제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+9n}-\sqrt{n^2+4n}\right)$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=\frac{5t}{t^2+1},\quad y=3\ln\left(t^2+1\right)$$

에서 $t=2$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3\cdot\frac{2t}{t^2+1}}{5\cdot\frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2}=-4$$

25. $\lim_{x\to 0}\frac{2^{ax+b}-8}{2^{bx}-1}=16$일 때, $a+b$의 값은? (단, a와 b는 0이 아닌 상수이다.) [3점]

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$2^b-8=0 \Rightarrow b=3$

$\lim_{x\to 0}\frac{8(2^{ax}-1)}{8^x-1}=\lim_{x\to 0}8\cdot\frac{\frac{2^{ax}-1}{x}}{\frac{8^x-1}{x}}$

$=8\cdot\frac{\ln 2^a}{\ln 8}=16$

$a\ln 2=2\ln 8$

$\therefore a=6$

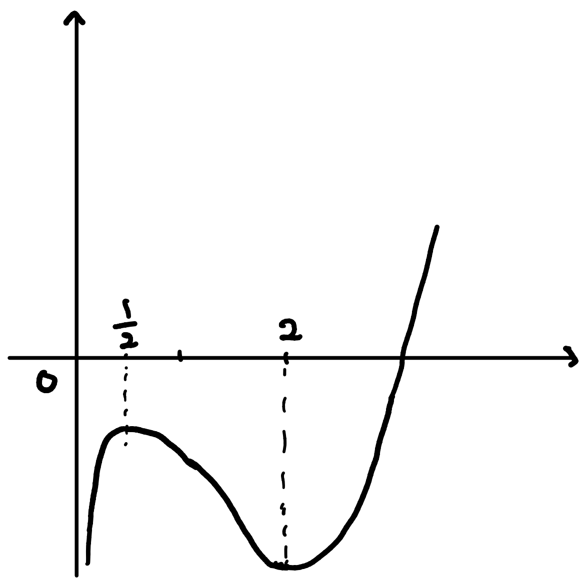
26. x에 대한 방정식 $x^2-5x+2\ln x=t$의 서로 다른 실근의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 t의 값의 합은? [3점]

① $-\frac{17}{2}$ ② $-\frac{33}{4}$ ③ -8 ④ $-\frac{31}{4}$ ⑤ $-\frac{15}{2}$

$f(x):=x^2-5x+2\ln x$

$f'(x)=2x-5+\frac{2}{x}=\frac{(2x-1)(x-2)}{x}$ $(x>0)$

$y=f(x)$의 개형은 다음과 같다.



$t=f(\frac{1}{2})$ or $t=f(2)$

$f(\frac{1}{2})+f(2)=-\frac{9}{4}-2\ln 2-6+2\ln 2=-\frac{33}{4}$

27. 실수 $t\,(0<t<\pi)$에 대하여 곡선 $y=\sin x$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ \sin t)$에서의 접선과 점 P를 지나고 기울기가 -1인 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\lim_{t\to\pi-}\frac{\tan\theta}{(\pi-t)^2}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{8}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

접선 기울기 : $\cos t$

$$\tan\theta = \frac{|\cos t-(-1)|}{1+\cos t\cdot(-1)} = \frac{\cos t+1}{1-\cos t}$$

$$\lim_{t\to\pi-}\frac{\cos t+1}{(\pi-t)^2}\cdot\frac{1}{1-\cos t}$$

$$=\lim_{x\to 0-}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\cos x}$$

$$=\frac{1}{4}$$

28. 두 상수 $a\,(a>0)$, b에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $a\times b$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 x에 대하여
$$\{f(x)\}^2+2f(x)=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b$$
이다.

(나) $f(0)=f(2)+1$

① $-\frac{1}{16}$ ② $-\frac{7}{64}$ ③ $-\frac{5}{32}$ ④ $-\frac{13}{64}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

$$(f(x)+1)^2 = a\cos^3\pi x\times e^{1-\cos^2\pi x}+b+1$$

$$(f(x)+1)^2=(f(2-x)+1)^2$$

$$(f(0)+1)^2=(f(2)+1)^2$$

$$f(2)^2+4f(2)+4 = f(2)^2+2f(2)+1\ (\because (나))$$

$$f(2)=-\frac{3}{2},\ f(0)=-\frac{1}{2}$$

$$a+b=-\frac{3}{4}$$

$$g(x):=a\cos^3\pi x\times e^{\sin^2\pi x}+b+1$$

$$f(x)=-1\pm\sqrt{g(x)}$$

$f(x)$는 연속함수이므로 사잇값 정리에 의해 $g(x)\ge 0$ 이고 $g(c)=0$인 $c\in(0,2)$가 존재 → 최솟값이다.

$h(x):=ax^3e^{1-x^2}+b+1$ 이라 하면

$$g(x)=h(\cos\pi x)$$

$$g'(x)=h'(\cos\pi x)(-\pi\sin\pi x)$$
$$=-\pi a e^{1-\cos^2\pi x}\sin\pi x\cos^2\pi x(3-2\cos^2\pi x)$$

$\Rightarrow g(x)$는 $x=1$에서 극소이자 최소이다. ($(0,2)$에서 유일한 극소이므로)

따라서 $g(1)=-a+b+1=0$

$$\therefore b=-\frac{7}{8},\ a=\frac{1}{8}\ \Rightarrow a\times b=-\frac{7}{64}$$

단답형

29. 세 실수 a, b, k에 대하여 두 점 $\mathrm{A}(a,\ a+k)$, $\mathrm{B}(b,\ b+k)$가 곡선 $C: x^2-2xy+2y^2=15$ 위에 있다. 곡선 C 위의 점 A에서의 접선과 곡선 C 위의 점 B에서의 접선이 서로 수직일 때, k^2의 값을 구하시오. (단, $a+2k\neq 0$, $b+2k\neq 0$) [4점]

$$a^2-2a(a+k)+2(a+k)^2$$
$$=a^2+2ak+2k^2=15$$

정보가 이거밖에 없어서 이거 쓰는 건 줄 모르고 먼저 쓴 거

a, b는 방정식 $t^2+2kt+2k^2-15=0$의 근이다.

음함수 미분을 하면 $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y}{x-2y}$

따라서 $\frac{k}{a+2k}\times\frac{k}{b+2k}=-1$

이차방정식 근과 계수의 관계

$$\Rightarrow \frac{k^2}{ab+2k(a+b)+4k^2}=\frac{k^2}{2k^2-15+2k(-2k)+4k^2}$$
$$=\frac{k^2}{2k^2-15}=-1$$

$\therefore k^2=5$

30. 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n=\begin{cases}-1 & (a_n\le -1)\\ a_n & (a_n>-1)\end{cases}$$

이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

※ 당신들은 등비급수의 합만 구할 줄 안다...! 이상한 생각 금지

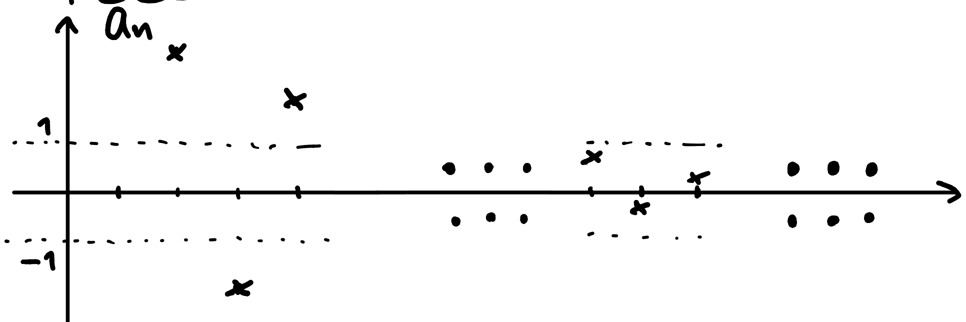
> (가) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}$은 수렴하고 그 합은 -3이다.
>
> (나) 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}$은 수렴하고 그 합은 8이다.

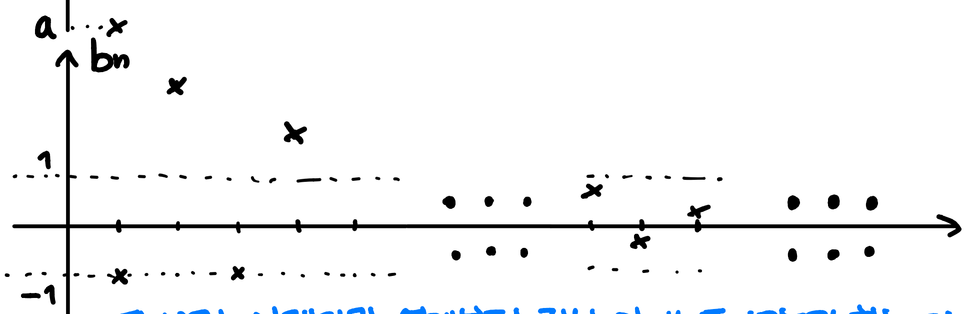
→ 얘는 바뀌는 게 없다

$b_3=-1$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$의 값을 구하시오. [4점]

$-1<r<0$ 인데 당연하므로 pass
(모르겠다면 30번을 풀 자격이 없으니 돌아가자)

이 상황을 그래프로 이해하자





딱 보면 알겠지만 언제부터 점선 안에 들어오는지 찾는 거다.

$\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n}=\frac{ar}{1-r^2}=8$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}=-k+\frac{ar^{2k}}{1-r^2}=-3$

k번 점선 밖이라는 의미

$b_3=-1$이므로 $k\ge 2$ 인데

$k\ge 3$이면 $\frac{ar^{2k}}{1-r^2}$이 음수라 $\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}<-3$이다.

따라서 $k=2$이고 $a=-12$, $r=-\frac{1}{2}$이므로

여백 부족으로 계산 생략

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\frac{12}{1-\frac{1}{2}}=24$$

> * 확인 사항
>
> ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
>
> ○ 이어서, 「**선택과목(기하)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.