차영진 4점 마무리 A형 해설

1	574	**2**	30	**3**	97	**4**	12	**5**	②
6	38	**7**	126	**8**	51	**9**	8	**10**	①
11	②								

1.
$n=1$일 때
$y \ge 4$인 영역의 격자점의 개수는 28이고,
$y=3$일 때의 격자점의 개수는 6
$y=2$일 때의 격자점의 개수는 3
$y=1$일 때의 격자점의 개수는 2이다.
따라서 $f(10)=39$

$n=2$일 때
$y \ge 5$인 영역의 격자점의 개수는 136이고,
$y=4$일 때의 격자점의 개수는 13
$y=3$일 때의 격자점의 개수는 6
$y=2$일 때의 격자점의 개수는 3
$y=1$일 때의 격자점의 개수는 2이다.
따라서 $f(20)=160$

$n=2$일 때
$y \ge 5$인 영역의 격자점의 개수는 351이고,
$y=4$일 때의 격자점의 개수는 13
$y=3$일 때의 격자점의 개수는 6
$y=2$일 때의 격자점의 개수는 3
$y=1$일 때의 격자점의 개수는 2이다.
따라서 $f(30)=375$
$\therefore \sum_{n=1}^{3} f(10n)=574$

2.
두 곡선은 항상 서로 다른 두 점에서 만나므로 n에 따른 일반화가 한번에는 불가능하다. 따라서 격자점의 개수가 100근처가 되도록 하는 n의 값을 대략적으로 설정하여 접근한다.
$n=20$일 때
i) $x<0$인 부분에서는 두 곡선의 교점의 좌표를 α라 하면 $-5<\alpha<-4$이다.
또, 지수함수를 $y=f(x)$라 하면 $x<0$에서 항상 $19<f(x)<20$이므로 이차함수 $y=x^2$만 고려해 주면 된다.
$a=-4$일 때, 만족하는 b는 $19-4^2+1$
$a=-3$일 때, 만족하는 b는 $19-3^2+1$
$a=-2$일 때, 만족하는 b는 $19-2^2+1$
$a=-1$일 때, 만족하는 b는 $19-1^2+1$
ii) $x \ge 0$인 부분에서 또한 마찬가지로 두 곡선의 교점의 좌표를 β라 하면
$4<\alpha<5$이다.
점 $(a,\ b)$가 곡선 $y=f(x)$와 $y=x^2$로 둘러싸인 부분의 내부 및 경계에 존재해야 하므로
$a=0$일 때, $19-0+1$
$a=1$일 때, $18-1+1$
$a=2$일 때, $16-4+1$
$a=3$일 때, $12-9+1$
$a=4$일 때부터 내부 및 경계에 벗어난다.
i), ii)인 모든 경우에서 격자점의 개수가 105이고, $n=19$일 때는 격자점의 개수가 97이므로 n의 최솟값은 20이다.
마찬가지로 400근처가 되는 n의 값은 50이며 $n=50$일 때를 구해 보면
i) $x<0$인 부분에서는 두 곡선의 교점의 좌표를 α라 하면 $-8<\alpha<-7$이다.
또, 지수함수를 $y=f(x)$라 하면 $x<0$에서 항상 $49<f(x)<50$이므로 이차함수 $y=x^2$만 고려해 주면 된다.
$a=-7$일 때, 만족하는 b는 $49-7^2+1$
$a=-6$일 때, 만족하는 b는 $49-6^2+1$
⋮
$a=-2$일 때, 만족하는 b는 $49-2^2+1$
$a=-1$일 때, 만족하는 b는 $49-1^2+1$
ii) $x \ge 0$인 부분에서 또한 마찬가지로 두 곡선의 교점의 좌표를 β라 하면
$7<\alpha<8$이다.
점 $(a,\ b)$가 곡선 $y=f(x)$와 $y=x^2$로 둘러싸인 부분의 내부 및 경계에 존재해야 하므로
$a=0$일 때, $49-0+1$
$a=1$일 때, $48-1+1$
$a=2$일 때, $46-4+1$
$a=3$일 때, $42-9+1$
$a=4$일 때, $34-16+1$
이므로 400을 넘는다.
$n=49$일 때 계산해 보면 400을 넘지 않으므로 따라서 최댓값은 49이다. 따라서 n의 개수는 30이다.

3.
$1 \le x \le 9$일 때, $f(x)=0$이므로
$f(n)=0$ 즉, n은 한자리수
$x=1$일 때, $g(n) \le g(5x+90)$을 만족시키는 n의 개수는 9개
$x=2,3,4,5,6,7,8,9$일 때,
$g(n) \le g(5x+90)$을 만족시키는 n의 개수는 1개 ($n=1$하나만 가능하다.)
-> 17개
$x \ge 10$일 때, $f(x)=0,\ 1$이므로 2가지 경우로 나누어 주면
$f(x)=0$일 때, (n은 한자리수일 때,)
$10 \le x \le 19$인 모든 x에 대하여
$g(n) \le g(5x+90)$ 에서 $n=1$이어야 합니다.
($n \ge 2$가 될 수 없다.)
-> 10개
$f(x)=1$일 때, (n은 두자리수일 때,)
$x=10$일 때, $g(n) \le g(140)$이므로
$n=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14$
$x=11$일 때, $g(n) \le g(145)$이므로
$n=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14$
$x=12$일 때, $g(n) \le g(150)$이므로
$n=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15$
$x=13$일 때, $g(n) \le g(155)$이므로
$n=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15$
$x=14$일 때, $g(n) \le g(160)$이므로
$n=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,16$
$x=15$일 때, $g(n) \le g(165)$이므로
$n=10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,16$
⋮
-> $2\times(5+6+7+8+9)=2\times35=$ 70
답 $17+10+70=97$

4.
다항함수 $f(x)$의 차수를 n, 최고차항의 계수를 $a(a\neq0)$라 하면
$f(x)$의 최고차항은 ax^n이다.
$g(x)$의 최고차항은 anx^{n-1}, $h(x)$의 최고차항은 $an(n-1)x^{n-2}$이므로
조건 (가)에서 $anx^{n-1}\times an(n-1)x^{n-2}=ax^n$
$a^2n^2(n-1)x^{2n-3}=ax^n$에서
$a^2n^2(n-1)=a,\ 2n-3=n$이므로
$n=3,\ a=\frac{1}{18}$
$f(x)=\frac{1}{18}x^3+bx^2+cx+d$로 놓으면
$g(x)=\frac{1}{6}x^2+2bx+c,\ h(x)=\frac{1}{3}x+2b$
조건 (나)에서 $h(0)=2$이므로 $b=1$
조건 (가)에서
$\left(\frac{1}{6}x^2+2bx+c\right)\times\left(\frac{1}{3}x+2b\right)$
$=\frac{1}{18}x^3+bx^2+cx+d$
$4b^2+\frac{c}{3}=c$에서 $c=6$
$2bc=d$에서 $d=12$
따라서 $f(0)=d=12$이다.

5.
$y=|f(x)-x|$의 그래프는 $y=f(x)$의 그래프 중 직선 $y=x$의 아래쪽 부분을 $y=x$에 대해 대칭이동 시킨 그래프이다.
함수 $y=|f(x)-x|$가 모든 실수에서 미분가능하려면 $y=f(x)$와 $y=x$의 교점은 접점이어야 하므로 $x=1,\ x=3$에서 두 그래프는 접한다.
$f(x)-x=(x-1)^2(x-3)^2$
$f(x)=(x-1)^2(x-3)^2+x$
$f'(x)=4(x-1)(x-2)(x-3)+1$
$f'(1)=f'(2)=f'(3)=1$이므로
구하는 접선은 $(2,\ f(2))=(2,\ 3)$에서의 접선으므로
$y=(x-2)+3=x+1$

따라서 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$이다.

6.

9개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의 수는

${}_{9}C_{2}=36$

(i) 빨간 공 2개를 꺼내는 경우

두 공에 적힌 수의 합은 30이고, 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_{3}C_{2}}{36}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

(ii) 흰 공 1개와 파란 공 1개를 꺼내는 경우

두 공에 적힌 수의 합은 30이고, 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_{2}C_{1}\times{}_{4}C_{1}}{36}=\frac{2\times4}{36}=\frac{2}{9}$$

(iii) 빨간 공 1개와 파란 공 1개를 꺼내는 경우

두 공에 적힌 수의 합은 35이고, 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_{3}C_{1}\times{}_{4}C_{1}}{36}=\frac{3\times4}{36}=\frac{1}{3}$$

(iv) 파란 공 2개를 꺼내는 경우

두 공에 적힌 수의 합은 40이고, 이 경우의 확률은

$$\frac{{}_{4}C_{2}}{36}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

(i)~(iv)에서 두 공에 적힌 수의 합이 30 이상인 사건을 E, 두 공이 같은 색의 공인 사건을 F라 하면

$\mathrm{P}(E)=\frac{1}{12}+\frac{2}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{29}{36}$

$\mathrm{P}(E\cap F)=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}$

따라서 구하는 확률은

$$\mathrm{P}(F\mid E)=\frac{\mathrm{P}(F\cap E)}{\mathrm{P}(E)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{29}{36}}=\frac{9}{29}$$

$\therefore\ p+q=29+9=38$

7.

a_i가 정수이므로 $a_i<a_{i+1}$에서 $a_i\le a_{i+1}-1$ $(i=1,2,3,4)$

양변에 같은 수 i를 빼면

$a_i-i\le a_{i+1}-(i+1)$

조건 (가)에서

$0\le a_1-1\le a_2-2\le a_3-3$
$\le a_4-4\le a_5-5\le10$

조건 (나)에서

$a_1-1,\ a_2-2,\ a_3-3,\ a_4-4,\ a_5-5$가 모두 홀수이므로

구하는 순서쌍 (a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)의 개수는 홀수 1, 3, 5, 7, 9의 5개 중에서 5개를 택하는 중복조합의 수와 같으므로

${}_{5+5-1}C_5={}_{9}C_5={}_{9}C_4=126$

8.

표준편차가 서로 같으므로 표준화 시킬 필요 없다. 등식

$\mathrm{P}(16<X<19)=\mathrm{P}(n<Y<n+3)$을 만족시키는 n의 값은 6과 11이므로 6과 11사이의 모든 자연수가 가능하다. 따라서 가능한 n의 값은 6, 7, 8, 9, 10, 11이므로 답은 51이다.

9.

집합 A에 해당하는 x의 범위는

$0\le x\le1$이므로 전체 넓이의 $\frac{1}{7}$을

차지한다. $\mathrm{P}(X\in A)=\frac{1}{7}$이므로 답은 8이다.

10.

조건의 부등식을 만족시키는 x의 최솟값이

4이므로 평균은 $\frac{4+7}{2}$이다.

$\mathrm{P}\left(3\le X\le\frac{15}{2}\right)=\mathrm{P}\left(-\frac{5}{4}\le Z\le1\right)$이므로

$0.3413+0.3943=0.7356$이다.

11.

ㄱ. $G(12)=\mathrm{P}(X\le12)$이고,

$G(10)=\mathrm{P}(X\le10)$이므로

$G(12)-G(10)=\int_0^1 f(z)\,dz$이다. (O)

ㄴ. 평균이 10이므로

$\mathrm{P}(X\le8)+\mathrm{P}(X\le12)=1$이다. 따라서

$G(8)+G(12)=1$이다.

ㄷ.

좌변을 변형하면 $2\int_0^t f(z)dz$이다.

$2\int_0^t f(z)dz\ \neq\ \int_0^{2t} f(z)dz$이므로 (X)