14. [문항코드]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=0$, $f(1)=0$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(t)$를

$$g(t)=\int_t^{t+1} f(x)dx-\int_0^1 |f(x)|dx$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $g(0)=0$이면 $g(-1)<0$이다.

ㄴ. $g(-1)>0$이면 $f(k)=0$을 만족시키는 $k<-1$인 실수 k가 존재한다.

ㄷ. $g(-1)>1$이면 $g(0)<-1$이다.

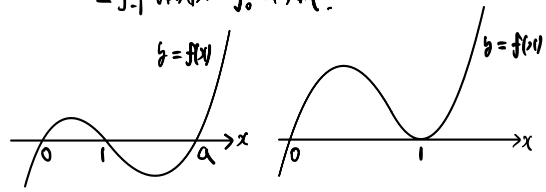
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ $g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$

$=0 \longrightarrow [0,1]$에서 $f(x)\ge 0$.

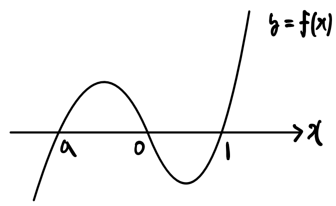
$g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$

$=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1 f(x)dx$.



$\int_{-1}^0 f(x)dx<0$, $\int_0^1 f(x)dx>0 \longrightarrow g(-1)<0$,

ㄴ $\begin{cases} g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx>0, \\ \int_0^1|f(x)|dx>0 \end{cases} \longrightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx>0$.



$a=-1 \longrightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx=\int_0^1|f(x)|dx -$

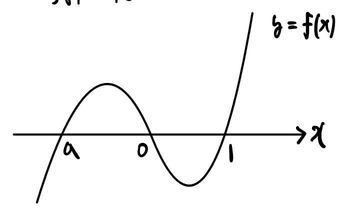
$\longrightarrow g(-1)=0$.

$a\ge -1 \longrightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx \le \int_0^1|f(x)|dx$

$\longrightarrow g(-1)\le 0$.

$\longrightarrow g(-1)>0$일 때, $f(k)=0$ $(k<-1)$인 실수 k 존재.

ㄷ $\begin{cases} g(-1)=\int_{-1}^0 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx>1, \\ \int_0^1|f(x)|dx>0 \end{cases} \longrightarrow \int_{-1}^0 f(x)dx>1$.



$g(0)=\int_0^1 f(x)dx-\int_0^1|f(x)|dx$

$=2\int_0^1 f(x)dx<-1$.

$g(-1)=\int_{-1}^0 x(x-1)(x-a)dx+\int_0^1 x(x-1)(x-a)dx$

$=\int_{-1}^1 x(x-1)(x-a)dx$

$=2\int_0^1\{-(a+1)x^2\}dx$

$=-\frac{2}{3}(a+1)>1 \longrightarrow a<-\frac{5}{2}$.

$g(0)=2\int_0^1 f(x)dx$

$=2\int_0^1 x(x-1)(x-a)dx$

$=2\left[\frac{x^4}{4}-\frac{a+1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^1$

$=\frac{a}{3}-\frac{1}{6}<\frac{1}{3}\cdot\frac{-5}{2}-\frac{1}{6}=-1$.

⑤

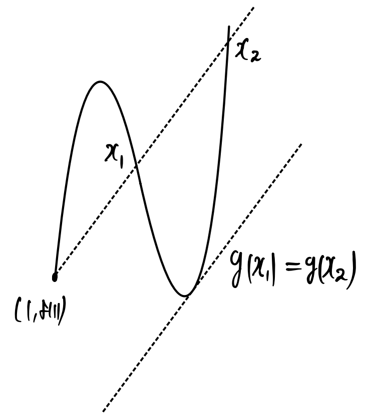
19. [문항코드]

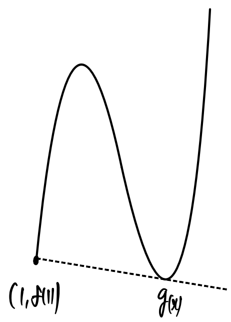
최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값을 구하시오.

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(1)+(x-1)f'(g(x))$이다.
>
> (나) 함수 $g(x)$의 최솟값은 $\frac{5}{2}$이다.
>
> (다) $f(0)=-3$, $f(g(1))=6$

[4점]

$$\underbrace{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}_{\text{평균변화율}} = \overbrace{f'(g(x))}^{\text{순간변화율}} \quad (x\neq 1)$$





→ 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 접점 $(g(x), f(g(x)))$를 지날 때, 함수 $g(x)$가 최소이다.

→ $f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+mx+n$.

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}f'(g(x))$$

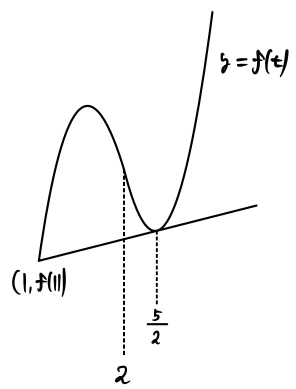
→ $f'(1)=f'(g(1))$

→ $g(1)=3$ ($\because$ $f(x)$의 그래프는 점 $(2, f(2))$에 대하여 대칭, $g(x)\geq\frac{5}{2}$)

→ $f(x)=(x-1)\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{3}{4}x+\frac{13}{4}$.

→ $f(4)=13$.

13



14. [문항코드]

양의 실수 t에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-3t^2x$$

라 할 때, 닫힌구간 $[-2,\ 1]$에서 두 함수 $f(x)$, $|f(x)|$의 최댓값을 각각 $M_1(t)$, $M_2(t)$라 하자. 함수

$$g(t)=M_1(t)+M_2(t)$$

에 대하여 <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

〈보 기〉

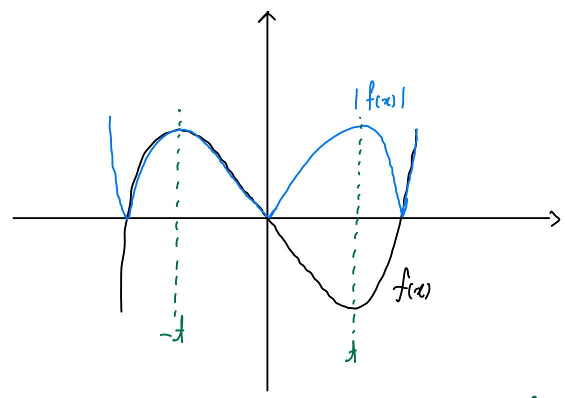
ㄱ. $g(2)=32$

ㄴ. $g(t)=2f(-t)$를 만족시키는 t의 최댓값과 최솟값의 합은 3이다.

ㄷ. $\lim_{h\to 0+}\dfrac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}-\lim_{h\to 0-}\dfrac{g\left(\frac{1}{2}+h\right)-g\left(\frac{1}{2}\right)}{h}=5$

[4점]

① ㄱ　　② ㄷ　　③ ㄱ, ㄴ　　④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ



$t>2,\ g(t)=f(-2)+f(-2)=2f(-2)$

$1\le t\le 2,\ g(t)=f(-t)+f(-t)=2f(-t)$

$\frac{1}{2}\le t<1,\ g(t)=f(-t)-f(-2)$

$0<t<\frac{1}{2},\ g(t)=f(1)-f(-2)$

ㄱ. $g(t)=4t^3 \Rightarrow g(2)=32$

ㄴ. $1\le t\le 2 \Rightarrow 2+1=3$

ㄷ. $h\to 0+,\ g(t)=2t^3-6t^2+8$

$g'(t)=6t^2-12t$

$t=\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{9}{2}$

$h\to 0-,\ g(t)=-9t^2+9$

$g'(t)=-18t$

$t=\frac{1}{2}\to -9$

$\therefore -\frac{9}{2}+9=\frac{9}{2}\neq 5$

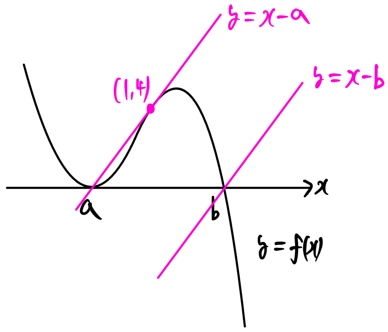
23. [문항코드]

삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[4점]



$a=-3$

$f(x)=k\cdot(x+3)\cdot(x-1)^2+x-3 \quad (k<0)$

$=k\cdot(x+3)^2\cdot(x-b)$

→ $f'(0)=1-5k>1$, $k=-\frac{1}{16}$, $b=5$

→ $f(0)=\frac{45}{16}$. 61

19. [문항코드]

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 $f(x)=x$이다.
> (나) 어떤 상수 a, b에 대하여 구간 $[0,\ \infty)$에서
> $f(x+1)-xf(x)=ax+b$이다.

$60\times\displaystyle\int_1^2 f(x)\,dx$의 값을 구하시오.

[4점]

$[0,1]$ $\quad f(x+1)=x^2+ax+b$

$\displaystyle\lim_{x\to1-} f(x)=\lim_{x\to1+} f(x) \longrightarrow 1=b.$

$\displaystyle\lim_{x\to1-} f'(x)=\lim_{x\to1+} f'(x) \longrightarrow 1=a.$

$\longrightarrow [1,2] \quad f(x)=(x-1)^2+(x-1)+1.$

$$\longrightarrow \int_1^2 f(x)\,dx=\int_1^2\{(x-1)^2+(x-1)+1\}\,dx$$
$$=\int_0^1 (x^2+x+1)\,dx$$
$$=\frac{11}{6}.$$

110

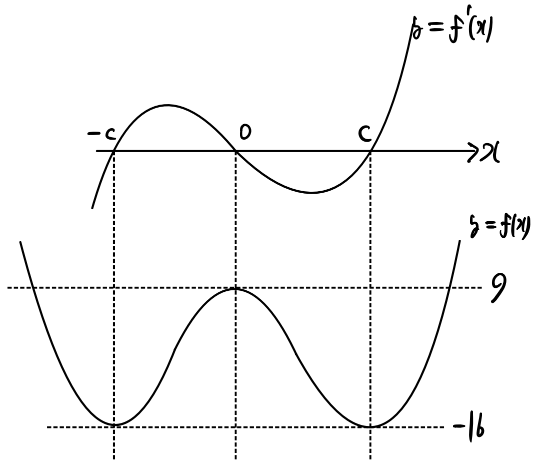
14. [문항코드]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$에 대하여 방정식 $f'(x)=0$의 서로 다른 세 실근 α, 0, $\beta(\alpha<0<\beta)$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=9$는 서로 다른 세 실근을 갖는다.
> (나) $f(\alpha)=-16$

함수 $g(x)=|f'(x)|-f'(x)$에 대하여 $\int_0^{10} g(x)dx$의 값은? [4점]

① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56



$f(x)=(x+c)^2(x-c)^2-16$, $f(0)=c^4-16=9 \longrightarrow c^2=5$

$\longrightarrow f(x)=(x^2-5)^2-16$.

$$\int_0^{10}\{|f'(x)|-f'(x)\}dx=\int_0^{\sqrt5}-2f'(x)\,dx$$
$$=-2\{f(\sqrt5)-f(0)\}$$
$$=-2(-16-9)$$
$$=50.$$

②

23. [문항코드]

실수 a에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=3x+a,\ g(x)=\int_{2}^{x}(t+a)f(t)dt$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $h(-1)$의 최솟값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 어떤 점에서의 접선이 x축이다.
(나) 곡선 $y=|h(x)|$가 x축과 평행한 직선과 만나는 서로 다른 점의 개수의 최댓값은 4이다.

[4점]

$g(x)=\int_2^x(3t^2+4at+a^2)dt$

$=x^3+2ax^2+a^2x-(2a^2+8a+8)$

$g(2)=0 \longrightarrow g(x)=(x-2)\cdot\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

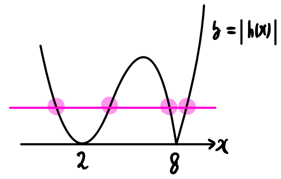
$h(x)=(3x+a)(x-2)\cdot\{x^2+2(a+1)x+(a+2)^2\}$

(가) $\longrightarrow$ $h(k)=h'(k)=0$ 인 k 존재.

$\longrightarrow (x-k)^2 \in h(x)$.

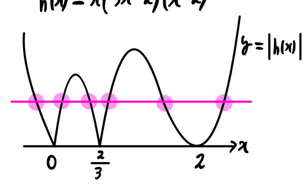
1) $k=2$

$3x+a=3x-6 \longrightarrow h(x)=3(x-2)^3(x-8)$



$h(-1)=729$.

$(x-2)\in x^2+2(a+1)x+(a+2)^2 \longrightarrow a=-2,\ h(x)=x(3x-2)(x-2)^2$



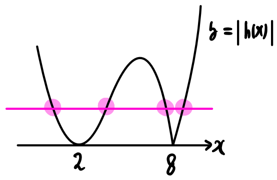
(나)에 모순.

2) $k=-\frac{a}{3}\ (a\neq-6)$

$(x+\frac{a}{3})^2\in h(x) \longrightarrow x+\frac{a}{3}\in x^2+2(a+1)x+(a+2)^2$

$\longrightarrow a=-\frac{3}{2}$

$\longrightarrow h(x)=3(x-\frac{1}{2})^3\cdot(x-2)$



$\longrightarrow h(-1)=\frac{243}{8}$.

3) $x^2+2(a+1)x+(a+2)^2=(x-k)^2$

$\longrightarrow a+1=-k,\ (a+2)^2=k^2$

$\longrightarrow a=-\frac{3}{2}$: (2)와 동일.

251

21. [문항코드]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 구간 $(-\infty, t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_1이라 하고, 구간 $[t, \infty)$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 m_2라 할 때,

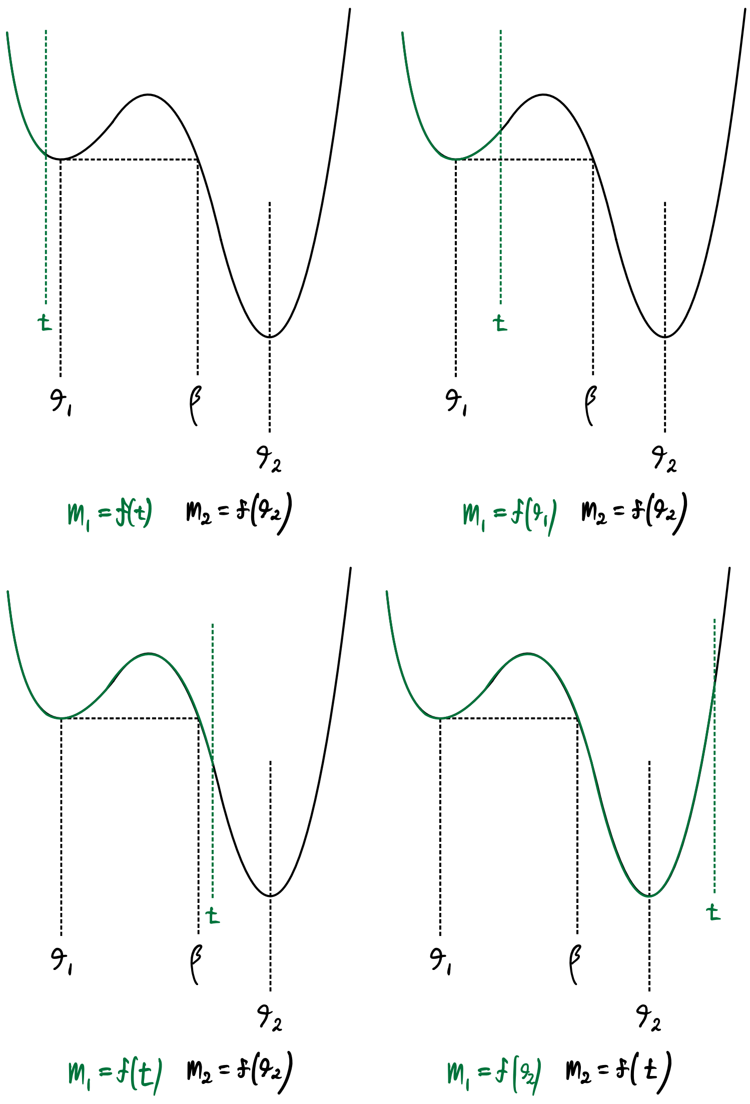
$$g(t) = m_1 - m_2$$

라 하자. $k > 0$인 상수 k와 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $g(t) = k$를 만족시키는 모든 실수 t의 값의 집합은 $\{t \mid 0 \le t \le 2\}$이다.

$g(4) = 0$일 때, $k + g(-1)$의 값을 구하시오.

[4점]



$$g(t) = \begin{cases} f(t) - f(q_2) & (t \le q_1) \\ f(q_1) - f(q_2) & (q_1 < t \le \beta) \\ f(t) - f(q_2) & (\beta < t \le q_2) \\ f(q_2) - f(t) & (t > q_2) \end{cases}$$

$f(q_1) - f(q_2) = k > 0$, $q_1 = 0$, $\beta = 2$.

$f(x) = x^2(x-2)(x-a) + f(0)$.

$t > 2 \longrightarrow f(t) \ge f(q_2)$, $f(t) - f(q_5) = 0$인 t는 q_5.

$g(4) = 0 \longrightarrow q_2 = 4$

$\longrightarrow f'(4) = 0 \longrightarrow a = 5 \longrightarrow k = f(0) - f(4) = 32$

$\longrightarrow g(-1) = 50$

82

17. [문항코드]

함수 $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+10x$에 대하여 x에 대한 방정식

$$f(x)+|f(x)+x|=6x+k$$

의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합을 구하시오.

[4점]

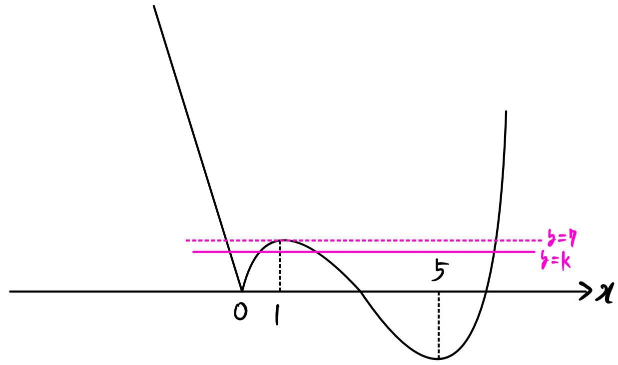
$$f(x)+x=\frac{x^3}{2}-\frac{9}{2}x^2+11x$$

$$=\frac{x(x^2-9x+22)}{2} \to |f(x)+x|=\begin{cases}-\frac{x(x^2-9x+22)}{2} & (x<0)\\ \frac{x(x^2-9x+22)}{2} & (x\ge 0)\end{cases}$$

$\to$ $x<0$: $k=-7x$

$x\ge 0$: $k=2f(x)-5x$

$=x^3-9x^2+15x$



$1\le k\le 6$. 21

15. [문항코드]

7)최고차항의 계수가 1이고 $f'(0)=f'(2)=0$인 삼차함수 $f(x)$와 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x)-f(0) & (x \leq 0) \\ f(x+p)-f(p) & (x > 0) \end{cases}$$

이라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $p=1$일 때, $g'(1)=0$이다.

ㄴ. $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하도록 하는 양수 p의 개수는 1이다.

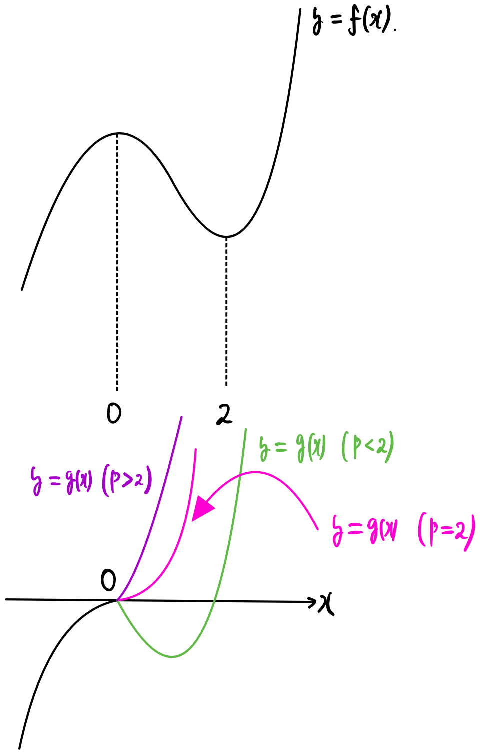
ㄷ. $p \geq 2$일 때, $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)dx \geq 0$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

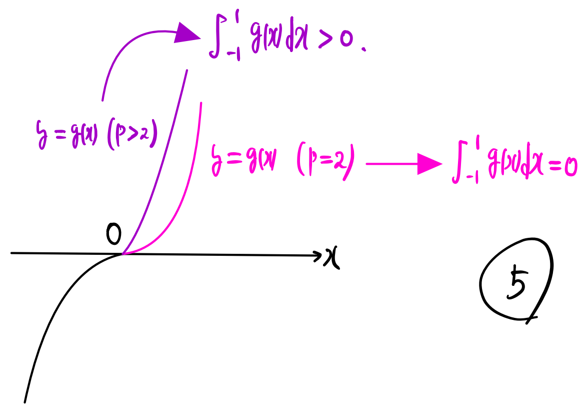
ㄱ) $g'(1) = f'(2)$

$= 0$

ㄴ)



ㄷ)



5

18. [문항코드]

최고차항의 계수가 1이고 $f(0)=\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<-2) \\ f(x)+8 & (x\geq -2) \end{cases}$$

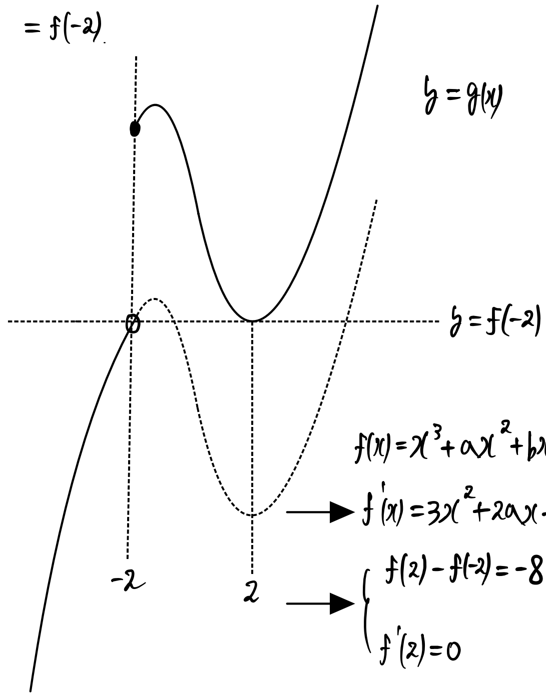
라 하자. 방정식 $g(x)=f(-2)$의 실근이 2뿐일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은?

[4점]

① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4 ④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

$g(2)=f(2)+8$

$=f(-2)$.



$f(x)=x^3+ax^2+bx+\frac{1}{2}$

$\rightarrow f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\rightarrow \begin{cases} f(2)-f(-2)=-8 \\ f'(2)=0 \end{cases}$

$\rightarrow f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+\frac{1}{2}$.

$\rightarrow f'(x)=3(x+1)(x-2)$

$\rightarrow f(-1)=4$.

③

12. [문항코드]

최고차항의 계수가 -1인 이차함수 $f(x)$와 상수 a에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ a-f(-x) & (x\geq 0) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=-4$
(나) 함수 $g(x)$의 극솟값은 0이다.

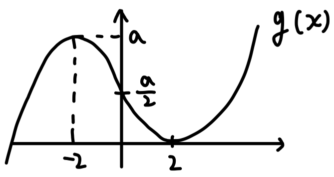
$g(-a)$의 값은?

[4점]

① -40 ② -36 ③ -32 ④ -28 ⑤ -24

$g(x)$: $\left(0, \frac{a}{2}\right)$ 점대칭

(가)에서 $g'(0)=f'(0)=-4$: $f(x)=-x^2-4x+\frac{a}{2}$



$g(-2)=f(-2)=-4+8+\frac{a}{2}=a$, $a=8$

$\therefore f(x)=-x^2-4x+4$, $g(-a)=f(-8)=-28$

11. [문항코드]
삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선과 곡선 $y=xf(x)$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선이 일치할 때, $f'(2)$의 값은?

[4점]

① -18 ② -17 ③ -16 ④ -15 ⑤ -14

$y=f'(0)\cdot(x-0)+f(0)$

$=f'(0)\cdot x$

$y=\{f(1)+f'(1)\}\cdot(x-1)+2$

$=\{2+f'(1)\}\cdot x-f'(1)$

$\longrightarrow f'(0)-f'(1)=2,\ f'(1)=0,\ f(0)=0,\ f(1)=2$

$\longrightarrow f(x)=-2x^3+2x^2+2x$ 5

24. [문항코드]

최고차항의 계수가 4이고 $f(0)=f'(0)=0$을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt+5 & (x<c) \\ \left|\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt-\frac{13}{3}\right| & (x\ge c)\end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 c의 개수가 1일 때, $g(1)$의 최댓값은?

[4점]

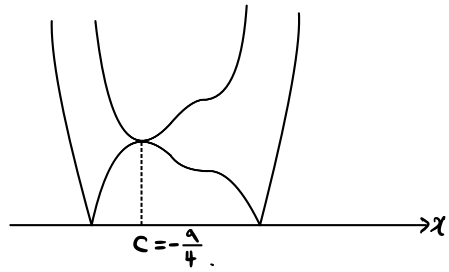
① 2 ② $\frac{8}{3}$ ③ $\frac{10}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{14}{3}$

$f(x)=4x^3+ax^2$, $\int_0^x f(t)dt=x^4+\frac{a}{3}x^3$

→ $g(x)=\begin{cases} x^4+\frac{a}{3}x^3+5 & (x<c) \\ \left|x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right| & (x\ge c)\end{cases}$

→ $y=x^4+\frac{a}{3}x^3+5$의 극소값과

$y=-\left(x^4+\frac{a}{3}x^3-\frac{13}{3}\right)$의 극댓값이 서로 같아야 c가 1개.



→ $\begin{cases} a=4 \\ c=-1\end{cases}$, $\begin{cases} a=-4 \\ c=1\end{cases}$

$g(1)$ 2 $\frac{14}{3}$

⑤

22. [문항코드]

최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 있다.
실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)-t|$라 할 때,

$$\lim_{x \to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$$

의 값이 존재하는 서로 다른 실수 k의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

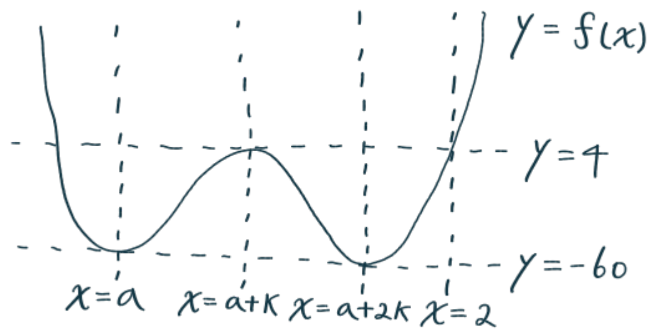
(가) $\lim_{t \to 4+} h(t)=5$
(나) 함수 $h(t)$는 $t=-60$과 $t=4$에서만 불연속이다.

$f(2)=4$이고 $f'(2)>0$일 때, $f(4)+h(4)$의 값을 구하시오.

[4점]

729

$\lim_{x \to k}\frac{g(x)-g(k)}{|x-k|}$의 값 존재 ⤳ 극점 or 첨점



$f(x)-(-60)=(x-a)^2(x-a-2k)^2$

$4-(-60)=k^4 \rightsquigarrow k=2\sqrt{2}$

$1:\sqrt{2}=\underbrace{(a+2k)-(a+k)}_{k=2\sqrt{2}}:\underbrace{2-(a+k)}_{4}$

$\therefore f(x)=4+(x-2)(x+2)^2(x+6)$

$\therefore f(4)+h(4)=724+5$

$=729$

18. [문항코드]

양수 a와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x \{f'(t+a)\times f'(t-a)\}dt$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$과 $x=\frac{13}{2}$에서만 극값을 갖는다

$f(0)=-\frac{1}{2}$일 때, $a\times f(1)$의 값을 구하시오.

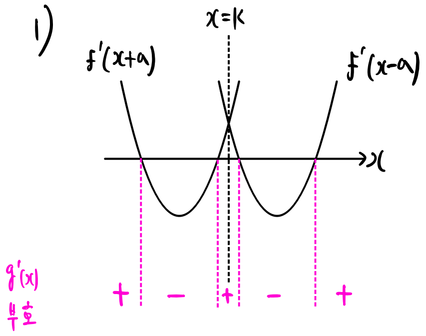
[4점]

$g'(x)=f'(x+a)\cdot f'(x-a)$, $g(0)=0$.

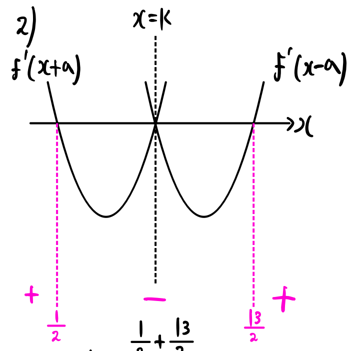
$f'(x)$의 그래프를 x축의 방향으로, 서로 반대방향으로 $|a|$만큼 평행이동.

→ $f'(x)$의 그래프의 대칭축을 $x=k$라 하면, $f'(x+a)$, $f'(x-a)$의 그래프의 교점의 x좌표는 k뿐.

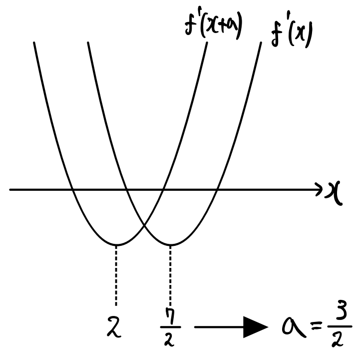
1)



2)



→ $k=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{13}{2}}{2}=\dfrac{7}{2}$.



→ $a=\frac{3}{2}$.

$f'(x+\frac{3}{2})=3(x-\frac{1}{2})(x-\frac{7}{2})$

↓

$f'(x)=3(x-2)(x-5)$

↓

$\int_0^1 f'(x)dx=f(1)-(-\frac{1}{2})$

$=\int_0^1(3x^2-21x+30)dx$

$=\frac{41}{2}$.

30

22. [문항코드]

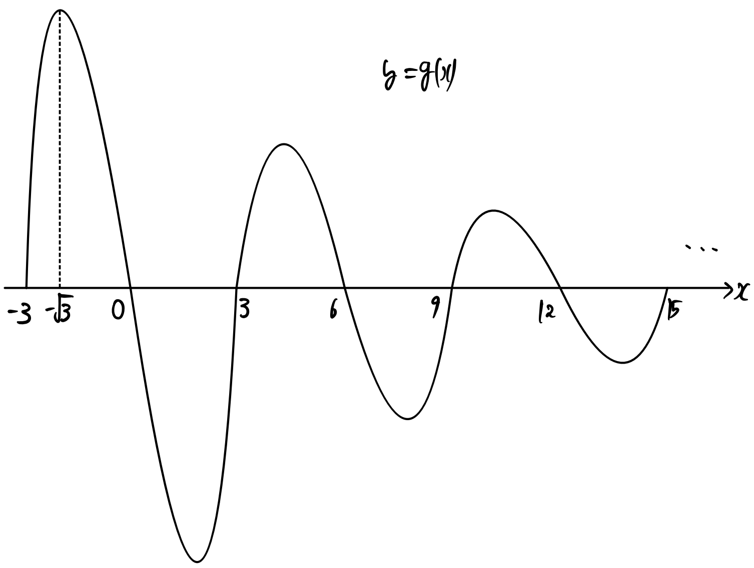
삼차함수 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}x(x-3)(x+3)$에 대하여 $x\geq -3$에서 정의된 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (-3\leq x\leq 3) \\ \dfrac{1}{k+1}f(x-6k) & (6k-3\leq x<6k+3) \end{cases}$$

(단, k는 모든 자연수)

이다. 자연수 n에 대하여 직선 $y=n$과 함수 $y=g(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{12} a_n$의 값을 구하시오.

[4점]



k+1이 12의 양의 약수가 될 때,

g(x)의 극댓값은 자연수.

k	1	2	3	5	11
g(x)의 극댓값	6	4	3	2	1.

$\longrightarrow a_1 = 2\cdot 11+1 = 23$

$a_2 = 2\cdot 5+1 = 11$

$a_3 = 2\cdot 3+1 = 7$

$a_4 = 2\cdot 2+1 = 5$

$a_5 = 2\cdot 2 = 4$

$a_6 = 2\cdot 1+1 = 3$

$a_n = 2\cdot 1 = 2 \quad (7\leq n\leq 11)$

$a_{12} = 1.$

$\longrightarrow \sum_{n=1}^{12} a_n = 64.$

64

16. [문항코드]

닫힌구간 $[0,\ 1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\ f(1)=1,\ \int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)dx$의 값은?

(가) $g(x)=\begin{cases}-f(x+1)+1 & (-1<x<0)\\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

[4점]

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

$$\int_{-3}^{2} g(x)dx = \int_{-3}^{-1} g(x)dx + \int_{-1}^{1} g(x)dx + \int_{1}^{2} g(x)dx$$

$$= 2\int_{-1}^{1} g(x)dx + \int_{-1}^{0} g(x)dx$$

$$= 2\left(\int_{-1}^{0}\{1-f(x+1)\}dx + \int_0^1 f(x)dx\right) + \int_{-1}^{0}\{1-f(x+1)\}dx$$

$$= 3\int_{-1}^{0}\{1-f(x+1)\}dx + 2\int_0^1 f(x)dx$$

$$= 3-3\int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{17}{6}.$$

2

17. [문항코드]

최고차항의 계수가 정수인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)=1$, $f'(1)=0$이다. 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)+|f(x)-1|$$

이라 할 때, 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시키도록 하는 함수 $f(x)$의 개수를 구하시오.

> (가) 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프의 모든 교점의 x좌표의 합은 3이다.
>
> (나) 모든 자연수 n에 대하여 $n<\int_0^n g(x)dx<n+16$이다.

[4점]

$f(x)=a(x-1)^2(x-b)+1$ (a는 정수)

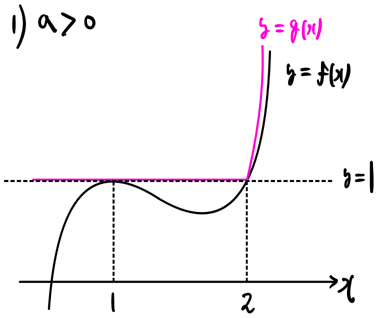
$$g(x)=\begin{cases} 2f(x)-1 & (f(x)\ge 1) \\ 1 & (f(x)<1) \end{cases}$$

$$f(x)=g(x) \rightarrow \begin{cases} f(x)=2f(x)-1 & (f(x)\ge 1) \\ f(x)=1 & (f(x)<1) \end{cases} \rightarrow f(x)=1.$$

→ $f(x)=1$의 서로 다른 모든 실근의 합 : 3.

→ $f(x)=a(x-1)^2(x-2)+1$

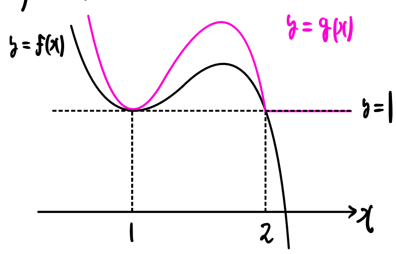
1) $a>0$



$\int_0^1 g(x)dx=1$, $\int_0^2 g(x)dx=2$.

→ (나)에 모순.

2) $a<0$



$\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 dx+\int_0^1\{2f(x)-2\}dx>1$.

$\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2 dx+\int_0^2\{2f(x)-2\}dx>2$.

$n\ge 3 \rightarrow \int_2^n g(x)dx=n-2$.

$$\rightarrow \int_0^n g(x)dx=\int_0^2 g(x)dx+\int_2^n g(x)dx$$
$$=\int_0^2\{2f(x)-2\}dx+n>n.$$

$$\rightarrow n<\int_0^2\{2f(x)-2\}dx+n<n+16 \rightarrow 0<\int_0^2\{f(x)-1\}dx<8$$

$$\int_0^2\{f(x)-1\}dx=\int_0^2 a(x-1)^2(x-2)dx$$
$$=\int_{-1}^1 ax^2\cdot(x-1)dx$$
$$=2a\int_0^1 -x^2dx$$
$$=-\frac{2a}{3}. \rightarrow 0<-\frac{2}{3}a<8$$
$$\rightarrow -12<a<0.$$

11

20. [문항코드]

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
(나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\dfrac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

[4점]

$h(k)=0 \rightarrow |f(k)|+g(k)=0.$

$\rightarrow g(k)\le 0 \rightarrow \begin{cases} g(k)=0 \rightarrow f(k)=0 \\ g(k)<0 \rightarrow f(k)\neq 0. \end{cases}$

$g(x)=f'(0)x.$

$g(k)=f(k)=0 \rightarrow f'(0)\cdot k=0 \rightarrow f'(0)=0$

$\rightarrow f(k)=f(0)=f'(0)=0$

$\rightarrow f(x)=px^2(x-k) \quad (p\neq 0)$

$\rightarrow$ $|f(x)|$는 $x=k$에서 미분가능하지 않으므로, $h(x)$ 위의 점 $(k,0)$에서의 접선이 정의되지 않는다.

$g(k)<0,\ f(k)<0 \rightarrow \begin{cases} x=k \text{ 근방에서 } h(x)=-f(x)+g(x) \\ f(k)=g(k) \\ h'(k)=0 \end{cases}$

$\rightarrow f'(k)=g'(k)$

$\rightarrow$ $y=f(x)$, $y=g(x)$는 $x=k$에서 접한다.

$\rightarrow$ $k\neq 0$ 이므로 모순.

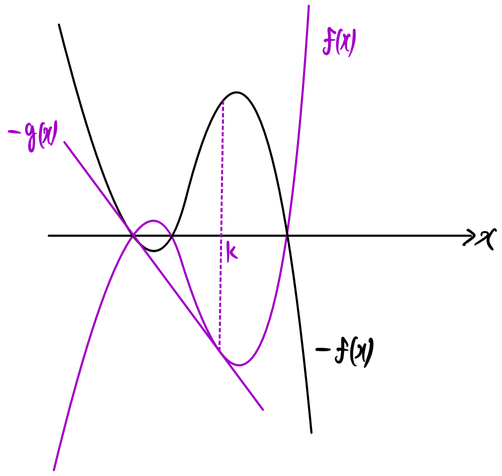
$g(k)<0,\ f(k)>0 \rightarrow \begin{cases} x=k \text{ 근방에서 } h(x)=f(x)+g(x) \\ f(k)+g(k)=0 \\ h'(k)=0 \end{cases}$

$\rightarrow f'(k)+g'(k)=0$

$\rightarrow$ $y=-f(x)$, $y=g(x)$는 $x=k$에서 접한다.

$\rightarrow$ $y=f(x)$, $y=-g(x)$는 $x=k$에서 접한다.

1) $p>0$



20. [문항코드]

삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0,\ 0)$에서의 접선의 방정식을 $y=g(x)$라 할 때, 함수 $h(x)$를

$$h(x)=|f(x)|+g(x)$$

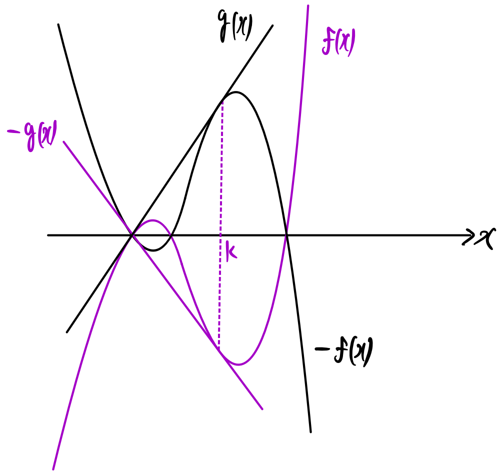
라 하자. 함수 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(k,\ 0)(k\neq 0)$에서의 접선의 방정식은 $y=0$이다.
> (나) 방정식 $h(x)=0$의 실근 중에서 가장 큰 값은 12이다.

$h(3)=-\dfrac{9}{2}$일 때, $k\times\{h(6)-h(11)\}$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이다.)

[4점]

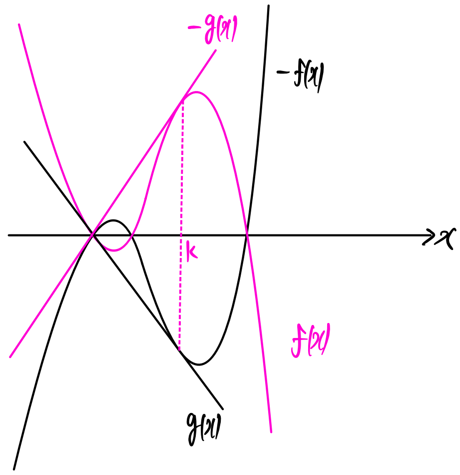
1) $p>0$



$h(x)=0 \longrightarrow |f(x)|=-g(x)$

$\longrightarrow |f(x)|=-g(x)$인 x는 0뿐.

2) $p<0$



$h(x)=0 \longrightarrow |f(x)|=-g(x)$

$\longrightarrow |f(x)|=-g(x)$인 x의 최댓값이 12일 수 있다.

$\longrightarrow f(x)-(-g(x))=px(x-k)^2,\ -f(x)+g(x)=-px^2(x-12)$

$\longrightarrow \begin{cases} f(x)+g(x)=0\text{인 } x:\ 0,\ k,\ k \\ -f(x)+g(x)=0\text{인 } x:\ 0,\ 0,\ 12 \end{cases} \longrightarrow k=6.$

$\longrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left[\{f(x)+g(x)\}-\{-f(x)+g(x)\}\right]$

$=px(x^2-12x+18)$

$\longrightarrow h(3)=f(3)+g(3)=27p=-\frac{9}{2} \longrightarrow p=-\frac{1}{6}.$

$\longrightarrow h(6)=f(6)+g(6)=0,\ h(11)=-f(11)+g(11)=-\frac{121}{6}\ (\because f(6)>0,\ f(11)<0)$

121