2023학년도 수능 기출분석(필요한 사고과정, 배워갈 태도 정리)

안녕하세요 새벽하늘입니다. 오랜만에 수능수학 분석 글로 돌아왔습니다.

저는 수학 가형 시절 17학년도 때 6등급을 받아 5수 끝에 21학년도 수능 수학 가형에 원점수 100점을 받은 이력이 있습니다.

낮은 등급에서 시작했을 때, 수학 공부를 어떻게 해야하는지, 기출 분석은 어떻게 해야하는지, 어떻게 하면 성적을 올릴 수 있는지 많은 고민을 했습니다. 인터넷을 봐도 그 구체적인 과정이 무엇인지 모르겠고, 이게 내 실력 상승과 직결될 수 있는지 의구심이 많이 생겼었죠.

1. 들어가는 글

결국 수험생활을 오랫동안 하면서, 얻게 된 기출 분석법은 크게 두가지에 집중하게 됐습니다.

첫 째, 선생님(or 해설지)의 풀이 과정을 말로 사고과정을 정리한 다음, 그 사고과정과 내 사고과정을 비교해서 내가 못 해냈던 부분을 찾아서 기록으로 남기자. 그리고 그 조건이 나왔을 때, 이런 풀이 방향으로 한 번 뻗어가보자.

(3등급 이하 학생이라면 일단 4점 초반~중반대 문항에 대해서 이런 정리를 하는 것을 추천합니다.)

둘 째, 이 문제에서 배워갈 태도나 사고과정, 조건에 따라 해야할 요소들을 말로 간단하게 정리하자.

(중요한 것은, '어떤 조건'을 보고 '어떤 태도'를 취해야할지를 명료화하는 것입니다.)

이 두 가지에 집중해서 공부를 했습니다.

이런 저의 방식을 차용해 2023학년도 수학 공통 문항에 대한 사고과정과 내가 수험생이라면 이렇게 배워갈 태도를 정리하겠다는 마음을 담아서 글을 작성했습니다. 저의 사고과정과 비교해서 배워갈 지점들을 잘 정리해서 기출분석을 해봅시다.
많은 도움이 되길 바랍니다.

문항별 사고 과정, 배워갈 태도 정리

공통 1번

가. 사고과정(1번에 나오는 단골인 태도)

밑이 분수식이고 지수에 무리수가 있네?

-> 일단 분수식을 2를 밑으로 하는 지수 꼴로 바꾸자 -> 나머지는 계산

나. 배워갈 태도

- 분수가 포함된 지수식이라면 밑을 제일 간단한 자연수로 두고 정리하자.

공통 2번

가. 사고과정

x가 무한으로 가고, 분자,분모 모두 최고차가 1차네? -> 1+3/1 로 계산하자.

나. 배워갈 태도

- x가 양의 무한이나 음의 무한으로 갈 때는 최고차 계수끼리 비교하자.(단, 분자가 무한으로 보냈을 때 0이 되는 형태라면 식 변형의 가능성을 생각하자)

공통 3번

가. 사고과정

등비수열이라는 조건이 있고 좌측 식에서 우측식을 비교했을 때, n이 2개씩 커지면 되네?
-> 공비 제곱이 1/4 이구나. -> 공비가 1/2라고 구해졌으니 나머지는 대입해서 정리하자.

나. 배워갈 태도

- 등비수열 문제에서 주어진 식들이 구조가 동일하고, n의 숫자 차이가 동일하다면 공비를 우선적으로 구하자.
- 등비수열,등차수열에서 결국 초항을 찾기 위해서 계산은 필수다.

공통 4번

가. 사고과정

구하는 값이 g’(2)니까 그냥 계산해서 대입하자.

나. 배워갈 태도

- 없음.

공통 5번(실수하기 쉬운 문항)

가. 사고과정

tanθ가 음수네? 코사인,사인 값 범위 구할 때 꼭 부호 확인해야겠다.

나. 배워갈 태도

- 삼각함수 값 구할 때, 세타의 범위나 삼각함수 값의 범위를 알려주면 꼭 ‘부호’를 따지자.
(꼭 빨리 풀다가 실수하는 포인트니까 실수 노트에 써놓을 것)

공통 6번

가. 사고과정

x=1에서 극대라니까 미분 후에 대입하자. -> a값 구하기 가능하겠다. -> a값 구해졌으니 다른 극점도 구해지겠다 -> b확정

나. 배워갈 태도

- 없음

공통 7번

가. 사고과정
(1) 모든 항이 양수 & 첫째항과 공차가 같은 등차수열 -> ak = dk 라고 할 수 있겠군.
(2) 무리식이 포함된 등차수열의 합이네? -> 분모에 루트-루트 꼴을 곱해줘서 유리화 하자.
(3) 유리화 했을 때 분모가 모두 같고 분자들이 +/-가 교대로 등장하네? -> 정리하자.

나. 배워갈 태도
- 등차수열 문항에서 an 자체를 한 번 정의를 미리 해놓고 시작하자.
- 무리식이 나오면 유리화는 거의 무조건 한다고 생각하자.(대다수 경우에 유리화는 기본적인 태도임)

공통 8번
가. 사고과정
(1) 곡선 밖의 한 점에서의 접선이네? -> (0,4)랑 (x,f(x))사이의 기울기 = f'(x) 식을 쓰자. -> 접점의 x 값 구하게 됨.
(2) 접점의 x값을 구했으니 접선의 방정식을 구해서 x절편을 구하자
* 접선의 기울기= (0,4) 랑 x절편(t,0) 사이의 기울기가 같다고 해서 푸는 방법도 존재함.

나. 배워갈 태도
- 무작정 접방을 구할 생각을 하기 보다는 두 점 사이의 기울기=f'(x)를 우선적으로 사용하자.(특정 조건에 따라서 계산량이 많이 줄어들 때가 있다.)
- 기울기 값이 나오면, 그 직선 위의 두 점 사이의 기울기를 같다고 썼을 때, 계산을 줄일 수 있다.

공통 9번
가. 사고과정
(1) 간단한 삼각함수 꼴의 최대 최소를 구하는 문제네? -> 그래프를 간단하게 그리자.
(2) 그리려고 보니까 a를 알 수 없으니 y=a랑 $y=\sqrt{3}\tan 2x$ 를 그려서 둘 사이의 차이 함수라고 생각하자.
(3) 범위를 고려했을 때, 최대, 최소 값 모두가 존재할 때, 좌측 끝에서 최대값이 나와야겠다. -> a 구할 수 있다. -> 그러면 x=b에서 최소일테니 대입해서 b를 찾자.

나. 배워갈 태도
- 함수가 간단하고 최대, 최소 범위 내에서 문제의 경우 그래프 개형을 그리는 것을 기본적으로 생각하자.

공통 10번(단골 기출 아이디어)
가. 사고과정
(1) 넓이와 관련된 문제이고 둘러싸인 두 면적이 동일하네? -> 기출 분석했을 때 태도에 의하면 두 함수의 차이를 0부터 2까지 적분하면 넓이가 '0'이라는 것을 쓰면 되겠다.
(2) $\int_0^2 (-x^2+k)-(x^3+x^2)=0$ 을 정리하면 k가 구해지겠다.

나. 배워갈 태도

- 특정 교점을 기준으로 두 면적이 동일하다는 내용이 나오면, 두 함수 차이의 구간 적분은 0이 된다는 성질을 활용하자.

공통 11번

가. 사고과정

* 도형문제가 나오면 일단 눈에 들어오는 조건들을 우선적으로 파악하고 이후에 꼼꼼하게 조건들을 분석하는 편입니다.

(1) 그림을 보니까 $\angle BAC = \angle CAD$ 가 눈에 들어오네? -> $\overline{BC} = \overline{CD}$ 겠고, 중심각이 동일하겠다. 이것 말고는 당장에 눈에 들어오는 조건이 없네

(2) 주어진 길이 조건들을 표시해보니까 $\overline{BC}, \overline{CD}$ 각각 코사인 법칙을 쓰고 연립하면 코사인 값이 나오겠다. -> 정리하면 등장. & $\overline{BC}, \overline{CD}$ 길이 구해짐.

(3) 구하는 값이 반지름이니까 사인 법칙을 써야하고 그러면 위에 구해놓은 코사인 값과 변의 길이를 활용하자.

나. 배워갈 태도

- 원 위에 동일한 각의 크기 조건을 주면 마주보는 호 or 현의 길이가 같다는 조건을 활용하자.
- 두변과 하나의 각이 등장하면 일단 코사인 법칙은 무조건 쓰는 게 좋다.(조건을 주는데는 다 이유가 있으니까)

공통 12번

가. 사고과정

(1) f(x)가 연속이라고 하니 수식 풀이로 갈지 그래프 풀이로 갈지 큰 방향은 알 수 없다.

(2) 박스를 보니까, $f(x) = \pm 6(x-n+1)(x-n)$ 이니까, 시작점과 끝점을 기준으로 위,아래로 뒤집어지는 두가지 케이스를 그릴 수 있겠다.. or n=1,2 등 넣어서 이해해보자.

(3) g(x)가 부정적분 꼴이고, 안쪽에 정의된 함수가 연속인 함수니까 미분하자.

-> $g'(x) = 2f(x)$ 이구나.

(4) $g'(x) = 2f(x)$이고 f(x)를 0부터 2까지 적분한 값과 2부터 4까지 적분한 값이 같구나. 또한, x=2에서 최소값을 가진다 하니까, g'(2-)는 음수, g'(2+)는 양수겠구나.

(5) 위의 조건들에 맞춰서 f(x)의 그래프 형태를 통해 g(x)를 해석할 수 있으니 f(x)를 n=1,2,3,4 각 각을 넣었을 때 개형을 확정 짓자.

(6) f(x)가 x=2에서 부호변화가 발생해야하니까 x=1~x=2 구간과 x=2~x=3구간에서 개형이 확정나고, 인테그랄 값이 같으려면 나머지가 확정난다.

(7) 이후는 계산

나. 배워갈 태도

- 10번대(준킬러 이상) 문항에서는 개형을 그리는 것을 기본 값이라 생각하자. 특히, 함수가 확정적이지 않은 경우 그래프 그리면서 조금씩 추론하는게 중요한 태도이다.
- 낯선 상황(n이나 k가 섞인 복잡해 보이는 그래프)의 경우 n=1,2,3 등 예시를 넣어서 추론하

자.
- 이런 문제처럼 특정 구간에서 함수가 확정되어 있고, 나머지 구간을 확정하는 문항은 21학년도 가형 수능 20번에서 나온 추론 방식과 유사한 부분이 있습니다. 그렇기 때문에, 킬러 or 준킬러 문항은 꼭 꼼꼼하게 사고과정을 정리해보시길 바랍니다.

공통 13번
가. 사고과정
(1) n제곱근에 대한 이야기니까 일단 수식으로 정리하자. -> $x^n = m^{12}$ 이구나.
(2) $f(m)$이라는 조건은 m을 확정내서 상황에 대한 추론을 하는 것이고, n이 짝수일 때는 $x = \pm m^{12/n}$이고, n이 홀수일 때는 $x = m^{12/n}$ 이고 이들이 정수여야하는 구나.
(3) 즉, 12/n의 값이 자연수여야 하고, m이 제곱수냐 세제곱수냐에 따라서 그 f(m)값은 달라지겠구나.
(4) m=2,3,5,6,7 일 때랑, m=4,9 일 때, m=8일 때로 총 세가지 케이스로 나눠서 찾으면 되겠다.

나. 배워갈 태도
- n제곱근과 관련된 내용이 나오면 첫째, 일단 x에 대한 수식을 정리하자. 둘째는 n제곱근이라는 조건에서 n이 짝수, 홀수일 때 가지는 의미가 다른지 정리해보자.
- f(m)처럼 특정 값을 넣어야 알 수 있는 조건들은 예시를 몇 가지 넣어보고 의미를 확인해보면 낯선 조건 해석이 쉬워진다.

공통 14번
가. 사고과정
(1) 다항함수라는 조건 -> 그래프 개형인가? 수식인가? 일단 조건들을 더 보자.
(2) g(x)가 구간에 따라 결정되어 있으니까, 일단 y=x를 구간에 맞춰서 그려놓자.
(3) h(x)는 낯선 형태인데.. 정리하면$h(x) = g(x+) \times g((x+2)+)$ 라고 해석할 수 있겠구나. 나머지는 알 수 없으니 <보기>를 보자.
(4) <ㄱ해석> $h(1) = g(1+) \times g(3+)$니까 3이 맞구나.
(5) <ㄴ해석> 일단 h(x)가 전체 집합에서 연속이라는 조건을 볼 때, h(x)에서 정의되어있는 두 함수의 곱의 형태가 모두 일단 연속인 구간들은 제외해도 괜찮겠다. 즉, x+2가 모두 -1보다 작거나, x가1보다 큰 경우에는 연속인 함수끼리 곱이니까 크게 문제가 안 되겠다.
즉,, x=-3, x=1일 때만 특정 함수가 불연속인지 아닌지 알 수 없으니까. 이 두 점에서만 연속 조건을 따져보면 연속 유무를 알 수 있겠다.
$x=-3$에서 따져보면, $g(x+)$항은 여전히 연속인 함수이다. 하지만, $g((x+2)+)$항은 연속 유무를 알 수 없다

즉, 연속이라 할 수 있는 조건이 부족하기 때문에 h(x)가 연속이라고 확정할 수 없다.
(요약, 주어진 조건만으로 연속성을 보장할 수 없다.)

(6) <ㄷ해석> 그래프도 간단하게나마 표기를 해놓자. & ㄴ에서 수식으로 처리해야했으므로 ㄷ도 수식으로 처리할 가능성이 높다고 인식하자.
조건1. [-1.1]에서 g(x)가 감소하는 함수이다. -> $f'(x) \le 0$ (단, [-1,1]에서)

조건2. $g(-1)=-2$ -> $f(-1)=-2$ 이다.
h(x)가 최솟값을 가지기 위한 조건을 해석하기 위해서는 극소점이 존재하거나 x=-1. x=1 둘 중 하나에서 제일 작은 값을 지녀야한다. (아래 구간을 나눈 방법은 ㄴ해석의 일부를 끌고 왔다., 아래의 함수 수식은 편의를 위해 사용한 표현이다.
$x < -3$에서 $h(x)=(x)((x+2))$꼴과 유사한 형태이므로로 증가하는 함수형태이다.
$-3 \leq x < -1$에서는 $h(x)=xf(x+2)$ 꼴과 유사한 형태이고 구간에서 항상 양수다.(개형적으로)
$x=-1$에서는 $h(-1)=-2$이다.
$-1 < x < 1$에서는 $h(x)=f(x)(x+2) < 0$이다.
$x \geq 1$에서는 $h(x)=x^2 > 0$이 된다.
 최솟값이 존재하기 위해서는 일단 함수값도 나올 수 있고, 그 이후에 증가하는 구간이 존재해야한다. 이로 인해서, 구간 -1이상 1미만에서 증가하는 구간이 등장하는지 확인하면 된다.
하지만, f(x)가 이 구간에서 음수이고 감소하는 함수이며, (x+2)는 증가하는 양수이므로, 전체는 감소한다. 즉, 이 구간 안에서 최솟값이 존재할 수 없다.

sol2) $-1 \leq x < 1$에서 f(x)(x+2)를 미분하면, $f'(x)(x+2)+f(x)$가 나온다, 이 구간에서 미분한 식이 0이 되는 지점이 존재한다면, 극소점이 존재할 수 있고 이는 최솟값의 존재성으로 귀결된다. 하지만, 이 때, 미분한 식이 0이 된다고 확실하게 보장할 수 있는 조건이 부족하므로, 극솟값이 무조건 존재하는 것이 아니기에 ㄷ 선지는 틀렸다.

나. 배워갈 태도
- 확답형 ㄱ,ㄴ,ㄷ 유형에서 보통은 반례를 찾는 문제가 등장했는데, 이번 문제에서는 연속 조건, 최솟값 존재조건에서 조건의 부족으로 인해서 틀렸다. 로 귀결되는 문제가 나왔다. 즉, 성립 조건을 통해 추론 가능한지 아닌지를 꼼꼼하게 따지는 공부를 하자.
- 준킬러 이상으로 가면, 항상 개형과 수식을 함께 고려하자.
- 수식이 복잡할 때는 본인이 느끼기에 단순화할 수 있는 형태를 만들고, 그것에 따라 추론을 하자.

공통 15번
가. 사고과정
(1)a_9의 최대, 최소에 대한 이야기니까 다른 항들로 이 항을 추론해야겠다.
(2) (가) 조건에서 a_7을 확정값을 줬으니 그 근처 값들을 확정지어야할까?
(3) (나) 조건에 의하면, a_9를 구하기 위해선 a_8이 3의 배수인지 아닌지 알아야 하니까, 일단 a_8이 3의 배수, 3의 배수가 아닌 경우 두가지로 분리해보자. 분리해서 봤을 때, a_7이 40이니까 a_8을 결정하기 위해 a_6을 가정해야겠다. a_6도 3의 배수냐 아니냐로 케이스를 나눠야 항이 정해질 것으로 보인다.(조건들에 의하면, 3의 배수냐 아니냐에 따라서 이후 항이 결정되기 때문에, 이를 기준으로 케이스 분류한다는 생각) 총 케이스가 4가지 이려나? 일단 해보자.
(4) 둘 다 3의 배수인 경우는 시도해보니 불가능하니까, 나머지 세 케이스를 따져보자.
(5) 케이스에 맞춰서 항들 정리해보면 값들이 나온다.

나. 배워갈 태도
- 조건과 구해야하는 항 사이의 관계를 우선적으로 파악할 생각을 하자.(아무 항이나 잡고 계산하거나 그러지 말자.)
- 수열이 두가지 식으로 갈라지게 될 경우, 괄호 안에 있는 말들이 보통 케이스 분류의 기준이 된다. 이를 토대로 먼저 생각을 하자.

공통 16번
생략

공통 17번
생략

공통 18번
가. 사고과정
좌측 조건에서 상수를 따로 정리해서 $\sum_{k=1}^{5} 3a_K = 30$ 임을 구하자. & 나머지는 정리
나. 배워갈 태도
없음
공통 19번
가. 사고과정
(1) 양의 실근을 가질 조건이기 때문에 그래프를 그리면 편하겠다.
(2) 한 번에 그리기에 미지수 k가 걸리적 거리니까 $y=2x^3-6x^2$과 $y=-k$ 의 교점이 양의 실근 2개가 나와야하니까. 그래프를 그리고 접할 때를 기준으로 그 사이 k 값들을 구하자.

나. 배워갈 태도
- 근의 개수, 특정 범위를 만족하는 근의 위치에 대한 조건이 나오면 그래프를 그리자.
- 접할 때를 기점으로 먼저 따지고 이후 그 사이를 점검하자.

공통 20번
가. 사고과정
(1) 수직선 위를 움직이는 점 p라고 하니까 v(t)는 연속이겠다. -> a(t)를 적분해서 상수를 구하자.
(2) 움직인 거리는 v(t)를 적분한 전체 면적이니까 구간에 따라서 따로 적분을 하자.

나. 배워갈 태도
- 이 문제에서 연속성과 관련한 조건이 왜 없지? 라는 생각을 우선 가진 다음에, 수직선 위에 있으니까 당연히 v(t)도 연속이겠지.. 라고 판단했어도 괜찮다. 다만, 수직선 위의 점이라는 조건이 나오면 위치, 속도, 가속도 모두 연속이라는 점을 기억하자.

공통 21번
가. 사고과정

* 제가 푼 풀이는 일반적으로 해설지에서 기술하는 방법과는 조금 다릅니다. 제가 절대값 함수와 교점의 개수에 대한 추론을 할 때 주로 사용하는 풀이로 낯설더라도 한 번 익히는 것을 추천합니다.

(1) 주어진 함수가 절대값을 포함하고 있고, f(x)=t의 교점의 개수에 대한 이야기니까, 일단 그래프를 그리는 것을 기본으로 생각하자. g(t)의 최대가 4라니까 교점이 4개가 될 때를 찾아야겠다.

(2) n에 따라 변화하니까 함부로 식을 정리하기 보다는 $f(x)=t$의 식을 정리하자.

(3)$x<0$에서 $|3^{x+2}-n|=t$ 이므로 $3^{x+2}-n=\pm t$ 이다. 즉 $3^{x+2}=n\pm t$를 관찰하면 된다.

동일한 방식으로 $x\ge 0$에서는 $\log_2(x+4)=n\pm t$ 를 관찰하면 된다.

(4) 즉, x=0을 기준으로 좌측에는 지수함수를, 우측에는 로그함수를 우선적으로 그린 다음. n의 값을 하나 예시로 잡고 t를 0부터 점점 크기를 키워보면서 교점의 개수를 확인하면 된다.

(5) t가 0부터 점점 커지거나 작아지면 y=n을 기준으로 위, 아래 교점이 발생하는 상황이기 때문에 위의 두 함수에 대입했을 때 나오는 (0,9), (0,2) 라는 좌표 사이에 n이 나와야하므로 n은 3부터 8까지 포함된다.

나. 배워갈 태도

- $|f(x)-a|=b$와 같은 꼴이 나왔을 때, 절대값 안쪽 그래프가 변동성이 높다면, 절대값을 풀어서 $f(x)=a\pm b$의 관계를 확인하자.
- n, t 등 변수가 다양한 경우 일단 하나의 값을 예시로 고정해두고 나머지 값을 변화시키면서 상대적으로 관찰이 쉬워진다.

공통 22번

가. 사고과정

(1) 최고차가 1이고 3차 함수라는 조건은 수식으로도 그래프적으로도 가능하니까, 일단 가능한 개형부터 그리고 수식으로 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라고 써놓자.

(2) g(x)는 연속이라고만 했으니 일단 뒤에 조건을 보고 의미 파악을 해보자.

(3)<가> 조건에서 f(x)랑f(1)이 보이고, (x-1)보이니까 기울기 함수로 해석을 위해 다음과 같이 식을 정리하자. $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(g(x))$ 이렇게 봤을 때, 좌측은 기울기 함수가 명확한데, 우측은 수식적으로 수2 범위 내에서는 수식보단 그래프로 의미를 따지는 게 현명하겠다.(미적분은 합성함수 해석 요소가 많으나, 수2에서는 합성함수가 나오면 직접적 식에 대한 대입 or 개형을 통한 의미추론이 main인데, 식을 못 구했으니 그래프 개형으로 따지자)

(4) 극대,극소가 존재하는 3차 함수가 보편적이니 그것으로 따져봤을 때, 좌측 식에 대응되는 x값이 변곡점 기준으로 두종류 나오고 이 두 종류가 g(x)의 후보겠구나. <나> 조건을 통해서 최솟값이 존재한다는 것을 알았으니, 변곡점 우측에 형성되는 g(x)가 우리가 찾던 의미겠구나.

(5) 나머지는 계산

나. 배워갈 태도

- 수학2 범위에서 합성함수가 나오면, 수식에 직접접 대입 or 개형을 통한 의미추론 or 근의 대응관계 등에 대한 이야기니까, 일단 개형을 통해서 의미를 추론한다고 생각하자.
- 준킬러,킬러 범위에서는 수식과 그래프 추론 모두 가져가는 걸 기본으로 생각하고, 수식적

조건이 많이 안 주어졌다면, 그래프 개형추론을 우선시하자.