차영진 4점 마무리 B형 해설

1	126	**2**	⑤	**3**	4	**4**	②	**5**	38
6	8	**7**	51	**8**	①	**9**	97	**10**	21
11	19	**12**	④	**13**	26				

1.
a_i가 정수이므로 $a_i < a_{i+1}$에서 $a_i \le a_{i+1}-1$
$(i=1, 2, 3, 4)$
양변에 같은 수 i를 빼면
$a_i - i \le a_{i+1}-(i+1)$
조건 (가)에서
$0 \le a_1 - 1 \le a_2 - 2 \le a_3 - 3$
$\le a_4 - 4 \le a_5 - 5 \le 10$
조건 (나)에서
$a_1-1,\ a_2-2,\ a_3-3,\ a_4-4,\ a_5-5$가 모두 홀수이므로
구하는 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$의 개수는 홀수 1, 3, 5, 7, 9의 5개 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로
${}_{5+5-1}C_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$

2.
ㄱ. $\displaystyle\lim_{x\to+0} g(x) = \lim_{x\to+0}\frac{f(x)}{e^x-1}$
$\displaystyle= \lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\cdot\frac{x}{e^x-1}$
$= f'(0)\times 1 = -1$ (O)

ㄴ. $x>0$일 때 $f(x)<0$이고 $e^x>1$이므로
$g(x) = \dfrac{f(x)}{e^x-1} < 0$ (O)

ㄷ. $g'(x) = \dfrac{f'(x)(e^x-1)-f(x)e^x}{(e^x-1)^2}$
$h(x) = f'(x)(e^x-1) - f(x)e^x$이라 하면
$h(0) = f'(0)\cdot(1-1) - f(0)\cdot 1 = 0$
$h'(x)$
$= f''(x)(e^x-1) + f'(x)e^x - f'(x)e^x - f(x)e^x$
$= \{f''(x) - f(x)\}e^x - f''(x)$ 이고,
$x>0$일 때 $f''(x)-f(x)>0$,
$-f''(x)>0$ 이므로 $h'(x)>0$이다.
따라서 $x>0$일 때 $h(x)>0$이고
$g'(x)>0$이다.
함수 $g(x)$는 증가함수이므로 $0<a<b$이면 $g(a)<g(b)$이다. (O)

3.
두 평면의 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{h_1},\ \overrightarrow{h_2}$라 하면
$\overrightarrow{h_1} = (1, 1, -1),\ \overrightarrow{h_2} = (2, 2, 1)$이다.
두 평면이 이루는 예각의 크기를 θ라 하면
$\overrightarrow{h_1}\cdot\overrightarrow{h_2} = \sqrt{3}\times 3\times\cos\theta = 3$에서
$\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.
또, 직각삼각형 PAB에서 $\overline{AP}=5$,
$\overline{BP} = \sqrt{19}$이므로 $\overline{AB} = \sqrt{6}$이다.
점 B에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하면
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AH}\perp l$
직각삼각형 ABH에서 $\angle AHB = \theta$이므로
$\overline{AH} = 3,\ \overline{BH} = \sqrt{3}$
점 B에서 평면 α에 내린 수선의 발을 B$'$이라 하면 $\overline{HB'} = 1$
삼각형 ABP의 평면 α위로의 정사영은 삼각형 AB$'$P이므로
구하는 넓이는
$\dfrac{1}{2}\times\overline{AB'}\times\overline{PH} = \dfrac{1}{2}\times 2\times 4 = 4$이다.

4.
ㄱ. $G(12) = P(X\le 12)$이고,
$G(10) = P(X\le 10)$이므로
$G(12) - G(10) = \displaystyle\int_0^1 f(z)\,dz$이다. (O)

ㄴ. 평균이 10이므로
$P(X\le 8) + P(X\le 12) = 1$이다. 따라서
$G(8) + G(12) = 1$이다.

ㄷ.
좌변을 변형하면 $2\displaystyle\int_0^t f(z)dz$이다.
$2\displaystyle\int_0^t f(z)dz \ne \int_0^{2t} f(z)dz$이므로 (X)

5.
9개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는
${}_9C_2 = 36$
(i) 빨간 공 2개를 꺼내는 경우
두 공에 적힌 수의 합은 30이고, 이 경우의 확률은
$$\frac{{}_3C_2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$
(ii) 흰 공 1개와 파란 공 1개를 꺼내는 경우
두 공에 적힌 수의 합은 30이고, 이 경우의 확률은
$$\frac{{}_2C_1\times{}_4C_1}{36} = \frac{2\times 4}{36} = \frac{2}{9}$$
(iii) 빨간 공 1개와 파란 공 1개를 꺼내는 경우
두 공에 적힌 수의 합은 35이고, 이 경우의 확률은
$$\frac{{}_3C_1\times{}_4C_1}{36} = \frac{3\times 4}{36} = \frac{1}{3}$$
(iv) 파란 공 2개를 꺼내는 경우
두 공에 적힌 수의 합은 40이고, 이 경우의 확률은
$$\frac{{}_4C_2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$
(i)~(iv)에서 두 공에 적힌 수의 합이 30 이상인 사건을 E, 두 공이 같은 색의 공인 사건을 F라 하면
$P(E) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{2}{9} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{29}{36}$
$P(E\cap F) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{4}$
따라서 구하는 확률은
$$P(F\mid E) = \frac{P(F\cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{29}{36}} = \frac{9}{29}$$
$\therefore\ p+q = 29+9 = 38$

6.
집합 A에 해당하는 x의 범위는
$0\le x\le 1$이므로 전체 넓이의 $\dfrac{1}{7}$을
차지한다. $P(X\in A) = \dfrac{1}{7}$이므로 답은 8이다.

7.
표준편차가 서로 같으므로 표준화 시킬 필요 없다. 등식
$P(16 < X < 19) = P(n < Y < n+3)$을
만족시키는 n의 값은 6과 11이므로 6과 11사이의 모든 자연수가 가능하다. 따라서 가능한 n의 값은 6, 7, 8, 9, 10, 11이므로 답은 51이다.

8.
조건의 부등식을 만족시키는 x의 최솟값이
4이므로 평균은 $\dfrac{4+7}{2}$이다.
$P\left(3\le X\le\dfrac{15}{2}\right) = P\left(-\dfrac{5}{4}\le Z\le 1\right)$이므로
$0.3413 + 0.3943 = 0.7356$이다.

9.
$1 \le x \le 9$일 때, $f(x)=0$이므로
$f(n)=0$ 즉, n은 한자리수
$x=1$일 때, $g(n) \le g(5x+90)$을 만족시키는 n의 개수는 9개
$x=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$일 때,
$g(n) \le g(5x+90)$을 만족시키는 n의 개수는 1개 ($n=1$하나만 가능하다.)
-> 17개
$x \ge 10$일 때, $f(x)=0, 1$이므로 2가지 경우로 나누어 주면
$f(x)=0$일 때, (n은 한자리수일 때,)
$10 \le x \le 19$인 모든 x에 대하여
$g(n) \le g(5x+90)$ 에서 $n=1$이어야 합니다.
($n \ge 2$가 될 수 없다.)
-> 10개
$f(x)=1$일 때, (n은 두자리수일 때,)
$x=10$일 때, $g(n) \le g(140)$이므로
$n=10, 11, 12, 13, 14$
$x=11$일 때, $g(n) \le g(145)$이므로
$n=10, 11, 12, 13, 14$
$x=12$일 때, $g(n) \le g(150)$이므로
$n=10, 11, 12, 13, 14, 15$
$x=13$일 때, $g(n) \le g(155)$이므로
$n=10, 11, 12, 13, 14, 15$
$x=14$일 때, $g(n) \le g(160)$이므로
$n=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$
$x=15$일 때, $g(n) \le g(165)$이므로
$n=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$
⋮
-> $2\times(5+6+7+8+9)=2\times35=\underline{70}$
답 $17+10+70=97$

10.
직선 PQ가 사각형 ABCD의 넓이를 항상 이등분하므로 선분 PQ의 중점을 M이라 하면
점 M은 사각형 ABCD의 무게중심이므로
$\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$이다.
$\overrightarrow{RP}=\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP}$,
$\overrightarrow{RQ}=\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{RM}-\overrightarrow{MP}$이므로
$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{RM}-\overrightarrow{MP})$
$=|\overrightarrow{RM}|^2-|\overrightarrow{MP}|^2$
$|\overrightarrow{RM}|^2$의 최댓값은 직선 RM이 직선 AD와 수직일 때 25이고,
$|\overrightarrow{MP}|^2$의 최솟값은 점 P가 선분 AB의 중점일 때 4이므로
구하는 최댓값은
$25-4=21$이다.

11.
두 구의 중심을 각각 O_1, O_2라 할 때, 직선 O_1O_2와 평면 ABCD의 교점을 Q라 하자.
삼각형 O_1PQ와 삼각형 QBF는 서로
길이의 비가 $1:3$인 닮음인 삼각형이므로
직육면체 ABCD−EFGH의 높이는 3이다.
직선 HG와 구 S_2위를 움직이는 점 사이의
거리의 최댓값은 $2\sqrt{5}+1$이고, 최솟값은
$2\sqrt{5}-1$이므로 답은 19이다.

12.
원점을 O라 하면
$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$
$=(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OB})$
$=|\overrightarrow{PO}|^2+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$
$=5^2+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+(4,\ 3)\cdot(2,\ 5)$
$=5^2+\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+23$
이므로 $\overrightarrow{PO}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$가 최대일 때
$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AP}$도 최대이다.
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(4,\ 3)+(2,\ 5)=(6,\ 8)$이고,
$2\overrightarrow{PO}=(6,\ 8)$일 때, $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AP}$는 최대이다.
따라서 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{AP}$가 최대일 때, 직선 OP의
기울기는 $\frac{4}{3}$이고, 접선의 기울기와의 곱이
-1이므로
점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$이다.

13.
선분 AB를 지름으로 하는 원을 그리고, 선분 AB의 중점을 M이라 하면, 선분 PM의
연장선이 원과 만나는 점을 P′이라 하면
선분 PP′은 원의 지름이다.
삼각형 PAP′은 $\angle PAP'=\frac{\pi}{2}$인
직각삼각형이므로
$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PP'}$
$=\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{PA}|^2=\frac{1}{2}\times4^2=8$
같은 방법으로
$\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PM}=\frac{1}{2}\times\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PP'}$
$=\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{PQ}|^2=\frac{1}{2}\times6^2=18$
따라서
$(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{QP})\cdot\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{MP}$
$=8+18=26$이다.