지수함수와 로그함수의 미분

이재서(Babycuckoo)

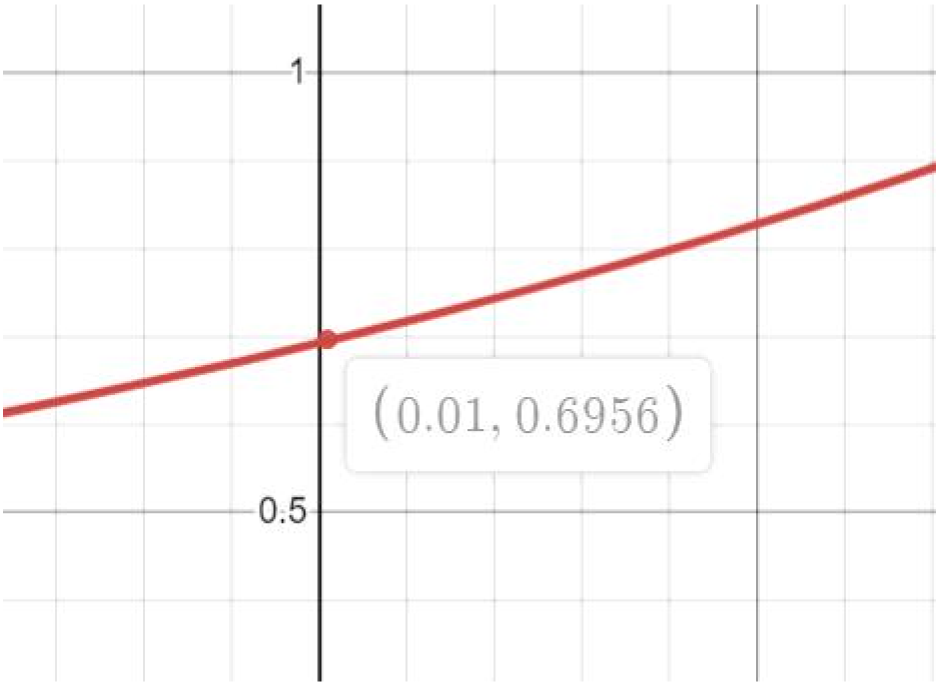
지수함수의 도함수

지수함수의 도함수를 구하기 위해, 지수함수의 도함수를 극한식 형태로 써 보자. 예를 들어, 어떠한 지수함수 $y=2^x$의 도함수는 극한값 $\lim_{h\to0}\frac{2^{x+h}-2^x}{h}$으로 표현할 수 있다.

그런데 이 극한식의 분자 부분을 식 2^x로 인수분해해 보면,

▶$\lim_{h\to0}\frac{2^{x+h}-2^x}{h}=\lim_{h\to0}2^x\times\frac{2^h-1}{h}=2^x\times\lim_{h\to0}\frac{2^h-1}{h}$라고 쓸 수 있음을 알 수 있다.

이때 $\lim_{h\to0}\frac{2^h-1}{h}$ 부분은 계산하고 나면 상수이므로, 이 극한값만 계산하고 나면 함수 $y=2^x$의 도함수를 알 수 있다.



함수 $y=\frac{2^x-1}{x}$의 그래프를 컴퓨터를 이용해 그리고 0 근처에서의 값을 관찰해 보니, 이 값은 대략 0.6956임을 알 수 있었다. 따라서 함수 $y=2^x$의 도함수 $\frac{d}{dx}(2^x)$는 대략 0.6956×2^x임을 알 수 있다.

밑이 다른 지수함수들의 도함수 또한 관찰해 보자. 함수 $y=8^x$의 도함수는 이전과 같은 방법으로 쓰면 $8^x\times\lim_{h\to0}\frac{8^h-1}{h}$라고 나타낼 수 있다. 그런데 이때 뒤쪽의 극한식 $\lim_{h\to0}\frac{8^h-1}{h}$은 방금 구한 극한 $\lim_{h\to0}\frac{2^h-1}{h}$과 지수법칙을 통하여 쉽게 구할 수 있다.

▶$\lim_{h\to 0}\frac{8^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2^{3h}-1}{h}$, $3h=t$로 치환하면 $\lim_{h\to 0}\frac{2^{3h}-1}{h}=\lim_{t\to 0}3\times\frac{2^t-1}{t}=3\times 0.6956$

▶$=2.0868$, 따라서 함수 $y=8^x$의 도함수 $\frac{d}{dx}(8^x)=2.0868\times 8^x$

지수법칙에 따르면 이와 비슷하게 모든 지수함수 $y=a^x$를 $y=2^{x\times\log_2 a}$라고 고칠 수 있으므로, $y=8^x$에서 하던 것과 마찬가지로 도함수를 구하면

▶$\frac{d}{dx}(a^x)=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\times\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\times\lim_{h\to 0}\log_2 a\times\frac{2^{x\log_2 a}-1}{x\log_2 a}$,

$x\log_2 a=t$로 치환하면,

▶$\frac{d}{dx}(a^x)=a^x\log_2 a\lim_{t\to 0}\frac{2^t-1}{t}=0.6956\log_2 a\times a^x$

라고 할 수 있다. 그런데 매번 이렇게 소수를 포함한 계산을 통해 도함수를 구해야 한다면 매우 불편할 것이다. 따라서 다음과 같은 과정을 거쳐 지수함수의 도함수 식을 간단하게 표현하기로 한다.

① $0.6956\log_2 e=1$을 만족하는 수 e를 찾아 보자.

▶ $0.6956\log_2 a=1$일 때 $a=2^{\frac{1}{0.6956}}$이고, 이를 계산하면 $e\approx 2.708$

② 수 e를 기준으로 함수 $y=a^x$에 대한 도함수를 다시 쓴다. $0.6956\log_2 e=1$이므로 로그의 계산 규칙에 따르면,

▶ $\frac{d}{dx}(a^x)=0.6956\log_2 a\times a^x=0.6956\log_2 e\times\log_e a\times a^x=\log_e a\times a^x$

위와 같이 약 2.708에 해당하는 수 e에 대하여 모든 지수함수 $y=a^x$의 도함수는 $y=\log_e a\times a^x$임을 알아내었다.

수 e와 그 성질

$0.6956\log_2 e=1$이 되게 하는 수 e의 근삿값을 더 정확히 구하면 $2.71828\ldots$이다. 이 수를 **자연로그의 밑**이라고 하며, 비공식 용어로 흔히 **자연상수**라고도 한다. 이어, 임의의 수 x에 대한 수 e를 밑으로 하는 로그인 $\log_e x$를 **자연로그**라고 하며, 이를 기호로 간단히 $\ln x$와 같이 표현한다. 수 e는 무리수이며, 수 e와 자연로그 $\ln x$에는 다음과 같은 성질이 있다.

① 지수함수의 도함수 성질

$$\frac{d}{dx}(a^x)=\ln a\times a^x$$

② e를 밑으로 하는 도함수 $y=e^x$의 성질

$$\frac{d}{dx}(e^x)=\ln e\times e^x=\log_e e\times e^x=e^x$$

위 식에 따라, 함수 $y=e^x$는 자기 자신이 도함수인 함수라고 할 수 있다.

③ 극한 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$에 대한 성질

▶ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^{x\log_2 e}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\log_2 e\times\frac{2^{x\log_2 e}-1}{x\log_2 e}=0.6956\log_2 e=1$

따라서 극한값 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$이다. 이 식을 변형하면 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^0}{x-0}$이라고 쓸 수 있으므로, 이 식을 통하여 함수 $y=e^x$의 $x=1$에서의 미분계수는 1임을 알 수 있다.

④ 극한 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$에 대한 성질

▶ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

⑤ 극한 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$에 관한 성질

▶ $\lim\limits_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}=e$

※ ④, ⑤번 성질에 관한 설명은 다음 페이지 '로그함수의 도함수' 내용에서 한다.

※ 복잡한 로그 계산이 나오는 상황을 피하기 위해, 미적분 과목에서의 지수/로그함수 문제에는 수 e를 밑으로 하는 지수함수와 로그함수 $y=e^x$와 $y=\ln x$가 자주 등장한다.

로그함수의 도함수

지수함수와 로그함수는 서로 역함수 관계에 있으므로, 이 사실을 이용하여 로그함수의 도함수 또한 구할 수 있다. 우선 기본적인 로그함수 $y=\ln x$의 도함수를 먼저 구하고, 로그의 성질을 이용해서 모든 로그함수의 도함수를 구해 보자. 함수 $y=\ln x$의 도함수를 극한 형태로 쓰면 다음과 같이 쓸 수 있다.

▶ $\frac{d}{dx}(\ln x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)$

여기서 $\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=t$로 치환하면 $h\to 0$일 때 로그의 진수가 1에 가까워지므로, $h\to 0$일 때 $t\to 0$이다. 또한 $\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=t \Leftrightarrow \frac{h}{x}=e^t-1 \Leftrightarrow \frac{1}{h}=\frac{1}{x(e^t-1)}$라고 표현할 수 있고, 이 사실들과 수 e의 성질 ③번에 따르면,

▶ $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\times\ln\left(1+\frac{h}{x}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{x(e^t-1)}\times t=\lim_{t\to 0}\frac{1}{x}\times\frac{t}{e^t-1}=\frac{1}{x}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{x}$ 이다.

따라서, 함수 $y=\ln x$의 도함수는 유리함수 $y=\frac{1}{x}$이다.[1)]

이어, 밑이 임의의 수 a인 로그함수 $y=\log_a x$는 로그의 밑변환 성질에 따라 $y=\frac{\ln x}{\ln a}$라고 쓸 수 있고, 그 도함수 $\frac{d}{dx}(\log_a x)$는 도함수의 성질에 따라

▶ $\frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)=\frac{1}{\ln a}\times\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x\ln a}$라고 할 수 있다.

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln x)=\frac{1}{x},\ \frac{d}{dx}(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}}$$

위 공식에 따르면, 함수 $y=\ln x$의 $x=1$에서의 미분계수 $\lim_{t\to 0}\frac{\ln t-\ln 1}{t-1}=1$이다. 여기서 $t-1=x$로 치환하고 $\ln 1=0$을 생략하면,

▶ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$이다. 이로써 전 페이지의 자연상수 e의 성질 ④번을 증명하였다. 이어

▶ $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\times\ln(x+1)=\lim_{x\to 0}\ln(x+1)^{\frac{1}{x}}=1$, 함수 $y=\ln x$는 연속함수이므로

▶ $\lim_{x\to 0}(x+1)^{\frac{1}{x}}=e$이다.[2)] 이로써 수 e의 성질 ⑤번도 증명하였다.

---

1) 지수함수를 통한 로그함수의 도함수 유도는 뒤에 나오는 단원 '역함수의 미분' 부분에서 다시 나온다.

2) 이를 이용하여 함수 $y=e^x$를 $y=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{x}{t}}=\lim_{t\to 0}\left\{(1+t)^{\frac{1}{t}}\right\}^x=e^x$와 같이 쓰기도 한다.

지수/로그함수의 도함수와 관련된 극한값 구하기

지수함수와 로그함수의 도함수와 관련된 극한들은 크게 세 가지 유형이 있다. 각각에 대하여 그 해결법과 예제 풀이를 살펴보자.

① 극한 $\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}$와 관련된 문제들

지수함수가 포함된 항의 뒷부분(e^x-1의 1에 해당하는 부분)이 1이 되게 상수를 묶어낸다. 밑이 수 e가 아닌 지수함수 a^x는 $e^{x\ln a}$와 같이 표현한다. 기존 식의 분모는 따로 빼내고, 분자와 분모에 $e^{(\text{지수})}$부분의 지수를 곱한다. 극한값의 변수가 0으로 가지 않는다면 치환을 통해 0으로 가는 변수에 대한 극한으로 바꾸어 준다.

극한값 $\lim_{x\to2}\frac{3^x-9}{x^2-2x}$을 계산하시오.

▶ $\lim_{x\to2}\frac{3^x-9}{x^2-2x}=\lim_{t\to0}\frac{3^{t+2}-9}{t^2+2t}=\lim_{t\to0}\frac{9(3^t-1)}{t^2+2t}=\lim_{t\to0}\frac{9(e^{t\ln3}-1)}{t^2+2t}$

▶ $=\lim_{t\to0}\frac{9t\ln3}{t^2+2t}\times\frac{e^{t\ln3}-1}{t\ln3}$, $t\ln3=s$로 치환하면 $t\to0$일 때 $s\to0$이므로,

▶ $=\lim_{t\to0}\frac{9\ln3\times t}{t(t+2)}\times\lim_{s\to0}\frac{e^s-1}{s}=\frac{9\ln3}{2}\times1=\frac{9}{2}\ln3$

② 극한 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$와 관련된 문제들

로그를 포함한 항들끼리 로그의 연산 규칙을 적용하여 합쳐 준다. 로그 안쪽의 식을 $f(x)$라 하면, 식 $\ln f(x)$를 $\ln\{1+(f(x)-1)\}$과 같은 꼴로 고쳐 준다. 이후 $f(x)-1$ 부분을 한 문자로 치환하고 극한값 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$을 이용해 문제를 푼다.

극한값 $\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2x}$을 계산하시오.

▶ $\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\{1+(\cos x-1)\}}{\sin^2x}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\sin^2x}\times\frac{\ln\{1+(\cos x-1)\}}{\cos x-1}$,

$\cos x-1=t$라고 하면 $x\to0$일 때 $t\to0$이고 $\sin^2x=1-\cos^2x$이므로,

▶ $=\lim_{x\to0}-\frac{1-\cos x}{1-\cos^2x}\times\lim_{t\to0}\frac{\ln(t+1)}{t}=\lim_{x\to0}-\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}\times1=-\frac{1}{2}$

③ 극한 $\lim_{x\to0}(x+1)^{\frac{1}{x}}=e$와 관련된 문제들

리미트 안의 식에 로그를 씌우고 ②번과 같이 푼다. 그렇게 나온 값을 함수 $y=e^x$에 대입하면 답을 구할 수 있다. 간단한 형태일 경우 극한식을 그대로 조작하여 풀 수도 있다.