공부하다

박수칠 수학

기본서

학습 자료

☆이 자료는 EBS 연계 교재에 수록된 문제 가운데 고난도 유형을 선별하고, 그에 관련된 수능/모평/학평 기출 문제를 추가해서 쉽게, 자세하게, 그리고 다양한 방법으로 풀이한 것입니다. 따라서 각 문제를 푼 다음, 해설까지 정독하면 실력 향상에 많은 도움이 될 것입니다.

EBS 수능특강+기출문제

수학Ⅱ-7강

1 2016학년도 수능 대비 수능특강 수학Ⅱ $p.73$ #4

다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=f(x)+f(4-x)$ 라 하자. $g'(1)=-4$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{g(3+h)-g(1+h)}{h}$의 값을 구하시오.

2 2016학년도 수능 대비 수능특강 수학Ⅱ $p.74$ #1

실수 전체의 집합에서 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-6}{x-3}=2,\ \lim_{x\to 3}\frac{x-3}{g(x)+1}=-3$$

을 만족시킬 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)g(3-h)+6}{h}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

3 2008학년도 수능 9월 모평(가형) #22

두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $g'(0)$의 값을 구하여라. [4점]

(가) $f(0)=1,\ f'(0)=-6,\ g(0)=4$

(나) $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}=0$

4 2016학년도 수능 대비 수능특강 수학Ⅱ *p*.74 #2

함수 $f(x)=x^2-a^2$에 대하여 함수 $g(x)$를 $g(x)=|f(x)|$라 할 때, 아래에서 옳을 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, a는 양수이다.)

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=f'(a)$

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{g(a-h^2)-g(a)}{h^2}=f'(a)$

ㄷ. $\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a-h)}{h}$의 값이 존재한다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

5 2008학년도 수능 6월 모평(가형) #9

함수 $f(x)$에 대해 아래에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

ㄷ. $f(x)=|x-1|$일 때, $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6 2016학년도 수능 대비 수능특강 수학Ⅱ *p*.74 #3

실수 t에 대하여 닫힌 구간 $[0,2]$에서 정의된 이차함수 $f(x)=x^2-tx$의 최솟값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$에 대한 다음 설명 중에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. 최댓값이 존재한다. ㄴ. $t=0$에서 연속이다.
ㄷ. $t=4$에서 미분가능하다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7 2011학년도 수능 6월 모평(가형) #16

다항함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (x\geq 0) \\ g(x) & (x<0)\end{cases}$$

라고 하자. $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, 옳은 것만을 아래에서 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(0)=g(0)$
ㄴ. $f'(0)=g'(0)$이면 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.
ㄷ. $f'(0)g'(0)<0$이며 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

EBS 수능특강+기출문제 수학Ⅱ-7강

1 8

★두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 하나의 함수방정식으로 정의되고, 미분계수의 정의 및 도함수를 이용하는 문제

먼저 주어진 극한 $\lim_{h\to0}\frac{g(3+h)-g(1+h)}{h}$에 함수방정식 $g(x)=f(x)+f(4-x)$를 적용해서 변형하면 다음과 같다.

$$\lim_{h\to0}\frac{g(3+h)-g(1+h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(3+h)+f(1-h)\}-\{f(1+h)+f(3-h)\}}{h}$$

여기서 $h\to0$일 때 $f(3+h)\to f(3)$, $f(3-h)\to f(3)$, $f(1+h)\to f(1)$, $f(1-h)\to f(1)$이므로 미분계수 $f'(3)$, $f'(1)$이 나타나도록 정리해보자.

$$\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3+h)-f(3)}{h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{h}-\frac{f(1+h)-f(1)}{h}-\frac{f(3-h)-f(3)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3+h)-f(3)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}-\frac{f(1+h)-f(1)}{h}+\frac{f(3-h)-f(3)}{-h}\right\}$$
$$=f'(3)-f'(1)-f'(1)+f'(3)$$
$$=2\{f'(3)-f'(1)\} \quad \cdots\cdots ①$$

다음으로 $g'(1)=-4$를 활용하기 위해 함수방정식 $g(x)=f(x)+f(4-x)$의 양변을 x에 대해 미분하면 다음과 같다.

$$g'(x)=f'(x)+f'(4-x)\times(-1)$$
$$g'(1)=f'(1)-f'(3)=-4$$

따라서 ①은

$$-2\{f'(1)-f'(3)\}=(-2)\times(-4)=8$$

[다른 방법] 주어진 함수방정식 $g(x)=f(x)+f(4-x)$의 우변은 x대신 $4-x$를 대입해도 변하지 않음에 주목해보자.

주어진 함수방정식 $g(x)=f(x)+f(4-x)$에 x 대신 $4-x$를 대입하면

$$g(4-x)=f(4-x)+f(x)$$

가 되므로 함수 $g(x)$는 새로운 함수방정식

$$g(x)=g(4-x)$$

를 만족한다. 이 함수방정식의 양변을 x에 대해 미분하고 $x=1$을 대입하면

$$g'(x)=g'(4-x)\times(-1)$$
$$g'(1)=-g'(3)=-4$$
$$\therefore g'(3)=4$$

또한 $g(3)=g(1)$로부터 극한 $\lim_{h\to0}\frac{g(3+h)-g(1+h)}{h}$가 $\frac{0}{0}$의 꼴임을 알 수 있으며 분모, 분자가 미분가능하기 때문에 로피탈의 정리를 적용할 수 있다.

$$\lim_{h\to0}\frac{g(3+h)-g(1+h)}{h}=\lim_{h\to0}g'(3+h)-g'(1+h)$$
$$=g'(3)-g'(1)$$
$$=4-(-4)=8$$

2 ③

★함수식이 분수꼴인 극한의 수렴 조건과 미분계수의 정의를 이용하는 문제

극한 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)-6}{x-3}$이 수렴하고, (분모)→0이므로 (분자)→0이어야 한다. 따라서

$$\lim_{x\to3}\{f(x)-6\}=f(3)-6=0 \Rightarrow f(3)=6$$

함수 $f(x)$가 미분가능한 함수이므로 함수 $f(x)-6$도 미분가능하면서 연속인 함수가 된다. 따라서 (극한)=(함숫값)이다.

$$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-6}{x-3}=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=f'(3)=2$$

마찬가지로 극한 $\lim_{x\to3}\frac{x-3}{g(x)+1}$이 0 아닌 값으로 수렴하고 (분자)→0이므로 (분모)→0이다. 따라서

$$\lim_{x\to3}\{g(x)+1\}=g(3)+1=0 \Rightarrow g(3)=-1$$

$$\lim_{x\to3}\frac{x-3}{g(x)+1}=\lim_{x\to3}\frac{1}{\frac{g(x)-g(3)}{x-3}}=\frac{1}{g'(3)}=-3$$

$$g'(3)=-\frac{1}{3}$$

따라서 주어진 극한 $\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)g(3-h)+6}{h}$은 $\frac{0}{0}$의 꼴이며, 미분계수의 정의를 이용해서 변형하면 다음과 같다.

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)g(3-h)+6}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)g(3-h)-f(3)g(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3+h)g(3-h)-f(3)g(3-h)}{h}+\frac{f(3)g(3-h)-f(3)g(3)}{h}\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(3+h)-f(3)}{h}\times g(3-h)-f(3)\times\frac{g(3-h)-g(3)}{-h}\right\}$$
$$=f'(3)g(3)-f(3)g'(3)$$
$$=2\times(-1)-6\times\left(-\frac{1}{3}\right)=0$$

[다른 방법] 로피탈의 정리

주어진 극한

$$\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)g(3-h)+6}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(3+h)g(3-h)-f(3)g(3)}{h}$$

이 $\frac{0}{0}$꼴이고, 분모·분자 모두 미분가능하므로 로피탈의 정리에 따라 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)g(3-h)-f(3)g(3)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\{f'(3+h)g(3-h)+f(3+h)g'(3-h)(-1)\}$$
$$=f'(3)g(3)-f(3)g'(3)$$
$$=2\times(-1)-6\times\left(-\frac{1}{3}\right)=0$$

3　24

㈎로부터 $f(0)g(0)=4$이므로 ㈏는

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-f(0)g(0)}{x}=0$$

과 같고, 함수 $y=f(x)g(x)$의 $x=0$에서의 미분계수가 0임을 의미한다. 또한 함수 $y=f(x)g(x)$의 도함수가

$$y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

이므로 $x=0$에서의 미분계수는 다음과 같다.

$$y'_{x=0}=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$$
$$=(-6)\times 4+1\times g'(0)=0$$
$$\therefore g'(0)=24$$

[다른 방법] 로피탈의 정리

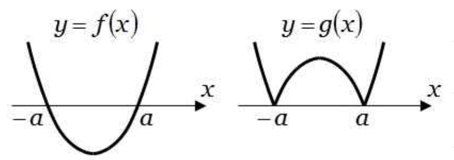
㈎로부터 $f(0)g(0)=4$이므로 ㈏의 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}$는 $\frac{0}{0}$꼴이고, 분모·분자 모두 미분가능하다. 따라서 로피탈의 정리에 따라 다음과 같이 계산된다.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)g(x)-4}{x}=\lim_{x\to 0}\{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\}$$
$$=f'(0)g(0)+f(0)g'(0)$$
$$=-6\times 4+1\times g'(0)=0$$
$$\therefore g'(0)=24$$

4　⑤

★미분계수의 정의, 미분가능성과 연속성의 관계를 이용하는 문제

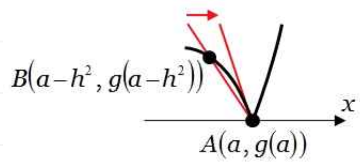
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 좌변 $\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}$는 함수 $g(x)$의 $x=a$에서의 미분계수를 의미한다. 그런데 위 그림과 같이 함수 $g(x)$의 그래프가 $x=a$에서 뾰족하므로 미분계수 $g'(a)$는 존재하지 않는다.(거짓)

ㄴ. 좌변 $\lim_{h\to 0}\frac{g(a-h^2)-g(a)}{h^2}=-\lim_{h\to 0}\frac{g(a-h^2)-g(a)}{-h^2}$에서 $\frac{g(a-h^2)-g(a)}{-h^2}$는 두 점 $A(a, g(a))$, $B(a-h^2, g(a-h^2))$을 이은 직선 AB의 기울기를 의미한다.

여기서 $h\to 0$이면 $a-h^2\to a-0$이므로 점 B는 점 A의 왼쪽에서 점 A로 한없이 다가가고, $\lim_{h\to 0}\frac{g(a-h^2)-g(a)}{-h^2}$는 $x=a$에서 함수 $g(x)$의 좌미분계수(아래 그림에서 접선의 기울기)가 된다.



또한 $-a<x<a$일 때

$$g(x)=-f(x)\ \Rightarrow\ g'(x)=-f'(x)$$

이므로 $x=a$에서 함수 $g(x)$의 좌미분계수는 $-f'(a)$와 같다. 그러므로

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a-h^2)-g(a)}{h^2}=-\lim_{h\to 0}\frac{g(a-h^2)-g(a)}{-h^2}$$
$$=-\{-f'(a)\}=f'(a)$$

(참)

ㄷ. 만일 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다면

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a-h)}{h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a-h)}{2h}$$
$$=\frac{1}{2}g'(a)$$

라고 할 수 있지만, 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분불가능하기 때문에 함수식 $g(x)=|f(x)|=|(x+a)(x-a)|$로 계산해야 한다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|(2a+h)h|-|(2a-h)(-h)|}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|(2a+h)h|-|(2a-h)h|}{h}$$

$h\to +0$일 때

$$\lim_{h\to +0}\frac{(2a+h)h-(2a-h)h}{h}=\lim_{h\to +0}2h=0$$

$h\to -0$일 때

$$\lim_{h\to -0}\frac{-(2a+h)h+(2a-h)h}{h}=\lim_{h\to -0}(-2h)=0$$

따라서 $\lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a-h)}{h}=0$이다. (참)

[다른 방법] ㄴ도 다음과 같이 함수식을 이용해서 계산할 수 있다.

$g(x)=|f(x)|=|(x+a)(x-a)|$이므로 좌변은

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(a-h^2)-g(a)}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|(2a-h^2)(-h^2)|}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{|2a-h^2|\cdot|-h^2|}{h^2}$$
$$=\lim_{h\to 0}|2a-h^2|=2a$$

가 된다. 또한 $f'(x)=2x$이므로 우변은

$$f'(a)=2a$$

이다. (참)

5 ⑤

ㄱ. 미분계수의 정의에 따라 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$이 $f'(1)=0$임을 의미하므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 미분가능하다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이고, $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$이 성립한다. (참)

ㄴ. ㄱ과 마찬가지로 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$는 $f'(1)=0$임을 의미한다. 따라서 결론의 좌변을 미분계수 $f'(1)$의 정의에 맞게 변형하면 다음과 같다.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{f(1+h)-f(1)\}-\{f(1-h)-f(1)\}}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\times\frac{1}{2}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}\times\frac{1}{2}\right\}$$
$$=f'(1)\times\frac{1}{2}+f'(1)\times\frac{1}{2}=f'(1)=0$$

(참)

ㄷ. 주어진 극한에 $f(x)=|x-1|$을 바로 적용하면

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|(1+h)-1|-|(1-h)-1|}{2h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|h|}{2h}=0$$

(참)

★ㄴ처럼 $f'(1)$의 값이 존재하면 $\Delta y=f(1+h)-f(1-h)$, $\Delta x=(1+h)-(1-h)=2h$로 보고

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=f'(1)$$

이라고 할 수 있다. 그러나 ㄷ처럼 $f'(1)$의 값이 존재하지 않으면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$의 값이 존재할 수도 있고, 존재하지 않을 수도 있기 때문에 일일이 계산해야 한다.

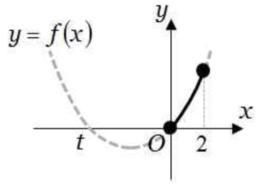
6 ⑤

★주어진 함수로부터 정의된 새로운 함수를 이해하고, 구간별로 정의된 함수의 연속성과 미분가능성을 판단하는 문제

$f(x)=x(x-t)$로부터 포물선 $f(x)$는 $x=0$, t에서 x축과 만나고, $f(x)=x^2-tx=\left(x-\frac{t}{2}\right)^2-\frac{t^2}{4}$으로부터 포물선의 꼭짓점이 $\left(\frac{t}{2}, -\frac{t^2}{4}\right)$이므로 $\frac{t}{2}$가 구간 $[0, 2]$에 속하는지, 속하지 않는지에 따라 $f(x)$의 최솟값 $g(t)$가 다음과 같이 변한다.

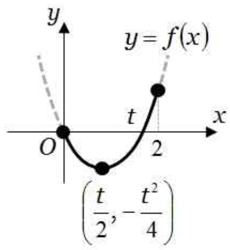
i) $\frac{t}{2}<0$일 때 (즉, $t<0$일 때)

함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, 최솟값은 $x=0$일 때 나타난다. 따라서 $g(t)=f(0)=0$



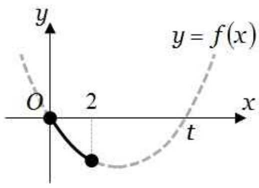
ii) $0\le\frac{t}{2}<2$일 때 (즉, $0\le t<4$)

함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, 최솟값은 꼭짓점에서 나타난다. 따라서 $g(t)=f\left(\frac{t}{2}\right)=-\frac{t^2}{4}$



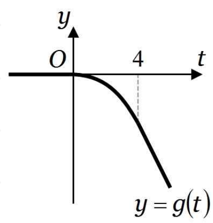
iii) $\frac{t}{2}\ge 2$일 때 (즉, $t\ge 4$)

함수 $f(x)$의 그래프는 다음 그림과 같고, 최솟값은 $t=2$일 때 나타난다. 따라서 $g(t)=f(2)=-2t+4$



i)~*iii)*에서 얻은 식을 한 번에 나타내고, 그래프까지 그리면 다음과 같다.

$$g(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ -\frac{t^2}{4} & (0\le t<4)\\ -2t+4 & (t\ge 4)\end{cases}$$



ㄱ. 위 그래프로부터 함수 $g(t)$의 최댓값은 0이다. (참)

ㄴ. 위 그래프로부터 함수 $g(t)$는 $t=0$일 때 연속이다. (참)

ㄷ. 위 그래프로부터 함수 $g(t)$는 $t=4$일 때 연속이다. 또한 t의 범위에 따라 도함수 $g'(t)$를 계산하면

$$g'(t)=\begin{cases}0 & (t<0)\\ -\frac{t}{2} & (0<t<4)\\ -2 & (t>4)\end{cases}$$

이고, $t=4$일 때의 좌미분계수와 우미분계수를 비교하면

$$(\text{좌미분계수})=\left[-\frac{t}{2}\right]_{t=4}=-2$$

$$(\text{우미분계수})=[-2]_{t=4}=-2$$

로 일치한다. 따라서 함수 $g(t)$는 $t=4$에서 미분가능하다. (참)

7 ⑤

ㄱ. 함수 $h(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이며 여기서의 함숫값, 좌극한, 우극한이 일치한다. 따라서 $f(0)=g(0)$이다. (참)

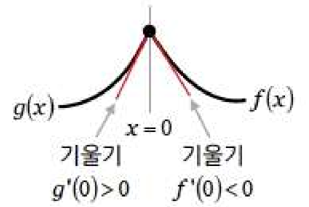
ㄴ. 함수 $h(x)$의 도함수는

$$h'(x)=\begin{cases} f'(x) & (x>0) \\ g'(x) & (x<0) \end{cases}$$

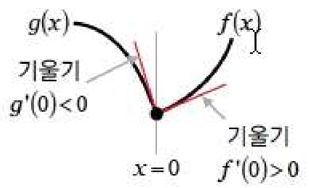
이며, 함수 $h(x)$가 $x=0$에서 연속이기 때문에 $x=0$에서의 좌미분계수 $g'(0)$와 우미분계수 $f'(0)$가 일치하면 미분가능해진다. (참)

ㄷ. $f'(0)g'(0)<0$이면 $x=0$에서 함수 $h(x)$의 좌미분계수와 우미분계수의 부호가 반대다. 그러므로 점 $(0, h(0))$에서 $f(x)$의 접선과 $g(x)$의 접선 또한 부호가 반대가 된다. 이를 그림으로 나타내면 다음과 같다.

$i)$ $f'(0)<0$, $g'(0)>0$일 때



$ii)$ $f'(0)>0$, $g'(0)<0$일 때



따라서 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 극값을 갖는다. (참)