

제 2 교시

수리 영역

‘나’형

성명

수험 번호

3

1

- 자신이 선택한 유형(‘가’형/‘나’형)의 문제지인지 확인하시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰시오.
- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.
- 단답형 답의 숫자에 ‘0’이 포함되면, 그 ‘0’도 답란에 반드시 표시하시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

1. $\frac{1}{2} \log_3 6 - \log_9 2$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ 1 ⑤ $\frac{3}{2}$

2. 두 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 $2A = X - B$ 를 만족시키는 행렬 X 의 모든 성분의 합은? [2점]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+1} - 1}{(2^n + 1)(2^n - 1)}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

4. 행렬 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ 에 대하여 행렬 $\frac{1}{2}A$ 의 역행렬의 모든 성분의 합은? [3점]

- ① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

5. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 3$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n - 3}{a_n + 1}$ 의 값은? [3점]

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

7. 지수방정식 $5^{2x} - 5^{x+1} + k = 0$ 이 서로 다른 두 개의 양의 실근을 갖도록 하는 정수 k 의 개수는? [3점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

6. x, y 에 대한 연립방정식

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log x \\ \log y \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} \log x \\ \log y \end{pmatrix}$$

가 $x=1, y=1$ 이외의 해를 갖도록 하는 모든 실수 k 의 값의 합은? [3점]

- ① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

8. 세 수 1 , $\log_2(2^x+1)$, $\log_2(4^x-1)$ 이 이 순서대로 등차수열을 이루도록 하는 x 의 값을 α 라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

[3점]

- ① $0 < \alpha < 1$ ② $1 < \alpha < 2$ ③ $2 < \alpha < 3$
 ④ $3 < \alpha < 4$ ⑤ $4 < \alpha < 5$

9. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} - a_n = 2^{n-5} + n$$

을 만족시킬 때, $a_{10} - a_7$ 의 값은? [3점]

- ① 40 ② 44 ③ 48 ④ 52 ⑤ 56

10. $80^x = 2$, $\left(\frac{1}{10}\right)^y = 4$, $a^z = 8$ 을 만족시키는 세 실수 x, y, z 에

대하여 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} - \frac{1}{z} = 1$ 이 성립할 때, 양수 a 의 값은? [3점]

- ① 32 ② 64 ③ 96 ④ 128 ⑤ 160

11. 역행렬을 갖는 이차정사각행렬 A 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A + A^{-1} = E$

(나) $A \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

행렬 A 의 모든 성분의 합은? (단, E 는 단위행렬이다.) [4점]

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

12. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $n < a_n < n+1$ 을 만족

시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n a_k$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

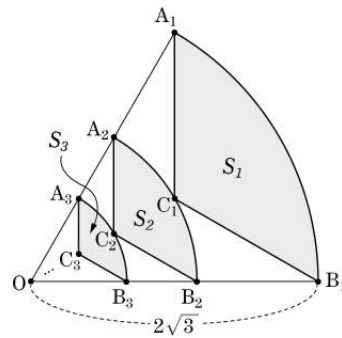
13. 그림과 같이 반지름의 길이가 $2\sqrt{3}$ 이고 $\angle A_1OB_1 = 60^\circ$ 인 부채꼴 A_1OB_1 이 있다.

세 점 A_1, O, B_1 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_1OB_1 의 무게중심을 C_1 이라 할 때, 두 선분 A_1C_1, B_1C_1 과 호 A_1B_1 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1 이라 하자.

점 O 를 중심으로 하고 점 C_1 을 지나는 원이 두 선분 OA_1, OB_1 과 만나는 점을 각각 A_2, B_2 라 하자. 세 점 A_2, O, B_2 를 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_2OB_2 의 무게중심을 C_2 라 할 때, 두 선분 A_2C_2, B_2C_2 과 호 A_2B_2 로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2 라 하자.

점 O 를 중심으로 하고 점 C_2 를 지나는 원이 두 선분 OA_2, OB_2 과 만나는 점을 각각 A_3, B_3 이라 하자. 세 점 A_3, O, B_3 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 A_3OB_3 의 무게중심을 C_3 이라 할 때, 두 선분 A_3C_3, B_3C_3 과 호 A_3B_3 으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_3 이라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 도형의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $2\pi - \sqrt{3}$ ② $2\pi - 2\sqrt{3}$ ③ $2\pi - 3\sqrt{3}$
 ④ $3\pi - 3\sqrt{3}$ ⑤ $3\pi - 4\sqrt{3}$

14. 신경세포 또는 근육세포와 같은 대부분의 세포에서는 흥분하지 않은 상태에서 세포의 외부와 내부의 전위차가 생기는데 이것을 휴지전위라고 한다. 세포의 외부와 내부의 칼륨이온 농도(단위는 mM)가 각각 $[K^+]_O$, $[K^+]_I$ 일 때의 휴지전위(단위는 mV)를 E_K 라 하면 등식

$$E_K = t(\log[K^+]_O - \log[K^+]_I) \quad (\text{단, } t \text{ 는 양의 상수이다.})$$

가 성립한다. $[K^+]_O$, $[K^+]_I$, E_K 의 값이 표와 같을 때, 실수 q 의 값은? [4점]

$[K^+]_O$	$[K^+]_I$	E_K
a	b	p
$10a$	b	$p+60$
10^2a	$\sqrt{10}b$	$p+q$

- ① 90 ② 120 ③ 150 ④ 180 ⑤ 210

15. n 이 자연수일 때, x 에 대한 방정식

$$\sum_{k=0}^n (x-k)^2 = \sum_{k=1}^n (x+k)^2$$

의 0 이 아닌 해를 $x=a_n$ 이라 하자. a_{10} 의 값은? [3점]

- ① 180 ② 200 ③ 220 ④ 240 ⑤ 260

16. 등식 $2^a = 5^b$ 을 만족시키는 양의 실수 a, b 에 대하여 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $b = \frac{1}{2}$ 이면 $a = \log_4 5$ 이다.

ㄴ. $2 < \frac{a}{b} < 3$

ㄷ. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 은 무리수이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 일반항이 $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)인 수열 $\{a_n\}$ 에서 a_n 의 값이 6의 배수인 항들을 작은 것부터 차례로 나열한 수열을 $\{b_n\}$ 이라 할 때, 다음은 $\sum_{k=1}^{4n} b_k$ 를 구하는 과정이다.

$a_{n+12} - a_n = \boxed{\text{가}}$ 이므로 $a_{n+12} - a_n$ 은 6의 배수이다. ㉠

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_{12}$ 중에서 6의 배수인 것은

$a_3 = 6, a_8 = 36, a_{11} = 66, a_{12} = 78$ 이므로

$b_1 = a_3, b_2 = a_8, b_3 = a_{11}, b_4 = a_{12}$ 이다. ㉡

㉠, ㉡에서

$$b_{4n-3} = a_{12n-9} = 6(4n-3)(3n-2)$$

$$b_{4n-2} = a_{12n-4} = 6(3n-1)(4n-1)$$

$$b_{4n-1} = \boxed{\text{나}}$$

$$b_{4n} = 6n(12n+1)$$

따라서 $\sum_{k=1}^{4n} b_k = \sum_{k=1}^n (\boxed{\text{다}}) = \boxed{\hspace{2cm}}$

위의 (가), (나), (다)에 들어갈 식을 각각 $f(n), g(n), h(k)$ 라 할 때, $f(1) + g(2) + h(1)$ 의 값은? [4점]

- ① 552 ② 558 ③ 564 ④ 570 ⑤ 576

18. 두 이차정사각행렬 A, B 는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $BA + B = E$

(나) $A^2B = A + E$

옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? (단, E 는 단위 행렬이다.) [4점]

ㄱ. 행렬 B 의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $AB = BA$

ㄷ. 행렬 AB 의 모든 성분의 합은 -2 이다.

- ① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 네 직선 $x=1$, $x=n+1$, $y=x$, $y=2x$ 로 둘러싸인 사각형의 넓이를 S_n 이라 할 때,

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{S_n}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

20. 다음 조건을 만족시키는 자연수 n 의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

(가) $[\log_3 n] = 3$

(나) $[\log n^2] = [\log 2n] + 2$

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

21. 자연수 n 에 대하여 다음 시행을 한다.

n 이 홀수이면 n 에서 1을 빼고,
 n 이 짝수이면 n 을 2로 나눈다.

자연수 n 이 1이 될 때까지 반복한 시행의 횟수를 a_n 이라 정의하자. 예를 들어 $a_7 = 4$, $a_8 = 3$ 이다. $S_n = \sum_{k=2^n}^{2^{n+3}} a_k$ 라 할 때, S_{50} 의 값은? (단, $a_1 = 0$ 이다.) [4점]

- ① 200 ② 201 ③ 202 ④ 203 ⑤ 204

단답형

22. 등차수열 $\{a_n\}$ 에서 $a_1 = 4$, $a_2 + a_3 = 17$ 일 때, a_4 의 값을 구하시오. [3점]

23. $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 10$ 을 만족시키는 양수 a 에 대하여 $a + a^{-1}$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수 $y = \log_3 \left(\frac{x}{9} - 1 \right)$ 의 그래프는 함수 $y = \log_3 x$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동시킨 것이라 할 때, $10(m+n)$ 의 값을 구하시오. [3점]

25. 꼭짓점의 개수가 5인 그래프 G 의 연결 관계를 나타내는 행렬을 P 라 할 때, 행렬 P 의 (i, j) 성분 a_{ij} 는 다음과 같다.

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & (i+j \text{가 짝수일 때}) \\ 1 & (i+j \text{가 홀수일 때}) \end{cases} \quad (i=1, 2, 3, 4, 5, \quad j=1, 2, 3, 4, 5)$$

그래프 G 의 변의 개수를 m 이라 할 때, m^2 의 값을 구하시오.

[3점]

26. 수열 $\{a_n\}$ 은 $a_1=1$, $a_2=1$ 이고 모든 자연수 n 에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+2} - a_{2n} = 1$

(나) $a_{2n+1} - a_{2n-1} = 0$

$a_{100} + a_{101}$ 의 값을 구하시오. [3점]

27. 수열 $\{a_n\}$ 의 첫째항부터 제 n 항까지의 합을 S_n 이라 할 때,

$S_n = \frac{6n}{n+1}$ 이다. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$ 의 값을 구하시오. [4점]

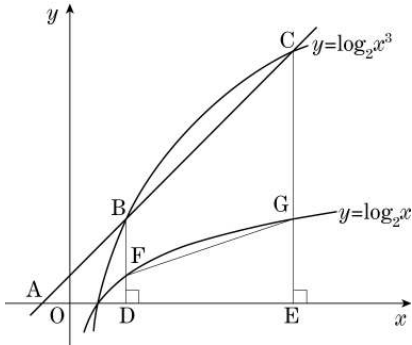
28. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$

(나) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2a_n - 5b_n) = 3$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + 3b_n}{a_n + b_n} = \frac{q}{p}$ 일 때, $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [4점]

29. 그림과 같이 x 축 위의 한 점 A 를 지나는 직선이 곡선 $y = \log_2 x^3$ 과 서로 다른 두 점 B, C 에서 만나고 있다. 두 점 B, C 에서 x 축에 내린 수선의 발을 각각 D, E 라 하고, 두 선분 BD, CE 가 곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 점을 각각 F, G 라 하자. $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$ 이고, 삼각형 ADB 의 넓이가 $\frac{9}{2}$ 일 때, 사각형 $BFGC$ 의 넓이를 구하시오. (단, 점 A 의 x 좌표는 0보다 작다.) [4점]



30. 좌표평면에서 자연수 n 에 대하여 점 P_n, Q_n 을 다음 규칙대로 잡는다.

- (가) 점 P_1 의 좌표는 $(0, 0)$ 이다.
 (나) 점 P_n 을 x 축의 방향으로 n 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동시킨 점은 Q_n 이다.
 (다) 점 Q_n 을 x 축의 방향으로 -1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동시킨 점은 P_{n+1} 이다.

점 Q_n 의 좌표를 (a_n, b_n) 이라 할 때, $a_{21} + b_{21}$ 의 값을 구하시오. [4점]

※ 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.