제 2 교시

수학 영역

KSM

5지선다형

1. $3^{1-\sqrt{5}} \times 3^{1+\sqrt{5}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ 3 ⑤ 9

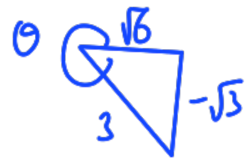
2. 함수 $f(x)=2x^2-x$ 에 대하여 $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-1}{x-1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f' = 4x - 1$
$f'(1) = 3$

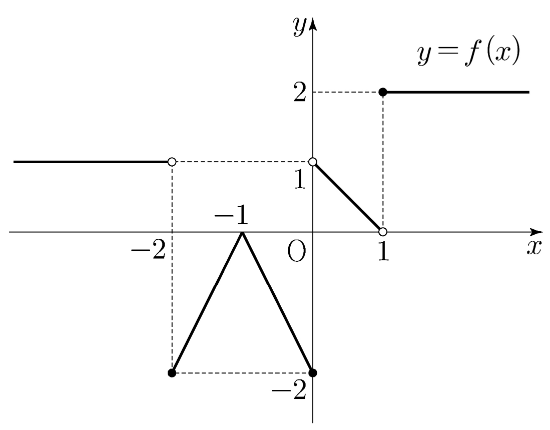
3. $\frac{3}{2}\pi < \theta < 2\pi$ 인 θ 에 대하여 $\cos\theta = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 일 때, $\tan\theta$ 의 값은? [3점]

① $-\sqrt{2}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}$



$\tan\theta = \frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

4. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -2+} f(x) + \lim_{x \to 1-} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$-2+0$

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\frac{a_3 a_8}{a_6}=12, \quad a_5+a_7=36$$

일 때, a_{11}의 값은? [3점]

① 72 ② 78 ③ 84 ④ 90 ⑤ 96

$\frac{a_5 a_6}{a_6}=12$, $a_5=12$

$a_7=24$) $r^2=2$

$a_{11}=a_7\times r^4=96$

6. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$은 $x=-1$에서 극대이고, $x=3$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 0 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

$f'=3x^2+2ax+b$

$=3(x+1)(x-3)=3x^2-6x-9$

$a=-3, b=-9$

$f(-1)=-1+a-b+1=6$

7. 두 실수 a, b가

$$3a+2b=\log_3 32, \quad ab=\log_9 2$$

를 만족시킬 때, $\frac{1}{3a}+\frac{1}{2b}$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{12}$ ② $\frac{5}{6}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{25}{12}$

$\frac{2b+3a}{6ab}=\frac{\log_3 32}{6\log_9 2}=\frac{1}{3}\times\frac{\log_3 32}{\log_3 2}$

$=\frac{1}{3}\log_2 32=\frac{5}{3}$

8. 다항함수 $f(x)$가

$$f'(x)=6x^2-2f(1)x, \quad f(0)=4$$

를 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

$f(x) = 2x^3 - f(1)x^2 + 4$

$x=1 \rightarrow f(1) = 2 - f(1) + 4, \quad f(1) = 3$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$

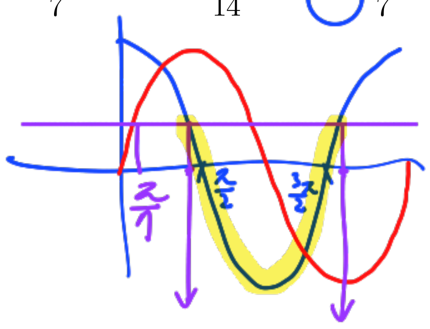
$f(2) = 16 - 12 + 4 = 8$

9. $0 \le x \le 2\pi$일 때, 부등식

$$\cos x \le \sin\frac{\pi}{7}$$

를 만족시키는 모든 x의 값의 범위는 $\alpha \le x \le \beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은? [4점]

① $\frac{8}{7}\pi$ ② $\frac{17}{14}\pi$ ③ $\frac{9}{7}\pi$ ④ $\frac{19}{14}\pi$ ⑤ $\frac{10}{7}\pi$



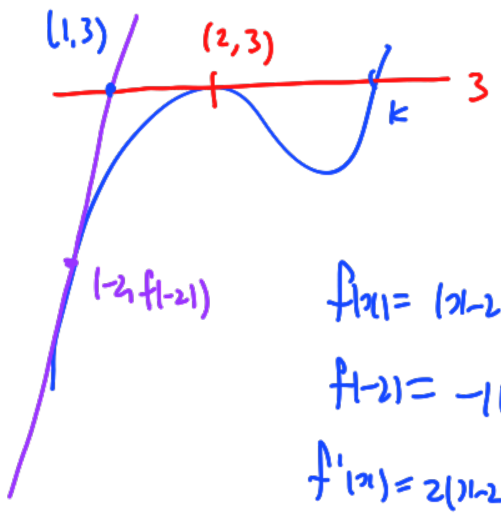
$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \alpha$ $\quad$ $\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{7} = \beta$

$\beta - \alpha = \pi + \frac{2\pi}{7} = \frac{9}{7}\pi$

10. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-2, f(-2))$에서의 접선과 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선이 점 $(1, 3)$에서 만날 때, $f(0)$의 값은? [4점]

y좌표 일치

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39



$f(x) = (x-2)^2(x-k) + 3$

$f(-2) = -16k - 29$

$f'(x) = 2(x-2)(x-k) + (x-2)^2$

$f'(-2) = -8(-2-k) + 16$

$= 8k + 32$

$f'(-2) = \frac{3 - f(-2)}{1-(-2)}$

$8k + 32 = \frac{16k+32}{3}, \quad 24k + 96 = 16k + 32$

$k = -8$

$\therefore f(0) = -4k + 3 = 35$

11. 두 점 P와 Q는 시각 $t=0$일 때 각각 점 A(1)과 점 B(8)에서 출발하여 수직선 위를 움직인다. 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \ge 0)$에서의 속도는 각각

$$v_1(t)=3t^2+4t-7, \quad v_2(t)=2t+4$$

$(3t+7)(t-1)$

이다. 출발한 시각부터 두 점 P, Q 사이의 거리가 처음으로 4가 될 때까지 점 P가 움직인 거리는? [4점]

① 10 ② 14 ③ 19 ④ 25 ⑤ 32

$x_1(t)=t^3+2t^2-7t+1$

$x_2(t)=t^2+4t+8$

$|x_1(t)-x_2(t)|=|t^3+t^2-11t-7|=4$

$t^3+t^2-11t-7=4$

$t^3+t^2-11t-11=0$

$(t+1)(t^2-11)=0$

$t=\sqrt{11}$

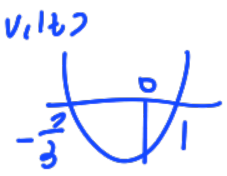
$t^3+t^2-11t-7=-4$

$t^3+t^2-11t-3=0$

$(t-3)(t^2+4t+1)=0$

$t=3$

처음으로 거리 4 $\Rightarrow t=3$



$\therefore \int_0^3 |v_1(t)|\,dt = \int_0^1 -v_1(t)\,dt + \int_1^3 v_1(t)\,dt$

$= \left[-t^3-2t^2+7t-1\right]_0^1 + \left[t^3+2t^2-7t+1\right]_1^3$

$= (3-(-1)) + (25-(-3)) = 32$

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{이 홀수인 경우}) \\ \frac{1}{2}a_n & (a_n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_2+a_4=40$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 172 ② 175 ③ 178 ④ 181 ⑤ 184

a_1	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$	$4k$	
a_2	$4k-2$	$2k-1$	$4k$	$2k$	
a_3	$2k-1$	$2k$	$2k$	k	
a_4	$2k$	k	k	$k+1$ $(k:\text{홀})$	$\frac{k}{2}$ $(k:\text{짝})$
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
	$6k-2=40$, $k=7$	$3k-1=40$, $(\times)$	$5k=40$, $k=8$	$3k+1=40$, $k=13$	$\frac{5}{2}k=40$, $k=16$
$a_1=$	25		31	52	64

$25+31+52+64=172$

13. 두 실수 a, b에 대하여 함수

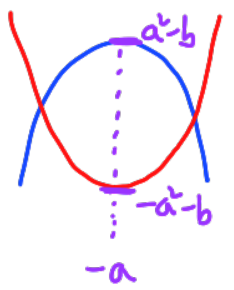
$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{3}x^3-ax^2-bx & (x<0)\\[2mm] \dfrac{1}{3}x^3+ax^2-bx & (x\geq 0)\end{cases}$$

이 구간 $(-\infty,\ -1]$에서 감소하고 구간 $[-1,\ \infty)$에서 증가할 때, $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [4점]

① $\dfrac{3}{2}+3\sqrt{2}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $\dfrac{9}{2}+3\sqrt{2}$ ④ $6+3\sqrt{2}$ ⑤ $\dfrac{15}{2}+3\sqrt{2}$

$f(0^-)=f(0^+)=0$ $f(x)$: 연속

$f'(x)=\begin{cases}-x^2-2ax-b=-(x+a)^2+a^2-b & (x<0)\\ x^2+2ax-b=(x+a)^2-a^2-b & (x>0)\end{cases}$

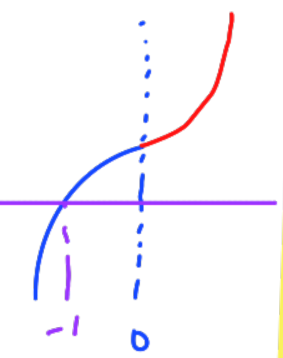


$2x^2+4ax=0$

$2x(x+2a)=0$

$\boxed{x=0,\ -2a}$

$-a=0$



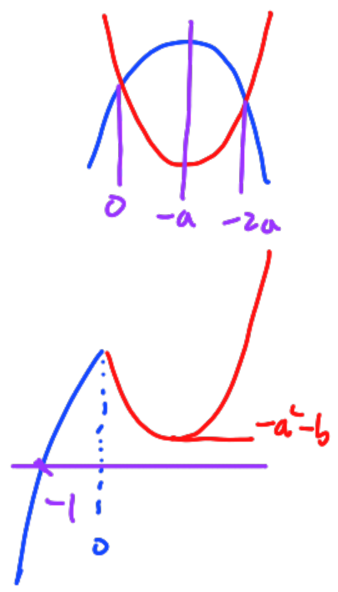
$(-1,0)$

$\Downarrow$

$-1-b=0,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=-1$

$-a>0$
$a<0$



$\begin{cases}f'(-1)=2a-b-1=0,\\ -a^2-b\geq 0\end{cases}$ $b=2a-1$

$-a^2-2a+1\geq 0$

$a^2+2a-1\leq 0$

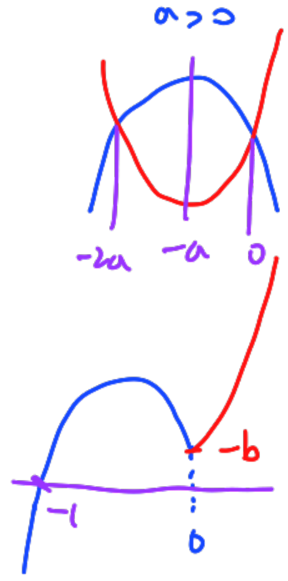
$-1-\sqrt{2}\leq a\leq -1+\sqrt{2}$

$a<0\rightarrow\ -1-\sqrt{2}\leq a<0$

$a+b=3a-1$

$-4-3\sqrt{2}\leq 3a-1<-1$

$-a<0$
$a>0$



$\begin{cases}f'(-1)=2a-b-1=0\\ \quad b=2a-1\\ -b\geq 0,\ b\leq 0\end{cases}$

$2a-1\leq 0,\ a\leq\frac{1}{2}$

$0<a\leq\frac{1}{2}$

$a+b\leq\frac{1}{2}$

$(a=\frac{1}{2},\ b=0)$

$\therefore\ M=\frac{1}{2}$

$m=-4-3\sqrt{2}$) $M-m=\frac{9}{2}+3\sqrt{2}$

14. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

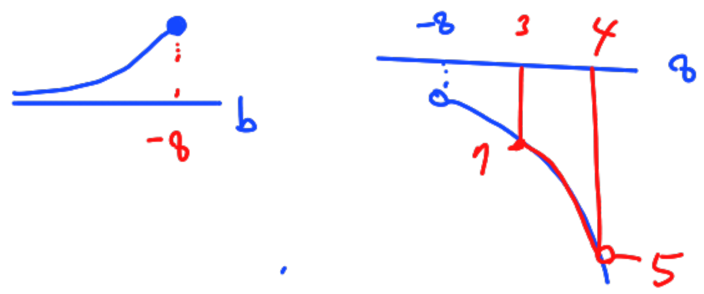
$$f(x)=\begin{cases}2^{x+a}+b & (x\leq -8)\\ -3^{x-3}+8 & (x>-8)\end{cases}$$

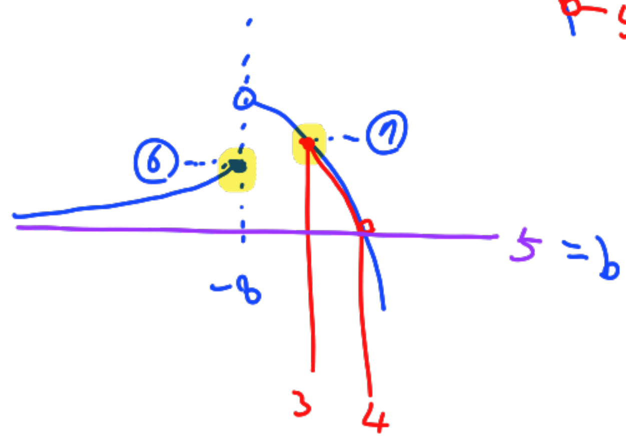
$a>0$
$b>0$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

> 집합 $\{f(x)\,|\,x\leq k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3\leq k<4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19





$\{f(x)\,|\,x\leq k\}=\{6,7\}$

$b=5$

$(-8,6)$

$\Downarrow$

$2^{-8+a}+5=6$

$\therefore\ a=8$

$a+b=8+5=13$

15. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x+3)\{f(x)+1\}}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ 3 & (f(x)=0)\end{cases}$$

이라 하자. $\lim_{x\to 3} g(x)=g(3)-1$일 때, $g(5)$의 값은? [4점]

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

$f(x)$, 3

if) $f(3)\neq 0 \rightarrow g(3)=\dfrac{f(6)(f(3)+1)}{f(3)}$

$\lim_{x\to3} g(x)=\lim_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\}f(x)+1\}}{f(x)}=\dfrac{f(6)(f(3)+1)}{f(3)}$

$\therefore g(3)=\lim_{x\to3} g(x)$ $(\times)$

$\therefore f(3)=0$

$\Rightarrow \lim_{x\to3} g(x)=\lim_{x\to3}\dfrac{f(x+3)\}f(x)+1\}}{f(x)}=g(3)-1$ 존재

$\therefore f(6)(f(3)+1)=0 \rightarrow f(6)=0$

$f(x)=(x-3)(x-6)(x-k)$

$g(3)=3$ $\therefore \lim_{x\to3} g(x)=g(3)-1=2$

$\lim_{x\to3}\left(\dfrac{f(x+3)}{f(x)}\times(f(x)+1)\right)$

$=\lim_{x\to3}\left(\dfrac{x\cancel{(x-3)}(x+3-k)}{\cancel{(x-3)}(x-6)(x-k)}\right)\times(f(3)+1)$

$=\dfrac{3(6-k)}{-3(3-k)}\times 1=\dfrac{6-k}{k-3}=2.$

$6-k=2k-6,\ k=4$

$\therefore f(x)=(x-3)(x-6)(x-4)$

$g(5)=\dfrac{f(8)(f(5)+1)}{f(5)}=\dfrac{40(-1)}{-2}=20$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x-1)=\log_4(13+2x)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{6}$

$x>1$

$(x-1)^2=13+2x$

$x^2-4x-12=0$

$x=-2,\ 6$ $(x>1)$

$x=6$

17. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(2a_k-b_k)=34,\quad \sum_{k=1}^{10}a_k=10$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{24}$

$2\Sigma a_k-\Sigma b_k=34$

$\therefore \Sigma b_k=-14$

$\Sigma(a_k-b_k)=10+14=24$

18. 함수 $f(x)=(x^2+1)(x^2+ax+3)$에 대하여 $f'(1)=32$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{5}$

$f' = 2x(x^2+ax+3)+(x^2+1)(2x+a)$

$f'(1) = 8+2a+4+2a = 32$

$4a=20,\ a=5$

19. 두 곡선 $y=3x^3-7x^2$과 $y=-x^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오. [3점]

$\boxed{4}$

$3x^3-6x^2=0$

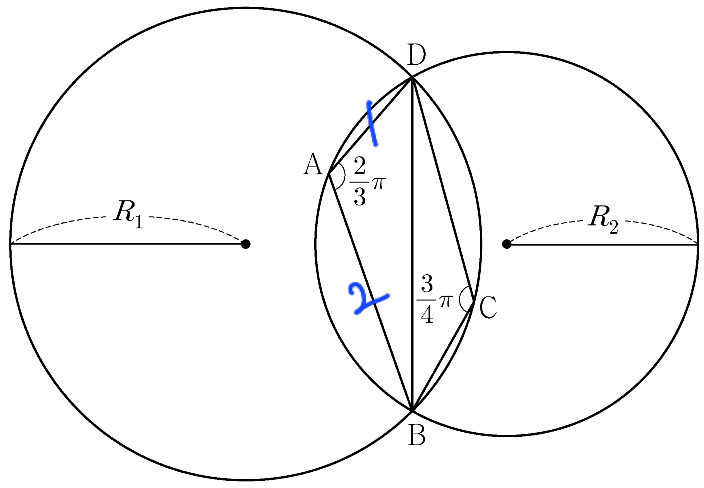
$3x^2(x-2)=0$

$\frac{3}{12}(2)^4 = 4$

20. 그림과 같이

$$\overline{AB}=2,\ \overline{AD}=1,\ \angle DAB=\frac{2}{3}\pi,\ \angle BCD=\frac{3}{4}\pi$$

인 사각형 ABCD가 있다. 삼각형 BCD의 외접원의 반지름의 길이를 R_1, 삼각형 ABD의 외접원의 반지름의 길이를 R_2라 하자.



다음은 $R_1 \times R_2$의 값을 구하는 과정이다.

> 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여
>
> $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \overline{BD}$
>
> 이고, 삼각형 ABD에서 사인법칙에 의하여
>
> $R_2 = \boxed{(가)} \times \overline{BD}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $\frac{\overline{BD}}{\sin\frac{2}{3}\pi} = 2R_2,\ R_2 = \overline{BD} \times \frac{1}{\sqrt{3}}$
>
> 이다. 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여
>
> $\overline{BD}^2 = 2^2+1^2-(\boxed{(나)})$ -2 $\overline{BD}^2 = 4+1-2\cdot2\cdot1\cdot(-\frac{1}{2})$
>
> $= 5-(-2)$
>
> 이므로
>
> $R_1 \times R_2 = \boxed{(다)}$ $\frac{7}{6}\sqrt{6}$
>
> 이다. $\frac{\sqrt{2}}{2}\overline{BD} \times \frac{1}{\sqrt{3}}\overline{BD} = \frac{7\sqrt{6}}{6}$ $=7$

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q, r이라 할 때, $9\times(p\times q\times r)^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{98}$

$9\times\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\times(-2)\times\frac{7}{6}\sqrt{6}\right)^2$

$= 9\times\left(\frac{7}{3}\sqrt{2}\right)^2 = 9\times\frac{98}{9} = 98$

$a>0,\ d>0,\ a, d \in N$

21. 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. a_7이 13의 배수이고 $\sum_{k=1}^{7} S_k = 644$일 때, a_2의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{19}$

$S_1, S_2, \vdots, S_7 \ + = 7a_1+6a_2+5a_3+4a_4+3a_5+2a_6+a_7$

$= 28a + (6+10+12+12+10+6)d$

$= 28a + 56d = 644$

$\therefore\ a+2d = 23 \ \left(\begin{matrix} a>0 \\ d>0 \end{matrix}\right) \quad d \le 11$

$a_7 = (a+2d)+4d = 4d+23 = 13N$

d	N	a
4	3	15

$\therefore\ a_2 = a+d = 19$

22. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라 하고 $g(x)$의 한 부정적분을 $G(x)$라 할 때, 이 함수들은 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\int_{1}^{x} f(t)\,dt = xf(x) - 2x^2 - 1$
>
> (나) $f(x)G(x) + F(x)g(x) = 8x^3 + 3x^2 + 1$ 적분하고픈식

$\int_{1}^{3} g(x)\,dx$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{10}$

(가) $x=1 \rightarrow 0 = f(1)-3,\ f(1)=3$

양변미분 $\rightarrow \cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + xf'(x) - 4x$

$f'(x) = 4 \quad \therefore\ f(x) = 4x-1$

$F(x) = 2x^2 - x + A$

(나) $(F(x)G(x))' = 8x^3+3x^2+1$

$F(x)G(x) = 2x^4 + x^3 + x + C$

$(2x^2-x+A)\,G(x) = 2x^4+x^3+x+C$

$\Downarrow$

(x^2+x+B)

$\int_1^3 g(x)dx = G(3) - G(1) = 12 - 2 = 10$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, **「선택과목(확률과 통계)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

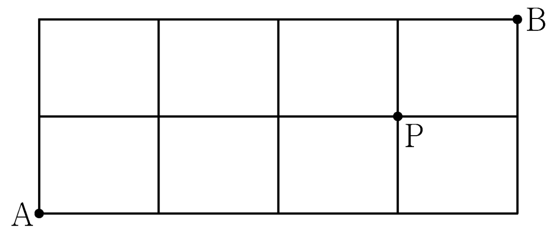
수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}\left(30, \frac{1}{5}\right)$을 따를 때, $\mathrm{E}(X)$의 값은? [2점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

24. 그림과 같이 직사각형 모양으로 연결된 도로망이 있다. 이 도로망을 따라 A지점에서 출발하여 P지점을 거쳐 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는? [3점]



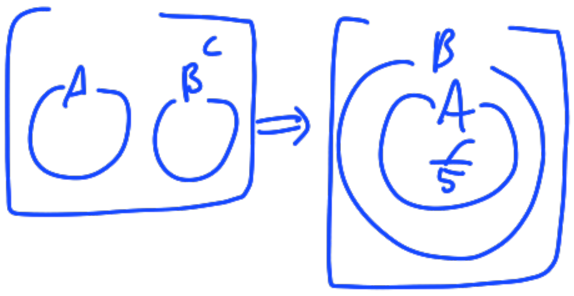
① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

25. 두 사건 A, B에 대하여 A와 B^C은 서로 배반사건이고

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5},\quad \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=\frac{7}{10}$$

일 때, $\mathrm{P}(A^C\cap B)$의 값은? (단, A^C은 A의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$



$\frac{1}{5}+P(B)=\frac{7}{10},\ P(B)=\frac{1}{2}$

$P(B\cap A^c)=\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$

26. 어느 고등학교의 수학 시험에 응시한 수험생의 시험 점수는 평균이 68점, 표준편차가 10점인 정규분포를 따른다고 한다. 이 수학 시험에 응시한 수험생 중 임의로 선택한 수험생 한 명의 시험 점수가 55점 이상이고 78점 이하일 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? [3점]

z	$\mathrm{P}(0\le Z\le z)$
1.0	0.3413
1.1	0.3643
1.2	0.3849
1.3	0.4032

① 0.7262 ② 0.7445 ③ 0.7492 ④ 0.7675 ⑤ 0.7881

$X\sim N(68,10^2)$

$P(55\le X\le 78)$

$P(-1.3\le Z\le 1)=0.7445$

27. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$에 대하여 X에서 Y로의 모든 일대일함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [3점]

> (가) $f(2)=2$
>
> (나) $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$는 4의 배수이다.

① $\frac{1}{14}$ ② $\frac{3}{35}$ ③ $\frac{1}{10}$ ④ $\frac{4}{35}$ ⑤ $\frac{9}{70}$

전체: $7\times6\times5\times4$

$f(2)=2 \rightarrow 6\cdot5\cdot4$

$f(2)=2$ & $f(1)\times f(2)\times f(3)\times f(4)$: 4의 배수 X

⇒ 모두 홀수로

⇒ $4\cdot3\cdot2$

$P(\text{가}\cap\text{나}) = P(\text{가}) - P(\text{가}\cap\text{나}^c)$

$= \frac{6\cdot5\cdot4-4\cdot3\cdot2}{7\cdot6\cdot5\cdot4}$

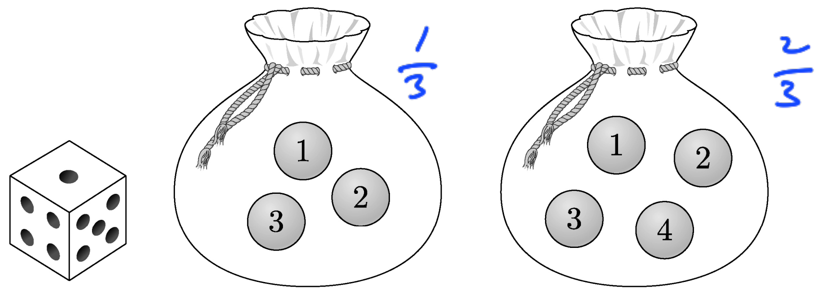
$= \frac{96}{7\cdot6\cdot5\cdot4} = \frac{4}{35}$

28. 주머니 A에는 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적힌 3개의 공이 들어 있고, 주머니 B에는 숫자 1, 2, 3, 4가 하나씩 적힌 4개의 공이 들어 있다. 두 주머니 A, B와 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져
> 나온 눈의 수가 3의 배수이면
> 주머니 A에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼내고, ${}_3C_2=3$
> 나온 눈의 수가 3의 배수가 아니면
> 주머니 B에서 임의로 2개의 공을 동시에 꺼낸다. ${}_4C_2=6$
> 꺼낸 2개의 공에 적혀 있는 수의 차를 기록한 후,
> 공을 꺼낸 주머니에 이 2개의 공을 다시 넣는다.

이 시행을 2번 반복하여 기록한 두 개의 수의 평균을 $\overline{X}$라 할 때, $P(\overline{X}=2)$의 값은? [4점]

① $\frac{11}{81}$ ② $\frac{13}{81}$ ③ $\frac{5}{27}$ ④ $\frac{17}{81}$ ⑤ $\frac{19}{81}$



A B

$\overline{X} = \frac{x_1+x_2}{2} = 2 \rightarrow x_1+x_2=4$

3 1
2 2
1 3

$\boxed{A}$ 차
1, 2 → 1
1, 3 → 2
2, 3 → 1

$\boxed{B}$
1 2 → 1
1 3 → 2
1 4 → 3
2 3 → 1
2 4 → 2
3 4 → 1

차 1 → $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$ | 차 1 → $\frac{2}{3}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{3}$

차 2 → $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$ | 차 2 → $\frac{2}{3}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{9}$

차 3 ⇒ $\frac{2}{3}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

$P(x=1)=\frac{2}{9}+\frac{1}{3}=\frac{5}{9}$

$P(x=2)=\frac{1}{9}+\frac{2}{9}=\frac{1}{3}$

$P(x=3)=\frac{1}{9}$

$x_1+x_2=4$

3 1 $\frac{1}{9}\times\frac{5}{9}=\frac{5}{81}$

2 2 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

1 3 $\frac{5}{9}\times\frac{1}{9}=\frac{5}{81}$

$\frac{19}{81}$

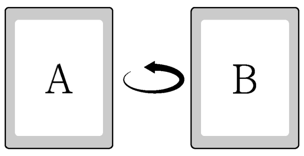
단답형

29. 앞면에는 문자 A, 뒷면에는 문자 B가 적힌 한 장의 카드가 있다. 이 카드와 한 개의 동전을 사용하여 다음 시행을 한다.

> 동전을 두 번 던져
> 앞면이 나온 횟수가 2이면 카드를 한 번 뒤집고, x $\frac{1}{4}$
> 앞면이 나온 횟수가 0 또는 1이면 카드를 그대로 둔다. y $\frac{3}{4}$

처음에 문자 A가 보이도록 카드가 놓여 있을 때, 이 시행을 5번 반복한 후 문자 B가 보이도록 카드가 놓일 확률은 p이다. $128\times p$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{62}$

x: 홀수번



앞면 뒷면

x y

5 0 ${}_5C_5\left(\frac{1}{4}\right)^5$

3 2 ${}_5C_3\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2$

1 4 ${}_5C_1\left(\frac{1}{4}\right)^1\left(\frac{3}{4}\right)^4$

$\frac{1+90+405}{4^5}$

$=\frac{496}{1024}=\frac{124}{256}=\frac{62}{128}=p$

$\therefore 128p=62$

30. 다음 조건을 만족시키는 13 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수를 구하시오. [4점] $\boxed{336}$

> (가) $a\le b\le c\le d$
>
> (나) $a\times d$는 홀수이고, $b+c$는 짝수이다.

a d b c 1,3,5,7,9,11,13

홀 홀 홀 홀 → ${}_7H_4=210$

홀 홀 짝 짝

$1\le a\le b\le c\le d\le 13$

홀 짝 짝 홀

1,3,5,7,9,11,13

$d-a$

$2\to 6\times{}_1H_2=6$

$4\to 5\times{}_2H_2=15$

$6\to 4\times{}_3H_2=24$

$8\to 3\times{}_4H_2=30$

$10\to 2\times{}_5H_2=30$

$12\to 1\times{}_6H_2=21$

126

336

> ※ 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, **「선택과목(미적분)」** 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{7x}-1}{e^{2x}-1}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x = t + \cos 2t, \quad y = \sin^2 t$$

에서 $t = \frac{\pi}{4}$ 일 때, $\frac{dy}{dx}$ 의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sin t \cos t}{1 - 2\sin 2t}$

$t = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{1}{-1} = -1$

25. 함수 $f(x)=x+\ln x$에 대하여 $\int_1^e \left(1+\frac{1}{x}\right)f(x)\,dx$의 값은? [3점]

① $\frac{e^2}{2}+\frac{e}{2}$ ② $\frac{e^2}{2}+e$ ③ $\frac{e^2}{2}+2e$
④ e^2+e ⑤ e^2+2e

$f'(x)=1+\frac{1}{x}$

$\int_1^e ff' = \frac{1}{2}(f(x))^2\Big|_1^e$

$=\frac{1}{2}\left((f(e))^2-(f(1))^2\right)$

$=\frac{1}{2}\left((e+1)^2-1\right)=\frac{e^2}{2}+e$

26. 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$과 등비수열 $\{b_n\}$에 대하여 $a_1=b_1=1$, $a_2b_2=1$이고

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_na_{n+1}}+b_n\right)=2$$

일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{5}{4}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$(1+d)r=1$

$1+d=\frac{1}{r}$

$d=\frac{1}{r}-1=\frac{1-r}{r}$

$\frac{1}{d}=\frac{r}{1-r}$

$\frac{1}{d}\left(\frac{1}{1}\right)+\frac{1}{1-r}=2$

$\frac{1}{d}+\frac{1}{1-r}=2$

$\frac{r}{1-r}+\frac{1}{1-r}=2$

$\frac{1+r}{1-r}=2$, $1+r=2-2r$

$r=\frac{1}{3}$

$\therefore \Sigma b_n=\frac{1}{1-r}=\frac{3}{2}$

27. $x=-\ln 4$에서 $x=1$까지의 곡선 $y=\frac{1}{2}(|e^x-1|-e^{|x|}+1)$의 길이는? [3점]

① $\frac{23}{8}$ ② $\frac{13}{4}$ ③ $\frac{29}{8}$ ④ 4 ⑤ $\frac{35}{8}$

$x<0 \rightarrow y=\frac{1}{2}(1-e^x-e^{-x}+1)=1-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$,

$x\geq 0 \rightarrow y=0$

$y'=-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$

$\therefore \int_{-\ln 4}^{0}\sqrt{1+\left(-\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right)^2}\,dx+\int_0^1\sqrt{1+0}\,dx$

$=\int_{-\ln 4}^{0}\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\,dx+(1)$

$=\frac{1}{2}\left[e^x-e^{-x}\right]_{-\ln 4}^{0}+1$

$=\frac{1}{2}\left(-\left(\frac{1}{4}-4\right)\right)+1=\frac{23}{8}$

28. 실수 $a\,(0<a<2)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}2|\sin 4x| & (x<0)\\ -\sin ax & (x\geq 0)\end{cases}$$

이라 하자. 함수

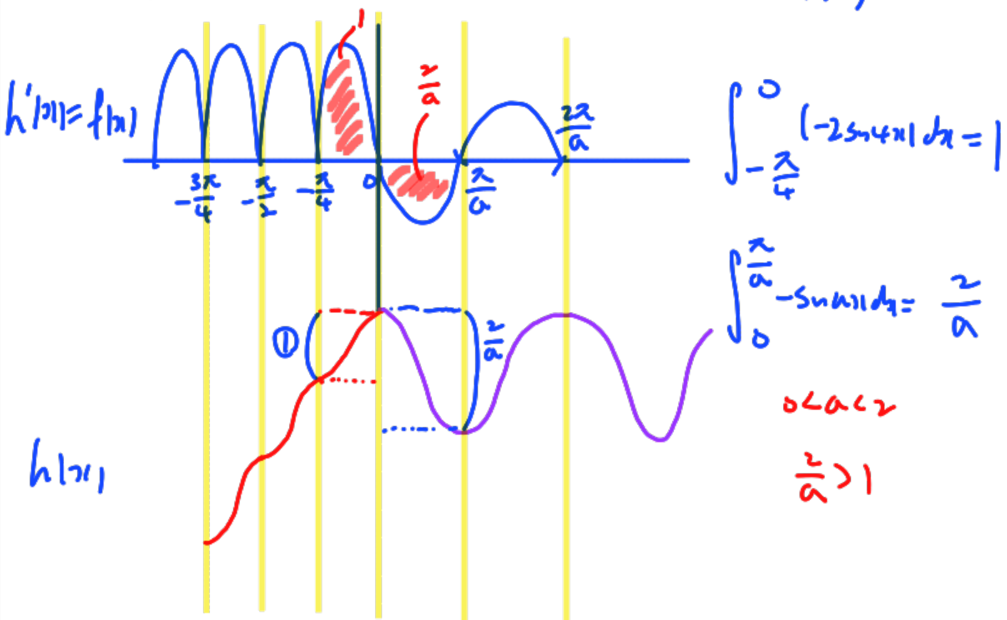
$$g(x)=\left|\int_{-a\pi}^{x}f(t)\,dt\right|$$

$h(x)$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, a의 최솟값은? [4점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

$\int_{-a\pi}^{x}f(t)\,dt=h(x)$, $g(x)=|h(x)|$, $h'(x)=f(x)$



$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(-2\sin 4x)\,dx=1$

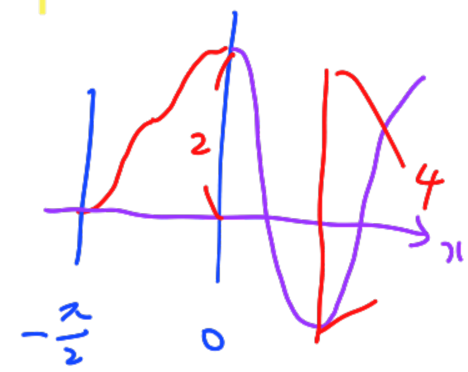
$\int_0^{\frac{\pi}{a}}-\sin ax\,dx=\frac{2}{a}$

$0<a<2$

$\frac{2}{a}>1$

$-a\pi=-\frac{\pi}{2}\rightarrow a=\frac{1}{2}$

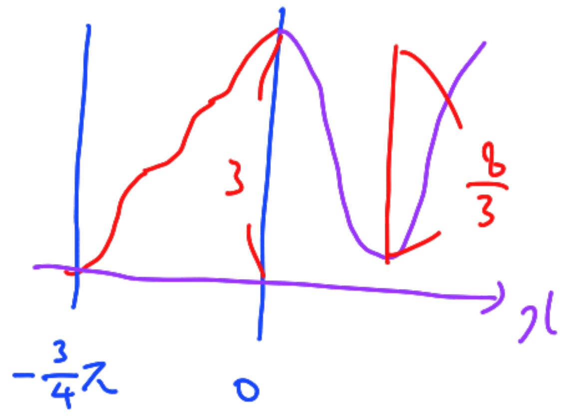
$\rightarrow \frac{2}{a}=4$



(×)

$-a\pi=-\frac{3}{4}\pi\rightarrow a=\frac{3}{4}$

$\rightarrow \frac{2}{a}=\frac{8}{3}$



(○)

$\therefore$ 최소 $a=\frac{3}{4}$

단답형

29. 두 실수 a, $b(a>1,\ b>1)$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+a^{n+1}}{3^{n+1}+a^n}=a,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{a^n+b^{n+1}}{a^{n+1}+b^n}=\frac{9}{a}$$

를 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{18}$

$a>3 \rightarrow a$

$a=3 \rightarrow 1=a\ (\times)$

$1<a<3 \rightarrow \frac{1}{3}=a,\ a=\frac{1}{3}\ (\times)$

$\therefore\ a>3$

$a>b \rightarrow \frac{1}{a}=\frac{9}{a}\ (\times)$

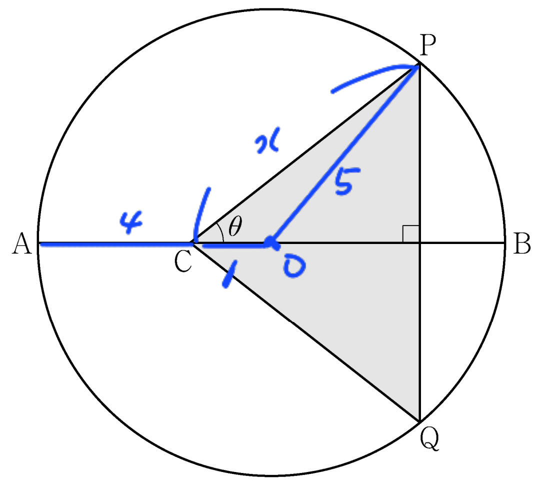
$a=b \rightarrow 1=\frac{9}{a},\ a=9\ (\circ)$

$a<b \rightarrow b=\frac{9}{a},\ ab=9$

$b>a>3$이므로 $ab>9\ (\times)$

$\therefore\ a=9=b,\ a+b=18$

30. 길이가 10인 선분 AB를 지름으로 하는 원과 선분 AB 위에 $\overline{AC}=4$인 점 C가 있다. 이 원 위의 점 P를 $\angle PCB=\theta$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 이 원과 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 삼각형 PCQ의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $-7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$) [4점] $\boxed{32}$



$\triangle COP \Rightarrow 25=x^2+1-2\cdot x\cdot 1\cos\theta$

$x^2-(2\cos\theta)x-24=0,\ x=c\pm\sqrt{c^2+24}$

$\therefore\ x=\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+24}$

$\theta=\frac{\pi}{4}\rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{7}{2}\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

$\frac{dx}{d\theta}=-s+\frac{-\cancel{2}cs}{\cancel{2}\sqrt{c^2+24}}$

$\left.\frac{dx}{d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{14}=-\frac{4}{7}\sqrt{2}$

$S=\frac{1}{2}x^2\sin 2\theta$

$S'(\theta)=x\frac{dx}{d\theta}\sin 2\theta+\frac{1}{2}x^2\times 2\cos 2\theta$

$S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}\times\left(-\frac{4}{7}\sqrt{2}\right)\times 1+0=-\frac{32}{7}$

$\therefore\ -7\times S'\left(\frac{\pi}{4}\right)=32$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 좌표공간의 점 $\mathrm{A}(8,\ 6,\ 2)$를 xy평면에 대하여 대칭이동한 점을 B라 할 때, 선분 AB의 길이는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{6}=1$ 위의 점 $(7,\ 6)$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\frac{7x}{7}-\frac{6y}{6}=1$

$x-y=1$

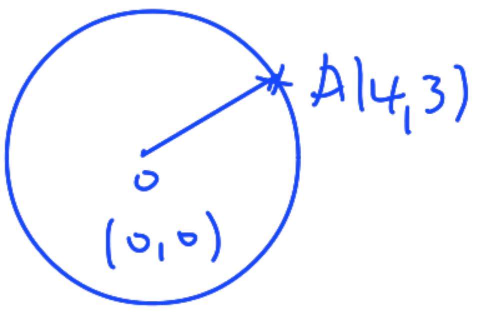
25. 좌표평면 위의 점 $A(4, 3)$에 대하여

$$|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OA}|$$

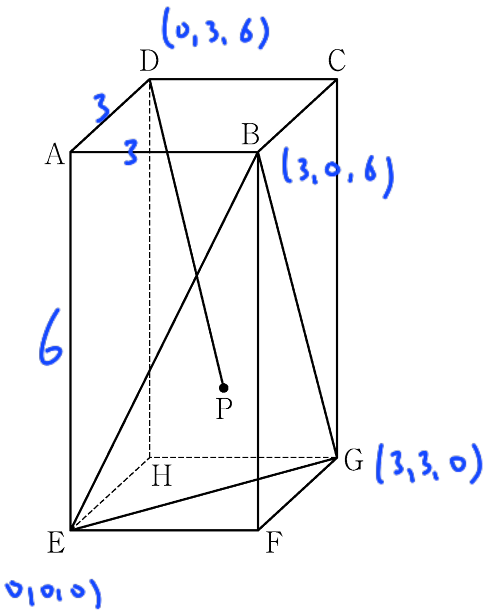
를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 2π ② 4π ③ 6π ④ 8π ⑤ 10π

$r = 5$



26. 그림과 같이 $\overline{AB} = 3$, $\overline{AD} = 3$, $\overline{AE} = 6$인 직육면체 ABCD-EFGH가 있다. 삼각형 BEG의 무게중심을 P라 할 때, 선분 DP의 길이는? [3점]



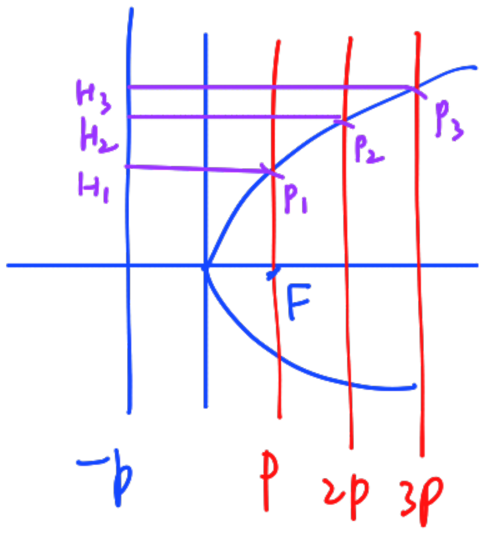
① $2\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{7}$ ④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

$P(2, 1, 2)$

$\overline{DP} = \sqrt{4+4+16} = 2\sqrt{6}$

27. 양수 p에 대하여 좌표평면 위에 초점이 F인 포물선 $y^2=4px$가 있다. 이 포물선이 세 직선 $x=p$, $x=2p$, $x=3p$와 만나는 제1사분면 위의 점을 각각 P_1, P_2, P_3이라 하자. $\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}=27$일 때, p의 값은? [3점]

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4



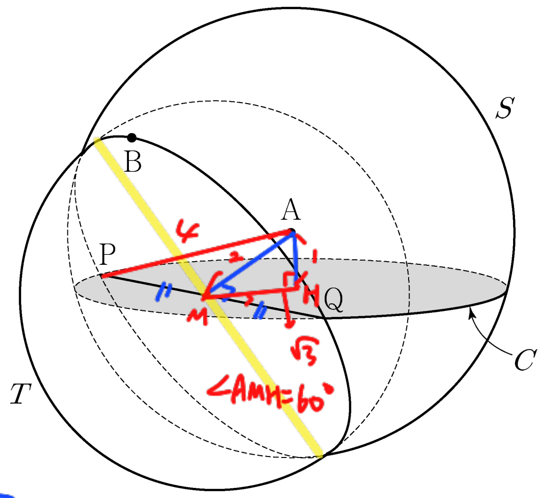
$\overline{FP_1}+\overline{FP_2}+\overline{FP_3}$

$=\overline{P_1H_1}+\overline{P_2H_2}+\overline{P_3H_3}$

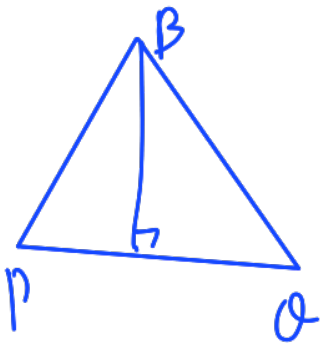
$=2p+3p+4p=9p=27,\ p=3$

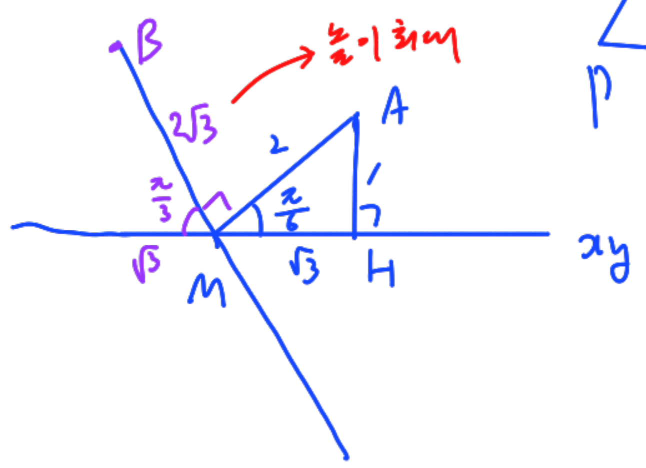
28. 좌표공간에 중심이 A$(0,0,1)$이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 있다. 구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원을 C라 하고, 점 A에서 선분 PQ까지의 거리가 2가 되도록 원 C 위에 두 점 P, Q를 잡는다. 구 S가 선분 PQ를 지름으로 하는 구 T와 만나서 생기는 원 위에서 점 B가 움직일 때, 삼각형 BPQ의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은? (단, 점 B의 z좌표는 양수이다.) [4점]

① 6 ② $3\sqrt{6}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $3\sqrt{10}$ ⑤ $6\sqrt{3}$



$\overline{PM}=2\sqrt{3},\ \overline{PQ}=4\sqrt{3}$





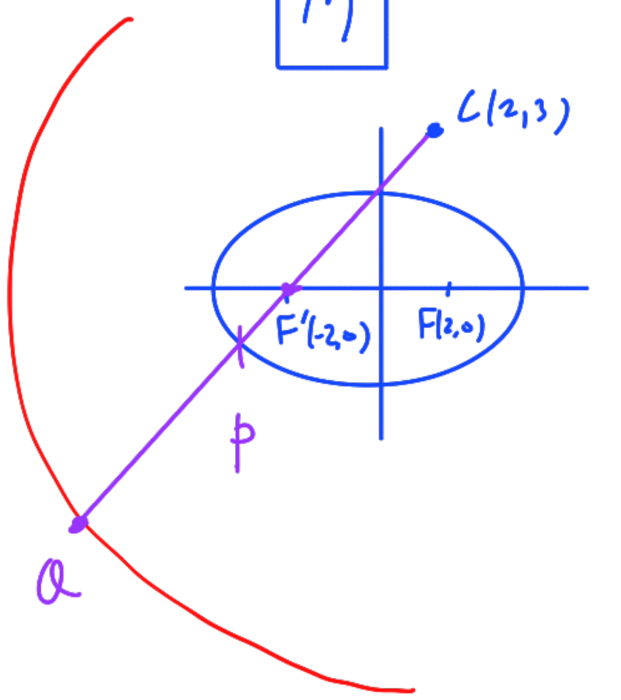
$\triangle BPQ$ 최대 $\Rightarrow \frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 2\sqrt{3}=12$

$\therefore 12\cos\frac{\pi}{3}=6$

단답형

29. 한 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)\ (c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$과 중심의 좌표가 $(2, 3)$이고 반지름의 길이가 r인 원이 있다. 타원 위의 점 P와 원 위의 점 Q에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{PF}}$의 최솟값이 6일 때, r의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{17}$



$\overline{PF}+\overline{PF'}=6$

$\therefore\ \overline{PQ}-\overline{PF}$

$=\overline{PQ}+\overline{PF'}-6 \ge 6$

$\therefore\ \overline{PQ}+\overline{PF'} \ge 12$ 최솟값: 12

$12+\overline{F'C}=r$

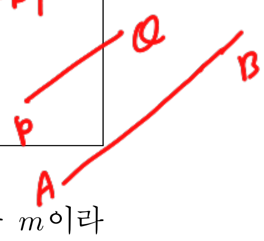
$12+5=r=17$

30. 좌표평면에서 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이고 $\angle\mathrm{BAC}=\frac{\pi}{2}$인 직각삼각형 ABC에 대하여 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 삼각형 APQ는 정삼각형이고, $9|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=4|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이다.
>
> (나) $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}<0$
>
> (다) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=24$

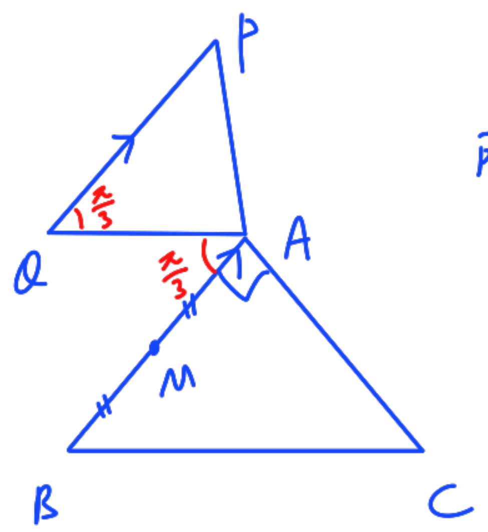
$9|\overrightarrow{PQ}|^2=4|\overrightarrow{AB}|^2$

$3|\overrightarrow{PQ}|=2|\overrightarrow{AB}|$



선분 AQ 위의 점 X에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{XA}}+\overrightarrow{\mathrm{XB}}|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{27}$



$\overrightarrow{PQ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{CB}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}$

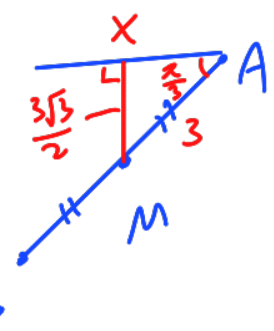
$=\frac{2}{3}|\overrightarrow{AB}|^2=24$

$\therefore\ |\overrightarrow{AB}|=6$

$|\overrightarrow{PQ}|=4$

AB 중점: M

$\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XB}=2\overrightarrow{XM}$



$|\overrightarrow{XM}|\ge\frac{3}{2}\sqrt{3}$

$\therefore\ 2|\overrightarrow{XM}|=3\sqrt{3}=m$

$m^2=27$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.