만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물 (개인계정)

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

지수계산

1. $2^{\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ 2 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 4

$2^{\sqrt{2}}\times 2^{1-\sqrt{2}}$

$=\boxed{2}$

미분계수의 정의 : 분모, 분자 꼴 맞춤

2. 함수 $f(x)=2x^3+3x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

$\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}\times 2 = 2f'(0)$

$f'(x)=6x^2+3$ 이므로 ㉠ $2f'(0)=\boxed{6}$

등차수열/등비수열은 결국 공차/공비가 가장 중요!

3. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 2인 등비수열 $\{b_n\}$이

$a_2=b_2,\ a_4=b_4$

를 만족시킬 때, a_1+b_1의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$a_4=a_2+6$
$b_4=4b_2$ ⊜

→ $a_2+6=4b_2$ 에서 $a_2=b_2$ 이므로

→ $a_2+6=4a_2$

∴ $a_2=2$

곧 $a_2=b_2=2$ 이고, $a_1=a_2-3=-1$, $b_1=\frac{b_2}{2}=1$ ㉠ $a_1+b_1=\boxed{0}$

갑자기 사잇값 정리?

4. 두 자연수 m, n에 대하여 함수 $f(x)=x(x-m)(x-n)$이

$f(1)f(3)<0,\ f(3)f(5)<0$

을 만족시킬 때, $f(6)$의 값은? [3점]

① 30 ② 36 ③ 42 ④ 48 ⑤ 54

$f(x)=x(x-m)(x-n)$는 $x=0, m, n$에서 함숫값 0

① $f(1)f(3)<0$ 에서 $f(1)$과 $f(3)$은 부호가 다르다.

→ 구간 $(1,3)$에 $f(c)=0$을 만족하는 실수 c가 존재한다.

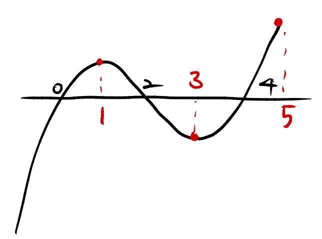
② $f(3)f(5)<0$ 에서 $f(3)$과 $f(5)$는 부호가 다르다.

→ 구간 $(3,5)$ 〃

이때 $f(x)=0$을 만족하는 x는 $0, m, n$인데

m, n이 자연수이므로 m, n이 각각 2, 4임을 알 수 있다. (순서는 상관 X)

ex)



∴ $f(x)=x(x-2)(x-4)$

㉠ $f(6)=6\times 4\times 2$

$=\boxed{48}$

분모 통일 후 계산

5. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여

$$\frac{1}{1-\cos\theta} + \frac{1}{1+\cos\theta} = 18$$

일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

$$\frac{1+\cos\theta}{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)} + \frac{1-\cos\theta}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$$

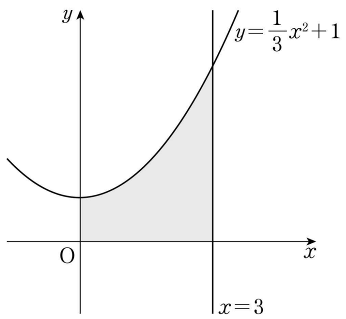
$$\Rightarrow \frac{2}{1-\cos^2\theta} = \frac{2}{\sin^2\theta} = 18$$

$\therefore$ ㉮ $\sin\theta = \boxed{-\frac{1}{3}}$ $\left(\because \pi < \theta < \frac{3}{2}\pi\right)$

정적분계산...

6. 곡선 $y=\frac{1}{3}x^2+1$과 x축, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 6 ② $\frac{20}{3}$ ③ $\frac{22}{3}$ ④ 8 ⑤ $\frac{26}{3}$



㉮ $\int_0^3 \left(\frac{1}{3}x^2+1\right)dx$

$= \left[\frac{1}{9}x^3+x\right]_0^3$

$= \boxed{6}$

(평균)
등차수열의 합 = 등차중항 × 항의개수

7. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때,

$$S_7 - S_4 = 0,\ S_6 = 30$$

이다. a_2의 값은? [3점]

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

$S_7 - S_4 = a_5 + a_6 + a_7$

$= 3a_6 = 0 \quad \therefore a_6 = 0$

$S_6 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$

$= 6a_{3.5} = 30 \quad \therefore a_{3.5} = 5$

곧 $a_6 = a_{3.5} + 2.5d$ 이므로 $0 = 5 + 2.5d$

$\therefore d = -2$

㉮ $a_2 = a_{3.5} - 1.5d$

$= 5 + 3$

$= \boxed{8}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
(개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

이젠 너무나도 익숙한 (해야만 하는) 유형

8. 두 함수

$$f(x)=-x^4-x^3+2x^2,\ g(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+a$$

가 있다. 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\le g(x)$$

가 성립할 때, 실수 a의 최솟값은? [3점]

① 8 ② $\frac{26}{3}$ ③ $\frac{28}{3}$ ④ 10 ⑤ $\frac{32}{3}$

두 함수를 따로 보기 어려우면 함수를 빼는 것... 이젠 알죠?

$(-x^4-x^3+2x^2)-(\frac{1}{3}x^3-2x^2+a)\le 0$ 을 만족한다.

$\Rightarrow -x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2-a\le 0$

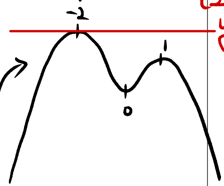
$\Rightarrow -x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2\le a$로 생각하자.

$h(x)=-x^4-\frac{4}{3}x^3+4x^2$로 두면

$h'(x)=-4x^3-4x^2+8x$

$=-4x(x^2+x-2)$

$=-4x(x+2)(x-1)$



(최소) $y=a$

$\therefore h(-2)\le a$

㉠ $-16+\frac{32}{3}+16\le a$

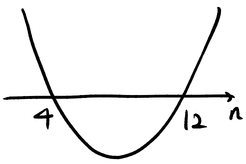
$\Rightarrow \boxed{\frac{32}{3}\le a}$

이것도 이젠 진짜 익숙해야 함

9. 자연수 $n\,(n\ge 2)$에 대하여 $n^2-16n+48$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=2}^{10}f(n)$의 값은? [4점]

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

$n^2-16n+48=(n-4)(n-12)$



실수인 거듭제곱근의 개수는 { ① n이 홀수인지/짝수인지 ② 함숫값의 부호 에 영향을 받으므로

i) n이 홀수인 경우

$\Rightarrow f(n)$은 무조건 1

$\Rightarrow f(3)=f(5)=f(7)=f(9)=1$

ii) n이 짝수인 경우

$\Rightarrow$ $(n-4)(n-12)>0$ 이면 $f(n)=2$ $\rightarrow f(2)=2$

$(n-4)(n-12)=0$ 이면 $f(n)=1$ $\rightarrow f(4)=1$

$(n-4)(n-12)<0$ 이면 $f(n)=0$ $\rightarrow f(6)=f(8)=0$

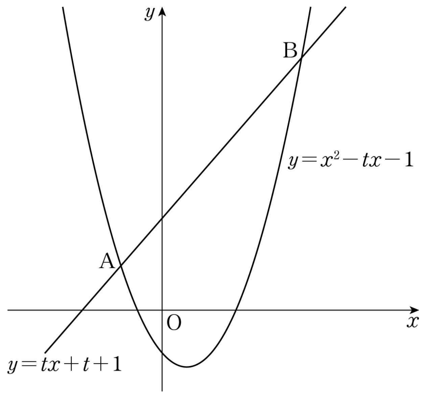
$\therefore$ ㉠ $\sum_{n=2}^{10}f(n)=4\times1+2+1$

$=\boxed{7}$

좌표를 굳이 다 구해야 할까?

10. 실수 $t\,(t>0)$에 대하여 직선 $y=tx+t+1$과 곡선 $y=x^2-tx-1$이 만나는 두 점을 A, B라 할 때, $\lim_{t\to\infty}\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{t^2}$의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$ ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$



$y=x^2-tx-1$ 과 $y=tx+t+1$을 연립하면

$(x^2-tx-1)-(tx+t+1)=0$ 이고,

$\Rightarrow x^2-2tx-(t+2)=0$ 에서 점 A와 B의 x좌표를 α,β로 두자.

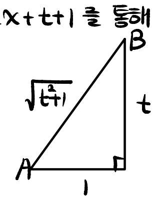
이때 $\beta-\alpha$, 즉 x좌표 변화량을 근과 계수의 관계를 통해 구할 수 있다.

① $\alpha+\beta=2t$, ② $\alpha\beta=-(t+2)$ 이므로

$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(\beta-\alpha)^2$

$\Rightarrow \sqrt{4t^2+4(t+2)}=\beta-\alpha$ 이다.

이때, 우리는 $y=tx+t+1$를 통해



이? 기울기가 t? 라는 것을 알 수 있고,

$\overline{AB}=2\sqrt{t^2+t+2}\times\sqrt{t^2+1}$ 임을 안다.

㉠ $\lim_{t\to\infty}\frac{2\sqrt{t^2+t+2}\times\sqrt{t^2+1}}{t^2}=\boxed{2}$

만든 놈: [O] plancoach_team
[O] crazy_hansuckwon
(개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

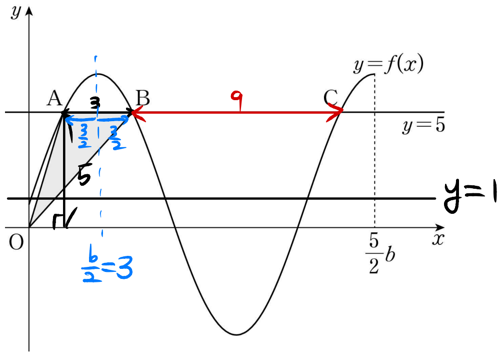
어렵지 않음. 주기의 길이가 12라는 것만 빨리 체크하자.

11. 그림과 같이 두 상수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin\frac{\pi x}{b}+1\left(0\le x\le\frac{5}{2}b\right)$$

의 그래프와 직선 $y=5$가 만나는 점을 x좌표가 작은 것부터 차례로 A, B, C라 하자.

$\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AB}}+6$이고 삼각형 AOB의 넓이가 $\frac{15}{2}$일 때, a^2+b^2의 값은? (단, $a>4$, $b>0$이고, O는 원점이다.) [4점]



✓① 68 ② 70 ③ 72 ④ 74 ⑤ 76

우선, $\triangle AOB=\frac{15}{2}$에서 $\overline{AB}$를 밑변으로 간주하면

$\triangle AOB$의 높이: 점 A의 y좌표 $=5$이므로

$\frac{15}{2}=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times5$ $\therefore \overline{AB}=3$, $\overline{BC}=9$ $(\overline{BC}=\overline{AB}+6)$

이때 점 A ~ 점 C는 삼각함수 $f(x)$의 한 주기를 의미한다.

$\therefore$ $f(x)=a\sin\frac{\pi}{b}x+1$ 에서

주기는 $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{b}}=2b$ 이므로 $2b=\overline{AC}=12$ $\therefore b=6$

곧 점 A와 B는 $x=\frac{b}{2}=3$에 대칭이고, $\overline{AB}=3$이므로

$A\left(\frac{3}{2},5\right)$, $B\left(\frac{9}{2},5\right)$이다.

이 점들이 $f(x)$ 위의 점이므로 $f\left(\frac{3}{2}\right)=a\sin\frac{\pi}{4}+1=5$

$\Rightarrow a=4\sqrt{2}$

㉠ $a^2+b^2=32+36$
$=\boxed{68}$

절댓값은 차분하게 처리하면 무서울게 없다.

12. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$를

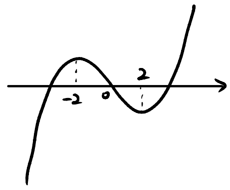
$$f(x)=|x^3-12x+k|$$

라 하자. 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a\,(a\ge0)$이 만나는 서로 다른 점의 개수가 홀수가 되도록 하는 실수 a의 값이 오직 하나일 때, k의 값은? [4점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ✓⑤ 16

$g(x)=x^3-12x+k$로 두면 $g'(x)=3x^2-12$
$=3(x+2)(x-2)$

곧 $g(x)$는

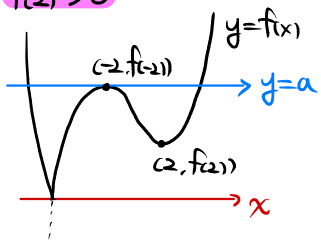


$y=k$로 둘 수 있다.

이제 k의 값에 따라 x축의 상대적인 위치가 결정될 것이므로 case 분류!

(k의 값이 양수이므로 x축은 무조건 $y=k$ 아래에 위치)

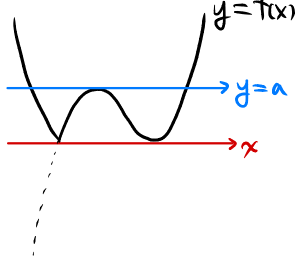
i) $f(2)>0$



$\therefore$ $a=f(-2)$일때 교점 3개
$a=0$일때 교점 1개

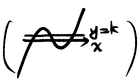
$\Rightarrow$ 조건만족하는 $a\ge0$인 a 2개
$\Rightarrow$ 모순!

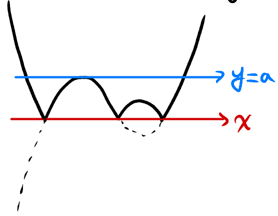
ii) $f(2)=0$



$\therefore$ 조건 만족하는 $a\ge0$인
a는 $f(-2)$ 단 하나뿐!

iii) $f(2)<0$ (이 경우 $y=k$가 x축보다 위에 있는 경우만)





$\therefore$ i)과 동일하게 a는 2개 발생
$\Rightarrow$ 모순!

곧 ii)가 정답이고, $f(2)=|8-24+k|=0$ 이므로 ㉠ $k=\boxed{16}$

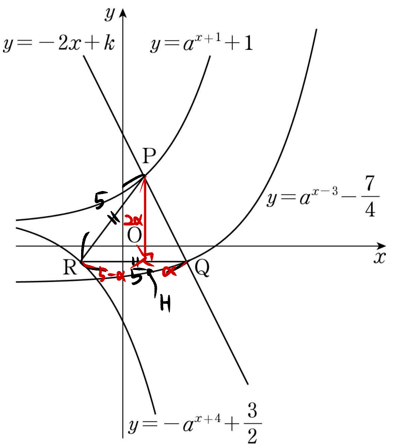
만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

성질 vs 계산

13. 그림과 같이 두 상수 $a(a>1)$, k에 대하여 두 함수

$$y=a^{x+1}+1,\quad y=a^{x-3}-\frac{7}{4}$$

의 그래프와 직선 $y=-2x+k$가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 Q를 지나고 x축에 평행한 직선이 함수 $y=-a^{x+4}+\frac{3}{2}$의 그래프와 점 R에서 만나고 $\overline{PR}=\overline{QR}=5$일 때, $a+k$의 값은? [4점]



① $\frac{13}{2}$ ② $\frac{27}{4}$ ③ 7 ④ $\frac{29}{4}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

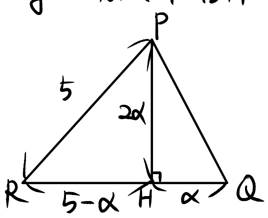
관찰부터 해보자~

$y=a^{x+1}+1 \xrightarrow[\text{평행이동}]{x\to+4,\ y\to-\frac{11}{4}} y=a^{x-3}-\frac{7}{4}$

만약 $x\to+4$이고, $y\to-8$ 평행이동이었으면 기울기가 -2인 직선 $y=-2x+k$와의 교점은 위치관계가 똑같으니~ 이런 소리를 할 수 있지만 여긴 그렇지 않음.

⇒ 성질보다는 계산!

$y=-2x+k$의 기울기가 -2이므로 P에서 $\overline{QR}$에 내린 수선의 발을 H로 두면



과 같이 둘 수 있다.

⇒ △PHR에서 피타고라스 정리를 사용하면 $4\alpha^2+25-10\alpha+\alpha^2=25$

⇒ $\alpha(\alpha-2)=0$ ∴ $\alpha=2$ $(\alpha>0)$

다음 page

우리 14번 이렇게 내기로 한 거 아니었어? 이렇게 쉬운걸 내버리면...

14. 최고차항의 계수가 1이고 $f'(2)=0$인 이차함수 $f(x)$가 모든 자연수 n에 대하여

$$\int_4^n f(x)\,dx \ge 0$$

을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

< 보 기 >

ㄱ. $f(2)<0$

ㄴ. $\int_4^3 f(x)\,dx > \int_4^2 f(x)\,dx$

ㄷ. $6 \le \int_4^6 f(x)\,dx \le 14$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

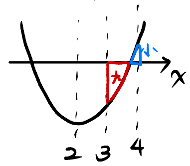
이차함수 $f(x)=(x-2)^2+k$ 꼴 : $\int_4^n f(x)dx \ge 0$ (n은 자연수)

여기서 주의할 점은 $n<4$일 때 적분값은 부호가 반대가 된다는것!

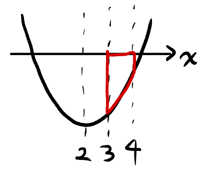
① $n=4$일때 $\int_4^4 f(x)dx=0$은 자명하니 그 주변을 살펴보자.

② $n=3$일때 $\int_4^3 f(x)dx=-\int_3^4 f(x)dx\ge0$이므로 $\int_3^4 f(x)dx\le0$이다.

즉,

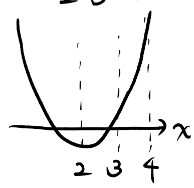


꼴 혹은 아예



일 수도 있다.

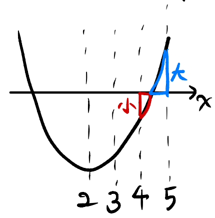
만약



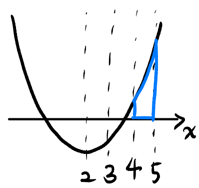
꼴이면 $\int_3^4 f(x)dx>0$이므로 모순이고,

종합하면 x축이 $x=3$보다는 오른쪽에서 $f(x)$와 만난다.

또한, ③ $n=5$일때 $\int_4^5 f(x)dx\ge0$이므로 비슷한 논리에 의해



꼴 혹은

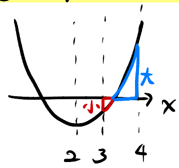


일 수도 있다.

종합하면 x축이 $x=5$보다는 왼쪽에서 $f(x)$와 만난다.

∴ $f(x)=0$의 실근은 '일단은' 구간 $(3, 5)$에 존재한다.

왜? ex)

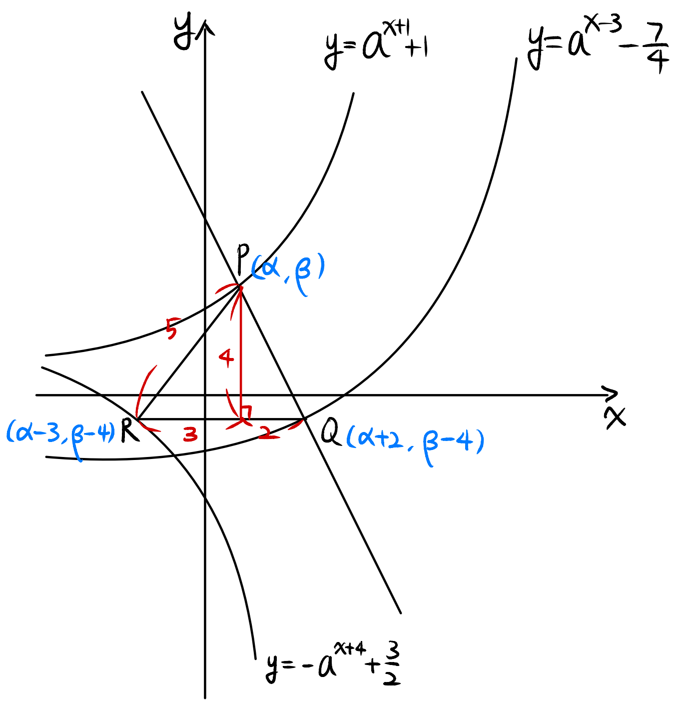


이면 $\int_3^4 f(x)dx\ge0$
$\int_4^5 f(x)dx$도 마찬가지.

다음 page

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

13번 이어서



이쩔 수 없이 좌표 잡고 계산하자.

① $\beta=a^{\alpha+1}+1$
② $\beta-4=a^{\alpha-1}-\frac{7}{4}$
③ $\beta-4=-a^{\alpha+1}+\frac{3}{2}$

①과 ③을 연립하면 $a^{\alpha+1}=\frac{9}{4}$ 이고,
이를 ①에 대입하면 $\beta=\frac{13}{4}$이다.

곧 ②에서 $a^{\alpha-1}=1$ 이므로 $a^{\alpha+1}=a^2(a^{\alpha-1})=\frac{9}{4}$ $\therefore a^2=\frac{9}{4}$

사실 여기서 $a^0=1$ 이용해서 바로 구해도 가능

따라서 $a=\frac{3}{2}$ $(a>1)$을 얻고, $\alpha=1$ 이다.

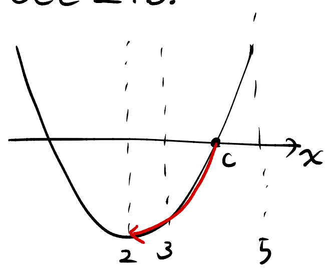
$\therefore$ P$(1,\frac{13}{4})$이 $y=-2x+k$ 위의 점이므로 $\frac{13}{4}=-2+k$ $\therefore k=\frac{21}{4}$

㉠ $a+k=\boxed{\frac{27}{4}}$

14번 이어서

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

ㄱ. 위에서 확인한 그래프 모두 $f(2)<0$ 이다. 라고 하면 욕먹을 수 있으니 다르게 얘기해보자면
사실, $f'(2)=0$ 이므로 $x>2$ 에서 $f'(x)>0$ 인데, $f(c)=0$ 을 만족하는 c가 $x>2$ 에 존재하므로 당연한 소리임.



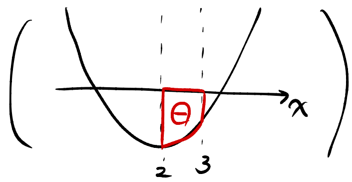
~~ㄴ~~. $\int_4^3 f(x)dx > \int_4^2 f(x)dx$ 헷갈리면 범위 변경 ~

$\Rightarrow -\int_3^4 f(x)dx > -\int_2^4 f(x)dx$

$\Rightarrow \cancel{\int_3^4 f(x)dx} < \int_2^4 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx + \cancel{\int_3^4 f(x)dx}$

$\Rightarrow 0 < \int_2^3 f(x)dx$ 인지 여부를 판단하면 끝!

하지만 이 또한 $f(3)<0$, $f(2)<0$ 인 시점에서 $\int_2^3 f(x)dx<0$ 이다.



즉, 모순이다.

ㄷ. $6 \le \int_4^6 f(x)dx \le 14$

$n=1, 2, 6\cdots$ 등등의 경우는 그래프를 보시면 아시겠지만 굳이 따질 필요 X

이를 위해 k의 범위를 보다 정확하게 결정하자.

① $\int_3^4 f(x)dx \le 0 \rightarrow \int_3^4 \{(x-2)^2+k\}dx$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}(x-2)^3+kx\right]_3^4$

$= \frac{7}{3}+k \le 0$

② $\int_4^5 f(x)dx \ge 0 \rightarrow \int_4^5 \{(x-2)^2+k\}dx$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{3}(x-2)^3+kx\right]_4^5$

$= \frac{19}{3}+k \ge 0$

$-\frac{19}{3} \le k \le -\frac{7}{3}$

㉠ $\int_4^6 f(x)dx$

$= \int_4^6 ((x-2)^2+k)dx$

$= \left[\frac{1}{3}(x-2)^3+kx\right]_4^6$

$= \frac{56}{3}+2k$ 이므로

$\frac{56}{3}-2\cdot\frac{19}{3} \le \frac{56}{3}+2k \le \frac{56}{3}-2\cdot\frac{7}{3}$

$\Rightarrow \boxed{6 \le \int_4^6 f(x)dx \le 14}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

케이스 몇개 안됨. 할만하다. 실수만 ㄴㄴ!

15. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수인 경우})\\ a_n+2n & (a_n\text{이 4의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$
> 이다.
> (나) $a_3>a_5$

$50<a_4+a_5<60$이 되도록 하는 a_1의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 224 ② 228 ③ 232 ④ 236 ⑤ 240

주어진 조건에 따라 수형도를 그려보자. (조건에 나온 $a_3\sim a_5$)
↳ 어차피 경우의 수 4개뿐이니 그릴 만하다는 판단.

a_3 a_4 a_5

a_3 — a_3 4의배수 → $\frac{1}{2}a_3+6$
- a_4 4의배수 → ① $\frac{1}{4}a_3+11$ → $(a_3>\frac{44}{3})$ ($\because a_3>a_5$)
- a_4 4의배수X → ② $\frac{1}{2}a_3+14$ → $(a_3>28)$ (〃)

a_3 — a_3 4의배수X → a_3+6
- a_4 4의배수 → ③ $\frac{1}{2}a_3+11$ → $(a_3>22)$ (〃)
- a_4 4의배수X → ④ a_3+14 → 불가능! $(a_3>a_3+14??)$

이제 각 경우에 대해 $50<a_4+a_5<60$을 해석해보자.

① $a_4+a_5=(\frac{1}{2}a_3+6)+(\frac{1}{4}a_3+11)$
$=\frac{3}{4}a_3+17$

57.xx

$\therefore$ $50<\frac{3}{4}a_3+17<60$에서 $44<a_3<\frac{172}{3}$

이때, ① 과정을 따랐다는 건 a_3, a_4 모두 4의 배수이므로
$a_3=48, 52, 56$이고, 그 때의 a_4는 각각 $30, 32, 34$이다.
따라서 조건을 만족하는 $(a_3, a_4)=(52, 32)$뿐이다.

다음 page

단 답 형

익숙...

16. 방정식

$$\log_2(x-2)=1+\log_4(x+6)$$

을 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

우선 진수조건!! 제발 빼먹지 말자
① $x-2>0$, ② $x+6>0$ 에서 $x>2$

밑 통일~
$\log_{2^2}(x-2)^2=\log_4 4(x+6)$
$\Rightarrow x^2-4x+4=4x+24$
$\Rightarrow x^2-8x-20=0$
$\Rightarrow (x-10)(x+2)=0$
$\therefore$ ㉮ $x=\boxed{10}$ $(x>2)$

곱의 미분

17. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x+2)f(x)$$

라 하자. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 기울기가 4일 때, $g'(3)$의 값을 구하시오. [3점]

$y=f(x)$ 위의 점 $(3,2)$ → $f(3)=2$
접선의 기울기 4 → $f'(3)=4$

$g(x)=(x+2)f(x)$ 에서
$g'(x)=f(x)+(x+2)f'(x)$

$\therefore$ ㉮ $g'(3)=f(3)+5f'(3)$
$=2+20$
$=\boxed{22}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

15번 이어서 … ①

② $a_4+a_5=\left(\frac{1}{2}a_3+6\right)+\left(\frac{1}{2}a_3+8\right)$

$=a_3+14$

$\therefore$ $50<a_3+14<60$ 에서 $36<a_3<46$

이 때, ② 과정을 따랐다는 건 a_3은 4의 배수지만 a_4는 4의 배수가 아니므로

$a_3=40, 44$ 이고, 그 때의 a_4는 각각 $26, 28$ 이다.

따라서 조건을 만족하는 $(a_3, a_4)=(40, 26)$ 뿐이다.

③ $a_4+a_5=(a_3+6)+\left(\frac{1}{2}a_3+11\right)$

$=\frac{3}{2}a_3+17$

$\therefore$ $50<\frac{3}{2}a_3+17<60$ 에서 $22<a_3<\frac{86}{3}$ // 28.xx

이 때, ③ 과정을 따랐다는 건 a_3은 4의 배수가 아니지만 a_4는 4의 배수이므로

$a_3=23, 25, 26, 27$ 이고, 그 때의 a_4는 각각 $29, 31, 32, 33$ 이다.

따라서 조건을 만족하는 $(a_3, a_4)=(26, 32)$ 뿐이다.

$\Rightarrow$ ①, ②, ③ 을 종합하면 가능한 $(a_3, a_4)=(52, 32), (40, 26), (26, 32)$ 이다.

이제 각 a_3으로부터 a_1까지 거꾸로 추론해보자.

i) $a_3=52$
- $\frac{1}{2}a_2+4$ (a_2 4의 배수) $\longrightarrow$ $a_2=96$
- a_2+4 (a_2 4의 배수 x) $\longrightarrow$ $a_2=48$

모순!

$\Rightarrow a_2=96$
- $\frac{1}{2}a_1+2$ (a_1 4의 배수) $\rightarrow$ $a_1=188$ o.k!
- a_1+2 (a_1 4의 배수 x) $\rightarrow$ $a_1=94$ o.k!

다음 page

15번 이어서 … ②

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

ii) $a_3=40$ $\begin{cases} \frac{1}{2}a_2+4 & (a_2\ 4\text{의 배수}) \rightarrow a_2=72 \\ a_2+4 & (a_2\ 4\text{의 배수} \times) \rightarrow a_2=36 \end{cases}$

모순!

$\Rightarrow a_2=72$ $\begin{cases} \frac{1}{2}a_1+2 & (a_1\ 4\text{의 배수}) \rightarrow a_1=140 \\ a_1+2 & (a_1\ 4\text{의 배수} \times) \rightarrow a_1=70 \end{cases}$

o.k!

o.k!

iii) $a_3=26$ $\begin{cases} \frac{1}{2}a_2+4 & (a_2\ 4\text{의 배수}) \rightarrow a_2=44 \\ a_2+4 & (a_2\ 4\text{의 배수} \times) \rightarrow a_2=22 \end{cases}$

모순!

$\Rightarrow a_2=22$ $\begin{cases} \frac{1}{2}a_1+2 & (a_1\ 4\text{의 배수}) \rightarrow a_1=40 \\ a_1+2 & (a_1\ 4\text{의 배수} \times) \rightarrow a_1=20 \end{cases}$

o.k!

모순!

㉮ a_1의 Max+min

$\Rightarrow 188+40$

$= \boxed{228}$

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

$\sum$ 연산

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k+2)=50,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=-10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k+2)=\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)+20=50$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)=30$$

곧 $\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=-10$과 연립하면

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)-\sum_{k=1}^{10}(a_k-2b_k)=\sum_{k=1}^{10}b_k=40$$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{10}a_k=70$ 이므로

㉮ $\sum_{k=1}^{10}(a_k+b_k)=70+40$
$=\boxed{110}$

너무 많이 나온 유형

19. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t)=12t-12,\ v_2(t)=3t^2+2t-12$$

이다. 시각 $t=k(k>0)$에서 두 점 P, Q의 위치가 같을 때, 시각 $t=0$에서 $t=k$까지 점 P가 움직인 거리를 구하시오. [3점]

속도 정적분 : 변위, |속도| = 속력 정적분 : 이동거리

P, Q가 출발한 위치가 같고, t=k 에서의 위치도 같으므로

$\int_0^k V_1(t)dt=\int_0^k V_2(t)dt$ 이다.

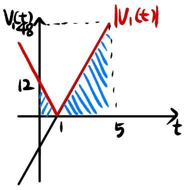
$\Rightarrow \int_0^k (V_2(t)-V_1(t))dt=0$

$\Rightarrow \int_0^k (3t^2-10t)dt=0$

$\Rightarrow \left[t^3-5t^2\right]_0^k=0$

$\Rightarrow k^2(k-5)=0$ 이므로 $k=5$ $(k>0)$

㉮ $\int_0^5 |V_1(t)|dt=$



$: \frac{1}{2}\times1\times12+\frac{1}{2}\times4\times48$
$=6+96$
$=\boxed{102}$

"다항함수" 조건의 중요성. ⊕ 변수 분리 조심!

20. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$2x^2f(x)=3\int_0^x(x-t)\{f(x)+f(t)\}dt$$

를 만족시킨다. $f'(2)=4$일 때, $f(6)$의 값을 구하시오. [4점]

① $x=0$ 대입해보면 $0=0$이므로 의미 X

② 양변 x에 대해 미분

$2x^2f(x)=3\int_0^x(xf(x)+xf(t)-tf(x)-tf(t))dt$ 이므로

$\Rightarrow 2x^2f(x)=3\left\{xf(x)\int_0^x 1dt+x\int_0^x f(t)dt-f(x)\int_0^x tdt-\int_0^x tf(t)dt\right\}$

x는 상수취급, t가 변수!

변수에 주의하며 미분하면 $\int_0^x 1dt=x$, $\int_0^x tdt=\frac{1}{2}x^2$이므로

$4xf(x)+2x^2f'(x)$
$=3\{\cancel{2xf(x)}+\cancel{x^2f'(x)}+\int_0^x f(t)dt+\cancel{xf(x)}-(\cancel{xf(x)}+\frac{1}{2}\cancel{x^2f'(x)})-\cancel{xf(x)}\}$
$=3(xf(x)+\frac{1}{2}x^2f'(x)+\int_0^x f(t)dt)$

$\therefore 4xf(x)+2x^2f'(x)=3xf(x)+\frac{3}{2}x^2f'(x)+3\int_0^x f(t)dt$ 에서

$xf(x)+\frac{1}{2}x^2f'(x)=3\int_0^x f(t)dt$

$\Rightarrow$ 계산의 편의를 위해 $2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)dt$ 로 두자.

"다항함수"라는 조건은 아주 중요한 조건.

$\Rightarrow$ 다항함수일 경우, 최고차항의 계수 & 차수 비교가 가능하다.

$f(x)=ax^n+\square$ 꼴로 두면

$f'(x)=nax^{n-1}+\square$ 이다.

또한, $\int_0^x f(t)dt=\frac{a}{n+1}x^{n+1}+\square$ 이므로

$\Rightarrow 2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)dt$

$\Rightarrow 2ax^{n+1}+nax^{n+1}+\square=\frac{6a}{n+1}x^{n+1}+\square$

$\therefore a(n+2)=\frac{6a}{n+1}$ 이므로 $n=1$ $(a\neq0,\ n\geq0)$

곧 $f(x)$는 일차함수이고, $f'(2)=4$에서 $y=4x+k$ 꼴이다.

이를 다시 $2xf(x)+x^2f'(x)=6\int_0^x f(t)dt$ 에 대입하면

$\Rightarrow 8x^2+2kx+4x^2=6\left[2t^2+kt\right]_0^x$

$\Rightarrow 12x^2+2kx=12x^2+6kx$ 이므로 $k=0$

$\therefore f(x)=4x$

㉮ $f(6)=\boxed{24}$

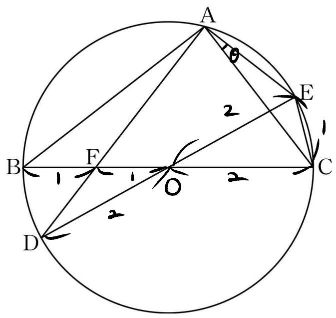
만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수만휘: 한석원의눈물

중학교 공부 열심히 한 사람, 미적분 선택자면 유리했을 듯. 오랜만에 할선정리!

21. 그림과 같이 선분 BC를 지름으로 하는 원에 두 삼각형 ABC와 ADE가 모두 내접한다. 두 선분 AD와 BC가 점 F에서 만나고

$$\overline{BC}=\overline{DE}=4,\ \overline{BF}=\overline{CE},\ \sin(\angle CAE)=\frac{1}{4}$$

이다. $\overline{AF}=k$일 때, k^2의 값을 구하시오. [4점]



3가지 풀이를 보여줄텐데, 모두 공통적으로 구해야 하는 부분은

1. $\overline{BC}$와 $\overline{DE}$ 모두 원의 지름이므로 둘의 교점은 원의 중심 (O)

$\Rightarrow \overline{BO}=\overline{CO}=\overline{DO}=\overline{EO}=2$

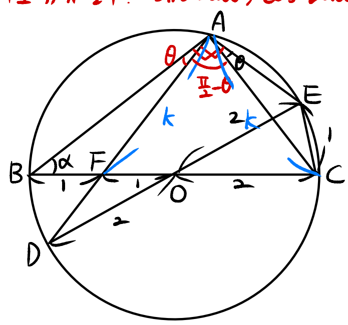
2. $\angle CAE=\theta$로 두면 $\sin\theta=\frac{1}{4}$에서 $\triangle ACE$에 sin Law 적용

$\Rightarrow \dfrac{\overline{CE}}{\sin\theta}=2R=4 \quad \therefore \overline{BF}=\overline{CE}=1 \quad (\because \overline{BF}=\overline{CE})$

$\Rightarrow \overline{FO}=\overline{BO}-\overline{BF}$ 이므로 $\overline{FO}=1$

곧 기본세팅이 위 문제 그림처럼 된다.

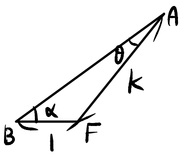
sol1) 난 철저히 수I 밖에 몰라! sin Law, cos Law만 써야 돼!



⊕ $\angle FAC=\frac{\pi}{2}-\theta$

STEP 1. $\angle BAC=\angle DAE=\frac{\pi}{2}$ 이므로 $\angle BAF=\theta$

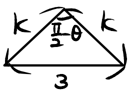
STEP 2. $\triangle BAF$에서 sin Law 적용하면 $(\angle ABF=\alpha)$



$\dfrac{1}{\sin\theta}=\dfrac{k}{\sin\alpha}=4$ 이므로 $\sin\alpha=\frac{1}{4}k$

STEP 3. 직각 $\triangle ABC$에서 $\overline{AC}=\overline{BC}\sin\alpha=k$

STEP 4.



에서 cos Law 적용

$\rightarrow 3^2=k^2+k^2-2k^2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) \Rightarrow 9=2k^2-2k^2\sin\theta$

$\therefore$ 계산하면 ㉮ $k^2=\boxed{6}$ 다음 page

2017학년도 수능 가형 30번 핵너프 버전. 개쉽다. 마지막 계산만 안 틀리고 하면 끝

22. 삼차함수 $f(x)$에 대하여 구간 $(0,\infty)$에서 정의된 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} x^3-8x^2+16x & (0<x\le 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(10)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

> (가) $g\left(\frac{21}{2}\right)=0$
>
> (나) 점 $(-2, 0)$에서 곡선 $y=g(x)$에 그은, 기울기가 0이 아닌 접선이 오직 하나 존재한다.

$$g(x)=\begin{cases} x(x-4)^2 & (0<x\le 4) \\ f(x) & (x>4) \end{cases}$$ 가 구간 $(0,\infty)$에서 미분가능하므로

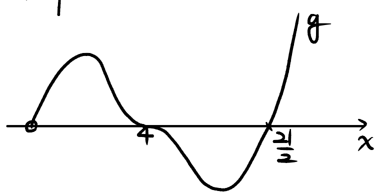
① $f(4)=0$, ② $f'(4)=0$ 이다. $\Rightarrow f(x)=p(x-4)^2(x-q)$ 꼴

이때 조건 (가)에서 $g\left(\frac{21}{2}\right)=f\left(\frac{21}{2}\right)=0$ 이므로

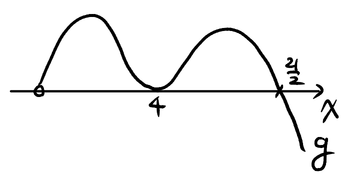
$f(x)=p(x-4)^2\left(x-\frac{21}{2}\right)$로 함수의 최고차항을 빼고 전부 결정된다.

$\Rightarrow$ 최고차항의 계수 부호에 따라 $g(x)$를 그려보면

i) $p>0$



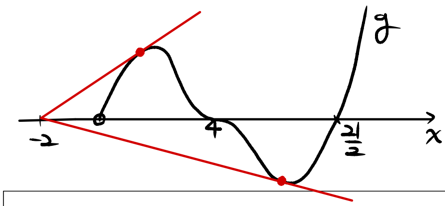
ii) $p<0$



으로 그려진다.

이제 조건 (나)를 보면, 접선 개수를 통해 개형을 결정하면 되는데

$p>0$인 경우는 다음처럼 무조건 기울기가 0이 아닌 접선이 2개 존재한다.



$\therefore p<0$

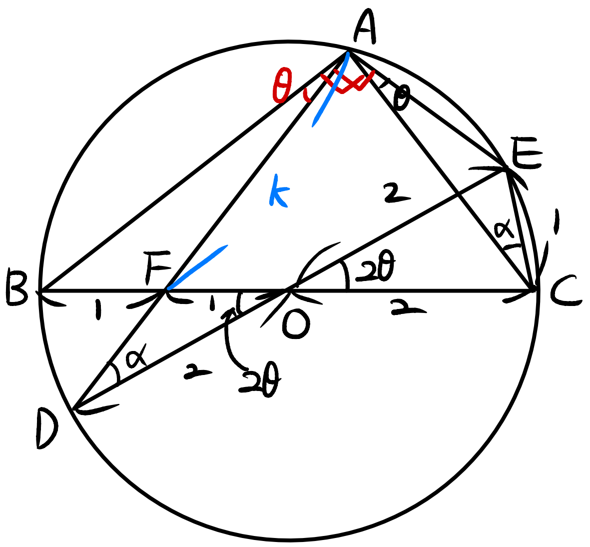
다음 page

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물 (개인계정)

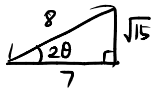
21번 이어서 …①

sol$_2$) 미적분 선택자긴 한데 할선 정리 몰라요 중학교 때 놓았음 ㅋㅋ 하는 분들을 위한 풀이



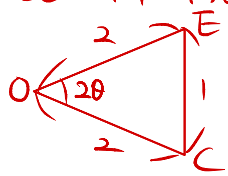
STEP 1. $\angle CAE=\theta$ 이므로 원주각과 중심각의 관계에 의해 $\angle EOC=2\theta \rightarrow \angle BOD=2\theta$ (맞꼭지각)

STEP 2. $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ 구하기 → $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\times\frac{1}{4}\times\frac{\sqrt{15}}{4} = \frac{\sqrt{15}}{8}$

→ 

$\therefore \sin 2\theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$, $\cos 2\theta = \frac{7}{8}$ $\left(0<2\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

↳ 물론 여기서 배각공식을 쓰지 않고 cos Law를 사용해

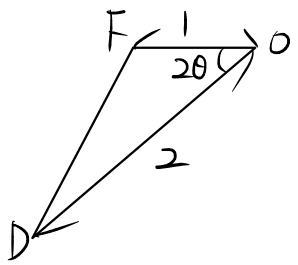


$1^2=2^2+2^2-8\cos 2\theta$

→ $\cos 2\theta = \frac{7}{8}$ 을 구해도 된다.

단, 미적분 선택자가 아니면 미적분 선택자에 비해 2θ꼴을 다룰일이 적어 불리하다고 한것

STEP 3. △ODF에 cos Law 적용

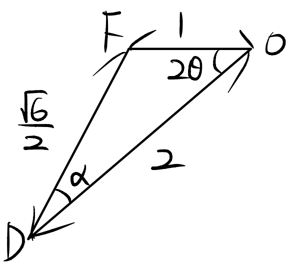


⇒ $\overline{DF}^2 = 1^2+2^2-4\cos 2\theta$

$= \frac{3}{2}$

$\therefore \overline{DF} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

STEP 4. $\angle ODF = \alpha$ 로 두고 마찬가지로 △ODF에 cos Law 적용해 $\cos\alpha$ 구하기



⇒ $1^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+2^2-4\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\alpha$

$\therefore \cos\alpha = \frac{9}{4\sqrt{6}}$

다음 page

STEP 5. 직각△ADE에서 $\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}} = \cos\alpha$: $\frac{k+\frac{\sqrt{6}}{2}}{4} = \frac{9}{4\sqrt{6}}$ 이고, 계산하면 $k=\sqrt{6}$ ㉠ $k^2=\boxed{6}$

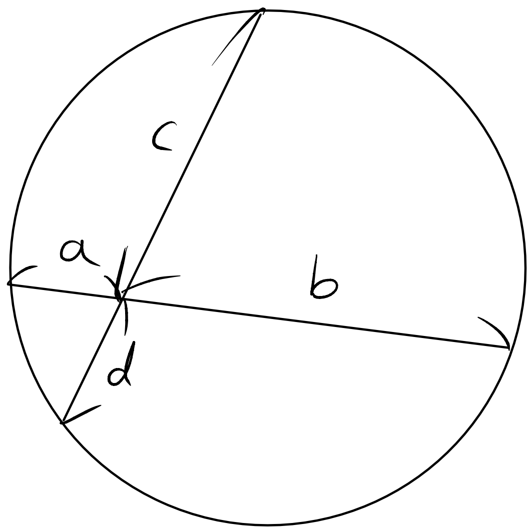
만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon (개인계정)
수안회: 한석원의눈물

21번 이어서 … ②

Sol₃) 할선 정리를 알아요!

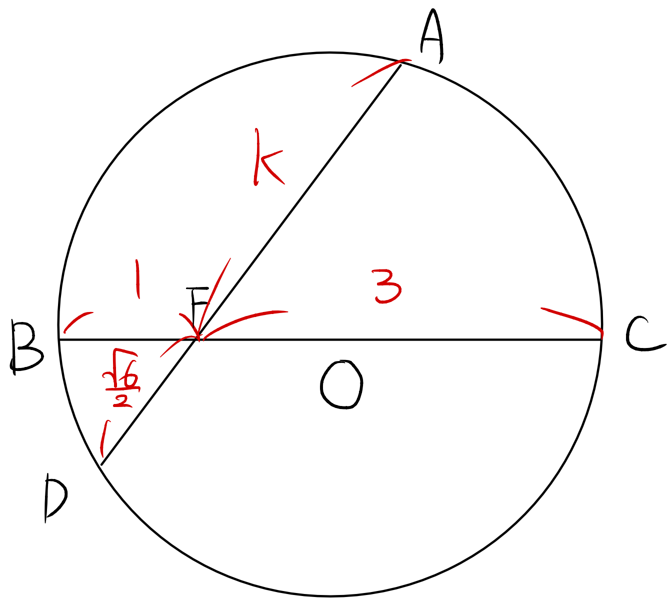
Sol₂)의 STEP 3까지 구했다고 생각하자.

할선 정리란,



일 때 $ab=cd$인 정리이다.

이 문제에 대입해보면



이므로 $1\times3=\frac{\sqrt{6}}{2}k$

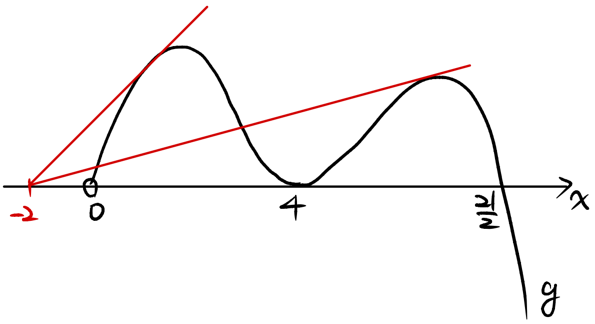
$\therefore k=\sqrt{6}$이고,

㉮ $k^2=\boxed{6}$

22번 이어서

만든 놈: plancoach_team
crazy_hansuckwon
수만휘: 한석원의눈물 (개인계정)

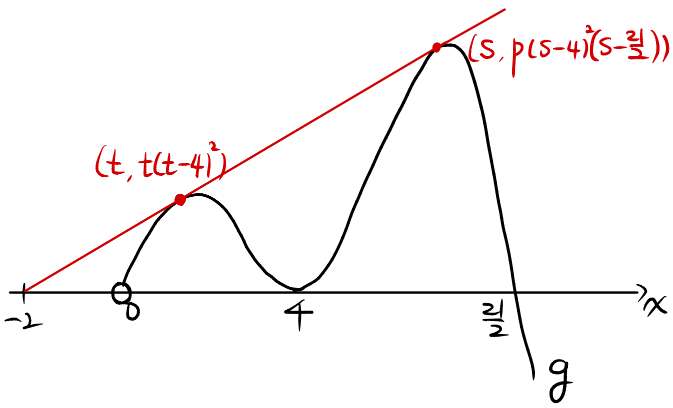
곧, $p<0$이고 개형을 그려보면 일반적인 경우엔



처럼 접선이 2개가 존재한다.

⇒ 접선이 1개가 되려면? 두 접선이 겹쳐질 때!

∴ 올바른 개형은



이다.

$(-2,0)\sim(t,t(t-4)^2)$까지의 평균변화율 $=(t,t(t-4)^2)$에서의 $y=x(x-4)^2$의 순간변화율이므로

$y'=(x-4)^2+2x(x-4)$
$=(x-4)(3x-4)$

$$\Rightarrow \frac{t(t-4)^{\cancel{2}}}{t+2}=\cancel{(t-4)}(3t-4)\quad (t\neq 4)$$

⇒ $t(t-4)=(t+2)(3t-4)$ 이므로 계산하면 $t=1$이고, 그때의 접선기울기 : 3이다.

똑같은 논리로

$(-2,0)\sim(s,p(s-4)^2(s-\frac{21}{2}))$까지의 평·변 $=(s,p(s-4)^2(s-\frac{21}{2}))$에서의 $y=p(x-4)^2(x-\frac{21}{2})$의 순·변이고, 그 값이 3이므로

$y'=2p(x-4)(x-\frac{21}{2})+p(x-4)^2$
$=p(x-4)(3x-25)$

$$\Rightarrow \frac{p(s-4)^{\cancel{2}}(s-\frac{21}{2})}{s+2}=p\cancel{(s-4)}(3s-25)\quad (s\neq 4)$$

$\Rightarrow (s-4)(s-\frac{21}{2})=(s+2)(3s-25)$

⇒ 열심히 전개해서 풀어보면 기적처럼 $s=8$ ($\because s>4$)이 나온다.

곧 $f'(8)=p(8-4)(3\cdot 8-25)=3$이므로 $p=-\frac{3}{4}$

$\therefore f(x)=-\frac{3}{4}(x-4)^2(x-\frac{21}{2}) \longrightarrow$ ㉠ $g(10)=f(10)=\frac{27}{2}$, $p+q=\boxed{29}$