

차영진 4점 마무리 B형 해설

1	126	2	⑤	3	4	4	②	5	38
6	8	7	51	8	①	9	97	10	21
11	19	12	④	13	26				

1. a_i 가 정수이므로 $a_i < a_{i+1}$ 에서 $a_i \leq a_{i+1} - 1$ ($i=1, 2, 3, 4$)
양변에 같은 수 i 를 빼면
 $a_i - i \leq a_{i+1} - (i+1)$
조건 (가)에서
 $0 \leq a_1 - 1 \leq a_2 - 2 \leq a_3 - 3$
 $\leq a_4 - 4 \leq a_5 - 5 \leq 10$
조건 (나)에서
 $a_1 - 1, a_2 - 2, a_3 - 3, a_4 - 4, a_5 - 5$ 가 모두
홀수이므로
구하는 순서쌍 $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ 의 개수는
홀수 1, 3, 5, 7, 9의 5개 중에서 5개를
택하는 중복조합의 수와 같으므로
 ${}_{5+5-1}C_5 = {}_9C_5 = {}_9C_4 = 126$

2. $\lim_{x \rightarrow +0} g(x) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x)}{e^x - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow +0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \cdot \frac{x}{e^x - 1}$
 $= f'(0) \times 1 = -1$ (O)
 $x > 0$ 일 때 $f(x) < 0$ 이고 $e^x > 1$ 이므로
 $g(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1} < 0$ (O)
 $g'(x) = \frac{f'(x)(e^x - 1) - f(x)e^x}{(e^x - 1)^2}$
 $h(x) = f'(x)(e^x - 1) - f(x)e^x$ 이라 하면
 $h(0) = f'(0) \cdot (1 - 1) - f(0) \cdot 1 = 0$
 $h'(x) = f''(x)(e^x - 1) + f'(x)e^x - f'(x)e^x - f(x)e^x$
 $= \{f''(x) - f(x)\}e^x - f'(x)$ 이고,
 $x > 0$ 일 때 $f''(x) - f(x) > 0$,
 $-f'(x) > 0$ 이므로 $h'(x) > 0$ 이다.
따라서 $x > 0$ 일 때 $h(x) > 0$ 이고
 $g'(x) > 0$ 이다.
함수 $g(x)$ 는 증가함수이므로 $0 < a < b$ 이면
 $g(a) < g(b)$ 이다. (O)

3. 두 평면의 법선벡터를 각각 \vec{h}_1, \vec{h}_2 라 하면
 $\vec{h}_1 = (1, 1, -1), \vec{h}_2 = (2, 2, 1)$ 이다.
두 평면이 이루는 예각의 크기를 θ 라 하면
 $\vec{h}_1 \cdot \vec{h}_2 = \sqrt{3} \times 3 \times \cos\theta = 3$ 에서
 $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 이다.
또, 직각삼각형 PAB에서 $\overline{AP} = 5$,
 $\overline{BP} = \sqrt{19}$ 이므로 $\overline{AB} = \sqrt{6}$ 이다.
점 B에서 직선 l 에 내린 수선의 발을 H라
하면
삼수선의 정리에 의하여 $\overline{AH} \perp l$
직각삼각형 ABH에서 $\angle AHB = \theta$ 이므로
 $\overline{AH} = 3, \overline{BH} = \sqrt{3}$
점 B에서 평면 α 에 내린 수선의 발을
B'이라 하면 $\overline{HB'} = 1$
삼각형 ABP의 평면 α 위로의 정사영은
삼각형 AB'P이므로
구하는 넓이는
 $\frac{1}{2} \times \overline{AB'} \times \overline{PH} = \frac{1}{2} \times 2 \times 4 = 4$ 이다.

4. $G(12) = P(X \leq 12)$ 이고,
 $G(10) = P(X \leq 10)$ 이므로
 $G(12) - G(10) = \int_0^1 f(z) dz$ 이다. (O)
 \therefore 평균이 10이므로
 $P(X \leq 8) + P(X \leq 12) = 1$ 이다. 따라서
 $G(8) + G(12) = 1$ 이다.

5. \therefore 좌변을 변형하면 $2 \int_0^t f(z) dz$ 이다.
 $2 \int_0^t f(z) dz \neq \int_0^{2t} f(z) dz$ 이므로 (X)

5. 9개의 공 중에서 2개의 공을 꺼내는 경우의
수는
 ${}_9C_2 = 36$
(i) 빨간 공 2개를 꺼내는 경우
두 공에 적힌 수의 합은 30이고, 이 경우의
확률은
 $\frac{{}_3C_2}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$
(ii) 흰 공 1개와 파란 공 1개를 꺼내는
경우
두 공에 적힌 수의 합은 30이고, 이 경우의
확률은
 $\frac{{}_2C_1 \times {}_4C_1}{36} = \frac{2 \times 4}{36} = \frac{2}{9}$
(iii) 빨간 공 1개와 파란 공 1개를 꺼내는

경우
두 공에 적힌 수의 합은 35이고, 이 경우의
확률은

$$\frac{{}_3C_1 \times {}_4C_1}{36} = \frac{3 \times 4}{36} = \frac{1}{3}$$

(iv) 파란 공 2개를 꺼내는 경우

두 공에 적힌 수의 합은 40이고, 이
경우의 확률은

$$\frac{{}_4C_2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(i)~(iv)에서 두 공에 적힌 수의 합이 30
이상인 사건을 E , 두 공이 같은 색의 공인
사건을 F 라 하면

$$P(E) = \frac{1}{12} + \frac{2}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{29}{36}$$

$$P(E \cap F) = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$$

따라서 구하는 확률은

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{29}{36}} = \frac{9}{29}$$

$$\therefore p + q = 29 + 9 = 38$$

6. 집합 A 에 해당하는 x 의 범위는
 $0 \leq x \leq 1$ 이므로 전체 넓이의 $\frac{1}{7}$ 을
차지한다. $P(X \in A) = \frac{1}{7}$ 이므로 답은 8이다.

7. 표준편차가 서로 같으므로 표준화 시킬 필요
없다. 등식
 $P(16 < X < 19) = P(n < Y < n+3)$ 을
만족시키는 n 의 값은 6과 11이므로 6과
11 사이의 모든 자연수가 가능하다. 따라서
가능한 n 의 값은 6, 7, 8, 9, 10, 11이므로
답은 51이다.

8. 조건의 부등식을 만족시키는 x 의 최솟값이
4이므로 평균은 $\frac{4+7}{2}$ 이다.
 $P\left(3 \leq X \leq \frac{15}{2}\right) = P\left(-\frac{5}{4} \leq Z \leq 1\right)$ 이므로
 $0.3413 + 0.3943 = 0.7356$ 이다.

9.

$1 \leq x \leq 9$ 일 때, $f(x)=0$ 이므로
 $f(n)=0$ 즉, n 은 한자리수
 $x=1$ 일 때, $g(n) \leq g(5x+90)$ 을 만족시키는
 n 의 개수는 9개
 $x=2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ 일 때,
 $g(n) \leq g(5x+90)$ 을 만족시키는 n 의 개수는
 1개 ($n=1$ 하나만 가능하다.)
 -> 17개
 $x \geq 10$ 일 때, $f(x)=0, 1$ 이므로 2가지
 경우로 나누어 주면
 $f(x)=0$ 일 때, (n 은 한자리수일 때,
 $10 \leq x \leq 19$ 인 모든 x 에 대하여
 $g(n) \leq g(5x+90)$ 에서 $n=1$ 이어야 합니다.
 ($n \geq 2$ 가 될 수 없다.)
 -> 10개
 $f(x)=1$ 일 때, (n 은 두자리수일 때,
 $x=10$ 일 때, $g(n) \leq g(140)$ 이므로
 $n=10, 11, 12, 13, 14$
 $x=11$ 일 때, $g(n) \leq g(145)$ 이므로
 $n=10, 11, 12, 13, 14$
 $x=12$ 일 때, $g(n) \leq g(150)$ 이므로
 $n=10, 11, 12, 13, 14, 15$
 $x=13$ 일 때, $g(n) \leq g(155)$ 이므로
 $n=10, 11, 12, 13, 14, 15$
 $x=14$ 일 때, $g(n) \leq g(160)$ 이므로
 $n=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$
 $x=15$ 일 때, $g(n) \leq g(165)$ 이므로
 $n=10, 11, 12, 13, 14, 15, 16$
 \vdots
 -> $2 \times (5+6+7+8+9) = 2 \times 35 = 70$
 답 $17+10+70=97$

10.

직선 PQ가 사각형 ABCD의 넓이를 항상
 이등분하므로 선분 PQ의 중점을 M이라
 하면
 점 M은 사각형 ABCD의 무게중심이므로
 $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} = \vec{0}$ 이다.
 $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MP}$,
 $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{RM} - \overrightarrow{MP}$ 이므로
 $\overrightarrow{RP} \cdot \overrightarrow{RQ} = (\overrightarrow{RM} + \overrightarrow{MP}) \cdot (\overrightarrow{RM} - \overrightarrow{MP})$
 $= |\overrightarrow{RM}|^2 - |\overrightarrow{MP}|^2$
 $|\overrightarrow{RM}|^2$ 의 최댓값은 직선 RM이 직선 AD와
 수직일 때 25이고,
 $|\overrightarrow{MP}|^2$ 의 최솟값은 점 P가 선분 AB의
 중점일 때 4이므로
 구하는 최댓값은
 $25 - 4 = 21$ 이다.

11.

두 구의 중심을 각각 O_1, O_2 라 할 때, 직선
 O_1O_2 와 평면 ABCD의 교점을 Q라 하자.
 삼각형 O_1PQ 와 삼각형 QBF 는 서로
 길이의 비가 1:3인 닮음인 삼각형이므로
 직육면체 ABCD-EFGH의 높이는 3이다.
 직선 HG와 구 S_2 위를 움직이는 점 사이의
 거리의 최댓값은 $2\sqrt{5}+1$ 이고, 최솟값은
 $2\sqrt{5}-1$ 이므로 답은 19이다.

12.

원점을 O라 하면
 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$
 $= (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB})$
 $= |\overrightarrow{PO}|^2 + \overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$
 $= 5^2 + \overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + (4, 3) \cdot (2, 5)$
 $= 5^2 + \overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) + 23$
 이므로 $\overrightarrow{PO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ 가 최대일 때
 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AP}$ 도 최대이다.
 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (4, 3) + (2, 5) = (6, 8)$ 이고,
 $2\overrightarrow{PO} = (6, 8)$ 일 때, $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AP}$ 는 최대이다.
 따라서 $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{AP}$ 가 최대일 때, 직선 OP의
 기울기는 $\frac{4}{3}$ 이고, 접선의 기울기와와 곱이
 -1 이므로
 점 P에서의 접선의 기울기는 $-\frac{3}{4}$ 이다.

13.

선분 AB를 지름으로 하는 원을 그리고, 선분
 PM의 연장선이 원과 만나는 점을 P'이라
 하면 선분 PP'은 원의 지름이다.
 삼각형 P'AP'은 $\angle P'AP' = \frac{\pi}{2}$ 인
 직각삼각형이므로
 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PP'}$
 $= \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{PA}|^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 = 8$
 같은 방법으로
 $\overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PM} = \frac{1}{2} \times \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PP'}$
 $= \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{PQ}|^2 = \frac{1}{2} \times 6^2 = 18$
 따라서
 $(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{QP}) \cdot \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{QP} \cdot \overrightarrow{MP}$
 $= 8 + 18 = 26$ 이다.