Seoul Union of Math education

서울권 수학교육과 연합 동아리
SUM 소모임 해장 고3팀 주관

theme 1. 음함수 미분법과 변수의 설정

• 무엇에 대한 변화율?

→ 미분 연산자를 확실하게 인지!!

• 양함수 & 음함수 (식의 표현).

• y는 단독 변수 x

→ x에 대한 종속변수

∴ 특정 점에서의 미분계수 $\left(\frac{dy}{dx}\right)$는

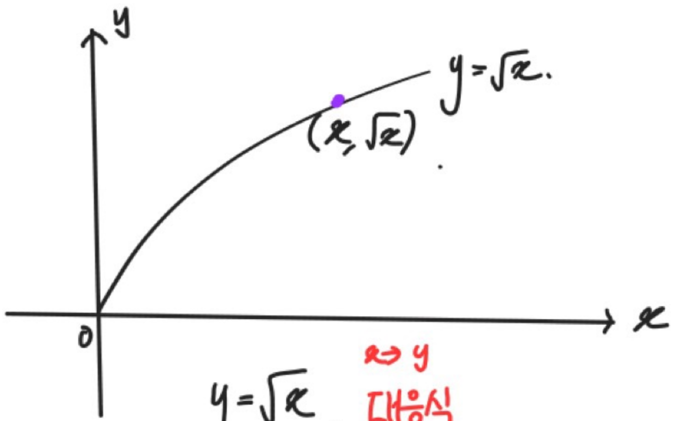
그 점의 x좌표와 x에 대한 미분계수 둘 다 필요로 함

• 변수에 대한 관계식

특정점 (변수값의 특정)

1. 점 P는 원점 O를 출발하여 곡선 $y=\sqrt{x}$를 따라 원점에서 멀어지고 있다. 점 P의 x좌표가 매초 2의 속도로 일정하게 변할 때, 직선 OP의 기울기가 10이 되는 순간 점 P의 y좌표의 시간(초)에 대한 순간변화율을 구하시오.

2008 7월 (가) 30



$y=\sqrt{x}$. $x \leftrightarrow y$ 대응식

$\frac{dx}{dt}=2$. $\frac{\sqrt{x}}{x}=10$, $\sqrt{x}=\frac{1}{10}$.

$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{dt}$.

$=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{10}}\cdot 2=10$

∴10

2. $t>2e$ 인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

1.

$f'(x)=2t\ln x\cdot\frac{1}{x}-2x\Big|_{x=k}=0$.

$\frac{2t\ln k}{k}=2k$, $t\ln k=k^2$.

$\therefore t\ln g(t)=(g(t))^2$ 't'에 대한 항등식.

$\alpha\cdot 2=e^4$, $\alpha=\frac{1}{2}e^4$.

미분 't'.

$t\cdot\frac{g'(t)}{g(t)}+\ln g(t)=2g(t)\cdot g'(t)$.

$\alpha\cdot\frac{g'(\alpha)}{g(\alpha)}+\ln g(\alpha)=2g(\alpha)\cdot g'(\alpha)$

$\frac{1}{2}\cancel{e^4}\cdot\frac{g'(\alpha)}{\cancel{e^2}}+2=2e^2\cdot g'(\alpha)$.

$g'(\alpha)\left(2e^2-\frac{1}{2}e^2\right)=2$.

$\therefore 17$

$g'(\alpha)\cdot\frac{3}{2}e^2=2$.

$g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}$.

$\therefore\frac{1}{2}e^4\times\left(\frac{4}{3e^2}\right)^2=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{16}^{\,8}}{9}=\frac{8}{9}$.

2.

$k=g(t)\rightarrow k=e^2$, $t=\alpha$

$dk=g'(t)dt$, $\frac{dk}{dt}=g'(t)$

$t\ln k=k^2\xrightarrow{\text{대입}}2\alpha=e^4$, $\alpha=\frac{1}{2}e^4$

t 미분

$\ln k+t\times\frac{1}{k}\times\frac{dk}{dt}=2k\frac{dk}{dt}$

$2+\alpha\cdot\frac{1}{e^2}\cdot g'(\alpha)=2e^2g'(\alpha)$

$2=\left(2e^2-\frac{1}{2}e^2\right)g'(\alpha)$

$g'(\alpha)=\frac{4}{3}\frac{1}{e^2}$ $\rightsquigarrow$ $\alpha\{g'(\alpha)\}^2$

$=\frac{1}{2}e^4\times\frac{16}{9}\frac{1}{e^4}$

$=\frac{8}{9}$

17

theme 2. 치환적분과 부분적분

· 적분..

$\int ⓐ\, dx = Ⓐ$; Ⓐ를 미분할 때 ⓐ가 되도록하는 그 어떠한 Ⓐ.

ex) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$.

1. 정의
2. 공식

· 3. 치환적분 (도함수 or 구간변화)

4. 부분적분 (곱함수)

→ 치환·부분적분은 주로 계산 정리를 위한 마지막 풀이에 주로 등장

· 치환적분.

→ 적분함수의 치환.

적분변수 & 적분 구간의 변화.

· 부분적분

→ 로 > 다 > 삼 > 지

← 미분

→ 적분

→ 곱함수의 형태 (부분적분 → 곱의 미분의 역과정)

3. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$f'(x^2+x+1) = \pi f(1)\sin\pi x + f(3)x + 5x^2$$

을 만족시킬 때, $f(7)$의 값을 구하시오.

$$\int (2x+1) f'(x^2+x+1)\, dx = \pi f(1) \int (2x+1)\sin\pi x\, dx + f(3)\int (2x^2+x)\, dx + \int 10x^3+5x^2\, dx.$$

$$f(x^2+x+1) = \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{2f(3)}{3}x^3 + \frac{f(3)}{2}x^2 + \pi f(1)\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi x - \frac{2}{\pi}x\cos\pi x + \frac{1}{\pi^2}\sin\pi x\right) + C.$$

$x=0$..

$f(1) = -f(1) + C \quad C = 2f(1).$

주어진 식..

$f'(1) = 0, \quad f'(1) = 5 - f(3) = 0, \quad \therefore f(3) = 5.$

$x=1$.. $\quad x=-1$..

$x=1$..

$f(3) = \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \frac{2}{3}f(3) + \frac{1}{2}f(3) + f(1) + 2f(1) + 2f(1).$

$5f(1) + \frac{1}{6}f(3) + \frac{25}{6} = 0 \quad . \; 5f(1) + 5 = 0 \quad f(1) = -1.$

$x=2$..

$f(7) = 40 + \frac{40}{3} + \frac{16}{3}f(3) + 2f(3) - f(1) - 4f(1) + 2f(1)$

$= \frac{160}{3} + \frac{22}{3}f(3) - 3f(1).$

$\therefore f(7) = \frac{160}{3} + \frac{110}{3} + 3 = 93.$

$\therefore 93$

4. 함수 $f(x)=\pi\sin(2\pi x)$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은?

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2,\ \int_{-1}^{1} xh(x)dx = -\frac{1}{32}$$
> 이다.

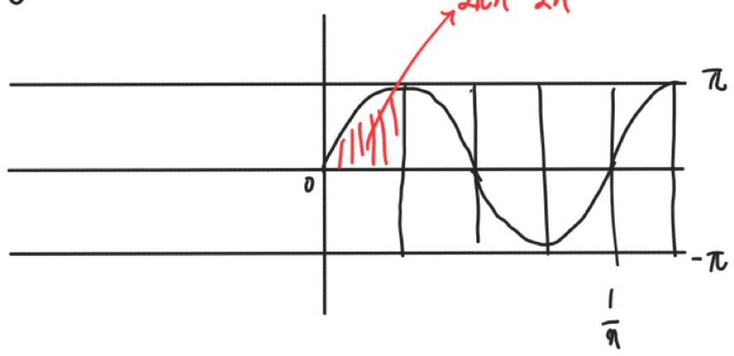
① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

2021 수능 (가) 20

곱함수 연속,,

$g(x)$가 불연속 → $f(nx)=\pi\sin(2\pi nx)$가 '0'

$g(x)$가 불연속인 x,, '정수' $\quad \frac{\pi}{2\pi n}=\frac{1}{2n}$



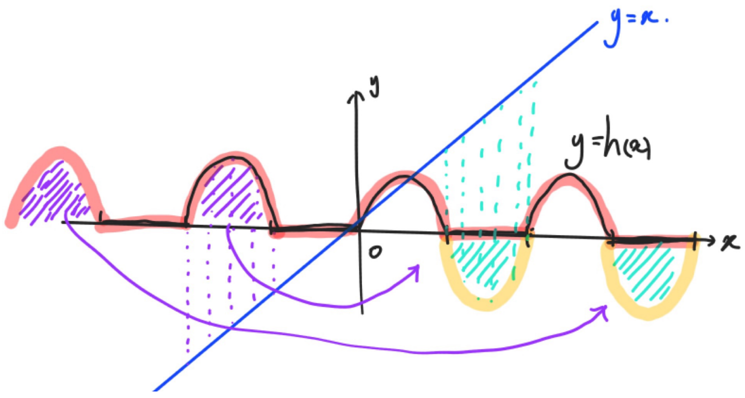
$[0, 1]$에서 $f(x)>0$ 부분의 넓이 ($\int_0^1 f(x)$의 M)

$= \frac{1}{2n}\times 2\times n = 1$.

⇒ $[-1,1]$에서 $\int f(x)dx$의 M은 2.

근데 들에.. $\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2$.

→ 즉, $g(x)\begin{cases}1 & (f(x)>0)\\ 0 & (f(x)<0)\end{cases}$.



$\int_{-1}^{1} x h(x)dx = \int_0^1 x f(\pi x)dx$

$= \int_0^1 x\pi\sin(2\pi n x)dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2x}=\frac{1}{32} \Rightarrow x=16$

5. 양의 실수 전체의 집합에서 정의되고 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_1^2 x^2 f'(x)dx$의 값은?

> (가) 함수 $f(x)$의 최솟값은 1이다.
> (나) $x>0$일 때, $(x-1)f(x)=xf'(x)$이다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

2022-2 문참시 제작 문항

$\int_1^2 x^2 f'(x)dx$

$= \left[x^2 f(x)\right]_1^2 - \int_1^2 2x f(x)dx$

$= 4f(2) - f(1) - 2\int_1^2 x f(x)dx$

$\int_1^2 x f(x)dx = \underbrace{\int_1^2 (x-1)f(x)dx}_{\Downarrow} + \int_1^2 f(x)dx$

$2f(2) - f(1) - \int_1^2 f(x)dx$

$\rightarrow \int_1^2 x^2 f'(x)dx = f(1)$

$f(1)=1$

6. 양의 실수 전체의 집합에서 정의고 역함수를 가지는 함수 $f(x)$가 있다. 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $x>0$에서

$$x^2(g'(x))^3=(\ln x)^4(g(x))^3$$

이다. $f(1)=1$일 때, $\int_1^{g(k)}\frac{1}{\sqrt{x^3f'(x)}}dx=72$이다. 실수 k의 값은?

① e^2 ② e^4 ③ e^6 ④ e^8 ⑤ e^{10}

2022-2 문참시 제작 문항

$g(1)=1$, $g(f(x))=x$

$f'(g(x))=\frac{1}{g'(x)}$

$g(x)=t \rightsquigarrow g'(x)dx=dt$

$\Rightarrow \int_1^{g(k)}\frac{1}{\sqrt{x^3f'(x)}}dx$

$=\int_1^k\left\{\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}^{\frac{3}{2}}dx=\int_1^k\frac{(\ln x)^2}{x}dx$

$\Rightarrow \frac{1}{3}(\ln k)^3=72$

$\underline{\ln k=6}$, $k=e^6$