06 [2010학년도 6월 평가원 수리 나형 4번]

2^a를 4^a 형태로 바꿔주는 것이 이 문제의 핵심이야.

실수 a가 $\dfrac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$를 만족시킬 때, 4^a+4^{-a}의 값은? [3점]

① $\dfrac{5}{2}$ ② $\dfrac{10}{3}$ ③ $\dfrac{17}{4}$ ④ $\dfrac{26}{5}$ ⑤ $\dfrac{37}{6}$

2^a에 2^a을 곱하면 4^a가 되는 걸 이용할 거야.

$2^a\times 2^a=2^{a+a}=2^{2a}=4^a$

고등 수Ⅰ 지수법칙
$a^m a^n=a^{m+n}$

$$\frac{2^a+2^{-a}}{2^a-2^{-a}}=-2$$ ← 문제에서 주어진 식

좌변의 분자, 분모에 2^a씩 곱해줄게.

$$\frac{(2^a+2^{-a})\times 2^a}{(2^a-2^{-a})\times 2^a}=-2$$

$$\frac{(2^a\times 2^a)+(2^{-a}\times 2^a)}{(2^a\times 2^a)-(2^{-a}\times 2^a)}=-2$$

고등 수Ⅰ 지수법칙
a가 임의의 실수이고, m, n이 자연수일 때,
· $a^m a^n=a^{m+n}$
· $(a^m)^n=a^{mn}$

$$\frac{2^{a+a}+2^{-a+a}}{2^{a+a}-2^{-a+a}}=-2$$

$$\frac{2^{2a}+2^0}{2^{2a}-2^0}=-2$$

고등 수Ⅰ 지수법칙
$a\neq 0$일 때, $a^0=1$

$$\frac{2^{2a}+1}{2^{2a}-1}=-2$$

양변에 $2^{2a}-1$씩 곱해줄게.

$$\frac{2^{2a}+1}{\cancel{2^{2a}-1}}\times \cancel{(2^{2a}-1)}=-2\times(2^{2a}-1)$$

$$2^{2a}+1=-2\times(2^{2a}-1)$$

$$2^{2a}+1=-2\times 2^{2a}+2$$

이항해서 2^{2a}끼리 묶어줄게.

$$2^{2a}+2\times 2^{2a}=2-1$$

$$1\times 2^{2a}+2\times 2^{2a}=1$$

$$2^{2a}(1+2)=1$$

$$3\cdot 2^{2a}=1$$

$$2^{2a}=\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ 4^a=\frac{1}{3}$$ ← 4^a 형태로 만들었어!

고등 수Ⅰ 지수법칙
$a\neq 0$이고, n이 양의 정수일 때
$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$

· 문제에서 4^a+4^{-a}를 구하라고 했으니까 4^{-a}도 구해보자구!

$$4^{-a}=\frac{1}{4^a}=\frac{1}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{1}{\cancel{3}}\times 3}{\frac{1}{\cancel{3}}\times\cancel{3}}=\frac{\frac{3}{1}}{\frac{1}{1}}=\frac{3}{1}=3$$

$$\therefore\ 4^{-a}=3$$

$$=\frac{1}{3}+3=\frac{10}{3}$$

07 [2023학년도 9월 평가원 수학(공통) 11번]

함수 $f(x) = -(x-2)^2 + k$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수가 2일 때, 상수 k의 값은? [4점]

> $\sqrt{3}^{f(x)}$의 n제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값이 -9이다.

제곱근이 짝수일 때, $(a>0)$ 실근은 2개야. $(x = \pm\sqrt[n]{a})$

실수인 근

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

고등 수I x는 a의 n제곱근

· $x^n = a$

$x^{n\times\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$

$x = a^{\frac{1}{n}}$

$x = \sqrt[n]{a}$

고등 수I 거듭제곱근의 성질

$a>0$이고, m, n이 2 이상의 자연수일 때

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

∴ x는 a의 n제곱근 → $x^n = a$ ⇔ $x = \sqrt[n]{a}$

· n이 짝수일 때, $(a>0)$ 실근은 2개 $(x = \pm\sqrt[n]{a})$

ex) x는 a의 n제곱근 → $x^n = a$

x는 16의 2제곱근 → $x^2 = 16$

$(+4)^2 = 16$

$(-4)^2 = 16$

∴ $x = \pm 4$ $(x = \pm\sqrt[2]{16})$

· x는 a의 n제곱근 → $x^n = a$ ⇔ $x = \sqrt[n]{a}$

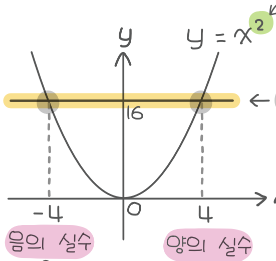
· 그리고 제곱근이 짝수일 땐, $(a>0)$ 실근은 2개가 돼.

실수인 근

$x = \sqrt[n]{a} \rightarrow x = \pm\sqrt[n]{a}$

짝수

이 부호를 신경써 줘야해.



$\leftarrow x^2 = 16 \rightarrow x = \pm\sqrt[2]{16}$

짝수

그럼 본격적으로 풀어보자구!

짝수

x는 $\sqrt{3}^{f(x)}$의 네제곱근 → $x^4 = \sqrt{3}^{f(x)}$ ⇔ $x = \pm\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(x)}}$

$\sqrt{\ }$의 원래형태는 $\sqrt[2]{\ }$이지만, 2를 생략한 형태로 자주 써.

$x = \pm\sqrt[4]{\sqrt{3}^{f(x)}}$

$x = \pm\sqrt[4]{3^{\frac{f(x)}{2}}}$

고등 수I 거듭제곱근의 성질

$a>0$이고, m, n이 2 이상의 자연수일 때

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$x = \pm\sqrt[4]{3^{\frac{f(x)}{2}}}$

$x = \pm 3^{\frac{f(x)}{2}\times\frac{1}{4}}$

$x = \pm 3^{\frac{f(x)}{8}}$

∴ $x = \underbrace{3^{\frac{f(x)}{8}}, \ -3^{\frac{f(x)}{8}}}$

2개의 실수를 구했어.

문제에서 실수를 모두 곱한 값이 -9라고 했으니까

$$3^{\frac{f(x)}{8}} \times -3^{\frac{f(x)}{8}} = -9$$

$$3^{\frac{f(x)}{8}} \times 3^{\frac{f(x)}{8}} = 9$$

$$3^{\frac{f(x)}{8}+\frac{f(x)}{8}} = 9$$

$$3^{\frac{f(x)}{8}\times 2} = 9$$

$$3^{\frac{f(x)}{4}} = 9$$

$$3^{\frac{f(x)}{4}} = 3^{2}$$

$$\frac{f(x)}{4} = 2$$

$$\frac{f(x)}{\cancel{4}} \times \cancel{4} = 2 \times 4$$

$$\therefore\ f(x) = 8$$

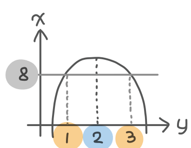
고등 수I 지수법칙

a, b가 임의의 실수이고, m, n이 자연수일 때,

· $a^m a^n = a^{m+n}$

· $(a^m)^n = a^{mn}$

문제에서 주어진 식 $f(x) = -(x-2)^2 + k = 8$



중등 3학년

이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$의 그래프

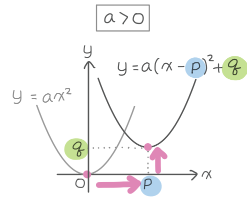
$y = ax^2$

x축의 방향으로 p만큼 평행이동

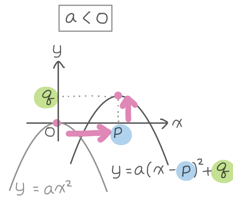
y축의 방향으로 q만큼 평행이동

이차함수 $y = a(x-p)^2 + q$의 그래프

$a>0$



$a<0$



	$y = ax^2$	$y = a(x-p)^2 + q$
꼭짓점의 좌표	$(0, 0)$	(p, q)
축의 방정식	$x = 0$	$x = p$

$f(x) = -(x-2)^2 + k$ 식을 만족시키는

자연수 n의 개수가 2개 라고 했어.

2보다 작은 자연수는 1밖에 없으니까 $x = 1$이 돼.

그리고 다른 자연수 n은 2를 기준으로

1과 대칭되는 3이 되겠지?

따라서 $x = 1$과 3일 때, $y = 8$이 되고,

$$f(1) = -(1-2)^2 + k = 8$$

$$-1 + k = 8$$

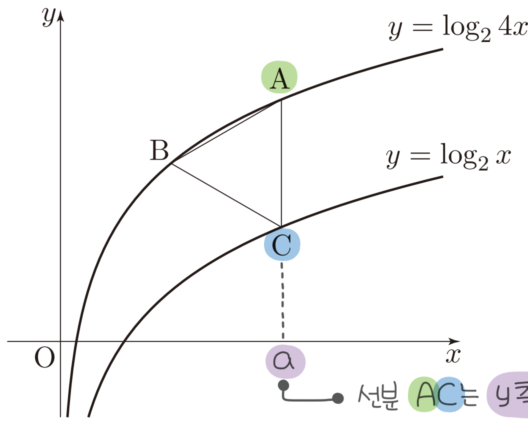
$$\therefore\ k = 9$$

15 [2011학년도 9월 평가원 수리 나형 15번]

점 A와 점 C의 x좌표가 같다.

함수 $y=\log_2 4x$의 그래프 위의 두 점 A, B와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프 위의 점 C에 대하여, 선분 AC가 y축에 평행하고 삼각형 ABC가 정삼각형일 때, 점 B의 좌표는 $(p,\ q)$이다. $p^2\times 2^q$의 값은? [4점]

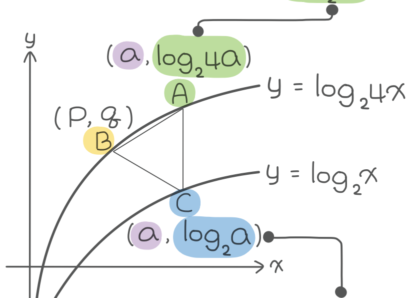
① $6\sqrt{3}$　② $9\sqrt{3}$　③ $12\sqrt{3}$　④ $15\sqrt{3}$　⑤ $18\sqrt{3}$



선분 AC는 y축에 평행하다.
= 점 A와 점 C의 x좌표가 같다.
→ 점 A와 점 C의 x좌표를 a라고 정해줄게.

x좌표는 구했으니까
y좌표도 구해보자구!

점 A의 x좌표가 a일 때
$y=\log_2 4x$와 만나니까
y좌표는 $\log_2 4a$가 돼.



점 C의 x좌표가 a일 때
$y=\log_2 x$와 만나니까
y좌표는 $\log_2 a$가 돼.

점 A와 점 C의 y좌표를 이용해서
$\overline{AC}$의 길이를 구해 보자구.

$\overline{AC}$ = 점 A의 y좌표 − 점 C의 y좌표
$= \log_2 4a - \log_2 a$
$= \log_2 \frac{4a}{a}$
$= \log_2 4$
$= \log_2 2^2$
$= 2\cdot\log_2 2$
$= 2\times 1$
$= 2$

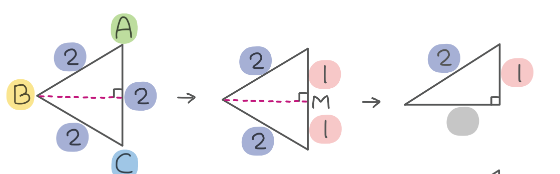
$\overline{AC} = 2$

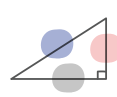
고등 수I 로그의 성질
$a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ y>0$일 때
$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

고등 수I 로그의 성질
$a>0,\ a\neq 1,\ x>0,\ k$는 실수일 때
$\log_a x^k = k\log_a x$

고등 수I 로그의 성질
$a>0,\ a\neq 1$일 때
$\log_a a = 1$

∴ △ABC는 한 변이 2인 정삼각형이야.





$\bigcirc^2 = \bigcirc^2 + \bigcirc^2$
$2^2 = \bigcirc^2 + 1^2$
$4 = \bigcirc^2 + 1$
$3 = \bigcirc^2$
$\therefore \sqrt{3} = \bigcirc$

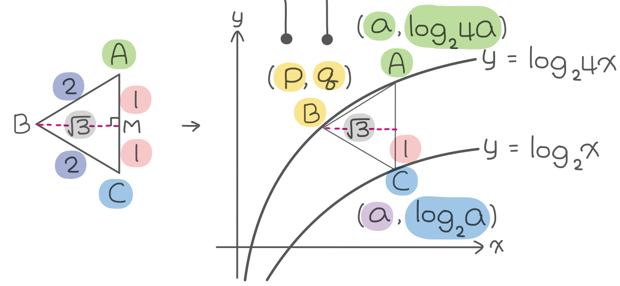
· 이제 정삼각형 ABC와 점 C의 좌표를 이용해서 점 B의 좌표를 구해 보자구!

점 B의 x좌표 p는 점 C의 x좌표에서 $\sqrt{3}$만큼 빼주면 돼.

→ 점 B의 x좌표 $p = a - \sqrt{3}$

점 B의 y좌표 q는 점 C의 y좌표에서 1만큼 더해 주면 돼.

→ 점 B의 y좌표 $q = \log_2 a + 1$



∴ 점 B의 좌표 (p, q)는 $(a - \sqrt{3}, \log_2 a + 1)$

· 문제에서 $p^2 \times 2^q$의 값을 구하라고 했으니까 a도 구해줄게!

점 B (p, q) 즉, $(a - \sqrt{3}, \log_2 a + 1)$는 $y = \log_2 4x$ 위에 있는 점이니까

x에는 $a - \sqrt{3}$, y에는 $\log_2 a + 1$을 $y = \log_2 4x$에 대입해 줄게.

$$\log_2 a + 1 = \log_2 4(a - \sqrt{3})$$

$$\log_2 a + \log_2 2 = \log_2 4(a - \sqrt{3})$$

$$\log_2 2a = \log_2 4(a - \sqrt{3})$$

$$\cancel{2}a = \cancel{4}(a - \sqrt{3})$$

$$a = 2(a - \sqrt{3})$$

$$a = 2a - 2\sqrt{3}$$

$$\therefore 2\sqrt{3} = a$$

고등 수I 로그의 성질
$a > 0$, $a \neq 1$일 때
$\log_a a = 1$

고등 수I 로그의 성질
$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$일 때
$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

· a를 구했으니까 이제 $p^2 \times 2^q$도 구해 보자구!

$2\sqrt{3} = a$를 점 B의 좌표 $(a - \sqrt{3}, \log_2 a + 1)$에 대입해 줄게.

$$= 2\sqrt{3} - \sqrt{3}$$

$$= \sqrt{3}$$

$$= \log_2 2\sqrt{3} + 1$$

$$= \log_2 2\sqrt{3} + \log_2 2$$

$$= \log_2 2 \cdot 2\sqrt{3}$$

$$= \log_2 4\sqrt{3}$$

고등 수I 로그의 성질
$a > 0$, $a \neq 1$일 때
$\log_a a = 1$

고등 수I 로그의 성질
$a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$일 때
$\log_a x + \log_a y = \log_a xy$

∴ 점 B $(p, q) = (\sqrt{3}, \log_2 4\sqrt{3})$

∴ $p = \sqrt{3}$, $q = \log_2 4\sqrt{3}$

두둥! 드디어! $p^2 \times 2^q = \sqrt{3}^2 \times 2^{\log_2 4\sqrt{3}}$

$$= 3 \times 4\sqrt{3}^{\log_2 2}$$

$$= 3 \times 4\sqrt{3}$$

$$= 12\sqrt{3}$$

고등 수I 로그 밑의 변환공식
$a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$일 때
$a^{\log_c b} = b^{\log_c a}$
양끝의 수들은 서로 위치를 바꿀 수 있다.

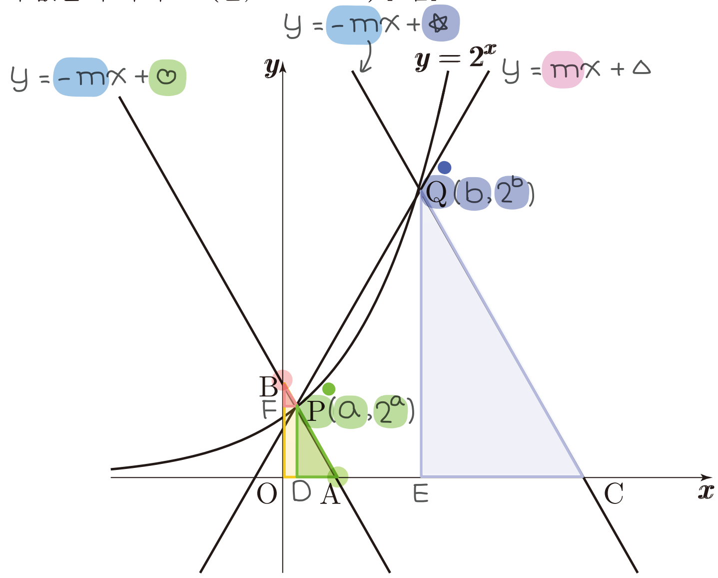
고등 수I 로그의 성질
$a > 0$, $a \neq 1$일 때
$\log_a a = 1$

19 [2023학년도 9월 평가원 수학(공통) 21번]

그림과 같이 곡선 $y=2^x$ 위에 두 점 $\mathrm{P}(a,\ 2^a)$, $\mathrm{Q}(b,\ 2^b)$이 있다. 직선 PQ의 기울기를 m이라 할 때, 점 P를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 Q를 지나며 기울기가 $-m$인 직선이 x축과 만나는 점을 C라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}=4\overline{\mathrm{PB}},\quad \overline{\mathrm{CQ}}=3\overline{\mathrm{AB}}$$

일 때, $90\times(a+b)$의 값을 구하시오. (단, $0<a<b$) [4점] 220



· { y = 2^x 와 y = mx + △, y = -mx + ♡ / y = 2^x 와 y = mx + △, y = -mx + ☆ } 가 { 점 P / 점 Q } 를 지나고 있어.

→ 점 P와 점 Q에 문제를 풀 수 있는 정보들이 주렁주렁 달려있어.

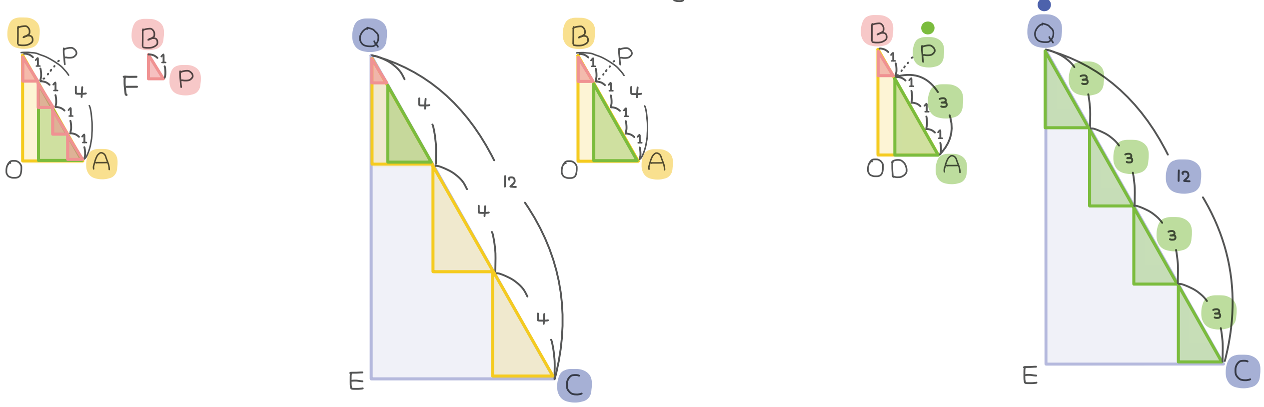
그럼 점 P와 점 Q를 잘 활용해서 문제를 풀어보자구.

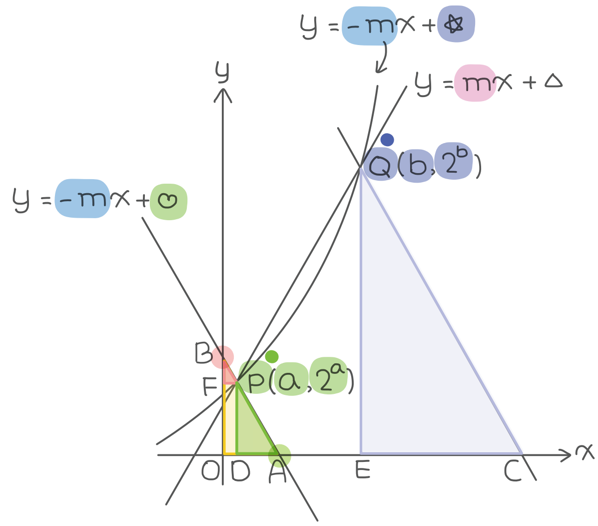
→ 이 문제는 점 P와 점 Q를 "꼭짓점"으로 하는 직각삼각형을 찾는게 중요해!

문제에서 주어진 조건

$\overline{AB}=4\overline{PB}$ $\overline{CQ}=3\overline{AB}$ $\xrightarrow{\text{여기가 중요해!}}$ ∴ $\overline{PA}:\overline{QC}=3:12$

$\overline{PA}:\overline{QC}=1:4$





$\overline{PA} : \overline{QC} = 1 : 4$ ← 점 P의 y좌표 2^a(높이) : 점 Q의 y좌표 2^b(높이)도 1 : 4

$2^a : 2^b = 1 : 4$

$2^b = 2^a \cdot 4$

$2^b = 2^a \cdot 2^2$

$2^b = 2^{a+2}$

고등 수I 지수법칙

a가 임의의 실수이고,
m, n이 자연수일 때,
· $a^m a^n = a^{m+n}$
· $(a^m)^n = a^{mn}$

∴ $b = a+2$ ← 점 Q(b, 2^b)와 점 P(a, 2^a)에 있는 a와 b의 관계를 알아냈으니까 이걸 이용해서 점 Q와 P를 지나는 직선의 기울기 m을 구해보자구

① · 점 Q와 P를 지나는 직선의 기울기 m은

중등 2학년
일차함수 y = ax + b
기울기 $a = \dfrac{y\text{값의 증가량}}{x\text{값의 증가량}}$

$b = a+2$

$$\frac{2^b - 2^a}{b-a}$$

$$= \frac{2^{a+2} - 2^a}{a+2-a}$$

고등 수I 지수법칙

a, b가 임의의 실수이고,
m, n이 자연수일 때,
· $a^{m+n} = a^m a^n$
· $a^{mn} = (a^m)^n$

$$= \frac{2^a \cdot 2^2 - 2^a}{2}$$

$$= \frac{2^a(2^2-1)}{2}$$

$$= \frac{2^a \cdot 3}{2}$$

고등 수I 지수법칙

$a \neq 0$이고,
n이 양의 정수일 때
$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

$$= 3 \cdot 2^a \times \frac{1}{2}$$

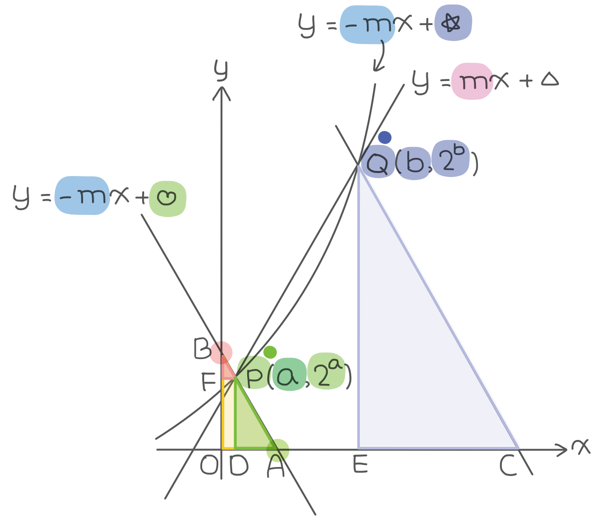
$$= 3 \cdot 2^a \times 2^{-1}$$

고등 수I 지수법칙

a, b가 임의의 실수이고,
m, n이 자연수일 때,
· $a^m a^n = a^{m+n}$
· $(a^m)^n = a^{mn}$

$$= 3 \cdot 2^{a+(-1)}$$

$$= 3 \cdot 2^{a-1}$$ ← 점 Q와 P를 지나는 직선의 기울기 m



② ③

· 이젠 점 P $(a, 2^a)$와 기울기 $-m$으로 직선 AB의 방정식을 구해줄게.

기울기 m이 $3\cdot 2^{a-1}$니까

기울기 $-m$은 $-3\cdot 2^{a-1}$

· 따라서

직선 AB의 방정식은 $y-2^a=-3\cdot 2^{a-1}(x-a)$

④ · 이번에는

직선 AB의 방정식 $y-2^a=-3\cdot 2^{a-1}(x-a)$에

$y=0$을 대입해서 점 A의 x좌표를 구해줄게.

$$y-2^a=-3\cdot 2^{a-1}(x-a)$$
$$0-2^a=-3\cdot 2^{a-1}(x-a)$$
$$-2^a=-3\cdot 2^{a-1}(x-a)$$
$$-2^a=-3\cdot 2^{a+(-1)}(x-a)$$
$$-2^a=-3\cdot 2^a\times 2^{-1}(x-a)$$
$$-2^a=-3\cdot 2^a\times \frac{1}{2}(x-a)$$
$$\cancel{2^a}=3\cdot \cancel{2^a}\times \frac{1}{2}(x-a)$$
$$1=\frac{3}{2}(x-a)$$
$$\frac{2}{3}\times 1=\frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}(x-a)$$
$$\frac{2}{3}=x-a$$

$\therefore\ a+\frac{2}{3}=x$ ← 점 A의 x좌표

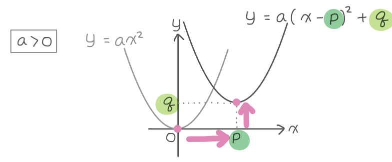
중등 3학년
이차함수 $y=a(x-p)^2+q$ 의 그래프

$y=ax^2$
x축의 방향으로 p만큼 평행이동
y축의 방향으로 q만큼 평행이동

$y-q=a(x-p)^2$

$\therefore\ \boxed{y=a(x-p)^2+q}$

$\boxed{a>0}$



	$y=ax^2$	$y=a(x-p)^2+q$
꼭짓점의 좌표	$(0, 0)$	(p, q)
축의 방정식	$x=0$	$x=p$

고등 수Ⅰ 지수법칙

a, b가 임의의 실수이고,
m, n이 자연수일 때,

· $a^{m+n}=a^m a^n$
· $a^{mn}=(a^m)^n$

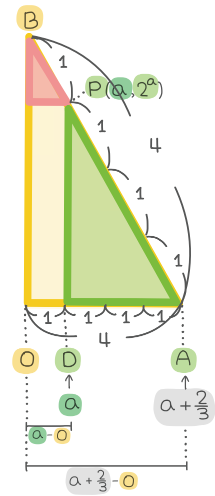
고등 수Ⅰ 지수법칙

$a\neq 0$이고,
n이 양의 정수일 때
$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

$a+\frac{2}{3}=x$ ← 점 A의 x좌표

그리고

점 P의 x좌표가 a니까, 점 D의 x좌표도 a



$\overline{BP}:\overline{BA}=\overline{OD}:\overline{OA}=1:4$

$\therefore \overline{OD}:\overline{OA}=1:4$

$a-0:a+\frac{2}{3}-0=1:4$

$\underbrace{a:\underbrace{a+\frac{2}{3}=1}:4}$

$(a+\frac{2}{3})\times 1=a\times 4$

$a+\frac{2}{3}=4a$

$\frac{2}{3}=3a$

$\because b=a+2$ — $\frac{2}{9}=a$

$b=\frac{2}{9}+2=\frac{2}{9}+\frac{18}{9}=\frac{20}{9}$

· 문제에서 $90\times(a+b)$를 구하라고 했으니까

$=90\times(\frac{2}{9}+\frac{20}{9})$

$=90\times\frac{22}{9}$

$=$ ✓ 220

오호...

① 기울기 m을 구하는 이유는?

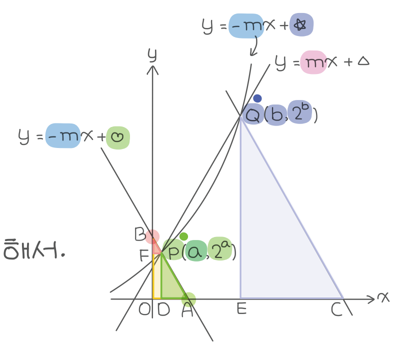
→ 기울기 $-m$을 구하기 위해서.

② 기울기 $-m$을 구하는 이유는?

→ 직선 AB의 방정식 구하기 위해서.

③ 직선 AB의 방정식을 구하는 이유는?

→ 우리의 목표 a(점 P의 x좌표)를 구하기 위해서.



④ 직선 QC의 방정식이 아닌

직선 AB의 방정식을 구하는 이유는?

→ [기울기 $-m$인 $-3\cdot 2^{a-1}$의 a와 / 점 P의 x좌표 a] 문자를 맞추는 것이 편해서.