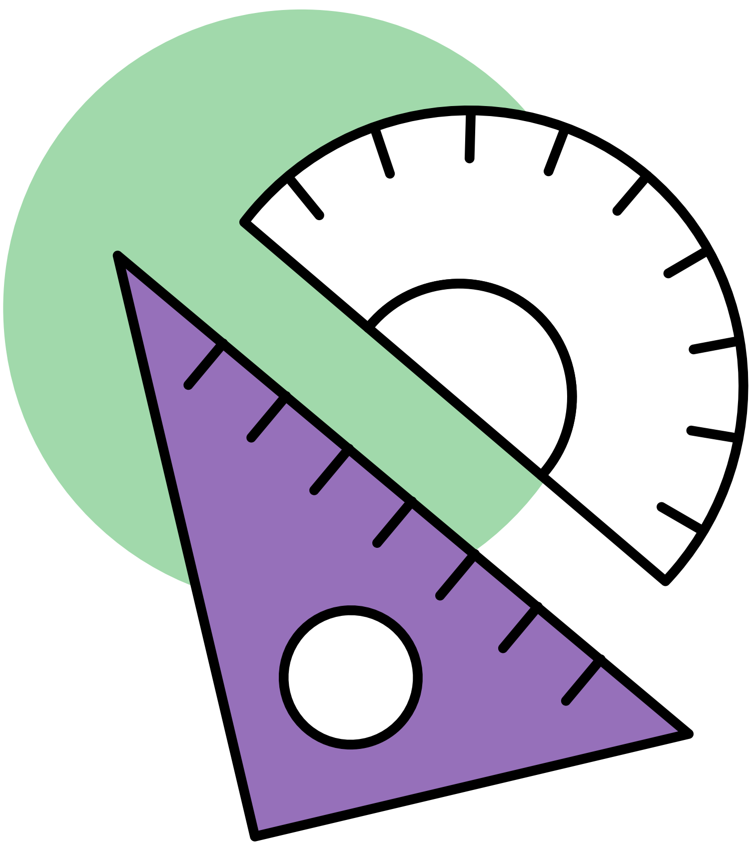
모의 논술
- 2차

제한 시간: 90분

건직쌤



[문제1]
동일한 편지 12통을 서로 다른 5개의 우체통에 넣으려고 한다. 다음 물음에 답하시오.

[1-1] 남는 편지 없이 모두 우체통에 넣는 경우의 수를 구하시오. (빈 우체통은 존재해도 된다.) [9점]

[1-2] 남는 편지가 없고 빈 우체통이 2개 이하가 되도록 편지를 넣는 경우의 수를 구하시오. [10점]

[1-3] 남는 편지와 빈 우체통이 존재해도 되도록 편지를 넣는 경우의 수를 구하시오. [13점] (단, 적어도 하나의 편지는 우체통에 들어가야 한다.)

[문제2]

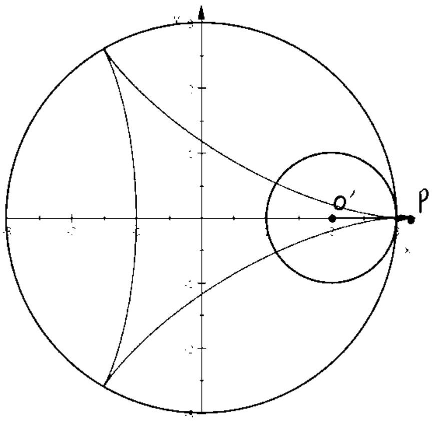
삼각함수의 덧셈 정리

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

이를 응용하면 $\cos(\alpha+\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos2\alpha}{2}$로 표현가능하다.



그림과 같이 $C_1 : x^2 + y^2 = 9$, $C_2 : (x-2)^2 + y^2 = 1$을 만족하는 원 C_1, C_2가 존재한다. 이때 원 C_2위에 점 $P(3,0)$이 있다. 이때 원 C_2가 C_1의 둘레를 따라 C_1의 내부를 반시계 방향으로 회전한다. 이때 점 P가 그리는 곡선은 그림과 같다. P가 다시 초기 위치 $(3,0)$으로 처음 돌아왔을 때 점 P가 그리는 곡선의 길이를 구하시오. [30점]

[문제3]

[3-1] 닫힌 구간 $[k, k+1]$에서 $\ln k \le \ln x \le \ln(k+1)$임을 보여라. (단, k는 자연수이다.) [10점]

[3-2] $\ln(1\times 2\times 3\times\cdots\times n) \le (n+1)\ln(n+1)-n \le \ln(1\times 2\times 3\times\cdots\times(n+1))$임을 보여라. (단, n은 자연수이다.) [13점]

[3-3] $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k+\ln(k+1)}{2} \le \int_{1}^{n+1}\ln x\,dx \le \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2k}+\ln k\right\}$임을 보여라. (단, n은 자연수이다.) [15점]

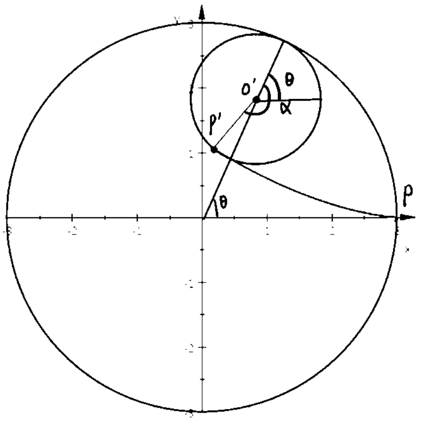
해설 - [문제1]

[1-1] 각 우체통에 들어 있는 편지의 수를 각각 x, y, z, w, s라고 하자. (x, y, z, w, s는 음이 아닌 정수) $x+y+z+w+s=12$를 만족하는 순서쌍 (x, y, z, w, s)의 개수이므로 ${}_5H_{12} = {}_{16}C_4 = 1820$

[1-2] 빈 우체통이 2개인 경우 ${}_5C_2 \times {}_3H_9 = 10 \times {}_{11}C_2 = 550$
빈 우체통이 1개인 경우 ${}_5C_1 \times {}_4H_8 = 10 \times {}_{11}C_3 = 825$
빈 우체통이 0개인 경우 ${}_5H_7 = {}_{11}C_4 = 330$
따라서 $550+825+330=1705$

[1-3] 보관함이 있다고 가정 하에 남는 편지를 전부 보관함에 담고 그 편지의 개수를 P라고 하자. (P는 음이 아닌 정수) $x+y+z+w+s+P=12, P \neq 12$를 만족하므로 구하고자 하는 경우의 수는 ${}_6H_{12}-1={}_{17}C_5-1=6188-1=6187$이다.

해설 - [문제2]



$\alpha = 3\theta \quad P'(x(\theta), y(\theta))$

$P'(2\cos\theta + \cos(2\pi - 2\theta), 2\sin\theta + \sin(2\pi - 2\theta))$

$P'(2\cos\theta + \cos 2\theta, 2\sin\theta - \sin 2\theta)$

$x'(\theta) = -2\sin\theta - 2\sin 2\theta$

$y'(x) = 2\cos\theta - 2\cos 2\theta$

$\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2} = \sqrt{8 + 8\sin\theta\sin 2\theta - 8\cos\theta\cos 2\theta}$

$= 2\sqrt{2} \times \sqrt{1 - \cos 3\theta} = 4\sqrt{\sin^2 \frac{3\theta}{2}}$

$\int_0^{2\pi} \sqrt{\{x'(\theta)\}^2 + \{y'(\theta)\}^2}\, d\theta = 4\int_0^{2\pi} \left(\sin\frac{3\theta}{2}\right) d\theta$

$= 4\left(\int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin\frac{3\theta}{2} d\theta - \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} \sin\frac{3\theta}{2} d\theta + \int_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi} \sin\frac{3\theta}{2} d\theta\right)$

$= 4\left(\left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right]_0^{\frac{2}{3}\pi} - \left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right]_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{4}{3}\pi} + \left[-\frac{2}{3}\cos\frac{3\theta}{2}\right]_{\frac{4}{3}\pi}^{2\pi}\right)$

$= 4\left(\frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3}\right) = 16$

해설 - [문제3]

[3-1] $y=\ln x\ (x>0)$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}>0$이므로 $x>0$에서 함수 $y=\ln x$는 증가함수이다. 닫힌 구간 $[k,k+1]$에서 $k \le x \le k+1$이므로 $\ln k \le \ln x \le \ln(k+1)$이 성립한다.

[3-2] [3-1]의 부등식에서 $\displaystyle\int_k^{k+1}\ln k\,dx \le \int_k^{k+1}\ln x\,dx \le \int_k^{k+1}\ln(k+1)dx$이 성립함을 알 수 있다.

$\displaystyle\ln k \le \int_k^{k+1}\ln x\,dx \le \ln(k+1)$에 $k=1,2,3,\cdots,n$을 넣어보자.

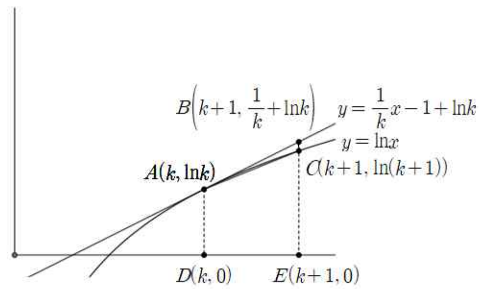
$$\begin{array}{r|l}
 & \ln 1 \le \displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx \le \ln 2 \\
 & \ln 2 \le \displaystyle\int_2^3 \ln x\,dx \le \ln 3 \\
 & \ln 3 \le \displaystyle\int_3^4 \ln x\,dx \le \ln 4 \\
 & \vdots \\
+ & \ln n \le \displaystyle\int_n^{n+1} \ln x\,dx \le \ln(n+1) \\
\hline
\end{array}$$

$$\ln(1\times2\times3\times\cdots\times n) \le \int_1^{n+1}\ln x\,dx \le \ln(1\times2\times3\times\cdots\times(n+1))$$

부등식의 각 항을 더하면 위 부등식이 성립함을 알 수 있고

$\displaystyle\int_1^{n+1}\ln x\,dx=(n+1)\ln(n+1)-n$이므로 주어진 부등식이 성립한다.

[3-3]



$y=\ln x\,(x>0)$의 위의 점 $A(k,\ln k)$에서 접선의 방정식은 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x}$이므로 다음과 같다.

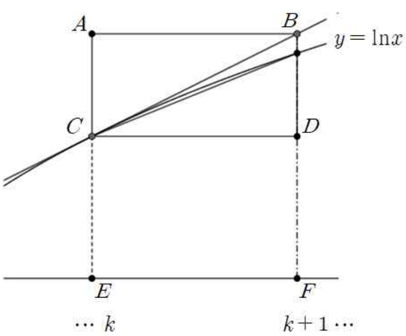
$$y=\frac{1}{k}(x-k)+\ln k=\frac{1}{k}x-1+\ln k$$

좌측의 그래프에서 임의의 자연수 k에 대해 $\square ACED\le\int_k^{k+1}\ln x\,dx\le\square ABED$ 임을 알 수 있다.

따라서 부등식 $\dfrac{\ln k+\ln(k+1)}{2}\le\int_k^{k+1}\ln x\,dx\le\dfrac{1}{2k}+\ln k$이 성립한다. k에 $1,2,3,\cdots,n$을 넣어보자.

$$\begin{array}{rl}
 & \dfrac{\ln 1+\ln 2}{2}\le\int_1^2\ln x\,dx\le\dfrac{1}{2}+\ln 1\\
 & \dfrac{\ln 2+\ln 3}{2}\le\int_2^3\ln x\,dx\le\dfrac{1}{2\times2}+\ln 2\\
 & \vdots\\
+ & \dfrac{\ln n+\ln(n+1)}{2}\le\int_n^{n+1}\ln x\,dx\le\dfrac{1}{2\times n}+\ln(n)\\
\hline
 & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln k+\ln(k+1)}{2}\le\int_1^{n+1}\ln x\,dx\le\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{2k}+\ln k\right\}
\end{array}$$

부등식의 각 항을 더하면 주어진 부등식이 성립함을 알 수 있다.



[3-1]에서도 $\square CDFE\le\int_k^{k+1}\ln x\,dx\le\square ABFE$으로 해결 가능합니다. 많이 나오는 개념이니 2가지 방법으로 다 풀어봅시다.