-4x+1$을 점 $(-1,\ a)$에 대하여 대칭이동한 포물선의 방정식은

$$2a-y=(-2-x)^2-4(-2-x)+1$$

$$\therefore\ y=-x^2-8x+2a-13$$

위의 포물선이 x축과 만나지 않으려면 이차방정식 $-x^2-8x+2a-13=0$, 즉 $x^2+8x-2a+13=0$의

판별식을 D라 할때, $\frac{D}{4}=16+2a-13<0$에서

$2a<-3 \therefore a<-\frac{3}{2}$

따라서 구하는 정수 a의 최댓값은 -2이다.

440) ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 점 $\mathrm{A}(3,\ 2)$의 점 $\mathrm{P}(6,\ 0)$에 대한 대칭점 B의 좌표를 $(a,\ b)$라 하면 선분 AB의 중점이 P이므로

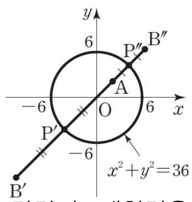
$\frac{a+3}{2}=6,\ \frac{b+2}{2}=0 \qquad \therefore\ a=9,\ b=-2$

즉, 점 B의 좌표는 $(9,\ -2)$이다. (참)

ㄴ. 선분 AB의 길이가 최대가 되려면 두 점 A, P 사이의 거리가 최대가 되어야 하므로 점 P는 점 A를 지나는 원의 지름의 양 끝점 중에서 점 A와 먼 곳에 있어야 한다. 이때, 점 $\mathrm{A}(3,\ 4)$에 대하여

$\overline{\mathrm{OA}}+\overline{\mathrm{OP}}=\sqrt{3^2+4^2}+6=11$이므로 선분 AB의 길이의 최댓값은 $\overline{\mathrm{AB}}=2\overline{\mathrm{AP}}=2\times 11=22$ (참)

ㄷ. 오른쪽 그림과 같이 점 A를 지나는 원의 지름의 양 끝점을 각각 P', P''이라 할 때, 선분 AB의 길이가 최대일 때의 점 P의 위치는 P', 최소일 때의 점 P의 위치는 P''이다.



이때, 점 A의 두 점 P', P''에 대한 각각의 대칭점을 B', B''이라 하고, $\overline{\mathrm{OA}}=l$이라 하면

$\overline{\mathrm{AB'}}=2(6+l),\ \overline{\mathrm{AB''}}=2(6-l)$

따라서 선분 AB의 길이의 최댓값과 최솟값의 합은 항상 $\overline{\mathrm{AB'}}+\overline{\mathrm{AB''}}=2(6+l)+2(6-l)=24$로 일정하다. (참)

그러므로 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

441) 17

원의 방정식 $x^2+y^2-4x-8y=0$을 표준형으로 바꾸면 $(x-2)^2+(y-4)^2=20$ 위의 원과 원 $x^2+y^2=c$의 중심을 각각 C, O라 하면 $C(2,4),\ O(0,0)$이고, 점하면 C의 직선 $y=ax+b$에 대한 대칭점은 O이다.

(ⅰ) 선분 CO의 중심 $(1,2)$는 직선 $y=ax+b$ 위에 있으므로 $2=a+b$ …… ㉠

(ⅱ) 직선 CO의 직선 $y=ax+b$는 수직이므로

$\frac{4-0}{2-0}=-\frac{1}{a} \therefore a=-\frac{1}{2}$ …… ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면 $b=\frac{5}{2}$

한편, 대칭 이동하여도 원의 반지름의 길이는 변하지 않으므로 $c=20 \quad \therefore a-b+c=-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+20=17$

442) ②

두 점 $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2)$가 포물선 $y=x^2+2x-3$ 위에 있으므로

$y_1=x_1^2+2x_1-3,\ y_2=x_2^2+2x_2-3$ …… ㉠

또한, 두 점 A, B가 직선 $x+y=1$에 대하여 대칭이므로 직선 AB는 직선 $x+y=1$, 즉 $y=-x+1$과 수직이다. 즉, 직선 AB의 기울기가 1이므로 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=1$

$\frac{(x_2{}^2+2x_2-3)-(x_1{}^2+2x_1-3)}{x_2-x_1}=1\ (\because ㉠)$

$(x_2{}^2+2x_2-3)-(x_1{}^2+2x_1-3)=x_2-x_1$

$(x_2{}^2-x_1{}^2)+(x_2-x_1)=0$

$(x_2-x_1)(x_2+x_1+1)=0$

$\therefore x_1+x_2=-1\ (\because x_1\neq x_2)$

443) $\sqrt{34}$

포물선 $y=x^2-4x+2$ 위의 서로 다른 두 점을

$A(a,b), B(c,d)$라 하면 $b=a^2-4a+2$ …… ㉠

$d=c^2-4c+2$ …… ㉡

㉠$-$㉡을 하면 $b-d=(a^2-c^2)-4(a-c)$

$\therefore b-d=(a-c)(a+c-4)$

또한, 두 점 A, B는 직선 $y=x+1$에 대하여 대칭이므로 직선 AB는 직선 $y=x+1$과 수직이다.

즉, $\frac{d-b}{c-a}=-1$에서 $b-d=c-a$

이것을 ㉢에 대입하면 $c-a=(a-c)(a+c-4)$이므로

$-1=a+c-4 \quad \therefore a+c=3$ …… ㉣

한편, ㉠$+$㉡을 하면 $b+d=a^2+c^2-4(a+c)+4$이고,

선분AB의 중점 $(\frac{a+c}{2},\ \frac{b+d}{2})$가 직선 $y=x+1$ 위에 있으므로 $\frac{b+d}{2}=\frac{a+c}{2}+1$에서 $b+d=a+c+2$

즉, $a+c+2=a^2+c^2-4(a+c)+4$이므로

$a+c+2=(a+c)^2-2ac-4(a+c)+4$

$2ac=(a+c)^2-5(a+c)+2$
위의 식에 ㉣을 대입하면 $2ac=9-15+2=-4$
$\therefore ac=-2$ ⋯⋯ ㉤
㉣, ㉤에서
$(a-c)^2=(a+c)^2-4ac=9-4\times(-2)=17$
따라서 두 점 A, B 사이의 거리는

$$\begin{aligned}\overline{AB}&=\sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}\\&=\sqrt{2(a-c)^2}\quad(\because b-d=c-a)\\&=\sqrt{2\times17}=\sqrt{34}\end{aligned}$$

444) 6

조건 (가)에 의하여 $a>0$이고 $b<0$
조건 (나)에 의하여 복소수 z는 순허수이므로
$a+b-2=0$이고 $a-b=4$ 또는 $a-b=-4$
그런데 $a-b>0$이므로 $a-b=4$
$a+b-2=0$, $a-b=4$를 연립하여 풀면

$a=3$, $b=-1$

$\therefore$ $(x, y) \longrightarrow (x+3, y-1)$

위의 평행이동에 의하여 원 $x^2+y^2=10$이 옮겨진 원의 방정식은

$(x-3)^2+(y+1)^2=10$ ⋯⋯ ㉠

원 ㉠이 x축에 의하여 잘리는 현의 길이는 원 ㉠과 x축이 만나는 두 점 사이의 거리와 같으므로 ㉠에 $y=0$을 대입하면

$(x-3)^2=9$, $x-3=\pm3$

$\therefore$ $x=6$ 또는 $x=0$

따라서 구하는 현의 길이는 $6-0=6$이다.

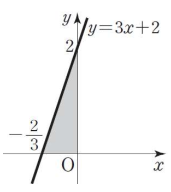
445) ④

직선 $x-3y+2=0$을 원점에 대하여 대칭이동한 직선의 방정식은 $-x-3\times(-y)+2=0$ $\quad\therefore$ $x-3y-2=0$
이것을 다시 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 직선 l의 방정식은

$y-3x-2=0$ $\quad\therefore$ $l: y=3x+2$

따라서 직선 $l: y=3x+2$는 오른쪽 그림과 같으므로 x축, y축 및 직선 l로 둘러싸인 삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times2=\frac{2}{3}$

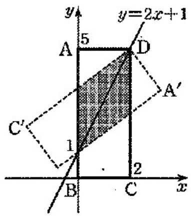


446) ③

점 $A(0, 5)$의 직선 $y=2x+1$에 대한 대칭점을 $A'(a, b)$라 하면
(i) 선분 AA'의 중점 $(\frac{a}{2}, \frac{b+5}{2})$가 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로

$\frac{b+5}{2}=2\times\frac{a}{2}+1$

$\therefore b=2a-3$ ⋯⋯ ㉠
(ii) 직선 AA'과 직선 $y=2x+1$이 수직이므로 $\frac{b-5}{a-0}=-\frac{1}{2}$
$\therefore 2b-10=-a$ ⋯⋯ ㉡
㉠,㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{16}{5}, b=\frac{17}{5}$
$\therefore A'(\frac{16}{5}, \frac{17}{5})$ 오른쪽 그림에서



직선 $A'D$의 기울기는 $\dfrac{\frac{17}{5}-5}{\frac{16}{5}-2}=-\frac{4}{3}$
점 C의 직선 $y=2x+1$에 대한 대칭점을 C'이라 하면 직선 $C'D$가 직선 $A'D$와 수직이므로 직선 $C'D$의 방정식은 $y-5=\frac{3}{4}(x-2)$
$\therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$ 따라서 직선 $C'D$의 y절편이 $\frac{7}{2}$이므로 두 직사각형의 내부의 공통부분의 넓이는
$(\frac{7}{2}-1)\times2=5$

[다른 풀이1]
점 $A'(\frac{16}{5}, \frac{17}{5})$과 직선 $y=2x+1$의 y축과 만나는 점 $(0, 1)$을 지나는 직선의 방정식은
$y-1=\dfrac{\frac{17}{5}-1}{\frac{16}{5}-0}(x-0)$ $\therefore y=\frac{3}{4}x+1$ 위 직선의 방정식에 $x=2$를 대입하면 $y=\frac{5}{2}$이므로 두 직선 $y=\frac{3}{4}x+1$, $x=2$의 교점의 좌표는 $(2, \frac{5}{2})$이다. 두 직사각형의 내부의 공통부분은 평행사변형이므로 구하는 넓이는
$(5-\frac{5}{2})\times2=5$

[다른 풀이2]
점 $C(2, 0)$의 직선 $y=2x+1$에 대한 대칭점을 $C'(a, b)$라 하면
(i) 선분 CC'의 중점 $(\frac{a+2}{2}, \frac{b}{2})$가 직선 $y=2x+1$ 위에 있으므로 $\frac{b}{2}=2\times\frac{a+2}{2}+1$

$\therefore b=2a+6$ ⋯⋯ ㉠

(ii) 직선 CC'과 직선 $y=2x+1$이 수직이므로

$$\frac{b}{a-2}=-\frac{1}{2}$$

$\therefore -2b=a-2$ ⋯⋯ ㉡

㉠,㉡을 연립하여 풀면 $a=-2, b=2$ $\therefore C'(-2,2)$

따라서 직선 $C'D$의 방정식은

$$y-2=\frac{5-2}{2-(-2)}(x+2) \quad \therefore y=\frac{3}{4}x+\frac{7}{2}$$

447) ②

448) ④

449) 25

450) ③

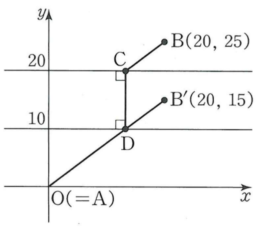
건물 A의 위치가 점 A(0, 0), 도로의 위, 아래 경계선이 각각 직선 $y=10$, $y=20$이 되도록 좌표평면 위에 놓고, 건물 B의 위치를 점 B라 하면 점 B의 y좌표는 $10+10+5=25$이므로

B(b, 25)$(b>0)$이라 하자.

$\overline{AB}=5\sqrt{41}$이므로 $\sqrt{b^2+25^2}=5\sqrt{41}$에서

$b^2+25^2=25\times41$, $b^2=25\times16=20^2$

$\therefore\ b=20$ ($\because\ b>0$)



횡단보도가 도로의 경계선과 만나는 두 점을 각각 C, D라 하면 횡단보도는 도로와 수직이므로 $\overline{CD}=10$이다.

이때, 건물 A에서 이 횡단보도를 거쳐 건물 B로 이동하는 거리는 $\overline{AD}+\overline{DC}+\overline{BC}=\overline{AD}+10+\overline{BC}$ ⋯⋯㉠

이므로 $\overline{AD}+\overline{BC}$가 최소일 때 최솟값을 갖는다.

선분 BC를 점 C가 점 D로 옮겨지도록 평행이동할 때, 즉 y축의 방향으로 -10만큼 평행이동할 때, 점 B(20, 25)가 이동되는 점을 B′이라 하면

B′(20, 15)

이때, $\overline{BC}=\overline{B'D}$이므로

$\overline{AD}+\overline{BC}=\overline{AD}+\overline{B'D}$

세 점 A, D, B′이 일직선 위에 있을 때

이 값이 최소이므로

$\overline{AD}+\overline{BD'}\geq\overline{AB'}$

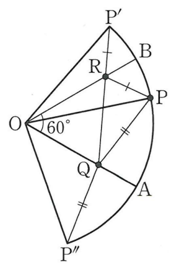
$=\sqrt{20^2+15^2}=25$

따라서 ㉠에서 구하는 최솟값은

$25+10=35(\text{m})$

451) ④

다음과 같이 점 P를 직선 OB에 대하여 대칭이동한 점을 P′, 직선 OA에 대하여 대칭이동한 점을 P″이라 하자.



$\overline{PR}=\overline{P'R}$, $\overline{PQ}=\overline{P''Q}$이므로

삼각형 PQR의 둘레의 길이는

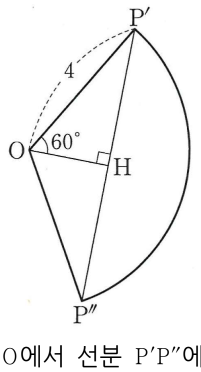
$\overline{PQ}+\overline{QR}+\overline{RP}=\overline{P''Q}+\overline{QR}+\overline{RP'}$이다.

네 점 P′, R, Q, P″이 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이므로

$\overline{P''Q}+\overline{QR}+\overline{RP'}\geq\overline{P'P''}$

이때, $\angle P'OB=\angle POB$, $\angle POA=\angle P''OA$이므로

$\angle P'OP''=2(\angle POB+\angle POA)=120^\circ$



점 O에서 선분 P′P″에 내린 수선의 발을 H라 할 때,

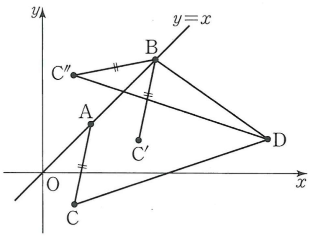
$\angle P'OH=60^\circ$, $\overline{OP'}=4$이므로 $\overline{P'H}=2\sqrt{3}$

$\therefore\ \overline{P'P''}=2\times\overline{P'H}=4\sqrt{3}$

따라서 구하는 최솟값은 $4\sqrt{3}$이다.

452) ③

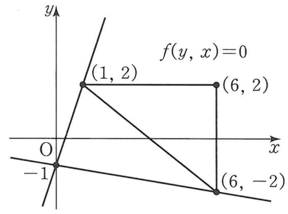
두 점 A, B의 좌표를 각각
$(a,\ a)$, $(b,\ b)$ $(b>a)$라 하면
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(b-a)^2+(b-a)^2}$
$=\sqrt{2}\,|\,b-a\,|=2\sqrt{2}$
에서 $b-a=2(\because\ b>a)$이므로 $b=a+2$
즉, 점 A(a, a)에 대하여 $\mathrm{B}(a+2,\ a+2)$이다.
또한 사각형 ACDB에서 $\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{2}$,
$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{6^2+2^2}=2\sqrt{10}$ 으로 각각 일정하므로 사각형의 둘레의 길이는 $\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}$가
최소일 때 최솟값을 갖는다.



선분 AC를 점 A(a, a)가 점 $\mathrm{B}(a+2,\ a+2)$로 옮겨지도록 평행이동하면 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하는 것과 같으므로 점 $\mathrm{C}(1,\ -1)$이 이동되는 점을 C′이라 하면 $\mathrm{C}'(3,\ 1)$이다.
또한 점 C′을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점을 C″이라 하면 $\mathrm{C}''(1,\ 3)$이다.
$\overline{\mathrm{AC}}+\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC'}}+\overline{\mathrm{BD}}=\overline{\mathrm{BC''}}+\overline{\mathrm{BD}}$이고, 세 점 B, C″, D가 일직선 위에 있을 때 이 값이 최소이므로
$\overline{\mathrm{BC''}}+\overline{\mathrm{BD}}\geq\overline{\mathrm{C''D}}=\sqrt{6^2+(-2)^2}=2\sqrt{10}$
따라서 사각형 ACDB의 둘레의 길이의 최솟값은
$2\sqrt{2}+2\sqrt{10}+2\sqrt{10}=2\sqrt{2}+4\sqrt{10}$이다.

453) ②

도형 $f(y,\ x)=0$은 도형 $f(x,\ y)=0$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 것이다.
세 점 $(-2,\ 6)$, $(2,\ 1)$, $(2,\ 6)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 각각 $(6,\ -2)$, $(1,\ 2)$, $(6,\ 2)$이므로
도형 $f(y,\ x)=0$은 이 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이다. 즉, 다음과 같다.



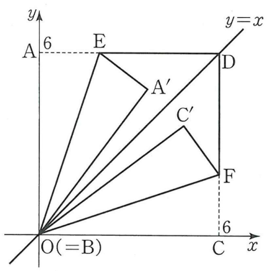
$\dfrac{3(b+1)}{a}=m$ (m은 실수)라 하면

$3(b+1)=ma \qquad \therefore\ b=\dfrac{m}{3}a-1$

따라서 점 P(a, b)는 직선 $y=\dfrac{m}{3}x-1$위에 있고,
이 직선은
항상 점 $(0,\ -1)$을 지난다.
직선 $y=\dfrac{m}{3}x-1$이 점 $(1,\ 2)$를 지날 때,
직선의 기울기는 최대이고
이때, $\dfrac{m}{3}=\dfrac{2-(-1)}{1-0}$에서 $m=9$이다.
직선 $y=\dfrac{m}{3}x-1$이 점 $(6,\ -2)$를 지날 때,
직선의 기울기는 최소이고
이때, $\dfrac{m}{3}=\dfrac{-2-(-1)}{6-0}$에서 $m=-\dfrac{1}{2}$이다.
$\therefore\ -\dfrac{1}{2}\leq m\leq 9$
따라서 정수 m은 0, 1, 2, ⋯, 9이고,
$m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 8$일 때 직선이 $f(y,\ x)=0$과 만나는 점이 각각 2개이고, $m=9$일 때 직선이 도형 $f(y,\ x)=0$과 만나는 점이 1개이므로 구하는 점 P의 개수는 $2\times9+1=19$

454) 11

다음과 같이 $\mathrm{A}(0,\ 6)$, $\mathrm{B}(0,\ 0)$, $\mathrm{C}(6,\ 0)$, $\mathrm{D}(6,\ 6)$이 되도록 사각형 ABCD를 좌표평면 위에 놓으면
$\mathrm{E}(2,\ 6)$, $\mathrm{F}(6,\ 2)$



직선 BE의 방정식은 $y=3x$이고, 점 A′은 점 A를 직선 BE에 대하여 대칭이동한 점이므로 직선 BE는 선분 AA′을 수직 이등분한다. A′(a, b)라 하면 직선 AA′이 직선 $y=3x$와 수직이므로
직선 AA′의 기울기는

$\frac{b-6}{a}=-\frac{1}{3}$

$\therefore\ a+3b=18$ ⋯⋯㉠

또한 직선 $y=3x$가 선분 $\mathrm{AA'}$의 중점 $\left(\frac{a}{2},\ \frac{b+6}{2}\right)$을 지나므로

$\frac{b+6}{2}=3\times\frac{a}{2}$

$\therefore\ 3a-b=6$ ⋯⋯㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=\frac{18}{5}$, $b=\frac{24}{5}$이므로

$\mathrm{A'}\left(\frac{18}{5},\ \frac{24}{5}\right)$

한편, 직선 BD의 방정식은 $y=x$이고, 두 점 $\mathrm{A'}$과 $\mathrm{C'}$은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\mathrm{C'}\left(\frac{24}{5},\ \frac{18}{5}\right)$

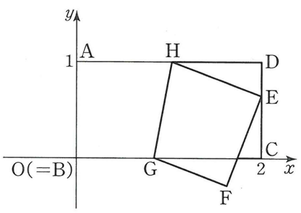
따라서 $\overline{\mathrm{A'C'}}=\sqrt{\left(\frac{6}{5}\right)^2+\left(-\frac{6}{5}\right)^2}=\frac{6}{5}\sqrt{2}$이므로

$p=5,\ q=6$

$\therefore\ p+q=11$

455) $\frac{2}{3}$

점 B가 원점이고, $\mathrm{A}(0,\ 1)$, $\mathrm{C}(2,\ 0)$, $\mathrm{D}(2,\ 1)$이 되도록 좌표평면 위에 직사각형 ABCD를 놓고, 점 E의 좌표를 $(2,\ a)$라 하자.



점 A가 점 E와 직선 GH에 대하여 대칭이므로 직선 GH는 선분 AE의 수직이등분선이다.

직선 AE의 기울기가 $\frac{a-1}{2}$이고, 선분 AE의 중점이 $\left(1,\ \frac{a+1}{2}\right)$이므로 직선 GH의 방정식은

$y=\frac{-2}{a-1}(x-1)+\frac{a+1}{2}$이다.

직선 GH 위의 점 G의 y좌표가 0이므로

$0=\frac{-2}{a-1}(x-1)+\frac{a+1}{2}$에서

$x=-\frac{a+1}{2}\times\frac{a-1}{-2}+1=\frac{a^2+3}{4}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{BG}}=\frac{\mathrm{a}^2+3}{4}$

직선 GH 위의 점 H의 y좌표가 1이므로

$1=\frac{-2}{a-1}(x-1)+\frac{a+1}{2}$에서

$x=\frac{1-a}{2}\times\frac{a-1}{-2}+1=\frac{(a-1)^2}{4}+1$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AH}}=\frac{\mathrm{a}^2-2\mathrm{a}+5}{4}$

이때, 사다리꼴 EFGH의 넓이는 사다리꼴 ABGH의 넓이와 같으므로

$\frac{1}{2}\times(\overline{\mathrm{BG}}+\overline{\mathrm{AH}})\times\overline{\mathrm{AB}}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{a^2+3}{4}+\frac{a^2-2a+5}{4}\right)\times1$

$=\frac{a^2-a+4}{4}=\frac{17}{18}$

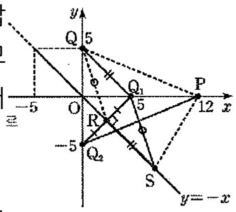
즉, $18(a^2-a+4)=4\times17$에서 $9a^2-9a+2=0$

$(3a-2)(3a-1)=0$

$\therefore\ a=\frac{2}{3}$ 또는 $a=\frac{1}{3}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CE}}=\mathrm{a}=\frac{2}{3}\ \left(\because\ \overline{\mathrm{CE}}>\frac{1}{2}\right)$

456) $26+5\sqrt{2}$



오른쪽 그림과 같이 점 $Q_1(5,0)$을 잡으면 사각형 $QRSQ_1$은 평행사변형이므로 $\overline{RS}=\overline{QQ'}$, $\overline{QR}=\overline{Q_1S}$ 따라서 $\square PQRS$의 둘레의 길이와 같다. 이때, $\overline{QP}$와 $\overline{QQ'}$은 고정 길이이므로 $\overline{Q_1S}+\overline{SP}$의 값이 최소가 되면 $\square PQRS$의 둘레의 길이도 최소가 된다. Q_1의 직선 $y=-x$에 대한 대칭점을 Q_2라 하면 점 Q_2의 좌표는 $(0,\ -5)$이므로

$\overline{Q_1S}+\overline{SP}=\overline{Q_2S}+\overline{SP}\geq\overline{Q_2P}=\sqrt{(12-0)^2+(0+5)^2}=13$

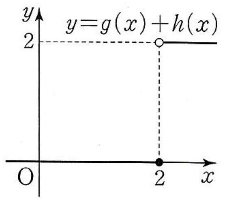
그러므로 $\square PQRS$의 둘레의 길이의 최솟값은

$13+5\sqrt{2}+13=26+5\sqrt{2}$

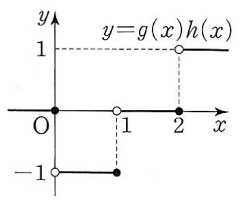
457) 풀이참조

세 함수 $g(x)+h(x)$, $g(x)h(x)$, $|h(x)|$와 그 그래프는 다음과 같다.

$$g(x)+h(x)=\begin{cases}0 & (x \le 0)\\ 0 & (0<x\le 1)\\ 0 & (1<x\le 2)\\ 2 & (x>2)\end{cases}$$



$$g(x)h(x)=\begin{cases}0 & (x \le 0)\\ -1 & (0<x\le 1)\\ 0 & (1<x\le 2)\\ 1 & (x>2)\end{cases}$$



458) 풀이참조

$y=f(-x)$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭 이동시킨 것이므로 함수 $y=f(-x)$와 $y=g(x)$의 그래프는 각각 다음과 같다.