제 2 교시

수학 영역

1. [2023년 6월 (공통) 1번]

$\sqrt[3]{27} \times 4^{-\frac{1}{2}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\sqrt[3]{27} \times 4^{-\frac{1}{2}} = (3^3)^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= 3 \times 2^{-1} = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2. [2023년 6월 (공통) 2번]

함수 $f(x) = x^2 - 2x + 3$에 대하여

$\lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$f'(x) = 2x - 2$

$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = f'(3) = 2 \times 3 - 2 = 4$

3. [2023년 6월 (공통) 3번]

수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3) = 60$일 때,

$\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$$\sum_{k=1}^{10} (2a_k + 3) = 2\sum_{k=1}^{10} a_k + 3 \times 10 = 60$$

$\therefore \sum_{k=1}^{10} a_k = 15$

4. [2023년 6월 (공통) 4번]

실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 - f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

[개념] 함수 $f(x)$가 $x = 1$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 - f(1)$

$\Leftrightarrow$ $f(1) = 4 - f(1)$

$\therefore$ $f(1) = 2$

제 2 교시

수학 영역

5. [2023년 6월 (공통) 5번]

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = (x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12　② 14　③ 16　④ 18　⑤ 20

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$g'(x) = 3x^2 f(x) + (x^3+1)f'(x)$

$g'(1) = 3f(1) + 2f'(1)$

$\quad = 3\times 2 + 2\times 3 = 12$

6. [2023년 6월 (공통) 6번]

$\cos\theta < 0$이고 $\sin(-\theta) = \frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$　② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$　③ 0

④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$　⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

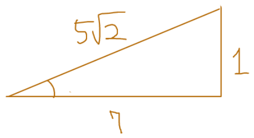
수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

$\sin(-\theta) = \frac{1}{7}\cos\theta$

$\Leftrightarrow -\sin\theta = \frac{1}{7}\cos\theta$

$\Leftrightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{1}{7}$

$\therefore \tan\theta = -\frac{1}{7}$



$\tan\theta < 0$, $\cos\theta < 0$이므로 θ는 제 2사분면 각이다.

$\therefore \sin\theta > 0$

$\sin\theta = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$

7. [2023년 6월 (공통) 7번]

상수 $a(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선

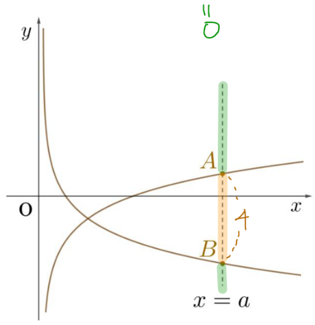
$y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각

A, B라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4　② 6　③ 8　④ 10　⑤ 12

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

함수 $y=\log_2(x-a)$의 점근선은 $x=a$



$\therefore$ A$\left(a,\ \log_2\frac{a}{4}\right)$, B$\left(a,\ \log_{\frac{1}{2}}a\right)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}} = \log_2\frac{a}{4} - \log_{\frac{1}{2}}a = 4$

$\quad = (\log_2 a - 2) + \log_2 a$

$\quad = 2\log_2 a - 2 = 4$

$\therefore \log_2 a = 3$

$\therefore a = 2^3 = 8$

제 2 교시

수학 영역

8. [2023년 6월 (공통) 8번]

두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

수능수학 Big Data Analyst 김지석

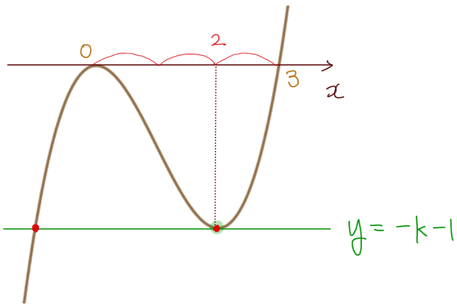
수능한권 Prism 해설

$x^3-x^2+k=2x^2-1$

$\Leftrightarrow$ $x^3-3x^2=-k-1$

$f(x)=x^3-3x^2$과 $y=-k-1$의 교점의 개수가 2

[Skill] 2:1 비례관계



$f(x)$는 $x=2$에서 극소 $f(2)=-4$

$\therefore$ $-k-1=-4$

$\therefore$ $k=3$

Analysis

"이 문제를 어떻게 풀지?"라고 생각하지 말고 "이 문제와 관련 있는 개념이 뭐지?"라고 생각하자.

수열의 합에 대한 단서가 나왔는데

일반항을 구해야 하는 문제가 나왔어.

[관련개념] $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geq 2)$

9. [2023년 6월 (공통) 9번]

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$ ② $\frac{4}{7}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{16}{21}$ ⑤ $\frac{6}{7}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

i) $n=1$일 때

$\frac{1}{a_1}=3$

$\therefore$ $a_1=\frac{1}{3}$

ii) $n\geq 2$ 일 때

$$\frac{1}{(2n-1)a_n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(2k-1)a_k}$$

$$=n^2+2n-\{(n-1)^2+2(n-1)\}$$

$$=2n+1$$

$\therefore$ $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$\therefore$ $a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $(n\geq 1)$

$\sum_{n=1}^{10}a_n$

$$=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{10}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{5}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}\right)+\cdots\left(\cancel{\frac{1}{19}}-\frac{1}{21}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)=\frac{10}{21}$$

제 2 교시

수학 영역

10. [2023년 6월 (공통) 10번]

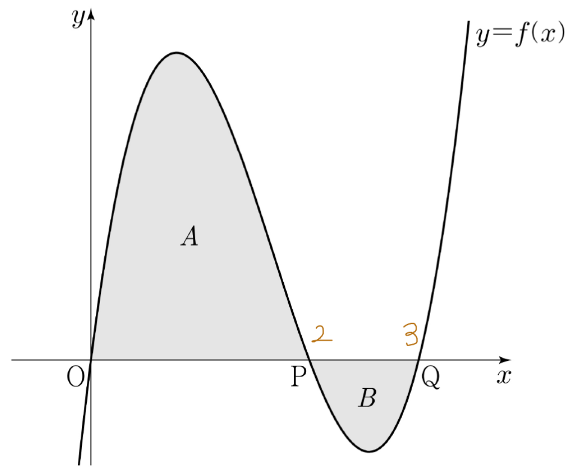
양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q$(\overline{\mathrm{OP}}<\overline{\mathrm{OQ}})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$(A$의 넓이$)-(B$의 넓이$)=3$

일 때, k의 값은? [4점]



① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

(A의 넓이)−(B의 넓이)=3

$$=\int_0^3 f(x)dx=k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)dx$$

$$=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3$$

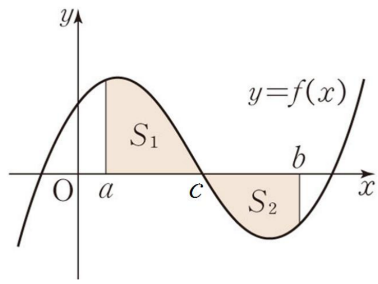
$$=\frac{9}{4}k=3$$

$$\therefore\ k=\frac{4}{3}$$

■ 정적분의 의미

함수 $f(x)$가 양인 부분의 넓이를 S_1, $f(x)$가 음인 부분의 넓이를 S_2라고 하자.

$$\int_a^b f(x)dx=S_1-S_2$$

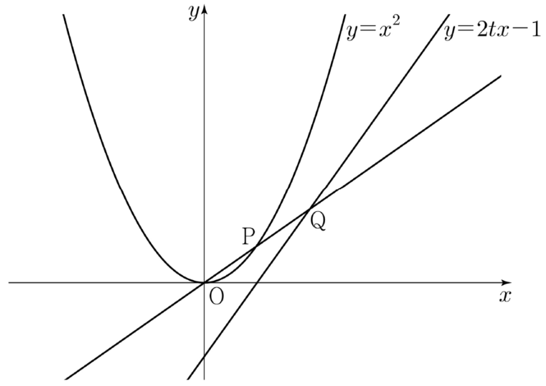


제 2 교시

수학 영역

11. [2023년 6월 (공통) 11번]

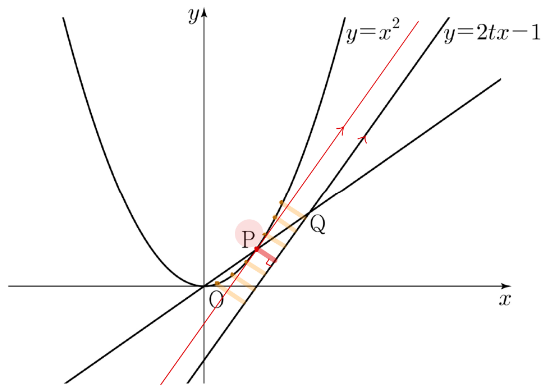
그림과 같이 실수 $t(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때, $\lim_{t\to 1-}\frac{\overline{PQ}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(Step1) 점 P 구하기



$y=x^2$위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점이 P가 되려면

점 P에서의 접선이 $y=2tx-1$와 평행해야 한다.

$f'(x)=2x=2t$

$\Leftrightarrow x=t$

$\therefore \mathrm{P}(t,\ t^2)$

$\therefore$ 직선 OP의 방정식은 $y=tx$

(Step2) 점 Q 구하기

$tx=2tx-1$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{t}$

$\therefore \mathrm{Q}\left(\frac{1}{t},\ 1\right)$

$$\lim_{t\to 1-}\frac{\overline{PQ}}{1-t}=\lim_{t\to 1-}\frac{\sqrt{\left(\frac{1}{t}-t\right)^2+(1-t^2)^2}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to 1-}\frac{(1-t^2)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}}{1-t}$$

$$=\lim_{t\to 1-}(1+t)\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}=2\sqrt{2}$$

제 2 교시

수학 영역

12. [2023년 6월 (공통) 12번]

$a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}(n\geq 1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$, $B=\{b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5\}$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(Step1) 규칙대로 나열하기

수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_1=-4-d$ $\quad b_1=-8-d$

$a_2=-4$ $\quad b_2=-8+d$

$a_3=-4+d$ $\quad b_3=-8+3d$

$a_4=-4+2d$ $\quad b_4=-8+5d$

$a_5=-4+3d$ $\quad b_5=-8+7d$

$\therefore$ 수열 $\{b_n\}$의 공차는 $2d$

(Step2) $n(A\cap B)=3$인 경우 파악하기

b_1 b_2 b_3 b_4 b_5

d d d d d d d d

i) a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

ii) a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

iii) a_1 a_2 a_3 a_4 a_5

i) $a_1=b_1$

$-4-d=-8-d$ (모순)

ii) $a_1=b_2$

$-4-d=-8+d$

$\therefore\ d=2$

$\therefore\ a_{20}=a_2+18d=-4+36=32$

iii) $a_1=b_3$

$-4-d=-8+3d$

$\therefore\ d=1$

$\therefore\ a_{20}=a_2+18d=-4+18=14$

$\therefore$ 모든 a_{20}의 값의 합은

$32+14=46$

Analysis

수능 수열은 나열에 본질이 있다는 걸 극명하게 보여주는 문제다.

제 2 교시

수학 영역

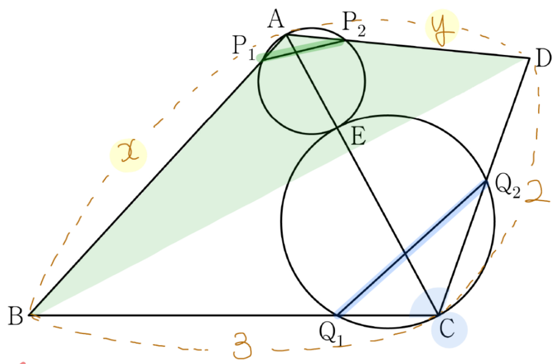
13. [2023년 6월 (공통) 13번]

그림과 같이

$\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3}$, $\angle DAB>\frac{\pi}{2}$

인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자.

$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$
④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

도형의 필연성

필연성 08

사인법칙 활용법 (각이 많을 때)

[단서] → [답]

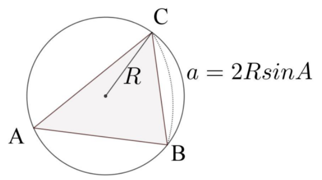
✓ 2변 1각 → 1각

✓ 1변 2각 → 1변

✓ 외접원 등장

Skill 사인법칙 실전용 (2)

✓ 외접원 있을 때



수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

구하는 것 ‣ $\overline{AB}+\overline{AD}=x+y$

→ 관련도가 높은 단서: △ABD의 넓이가 2

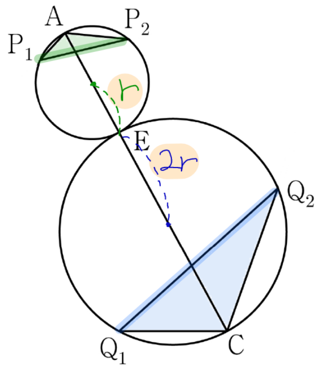
→ $\frac{1}{2}xy\sin A=2$

→ sinA를 구할 생각을 해야 한다.

(Step1) 사인법칙 실전용 (2)

두 원의 지름 $\overline{AE}:\overline{CE}=1:2$이므로

각 원의 반지름의 길이를 r, $2r$라고 하자.



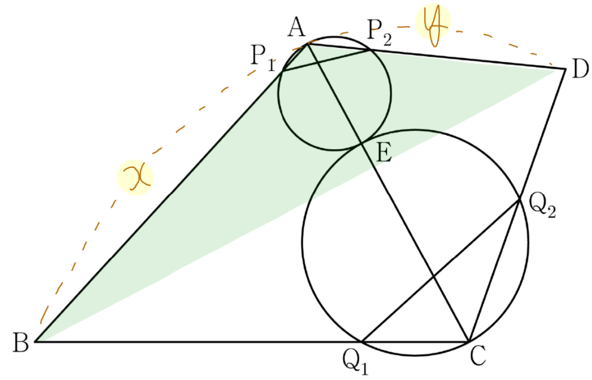
$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$

⇔ $\cancel{2r}\sin A:2(\cancel{2r})\sin C=3:5\sqrt{2}$

∴ $\sin A=\frac{4}{5}$, $\cos A=-\frac{3}{5}$

($\because$ $\cos C=-\frac{1}{3}$, $\sin C=\frac{2\sqrt{2}}{3}$)

(Step2) △ABD의 넓이가 2



△ABD의 넓이 = 2

⇔ $\frac{1}{2}xy\sin A=\frac{1}{\cancel{2}}xy\frac{\cancel{4}}{5}=\cancel{2}$

∴ $xy=5$

제 2 교시

수학 영역

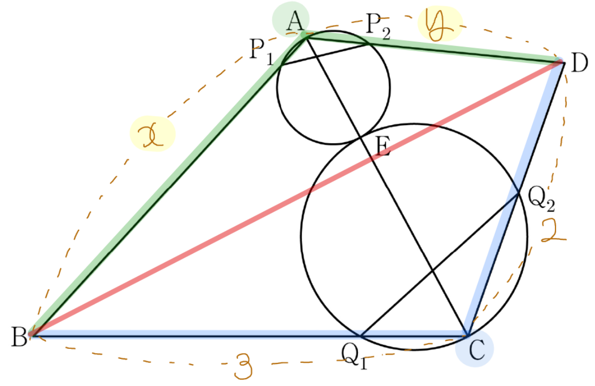
(Step3) Double코사인법칙 (1) 통각

사각형의 대각 $\angle A$, $\angle C$에 대한 정보가 있다.

→ Double코사인법칙을 쓸 생각을 해야 한다.

(비록 사각형에 대한 외접원 상황은 아니지만

그에 준하는 조건과 상황이 나왔다)



$$\overline{BD}^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos A$$
$$= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \cos C$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2 \cdot 5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)$$
$$= 3^2 + 2^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 11$$

$$\therefore (x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy = 11 + 2 \cdot 5 = 21$$

$$\therefore \overline{AB} + \overline{AD} = x + y = \sqrt{21}$$

도형의 필연성

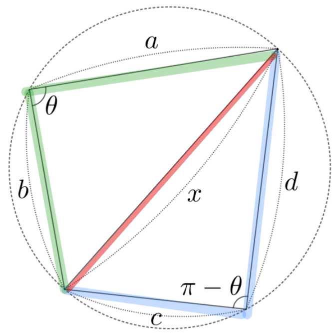
Skill Double코사인법칙 (1) 통각

✓ 원에 내접하는 사각형에서

쪼개지지 않은 각이 제시됐을 때

→ 대각의 합 = 180° 활용

→ 코사인법칙 2번 쓰기



$$x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$
$$= c^2 + d^2 - 2cd\cos(\pi - \theta)$$

6모 13번이 어려웠다면?

(독학) 도형의 필연성

풀컬러 도형문제집

전자책 1,000원! (한정판매)

제 2 교시

수학 영역

14. [2023년 6월 (공통) 14번]

실수 $a(a \geq 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t) = -t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

[개념] 운동 방향 = 속도 부호

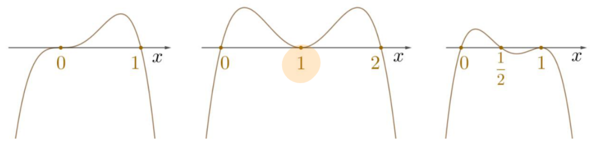
속도의 부호가 바뀔 수 있는 t>0의 값은

1, a, 2a이다. (최대 3개)

그런데 속도의 부호가 1번만 바뀌어야 하므로

1, a, 2a가 중근이 되어야 한다.

i) a=0 ii) a=1 ii) 2a=1



$\therefore$ {t=0~2 점 P의 위치의 변화량}$=\int_0^2 v(t)dt$

그래프의 개형을 보면 $a=1$일 때 최대임을 알 수 있다.

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$

$$= \int_0^2 -t(t^2-2t+1)(t-2)dt$$

$$= \int_0^2 (-t^4+4t^3-5t^2+2t)dt$$

$$= \left[-\frac{1}{5}t^5+t^4-\frac{5}{3}t^3+t^2\right]_0^2$$

$$= -\frac{32}{5}+16-\frac{40}{3}+4$$

$$= \frac{4}{15}$$

[다른 풀이]

$$\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)dt$$

$= \int_{-1}^1 -(t+1)t^2(t-1)dt$ (평행이동 활용)

$$= \int_{-1}^1 -(t^4-t^2)dt$$

$= 2\int_0^1 -(t^4-t^2)dt$ (우함수 대칭성 활용)

$$= \frac{4}{15}$$

제 2 교시

수학 영역

15. [2023년 6월 (공통) 15번]
자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

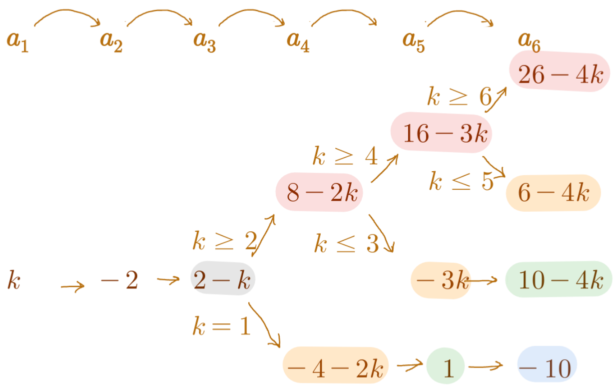
$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

(step1) 규칙대로 나열하기

$\pm 2-k,\ \pm 4-k,\ \pm 6-k,\ \pm 8-k,\ \pm 10-k$



Analysis

아직도 내신이나 다른 책에서는 정해진 풀이법을 외워서 점화식을 일반항으로 고쳐야 하는 문제가 많다! **이것은 이전 교육과정에 있다가 삭제된 내용이다!**

수능에서는 점화식 개념의 본질인 '나열'을 요구한다.
$a_1 \to a_2 \to a_3 \to a_4 \to$ 를 나열하여 원하는 항 구하기!

(step2) k값에 따라 부호 판단하기

k	a_3	a_4	a_5	a_6	$a_3 a_4 a_5 a_6$
$k=1$	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕
$k=2$	0				0
$k=3$	⊖	⊕	⊖	⊖	⊖
$k=4$	⊖	0			0
$k=5$	⊖	⊖	⊕	⊖	⊖
$k=6$	⊖	⊖	⊖	⊕	⊖
$k \ge 7$	⊖	⊖	⊖	⊖	⊕

∴ 모든 k값의 합은
$3+5+6=14$

제 2 교시

수학 영역

16. [2023년 6월 (공통) 16번]

부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

3

$2^{x-6} \le 2^{-2x}$

$\Leftrightarrow\ x-6 \le -2x$

$\therefore\ x \le 2$

$\therefore$ 모든 자연수 x의 값의 합은

$1+2=3$

17. [2023년 6월 (공통) 17번]

함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-1$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

33

$f(x)=\int f'(x)dx=2x^4-x+C$

$f(0)=C=3$

$\therefore\ f(x)=2x^4-x+3$

$\therefore\ f(2)=32-2+3=33$

18. [2023년 6월 (공통) 18번]

두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

6

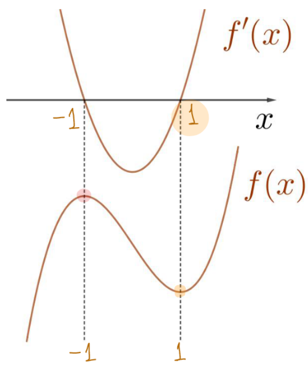
$f(1)=a+b+a=-2$

$f'(x)=3ax^2+b$

$f'(1)=3a+b=0$

$\therefore\ a=2,\ b=-6$

$\therefore\ f'(x)=6x^2-6=6(x+1)(x-1)$



$\therefore\ f(x)$는 $x=-1$에서 극대

$\therefore\ f(-1)=-2+6+2=6$

제 2 교시

수학 영역

19. [2023년 6월 (공통) 19번]
두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x) = a\sin bx + 8 - a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이다. (나) $0 \leq x < 2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

8

(step1) 최솟값에 대한 단서

$f(x) \geq 0$이고 $f(x)=0$의 근이 존재하므로
$f(x)$의 최솟값은 0이다.

$\therefore\ -a+8-a=0$

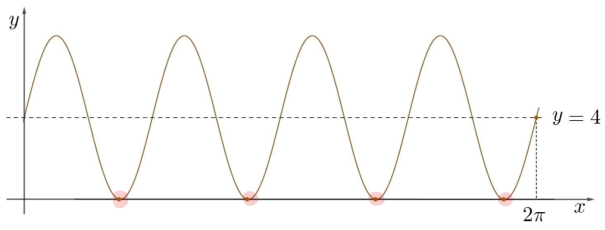
$\therefore\ a=4$

(step2) 주기에 대한 단서

b가 자연수이므로 $0 \leq x < 2\pi$에 주기 $\dfrac{2\pi}{b}$가 정확히 b개 들어간다.

$f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4,

$\therefore\ b=4$



$\therefore\ a+b=4+4=8$

제 2 교시

수학 영역

20. [2023년 6월 (공통) 20번]

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

> $x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
> $g(x) \geq g(4)$이고 $|g(x)| \geq |g(3)|$ 이다.

Analysis

$g(x)=\int_a^x f(t)dt$ 꼴이 등장하면 꼭 해야 하는 것!

❶ $x=a$ 대입 : $g(a)=\int_a^a f(x)dx=0$

❷ 미분 : $g'(x)=f(x)$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설
39

❶ $x=0$ 대입 : $g(0)=0$

❷ 미분 : $g'(x)=f(x)$

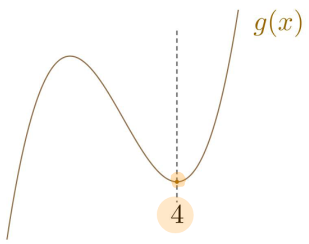
$f(x)$가 최고차항의 계수가 1인 이차함수이므로

$g(x)$는 최고차항의 계수가 $\frac{1}{3}$인 삼차함수

(step1) $g(x) \geq g(4)$ 해석하기

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \geq g(4)$

⇔ $g(x)$는 $x=4$에서 극솟값을 갖는다.



■ 극소의 정의

함수 $f(x)$가 $x=a$를 포함하는 어떤 열린구간에 속하는 모든 x에 대하여

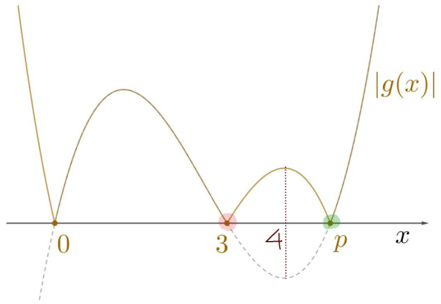
$f(a) \leq f(x)$일 때, $f(x)$는 $x=a$에서 극소라고 한다.

(step2) $|g(x)| \geq |g(3)|$ 해석하기

$x \geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $|g(x)| \geq |g(3)|$

⇔ $x \geq 1$에서 $|g(x)|$의 최솟값은 $|g(3)|$

⇔ $g(3)=0$



$g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-p)$

$g'(x)=\frac{1}{3}\{(x-3)(x-p)+x(x-p)+x(x-3)\}$

$g'(4)=\frac{1}{3}(24-5p)=0$

$\therefore\ p=\frac{24}{5}$

$\therefore\ f(9)=g'(9)$

$=\frac{1}{3}\left\{6\left(9-\frac{24}{5}\right)+9\left(9-\frac{24}{5}\right)+9(9-3)\right\}$

$=39$

[참고] $x \geq 1$에서 $|g(x)| \geq |g(3)|$일 때 $g(3)=0$인 이유

$g(3) \geq g(4)$ 이고 $|g(4)| \geq |g(3)|$이므로

$g(4)$는 절댓값을 고려하면 대소관계가 바뀐다.

$\therefore\ g(4)<0$

$g(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로

$x \geq 1$에서 $g(x)>0$인 부분은 반드시 존재하므로

$g(x)=0$의 근도 $x \geq 1$에 존재한다.

$\therefore\ |g(x)|$의 최솟값은 0

$\therefore\ |g(3)|=0$

제 2 교시

수학 영역

21. [2023년 6월 (공통) 21번]

실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자. <보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C \neq 0$) [4점]

- 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
- 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
- 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

〈 보 기 〉

○ ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다. $A=100$

○ ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다. $B=10$

X ㄷ. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다.

$C=0$

수능수학 Big Data Analyst 김지석

수능한권 Prism 해설

110

ㄱ. (참)

$f(1)=1 \Leftrightarrow t=1,\ x=1$

$\Leftrightarrow$ $t=1$일 때 $y=1-\log_2 x$ & $y=2^{x-1}$의 교점의 x좌표가 1이다.

$\Leftrightarrow$ $y=1-\log_2 x$ & $y=2^{x-1}$ 모두 (1, 1)을 지난다.

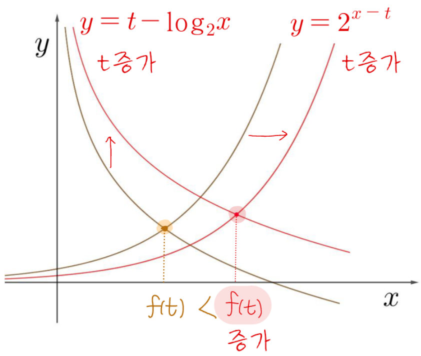
$f(2)=2 \Leftrightarrow t=2,\ x=2$

$\Leftrightarrow$ $t=2$일 때 $y=2-\log_2 x$ & $y=2^{x-2}$의 교점의 x좌표가 2이다.

$\Leftrightarrow$ $y=1-\log_2 x$ & $y=2^{x-1}$ 모두 (2, 1)을 지난다.

ㄴ. (참)

그래프 관찰하기



t값을 증가시키면

$y=t-\log_2 x$의 그래프는 위쪽으로 평행이동되고

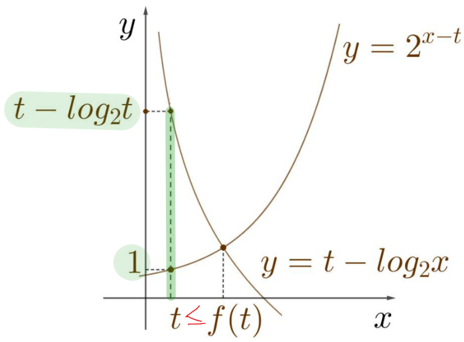
$y=2^{x-t}$의 그래프는 오른쪽으로 평행이동되므로

교점이 오른쪽에 생길 수 밖에 없다.

ㄷ. (거짓)

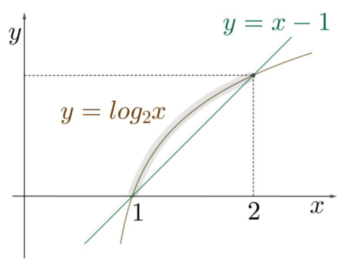
$f(t) \geq t$

$\Leftrightarrow$ $y=t-\log_2 x$ & $y=2^{x-t}$의 교점의 x좌표가 t 이상이다.



$t-\log_2 t \geq 1$

$\Leftrightarrow$ $t-1 \geq \log_2 t$



$1<t<2$일 때, $t-1<\log_2 t$ (모순)

제 2 교시

수학 영역

22. [2023년 6월 (공통) 22번]

정수 $a(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x) = x^3 - 2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$에 대하여
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$$
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

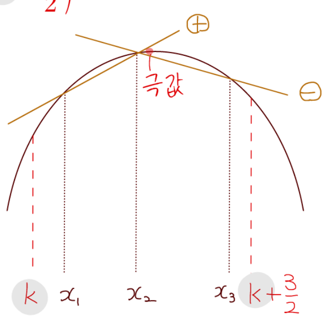
380

(step1) $\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$

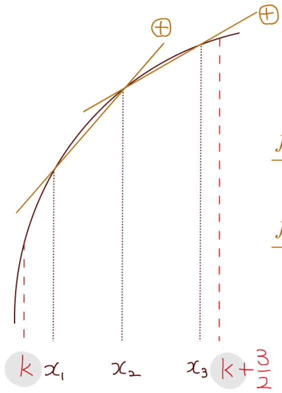
→ 두 평균 변화율의 부호 ⊕⊖가 다르다!

→ 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에서 증가, 감소 변화가 있다.

→ 구간 $\left(k,\ k+\frac{3}{2}\right)$에 극값이 존재한다.



[참고] 증가, 감소 변화가 없는 구간에서는



$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ ⊕

$\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}$ ⊕

(step2) $f(x)$의 극값 구하기

$f(x) = x^3 - 2ax^2$

$f'(x) = 3x^2 - 4ax = 3x\left(x - \frac{4a}{3}\right)$

$f(x)$는 $x=0$, $x = \frac{4a}{3}$에서 극값을 갖는다.

$x=0$을 포함하는 구간 (−1, 0.5) → k=−1

모든 정수 k의 값의 곱이 -12이므로

$x = \frac{4a}{3}$를 포함하는 구간은

i) (3, 4.5) & (4, 5.5) → k=3, 4

ii) (−4, −2.5) & (−3, −1.5) → k=−4, −3

i) (3, 4.5) & (4, 5.5) → k=3, 4 인 경우

$x = \frac{4a}{3}$이 (3, 4.5) & (4, 5.5)에 모두 포함되므로

$4 < \frac{4a}{3} < 4.5$

⇔ $3 < a < \frac{27}{8} = 3.\square\square$

∴ 정수 a가 존재하지 않는다 (모순)

ii) (−4, −2.5) & (−3, −1.5) → k=−4, −3

$-3 < \frac{4a}{3} < -2.5$

⇔ $-\frac{9}{4} < a < -\frac{15}{8}$

∴ 정수 $a = -2$

∴ $f'(x) = 3x^2 + 8x$

∴ $f'(10) = 380$

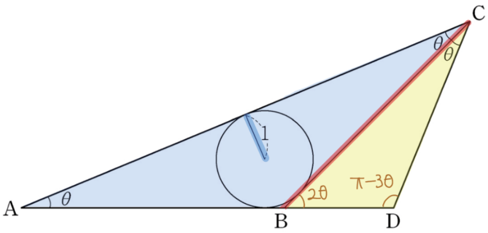
풀컬러 손해설 기출문제집
과목별 6일완성 수능한권

경향 07 Minor Trend

경향07 대표문제분석 033

33. [2015년 수능 (B)형 20번]
그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원에 외접하고 $\angle CAB = \angle BCA = \theta$인 이등변삼각형 ABC가 있다. 선분 AB의 연장선 위에 점 A가 아닌 점 D를 $\angle DCB = \theta$가 되도록 잡는다. 삼각형 BCD의 넓이를 $S(\theta)$라 할 때, $\lim_{\theta \to 0+} \{\theta \times S(\theta)\}$의 값은?

(단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]

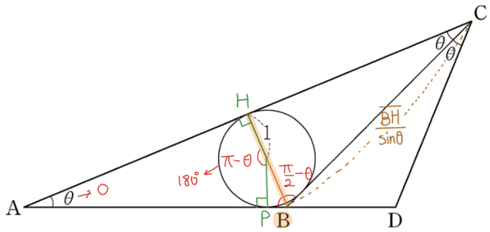


① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{8}{9}$ ③ $\frac{10}{9}$ ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{14}{9}$

수능수학 Big Data Analyst 김지석
수능한권 Prism 해설

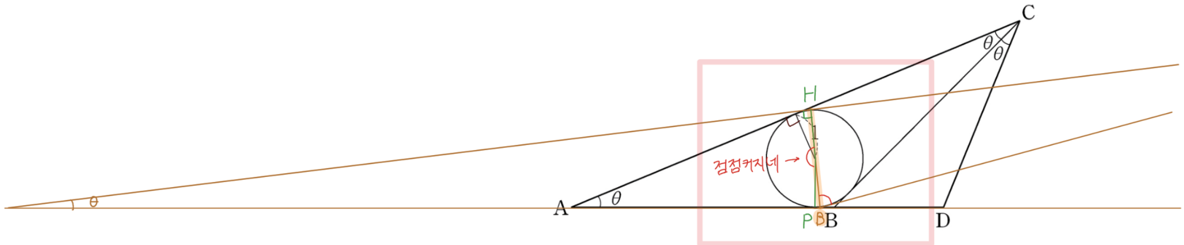
[도형의 필연성]
좌우대칭 도형 → 반띵
이등변 삼각형 → 직각 삼각형

[도형의 필연성]
원 나오면 중심과 특별점 잇기

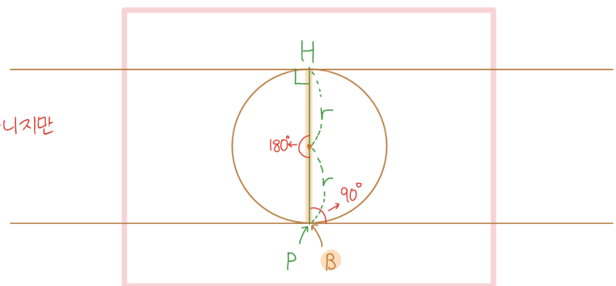


[도형의 필연성]
모르는 삼각형과 → $\triangle BCD$ (길이 정보 없음)
아는 삼각형의 → $\triangle ABC$ (길이 정보 있음)
공통부분을 찾아라! → $\overline{BC}$

[1단계] & [2단계]



[3단계]



진짜 90°, 180° 는 아니지만
한 없이 가까워진다.

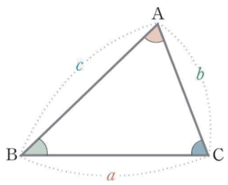
수능 전문항 빅데이터 분석

Analysis

사인법칙 응용 (외접원 없을 때, 각이 많을 때)

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$ 이므로

$b = a\times\frac{b}{a} = a\times\frac{\sin B}{\sin A}$



확장 - 삼각형 넓이

$S = \frac{1}{2}ab\sin C$

$= \frac{1}{2}a\left(a\frac{\sin B}{\sin A}\right)\sin C$

$= \frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}$

$\theta\to 0$ 일 때

3단계 1단계

$\overline{\mathrm{BH}} \to 2r = 2\times 1$

$\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{BH}}\frac{1}{\sin\theta} \to \frac{2}{\sin\theta}$

$S(\theta) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}^2\frac{\sin 2\theta\sin\theta}{\sin 3\theta}$

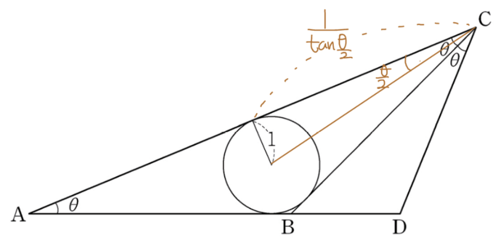
$\lim_{\theta\to 0+}\{\theta\times S(\theta)\}$

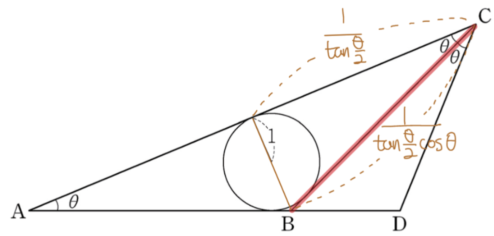
★교체

$= \lim_{\theta\to 0+}\left\{\theta\times\frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sin\theta}\right)^2\frac{\sin 2\theta\sin\theta}{\sin 3\theta}\right\}$

$= \frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{2\times 1}{3} = \frac{4}{3}$

[다른 풀이]





$\overline{\mathrm{BC}} = \overline{\mathrm{CH}}\frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}\cos\theta}$

$S(\theta) = \frac{1}{2}\overline{\mathrm{BC}}^2\frac{\sin 2\theta\sin\theta}{\sin 3\theta}$

$\lim_{\theta\to 0+}\{\theta\times S(\theta)\}$

$= \lim_{\theta\to 0+}\left\{\theta\times\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}\cos\theta}\right)^2\frac{\sin 2\theta\sin\theta}{\sin 3\theta}\right\}$

$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}\times\frac{2\times 1}{3} = \frac{4}{3}$

독학, 과목별 6일 완성

하루 3시간 X 7일 = 수능 전과목 모든 개념

연구16 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가함을 유도하시오.

연구17 다음 명제의 참 거짓을 판별하시오.

①$y=f(x)$가 증가함수이면 $f'(x)>0$이다.

②$f'(x)>0$이면 $y=f(x)$가 증가함수이다.

③$y=f(x)$가 증가함수이면 $f'(x)\geq 0$이다.

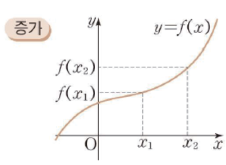
④$f'(x)\geq 0$이면 $y=f(x)$가 증가함수이다.

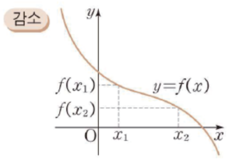
9 함수의 증가와 감소

함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

연구 15 **함수의 증가:**

함수의 감소:





함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간에서

연구 16 ①$f'(x)>0$이면

②$f'(x)<0$이면

연구 17 $f(x)$ 증가 $\rightleftarrows$ $f'(x)>0$

$f(x)$ 증가 $\rightleftarrows$ $f'(x)\geqq 0$

함수의 증가와 감소

수학의 단권화

9종 교과서 + 내 손으로 + 실전 개념 단 1권 + 독학

수학의 단권화

개념 연구

연구16 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간의 모든 x에 대하여 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 이 구간에서 증가함을 유도하시오.

연구17 다음 명제의 참 거짓을 판별하시오.

① $y=f(x)$가 증가함수이면 $f'(x)>0$이다.

② $f'(x)>0$이면 $y=f(x)$가 증가함수이다.

③ $y=f(x)$가 증가함수이면 $f'(x)\geq 0$이다.

④ $f'(x)\geq 0$이면 $y=f(x)$가 증가함수이다.

9 함수의 증가와 감소

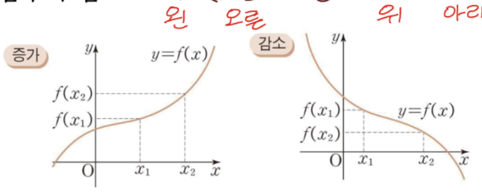
함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

연구 15 **함수의 증가:** $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)<f(x_2)$

왼 오른 아래 위

함수의 감소: $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)>f(x_2)$

왼 오른 위 아래



함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능하고, 그 구간에서

연구 16 ① $f'(x)>0$이면

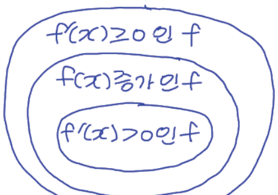
$f(x)$는 그 구간에서 증가

② $f'(x)<0$이면

$f(x)$는 그구간에서 감소

연구 17 $f(x)$ 증가 $\underset{\text{O}}{\overset{\text{X}}{\rightleftarrows}}$ $f'(x)>0$

$f(x)$ 증가 $\underset{\text{X}}{\overset{\text{O}}{\rightleftarrows}}$ $f'(x)\geqq 0$



함수의 증가와 감소

유도

① 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여 $x_1<x_2$라고 하자

평균값의 정리에 의하여

$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$인 c가 구간에 적어도 하나 존재한다. } 개념

$f'(x)>0$ 이므로 $f'(c)>0$이고

$x_2-x_1>0$ 이므로

$f(x_2)-f(x_1)>0$ 이다. } 조건

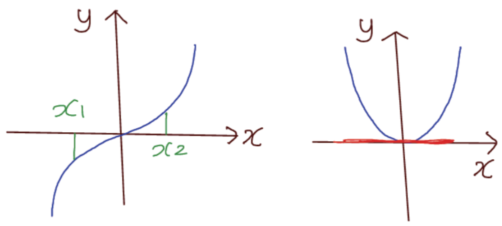
결국 $x_1<x_2$ 일때, $f(x_1)<f(x_2)$) 정의

반례

※ $f(x)=x^3$ 증가함수 → $f'(x)=3x^2>0$

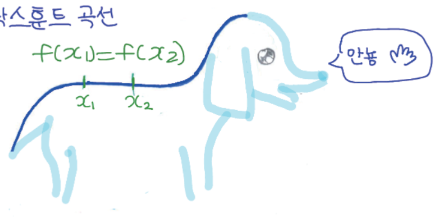
$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ $\quad$ $f'(0)=0$ 모순

$x_1^3<x_2^3$



※ $f'(x)\geq 0$ → $f(x)$증가함수 모순 !

ex) 닥스훈트 곡선



수 II

개념과 개념의 연결성, 수학의 단권화

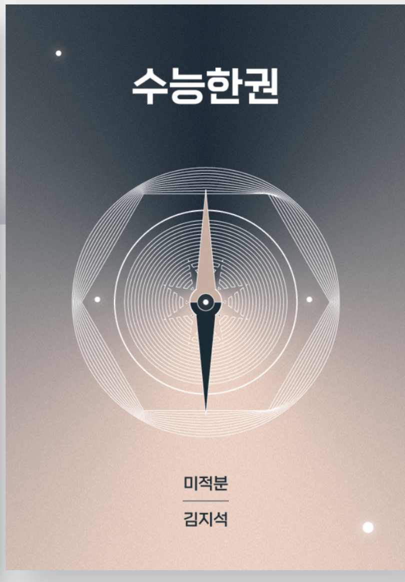
국내 주요대학 합격시 100% 환급

FREE PASS

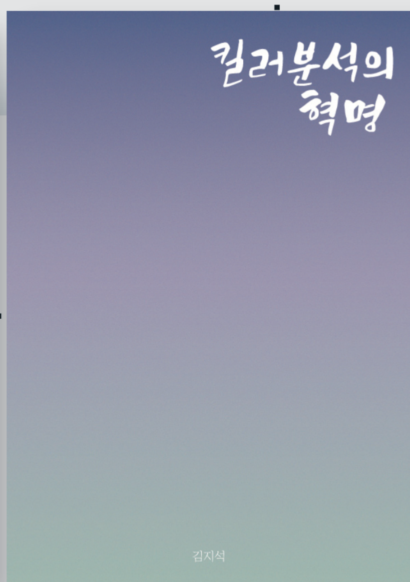
김지석 CURRICULUM

[9종 교과서를 단 한권에]

[수능 30개년 데이터 분석]



[모든 그래프를 그리는 기술]



[우연이 아닌 필연적 문풀]

[킬러를 푸는 사고의 정리]