제 2 교시

# 수학 영역

3월 전국연합학력평가 대비

5지선다형

1. $\dfrac{2^{\sqrt{3}+1}}{2^{\sqrt{3}-1}}$의 값은? [2점]

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

$2^{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)}=2^2=4$

2. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+3}-x\right)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\cancel{x^2}+4x+3-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+4x+3}+x}=\dfrac{4}{1+1}=2$

3. 공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$이

$r>1$

$$a_2a_4=9,\quad a_2+a_4=\frac{15}{2}$$

를 만족시킬 때, $a_5$의 값은? [3점]

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

$a_2a_4=(a_3)^2=9 \longrightarrow a_3=\pm3$

$r>1,\ a_2+a_4>0$ 이므로 $a_3=3$

$a_2+a_4=\frac{3}{r}+3r=\frac{15}{2} \rightarrow 2r^2-5r+2=0$

$(2r-1)(r-2)=0$

$\therefore r=2$

$a_5=a_3\cdot r^2=3\cdot2^2=12$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x+1)f(x)$$

라 하자. $\lim_{x\to1}\dfrac{f(x)-2}{x-1}=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

$f(1)=2,\ f'(1)=3$

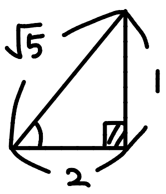
$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$

$g'(1)=2+2\cdot3=8$

**5.** 직선 $y=2x+1$과 수직인 직선이 $x$축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 $\theta$라 할 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$의 값은? (단, $0<\theta<\pi$) [3점]

① $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $-\frac{1}{5}$
④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta = -\frac{1}{2}$




$\sin(\frac{\pi}{2}-\theta) = \cos\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}\sqrt{5}$

성민T의 COMMENT

수험생이라면 한번쯤은 부호 때문에 틀려봤을 문항
앞으로 OMR 마킹 시 10초만 부호를 다시 점검해보는 습관을 만들자!

**6.** 함수 $f(x)=2x^3-9x^2+12x+a$의 극댓값이 10일 때, 상수 $a$의 값은? [3점]

① $-4$ ② $-1$ ③ 2 ④ 5 ⑤ 8

$f'(x) = 6x^2-18x+12$
$= 6(x-1)(x-2)$

극댓값 $f(1) = 2-9+12+a$
$= 5+a$
$= 10$ $\therefore a=5$

**7.** $x$에 대한 방정식

$$x^n + \log_3(n+1) = 2$$

이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 자연수 $n$의 값의 합은? [3점]

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

$x^n = 2-\log_3(n+1)$

$n$이 짝수이고 $2-\log_3(n+1)>0$

$\rightarrow \log_3(n+1)<2$

$\therefore n<8$

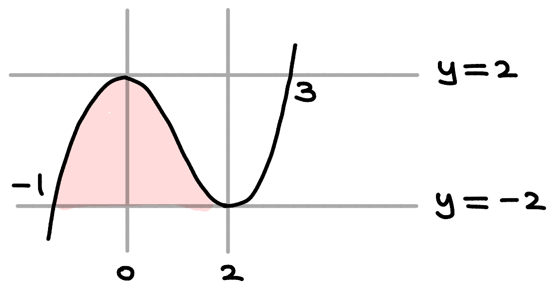
가능한 $n$의 값은 2, 4, 6이고 $2+4+6=12$

성민T의 COMMENT

<n차 방정식> 형태가 나오면 수학Ⅰ에서 배운 거듭제곱근을 떠올려야 한다. 방정식에 n제곱이 나왔다고 해서 당황하지 말고 $x^n=a$ 형태로 식을 변형하여 생각하자

**8.** 곡선 $y=x^3-3x^2+2$와 직선 $y=-2$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 6  ② $\frac{27}{4}$  ③ $\frac{15}{2}$  ④ $\frac{33}{4}$  ⑤ 9




$\therefore \int_{-1}^{2}(x^3-3x^2+2-(-2))dx = \frac{1}{12}\cdot(2-(-1))^4 = \frac{27}{4}$

**성민T의 COMMENT**

수학 2 적분공식을 알고있으면 이와 같이 계산을 빠르게 할 수 있는 경우가 많다. 하지만 이러한 적분공식이 수학 2의 본질은 아니기 때문에 적분 계산 연습도 꼭 해보자!

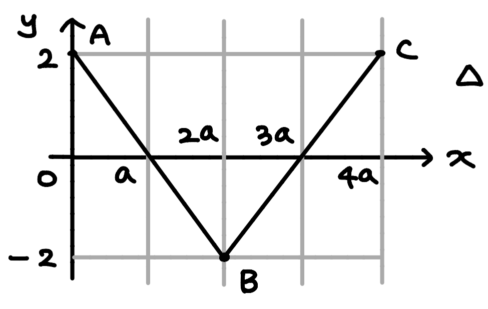
**9.** 함수 $f(x)=2\cos\left(\frac{\pi}{2a}x\right)$ $(a>0)$의 그래프 위의 세 점

$\mathrm{A}(0,\ 2),\ \mathrm{B}(2a,\ f(2a)),\ \mathrm{C}(4a,\ f(4a))$

에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 32일 때, 직선 BC의 기울기는? [4점]

① $\frac{1}{8}$  ② $\frac{1}{4}$  ③ $\frac{3}{8}$  ④ $\frac{1}{2}$  ⑤ $\frac{5}{8}$

주기 $= \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2a}} = 4a$




$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot(4a)\cdot(4)$
$= 8a$
$= 32 \quad \therefore a=4$

$\overline{BC}$의 기울기 $= \frac{4}{2a} = \frac{1}{2}$

**10.** 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)+2}{x-1} & (x<1) \\ x^3-3x^2-x & (x\ge 1) \end{cases}$$

가 실수 전체의 집합에서 미분가능할 때, $g(-5)$의 값은? [4점]

① 13  ② 15  ③ 17  ④ 19  ⑤ 21

① 연속

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)+2}{x-1} = 1-3-1=-3 \to f(x)+2 = p(x-1)^2-3(x-1)$

$\therefore g(x) = p(x-1)-3\ (x<1)$

② 미분가능

$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \lim_{x\to1-}\frac{\{p(x-1)-3\}-(-3)}{x-1} = p$

$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1+) = (3x^2-6x-1)|_{x=1} = -4 \quad \therefore p=-4$

$g(x) = -4(x-1)-3\ (x<1)$

$g(-5) = 21$

**성민T의 COMMENT**

'미분'→'대입'만 알고있는 학생들은 당황했을 문항
연속, 미분가능성의 정의와 정리는 적재적소에
효율적으로 사용할 줄 알아야한다!

11. $a_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{2}$ 인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여

$$a_n + a_{n+2} = \sqrt{2}\, a_{n+1}$$

이다. $\left|\sum_{k=1}^{m} a_k\right| \le 1$를 만족시키는 30 이하의 자연수 $m$의 개수는? [4점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

$a_1$ $a_2$ $a_3$ $a_4$ $a_5$ $a_6$ $a_7$ $a_8$ $a_9$ $a_{10}$ $a_{11}\cdots$
1 $\sqrt{2}$ 1 0 $-1$ $-\sqrt{2}$ $-1$ 0 1 $\sqrt{2}$ 1
1 1 0 0

∴ 주기가 8인 수열

$\sum_{k=1}^{m} a_k = S_m$이라고 하면

$|S_m| \le 1 \rightarrow S_m = 0$ 또는 $S_m = 1$

$S_1 = S_6 = 1$, $S_7 = S_8 = 0$ 이므로

$m = 1, 6, 7, 8$
$9, 14, 15, 16$
$17, 22, 23, 24$
$25, 30$

∴ 14개

성민T의 COMMENT

규칙의 시각화 (visualizing)

무지성 나열은 필패. 나열의 목적은 관찰과 추론이다

12. 원점을 지나는 ($f(0)=0$) 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(4)$의 값은? [4점]

(가) $-1 < x_1 < x_2 < 3$인 임의의 두 실수 $x_1, x_2$에 대하여
$$\int_{-1}^{x_1} f(t)dt > \int_{-1}^{x_2} f(t)dt \text{이다.}$$
(나) $\int_{-1}^{x} f(t)dt$가 $x=3$에서 최솟값 $-32$를 갖는다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

$g(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$ 라고 하자

조건 (가)에서

$g(x)$ : 열린구간 $(-1, 3)$에서 감소

∴ $-1 \le x \le 3$에서 $g'(x) = f(x) \le 0$

이때 $f(0)=0$ 이므로 $f'(0)=0$ (∵함수의 부호변화 & 최대·최소 정리)

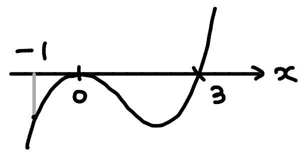
조건 (나)에서

$g(x)$ : $x=3$에서 최솟값 $-32$
극솟값

$g'(3) = f(3) = 0$ $(\ominus \rightarrow \oplus)$

$g(3) = \int_{-1}^{3} f(t)dt = -32$

$f(x) = px^2(x-3)$



$\int_{-1}^{3} f(x)dx = \int_{-1}^{0} px^2(x-3)dx - \frac{p}{12}\cdot 3^4$

$= \left[\frac{p}{4}x^4 - px^3\right]_{-1}^{0} - \frac{27}{4}p$

$= -8p$

$= -32$ ∴ $p=4$

∴ $f(x) = 4x^2(x-3) \rightarrow f(4) = 64$

성민T의 COMMENT

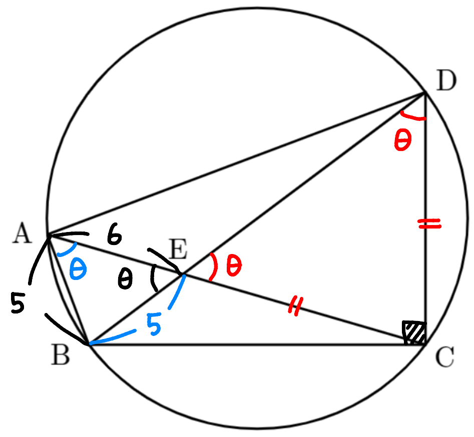
낯선 함수를 컨트롤 하기 위해 새로운 함수로 세팅할 줄 알아야 한다. 그리고 정적분으로 정의된 함수는 원함수와 도함수의 관계를 이용하여 조건을 해석하는 것이 핵심이다!

**13.** 그림과 같이 한 원에 내접하는 사각형 ABCD에 대하여 두 선분 AC, BD가 만나는 점을 E라 하자.

$$\overline{AB}=5,\ \overline{AE}=6,\ \angle BCD=\frac{\pi}{2},\ \cos\underbrace{(\angle AEB)}_{=\theta}=\frac{3}{5}$$

일 때, 선분 CE의 길이는? (단, $\overline{BE}>3$) [4점]

① $\frac{21}{2}$ ② $\frac{53}{5}$ ③ $\frac{32}{3}$ ④ $\frac{75}{7}$ ⑤ $\frac{43}{4}$




① △ABE 코사인 법칙

$25=36+\overline{BE}^2-2\cdot6\cdot\overline{BE}\cdot\frac{3}{5}$

$5\overline{BE}^2-36\overline{BE}+55=0$

$\therefore \overline{BE}=5$ ($\overline{AB}=\overline{BE}$이므로 $\angle BAE=\theta$)

② 각 관찰

원주각의 성질 : $\angle BAE=\angle BDC=\theta$

맞꼭지각 : $\angle AEB=\angle CED=\theta$

$\therefore$ △CDE에서 $\overline{CD}=\overline{CE}=5k$라 하자

③ 닮음 & 피타고라스 정리

$\triangle ABE \backsim \triangle CDE$이므로 $\overline{DE}=6k$

직각 △BCD에서 $\cos\theta=\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{5k}{5+6k}=\frac{3}{5}$

$15+18k=25k \quad \therefore k=\frac{15}{7}$

$\therefore CE=\frac{75}{7}$

**성민T의 COMMENT**

도형을 어려워하는 학생들은 '각 관찰'에 매우 취약하다는 공통점이 있다. 각 관찰이 되지 않으면 중등 기하를 활용하는 이러한 문제는 접근조차 하지 못한다.

도형이 힘들다면 앞으로 각을 관찰하는 연습부터 하자

성민T의 COMMENT

매우 특수한 상황을 정답인 경우로 출제한 문항
하지만 최근 합답형 출제 기조를 보면 '반례'를 떠올려야 하는 경우가 있다.
그러므로 시험 후 학습을 할 때는 모든 경우를 꼼꼼히 따져보는 습관을 들이자!



**14.** $f(0)=32$이고 최고차항의 계수가 $-1$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} -1 & (f'(x)<0) \\ 0 & (f'(x)=0) \\ 1 & (f'(x)>0) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $h(x)=f(x)g(x)$에 대하여

$$\lim_{x\to a-}h(x)\times\lim_{x\to a+}h(x)<0 \quad ㉠$$

를 만족시키는 실수 $a$는 오직 $a=0$만 존재할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

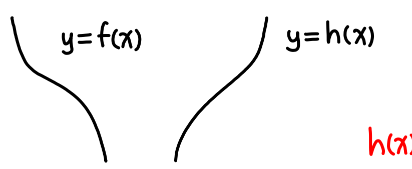
< 보 기 >

ㄱ. 방정식 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄴ. 방정식 $h(x)=h(0)$은 서로 다른 세 실근을 갖는다.
ㄷ. $x$에 대한 방정식 $h(x)=m(x+4)$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 실수 $m$의 최댓값은 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

i) 삼차함수 f(x)가 감소함수인 경우

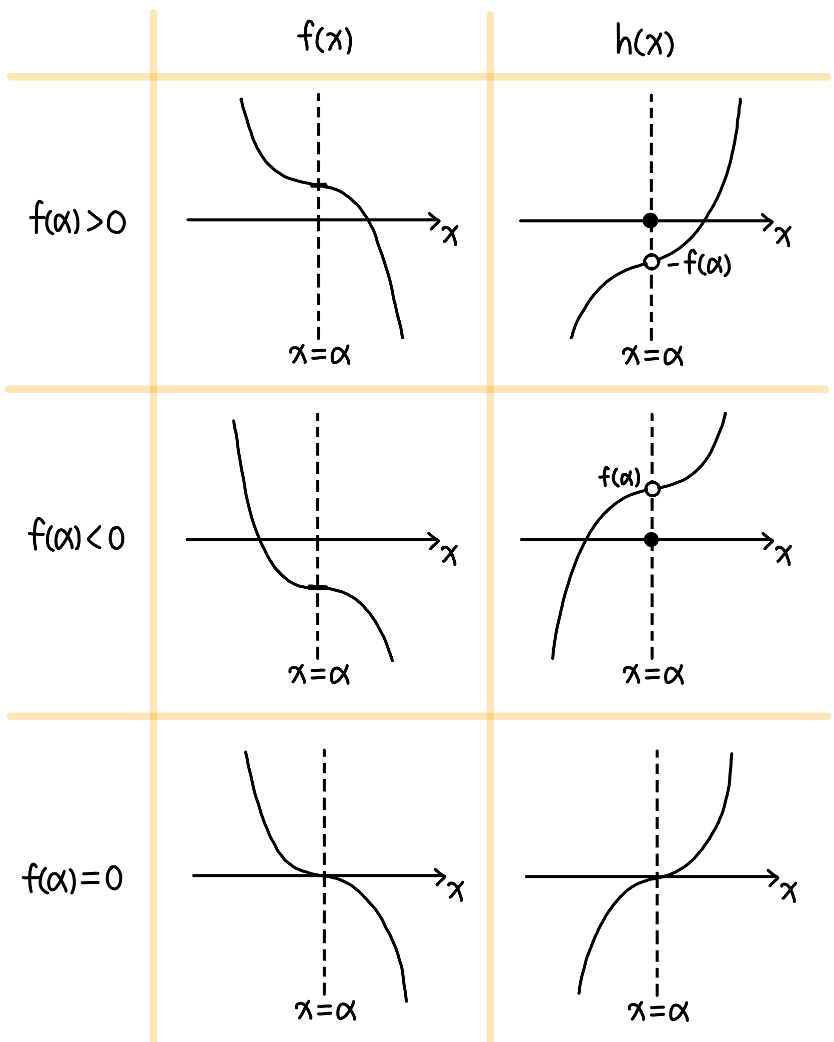
① 방정식 f'(x) = 0 의 실근이 존재하지 않는 경우




h(x) = -f(x) 이므로 조건 ㉠을 만족시키지 못한다.

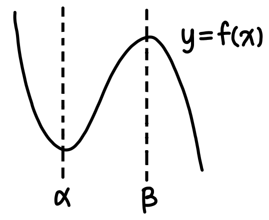
② 방정식 f'(x) = 0 의 실근이 존재하는 경우

f(α) > 0 / f(α) < 0 / f(α) = 0 일 때를 나눠 생각해보자




모두 조건 ㉠을 만족시키지 못한다.

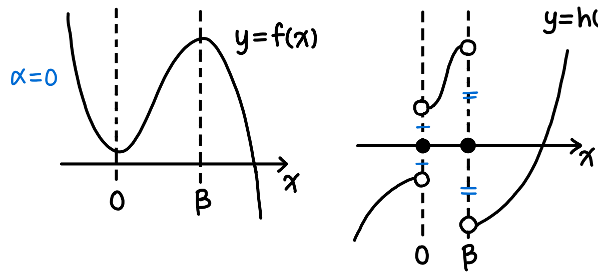
ii) 삼차함수 f(x)가 극대/극소를 갖는 경우




어떤 함수 I(x)가 x=k에서 연속이면
$\lim_{x\to k-}I(x)\times\lim_{x\to k+}I(x)=(\lim_{x\to k}I(x))^2\geq 0$ 이므로
조건 ㉠을 만족하기 위해서는
적어도 함수 f(x)가 x=0에서 불연속이어야 한다.

한편, 함수 h(x) = f(x)g(x)는 방정식 f'(x) = 0 을 만족하는 x = α 또는 x = β에서 불연속일 수 있다.
→ α=0 또는 β=0 인 경우를 생각해보자!
f(0) = 32 > 0 이므로 f(x)의 개형은 다음과 같다.

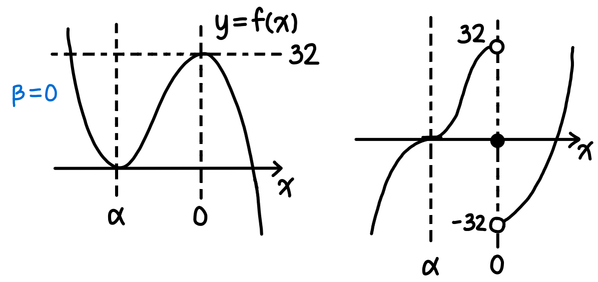
① α = 0인 경우




→ 조건 ㉠을 만족시키지 못한다.

② β = 0인 경우

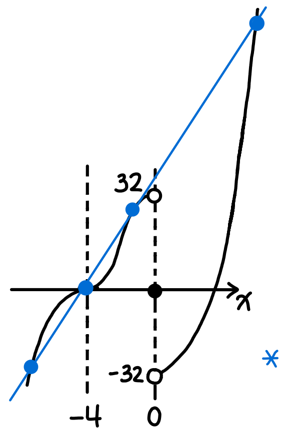
f(α) ≠ 0 이면 ii-① 경우에서 h(x)의 그래프와 같은 상황이 된다.
∴ f(α) = 0




ㄱ. ii)-② 경우만 유일하게 가능! 참

ㄴ. 방정식 h(x) = h(0) = 0 은 서로 다른 세 실근
x = α (α<0), x = 0, x = γ (γ>0)을 갖는다. 참

ㄷ. f'(α) = f'(0) = 0, f(α) = 0, f(0) = 32 이므로
"극댓값과 극솟값의 차 = 도함수 정적분 값"을 이용하면
$32-0=\frac{|-1|}{6}(0-\alpha)^3$ → α = -4




→ 방정식의 실근을 그래프의 교점으로 해석하자!

y = h(x), y = m(x+4)가 서로 다른 네 점에서 만날 때
기울기가 가장 큰 경우 : 점 (-4, 0)에서 그은 접선이 구간 -4 < x < 0 에 접점이 존재하여

구간 x < -4에서 교점 1개
x = -4 에서 교점 1개
구간 -4 < x < 0 에서 교점 1개
구간 x > 0 에서 교점 1개
일 때이다.

※ 접점을 (t, f(t))로 설정하여 문제를 풀 수 있지만, 이 문제를 즐겁게 풀고 있는 학생이면 이 정도는 충분히 이해할 것이라 생각한다.

삼차함수는 직선과 연립해도 실근의 합 일정! → 3 × (변곡점의 x좌표)

f(x)는 x = -2 에서 변곡점을 가진다. 이 상황을 만족하는 y = m(x+4)에 대해
접점의 x좌표를 t라고 하면 (-2) × 3 = (-4) + t + t ∴ t = -1

m = f'(-1)
= 9 거짓

f'(x) = -3x(x+4)

15. 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때,

$$\frac{S_n}{n}, \ |a_n|$$

중 크지 않은 값을 $b_n$이라 하자. 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

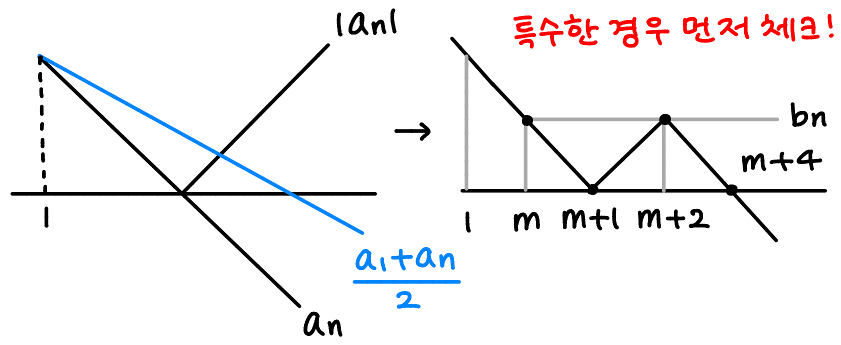
| |
|---|
| (가) $b_m = b_{m+2}$이고 $b_{m+1} = b_{m+4}$인 자연수 $m$이 존재한다.<br>(나) $b_3 + b_8 = 1$ |

$a_1 + m$의 값은? [4점]

① 7 ② $\frac{15}{2}$ ③ 8 ④ $\frac{17}{2}$ ⑤ 9

$$b_n = \begin{cases} \frac{S_n}{n} = \frac{a_1+a_n}{2} \\ |a_n| \end{cases}$$

조건 (가)를 만족시키기 위해 $a_1>0$, $d<0$ 이어야 한다.
($a_1 \le 0$ 또는 $d \ge 0$ 이면 모순)




$b_{m+1} = 0$ 이므로 $a_{m+1} = 0$
$b_{m+4} = 0$ 이므로 $a_1 + a_{m+4} = 0 \rightarrow a_1 + 3d = 0$
$\therefore a_4 = 0$
즉, $m=3$이다.

$$b_3 + b_8 = a_3 + \frac{a_1+a_8}{2}$$
$$= -d + \frac{-3d+4d}{2} = -\frac{d}{2} = 1 \quad \therefore d = -2$$
$$\rightarrow a_1 = 6$$

$\therefore a_1 + m = 6 + 3 = 9$

| 성민T의 COMMENT |
|---|
| 새롭게 정의된 수열을 이해하기 위해서 함수를 도입해보자<br>조건 (가)를 함수로 해석한다면 특수한 상황이 정답이 되는 것을 쉽게 알 수 있다 |

단답형

16. 방정식

$$(\log_2 2x)\left(\log_2 \frac{x}{2}\right) = 35$$

를 만족시키는 자연수 $x$의 값을 구하시오. [3점]

$(\log_2 x + 1)(\log_2 x - 1)$
$= (\log_2 x)^2 - 1$
$= 35$
$\therefore \log_2 x = \pm 6$ 이므로 $x = \frac{1}{64}, 64$
자연수 $x = 64$

17. $\int_{-1}^{2} (|x-1| + x)\,dx$의 값을 구하시오. [3점]

$\int_{-1}^{1} ((-x+1)+x)\,dx + \int_{1}^{2} (2x-1)\,dx$
$= 2 + [x^2 - x]_1^2$
$= 4$

**18.** 수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}(k+2)^2 a_k = 80,\quad \sum_{k=1}^{10}(k+1)a_k = 15$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10} k^2 a_k$의 값을 구하시오. [3점]

$$\sum_{k=1}^{10}(k^2+4k+4)\cdot a_k = 80$$

$$\ominus\ \left(\sum_{k=1}^{10}(k+1)\cdot a_k = 15\right)\times 4$$

$$\sum_{k=1}^{10} k^2\cdot a_k = 20$$

**19.** 모든 실수 $x$에 대하여 부등식

$$3x^4+4x^3 \geq 12x^2-k$$

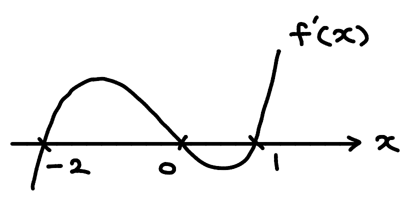
이 항상 성립하도록 하는 실수 $k$의 최솟값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 3x^4+4x^3-12x^2+k$ 라 하자

$(f(x)$의 최솟값$) \geq 0$

$f'(x) = 12x(x^2+x-2)$

$\quad = 12x(x+2)(x-1)$




최솟값 $f(-2) = 48-32-48+k$

$\quad = -32+k \geq 0 \quad \therefore k \geq 32$

$k$의 최솟값 $= 32$

**성민T의 COMMENT**

수학 2의 방·부등식 활용에서는 이항하여 하나의 함수로 볼지 그대로 두고 각각의 함수로 볼지 판단하는 능력이 굉장히 중요하다

**20.** 시각 $t=0$일 때 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P가 있다. 상수 $a, b$에 대하여 시각 $t\,(t\geq 0)$에서의 속도 $v(t)$가

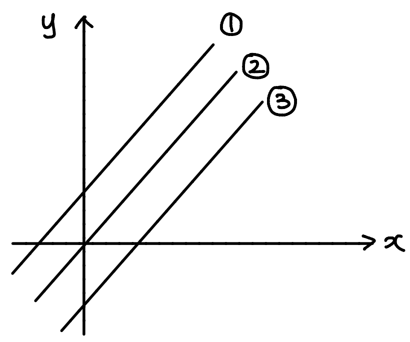
$$v(t) = |t-a|+b$$

일 때, 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 점 P는 시각 $t=k\,(k>0)$에서 원점을 지나고, 이때 운동방향을 바꾼다.
>
> (나) $\int_0^{2a}|v(t)|\,dt = 6$

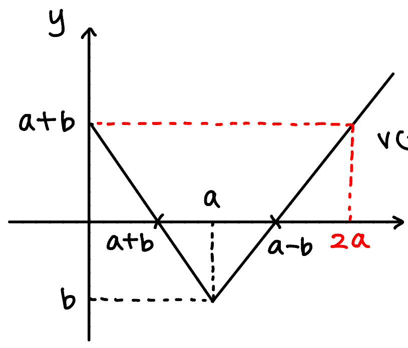
$a^2+b^2 = p+q\sqrt{2}$ 일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 유리수이다.) [4점]

$|t-a|\geq 0$이므로 $b\geq 0$이면 $v(t)\geq b\geq 0$이기 때문에 점 P는 시각 $t=k$에서 원점을 지날 수 없다 (조건 (가) 모순) $\therefore b<0$




한편 $a\leq 0$이면 case ③에서 원점을 지날 수 있지만, 그때 운동방향이 바뀌지 않는다

$\therefore a>0,\ b<0$




$$v(t) = |t-a|+b = \begin{cases} -t+a+b & (t\leq a) \\ t-a+b & (t>a)\end{cases}$$

조건 (가) : $t=k=a-b$이고, $\int_0^{a+b}|v(t)|dt = \int_{a+b}^{a-b}|v(t)|dt$ 이므로

$\frac{1}{2}(a+b)^2 = \frac{1}{2}(-2b)\cdot(-b) \rightarrow \boxed{(a+b)^2 = 2b^2}$

조건 (나) : $\int_0^{2a}|v(t)|dt = \int_0^{a+b}|v(t)|dt + \int_{a+b}^{a-b}|v(t)|dt + \int_{a-b}^{2a}|v(t)|dt$

$= 3\cdot\int_0^{a+b}|v(t)|dt$ (∵ 대칭성)

$= 6$

$\therefore \int_0^{a+b}|v(t)|dt = 2 \rightarrow \frac{1}{2}(a+b)^2 = 2 \quad \therefore \boxed{(a+b)^2 = 4}$

$\therefore 2b^2 = 4 \rightarrow b<0$이므로 $b = -\sqrt{2}$

즉, $(a-\sqrt{2})^2 = 4$에서 $a>0$이므로 $a = 2+\sqrt{2}$

$a^2+b^2 = (6+4\sqrt{2})+2 = 8+4\sqrt{2} \quad \therefore p+q = 12$

**성민T의 COMMENT**

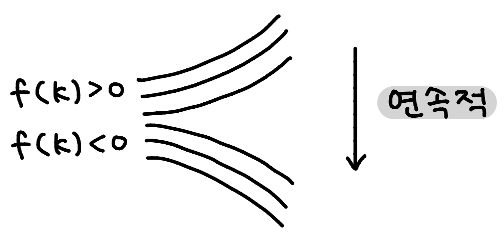
속도와 거리 유형은 발문을 이해하는 것에서 풀이가 시작된다 절댓값과 적분에 겁먹지 말고 그래프를 그려 상황 파악을 하는 태도를 기르자!

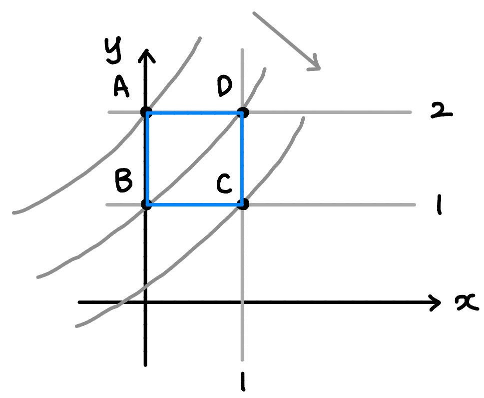
**21.** 네 점 A(0, 2), B(0, 1), C(1, 1), D(1, 2)와 최고차항의 계수가 양수인 이차함수 $f(x)$에 대하여 곡선

$$y = f(k) \times 2^x$$

가 사각형 ABCD와 만나는 점의 개수를 $g(k)$라 하자. 함수 $g(k)$가 불연속인 $k$는 오직 $-1$, $0$, $a$ $(a>0)$뿐일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

$f(k)$의 값에 따른 $y = f(k) \cdot 2^x$의 그래프는 다음과 같다.



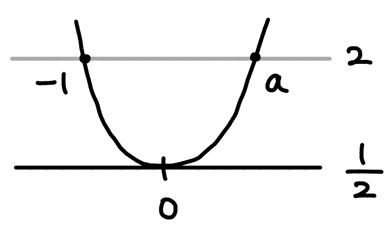

함수 $g(k)$가 불연속적인 순간은 점 A 또는 점 C를 지나는 순간

i) 곡선 $y = f(k) \cdot 2^x$이 점 A (0, 2)를 지날 때 : $f(k) = 2$

ii) 곡선 $y = f(k) \cdot 2^x$이 점 C (1, 1)를 지날 때 : $f(k) = \frac{1}{2}$

$g(k)$: $k = -1, 0, a$에서만 불연속이므로

함수 $g(k)$ 그래프는 다음과 같다.




∴ 이차함수 대칭성에 의해 $a = 1$이다.

$f(x) - 2 = p(x+1)(x-1)$에서 $f(0) = \frac{1}{2}$이므로 $p = \frac{3}{2}$

$\therefore f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

$f(3) = 14$

**성민T의 COMMENT**

새롭게 정의된 함수는 정의역부터 관찰하여 생각하면 어려울게 전혀 없다. 대충 이럴것 같다고 생각을 뭉개지 말고 꼼꼼하게 생각하자

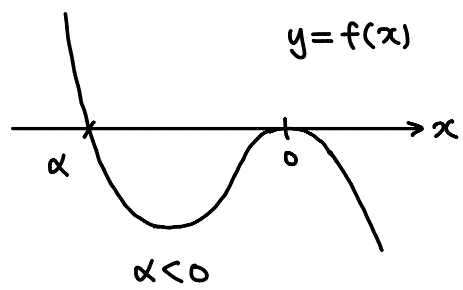
**22.** $x=0$에서 극댓값 0을 갖는 삼차함수 $f(x)$와 이차함수 $g(x)$에 대하여

$$\{x \mid f(g(x)) = 0\} = \{x \mid g(f(x)) = 0\} = \{a, b, 0, 1\}$$

일 때, $f(2)g(2)$의 값을 구하시오. (단, $a < b < 0$) [4점]

케이스 분류 과정은 해설강의 참고!

$f(x)$: 최고차항의 계수 음수

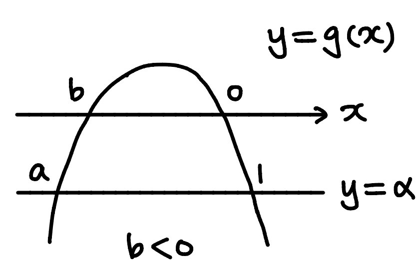



$f(g(x)) = 0$

$\Leftrightarrow g(x) = 0$ 또는 $g(x) = \alpha$

$\Leftrightarrow x = a, b, 0, 1$

$g(x)$: 최고차항의 계수 음수



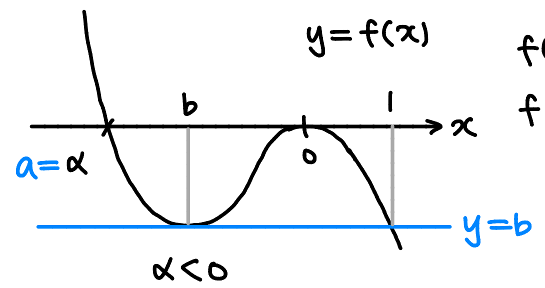

$\therefore g(x) = 0 : x = b, 0$

$g(x) = \alpha : x = a, 1$

한편 $g(f(x)) = 0$

$\Leftrightarrow f(x) = b$ 또는 $f(x) = 0$

다시 함수 $y = f(x)$에서




$f(x) = 0 : x = \alpha (= a), 0$

$f(x) = b : x = b, 1$

이때 삼차함수의 비율관계에 의해 $b = -2$, $a = -3$

$f(x) = p_1 x^2(x+3)$에서 $f(-2) = -2$이므로 $p_1 = -\frac{1}{2}$이다.

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2(x+3)$

$g(x) = p_2 x(x+2)$에서 $g(1) = -3$이므로 $p_2 = -1$이다

$g(x) = -x(x+2)$

$\therefore f(2)g(2) = (-10) \times (-8) = 80$

**성민T의 COMMENT**

다항함수 추론은 최소한의 케이스 분류로 최대한 빠르게 풀어내야한다

문제의 조건에 근거하여 그래프의 개형을 결정해 보자

+ 수학 2에서 합성함수를 다루는 방법에 대해 정리해보자

제 2 교시

# 수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+3^n}{2\times3^n+1}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(3+1)\cdot3^n}{2\cdot3^n+1}=\frac{4}{2}=2$$

24. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{2n}=3$일 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+4n}{a_n+n^2}$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

Sol 1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+4n}{a_n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{2n}+\frac{4}{2n^2}}{\frac{a_n}{2n^2}+\frac{1}{2}}=\frac{3}{\frac{1}{2}}=6$$

Sol 2)

$a_n\approx6n$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{na_n+4n}{a_n+n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+4n}{6n+n^2}=6$$

**25.** $\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2b)n^2+an+1}{2n-1}=5$를 만족시키는 상수 $a$, $b$에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① 3 ② 6 ③ 9 ④ 12 ⑤ 15

$a-2b=0$

$\frac{a}{2}=5 \rightarrow a=10$

$\therefore b=5$

$\therefore a+b=15$

**26.** 등차수열 $\{a_n\}$이 $a_2=4$, $a_5=13$일 때, $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{a_{n+2}}-\sqrt{a_n}\right)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

$d=3$

$a_n=3n+1 \rightarrow a_{n+2}=3n+7$

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt{3n+7}-\sqrt{3n+1}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}\cdot 6}{\sqrt{3n+7}+\sqrt{3n+1}}$

$=\frac{6}{2\sqrt{3}}$

$=\sqrt{3}$

**27.** 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 $n$에 대하여 부등식

$$\frac{2}{3(n+1)^2} < \frac{1}{a_n} < \frac{6}{(3n+1)^2}$$

를 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 $n$항까지의 합을 $S_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3}$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{7}{12}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{5}{6}$

→ 부등식의 양변이 모두 양수이므로

$$\frac{3(n+1)^2}{6} < a_n < \frac{3(n+1)^2}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3(k+1)^2}{6} < S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n}\frac{3(k+1)^2}{2}$$

$= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k^2+\cdots\right)$ $\qquad$ $= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{2}k^2+\cdots\right)$

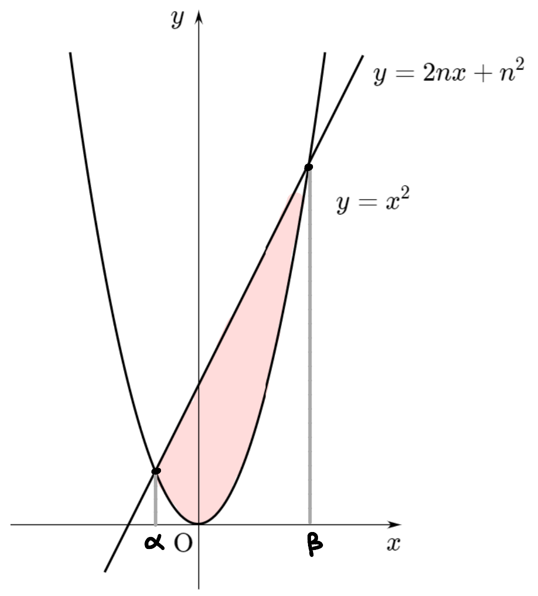
$= \frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\qquad$ $= \frac{3}{2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$= \frac{1}{2}n^3+\cdots$ $\qquad$ $= \frac{1}{2}n^3+\cdots$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^3} = \frac{1}{2}$ ($\because$ 샌드위치 정리)

**28.** 그림과 같이 자연수 $n$에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2nx+n^2$으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $f(n)$이라 하자. $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^a}=b\ (b\neq 0)$일 때, $ab$의 값은? (단, $a$, $b$는 상수이다.) [4점]

① $2\sqrt{2}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $6\sqrt{2}$ ④ $8\sqrt{2}$ ⑤ $10\sqrt{2}$




$x^2=2nx+n^2$

→ $x^2-2nx-n^2=0$ : $x=\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$라 하자

$\alpha+\beta=2n,\ \alpha\beta=-n^2$

$f(n)=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4n^2+4n^2=8n^2$

$\therefore \beta-\alpha=2\sqrt{2}n$

$\therefore f(n)=\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 2\sqrt{2}\cdot n^3=\frac{8}{3}\sqrt{2}n^3$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{8}{3}\sqrt{2}n^3}{n^a}=b\ (b\neq 0) \rightarrow a=3,\ b=\frac{8}{3}\sqrt{2}$ $\quad \therefore ab=8\sqrt{2}$

**성민T의 COMMENT**

인수분해가 안되는 이차방정식에서는

① 근과 계수와의 관계 ② 근의 공식 을 떠올릴 수 있다

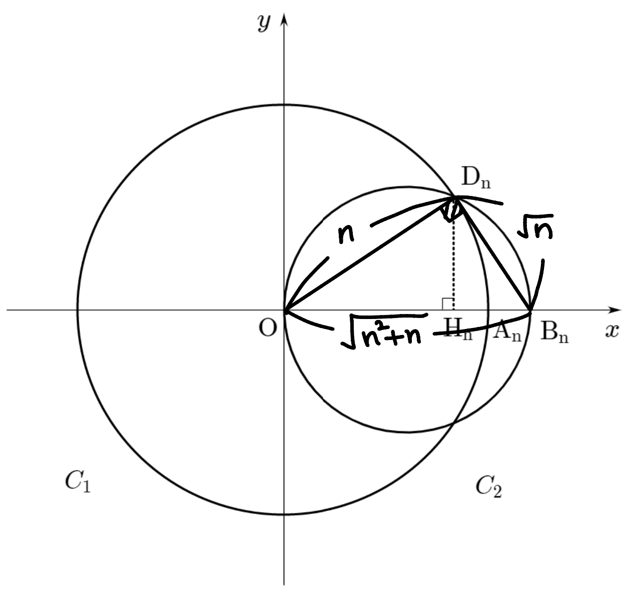
이때 구하는 값에 따라 무엇을 활용할지 결정하면 된다

단답형

29. 그림과 같이 자연수 $n$에 대하여 좌표평면에 두 원

$$C_1 : x^2+y^2=n^2,\ C_2 : (x-r_n)^2+y^2=(r_n)^2$$

이 있다. 두 원 $C_1$, $C_2$과 $x$축의 교점 중 $x$좌표가 양수인 점을 각각 $\mathrm{A}_n$, $\mathrm{B}_n$, 두 원 $C_1$, $C_2$의 교점 중 $y$좌표가 양수인 점을 $\mathrm{D}_n$이라 할 때, $\overline{B_nD_n}=\sqrt{n}$이다. 점 $\mathrm{D}_n$에서 $x$축에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}_n$이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} r_n\left(\overline{A_nB_n}-\overline{H_nA_n}\right)=\frac{q}{p}$이다. $p^2+q^2$의 값을 구하시오. (단, $r_n<n$이고, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]




① △OBnDn 피타고라스 정리

$\overline{OB_n}=2r_n=\sqrt{n^2+n}$

② $\overline{A_nB_n}=\overline{OB_n}-\overline{OA_n}=\sqrt{n^2+n}-n$

③ $\overline{H_nA_n}=\overline{OA_n}-\overline{OH_n}=n-\dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+n}}$

$\overline{OD_n}^2=\overline{OH_n}\cdot\overline{OB_n}$

$n^2=\overline{OH_n}\cdot\sqrt{n^2+n}$

$\therefore \overline{OH_n}=\dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+n}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{2}\cdot\left(\sqrt{n^2+n}-2n+\dfrac{n^2}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(2n^2+n-2n\cdot\sqrt{n^2+n}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n^2+n)^2-(2n)^2\cdot(n^2+n)}{2n^2+n+2n\cdot\sqrt{n^2+n}}$ $(4n^4+4n^3+n^2)$ $-(4n^4+4n^3)$

$=\dfrac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{4n^2+\cdots}$

$=\dfrac{1}{8}$

$\therefore p^2+q^2=65$

성민T의 COMMENT

두 원이 만나는 상황은 수학적으로 많은 내용을 물어볼 수 있다

직각삼각형, 피타고라스 정리, 삼각형 닮음

**30.** 실수 $t$에 대하여 직선 $y=t(x+a)$이 함수

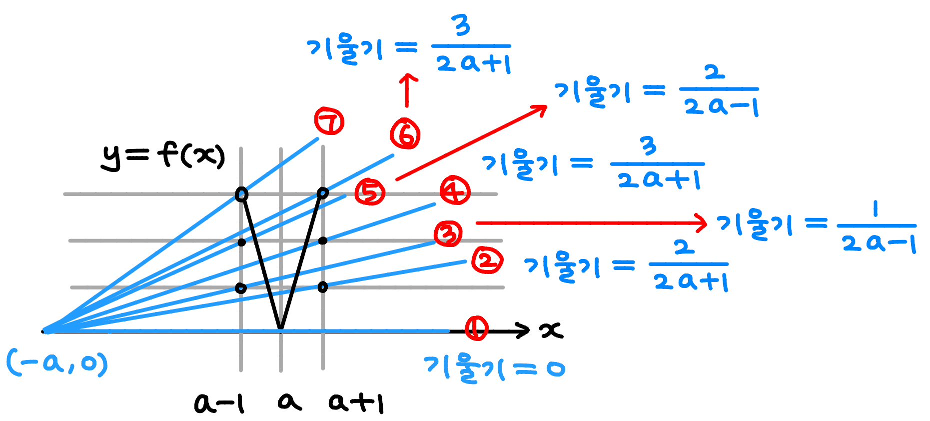
$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{|x-a|^n+3|x-a|}{|x-a|^n+1}\quad(a>3)$$

의 그래프와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하고,

$$\lim_{t\to b-}g(t)\neq\lim_{t\to b+}g(t)$$

인 모든 $b$의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m$라 하자. $b_m=\frac{1}{3}$일 때, $f(m+b_{m-1})=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, $m$은 2 이상의 자연수이고, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]

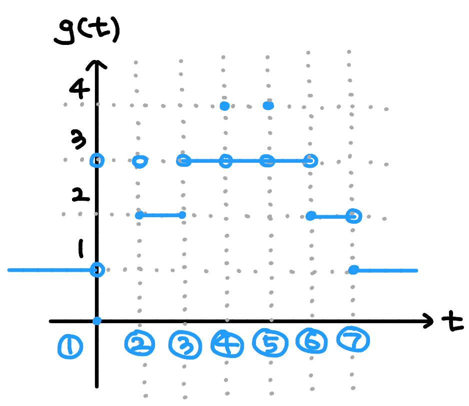
$$f(x)=\begin{cases}3|x-a| & (|x-a|<1)\\ 2 & (|x-a|=1)\\ 1 & (|x-a|>1)\end{cases}$$




기울기 check!

③ vs. ④ : $\frac{1}{2a-1}-\frac{2}{2a+1}=\frac{-2a+3}{(2a-1)(2a+1)}<0\ (\because a>3)$

⑤ vs. ⑥ : $\frac{2}{2a-1}-\frac{3}{2a+1}=\frac{-2a+5}{(2a-1)(2a+1)}<0\ (\because a>3)$




$g(b-)\neq g(b+)\rightarrow b=$ ①.②.③.⑥.⑦

$\therefore m=5$

$\therefore b_m=\frac{3}{(a-1)-(-a)}=\frac{3}{2a-1}=\frac{1}{3}\rightarrow a=5$

$\therefore b_{m-1}=\frac{3}{(a+1)-(-a)}=\frac{3}{2a+1}=\frac{3}{11}$

$f(m+b_{m-1})=f(5+\frac{3}{11})$

$=3\cdot|5+\frac{3}{11}-5|$

$=\frac{9}{11}$

$\therefore p+q=20$

**성민T의 COMMENT**

계산은 몇 줄 없지만 문제를 풀면서 생각해야 할 것이 많다 그렇기 때문에 꼼꼼하고 섬세하지 못하면 현장에서 킬러를 맞힐 수 없다. 만점을 받고 싶은 학생들은 마지막 순간에 디테일을 신경써야 한다