제2교시

수학 영역

5지선다형

1. $(-\sqrt{2})^4 \times 8^{-\frac{2}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\Rightarrow 4 \times \frac{1}{4} = 1$

$= f'(2)$

2. 함수 $f(x) = x^3 + 9$에 대하여 $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$ 의 값은? [2점]

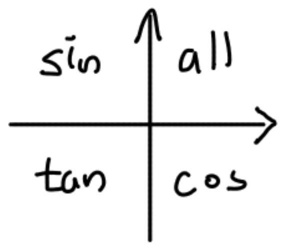
① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

$f'(x) = 3x^2$

$f'(2) = 12$

3. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\cos^2\theta = \frac{4}{9}$일 때, $\sin^2\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{4}{9}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $-\frac{2}{9}$ ④ $-\frac{1}{9}$ ⑤ 0

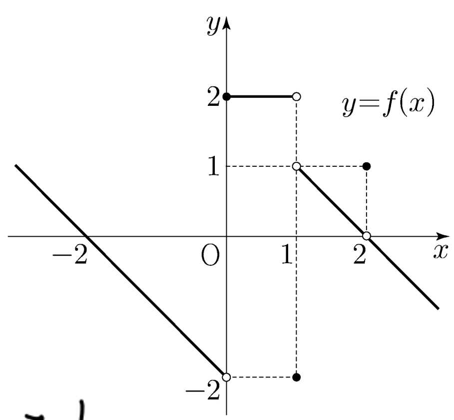


$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{2}{3}$

$\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\sin^2\theta + \cos\theta = \frac{5}{9} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{9}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$= -2$ $= 1$

$\lim\limits_{x \to 0-} f(x) + \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 + a_3 = \frac{3}{2}$$

일 때, $a_6 + a_7$의 값은? [3점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

$$a_2 + a_3 = \frac{1}{4}(r + r^2) = \frac{3}{2}$$

$\rightarrow$ $r^2 + r - 6 = 0$

모든 항이 양수이므로 $r = 2$

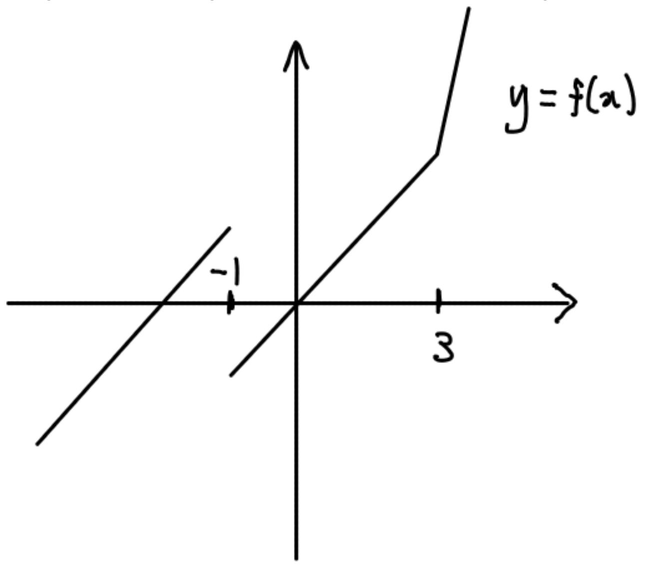
$$a_6 + a_7 = a_1 \cdot r^5 + a_1 \cdot r^6$$
$$= 8 + 16 = 24$$

6. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x) = \begin{cases} x + a & (x < -1) \\ x & (-1 \le x < 3) \\ bx - 2 & (x \ge 3) \end{cases}$$

이다. 함수 $|f(x)|$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $a + b$의 값은? [3점]

① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{8}{3}$ ③ 3 ④ $\frac{10}{3}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

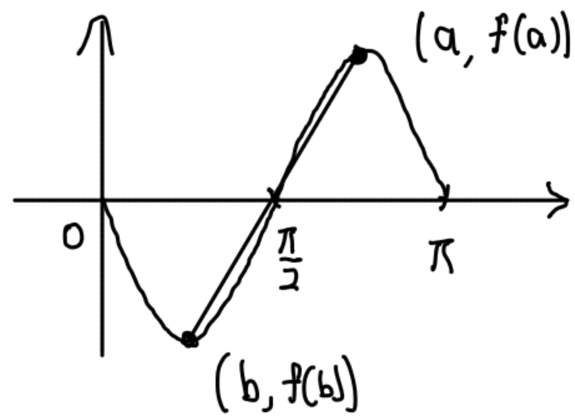


a와 b가 양수이므로 위 case만 가능.

$a = 2$ $\quad b = \frac{5}{3}$ $\quad a + b = \frac{11}{3}$

7. 닫힌구간 $[0, \pi]$에서 정의된 함수 $f(x) = -\sin 2x$가 $x = a$에서 최댓값을 갖고 $x = b$에서 최솟값을 갖는다. 곡선 $y = f(x)$ 위의 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$를 지나는 직선의 기울기는? [3점]

① $\frac{1}{\pi}$ ② $\frac{2}{\pi}$ ③ $\frac{3}{\pi}$ ④ $\frac{4}{\pi}$ ⑤ $\frac{5}{\pi}$



$a = \frac{3}{4}\pi$ $\quad b = \frac{1}{4}\pi$ $\quad f(a) = 1$ $\quad f(b) = -1$

$$(\text{기울기}) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \frac{2}{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi}$$

8. 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 다음 조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 $f(5)$의 최솟값은? [3점]

> (가) $f(1)=3$
>
> (나) $1<x<5$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\geq 5$이다.

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

$1<x<5$ 에서 $f'(x)\geq 5$ 이므로

$\int_1^5 f'(x)\,dx \geq 5(5-1)$ 이다.

$\rightarrow f(5)-f(1)\geq 20$

$\rightarrow f(5)\geq f(1)+20$

$= 23$

9. 두 함수

$$f(x)=x^3-x+6,\quad g(x)=x^2+a$$

가 있다. $x\geq 0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$f(x)\geq g(x) \quad \rightarrow f(x)-g(x)\geq 0$$

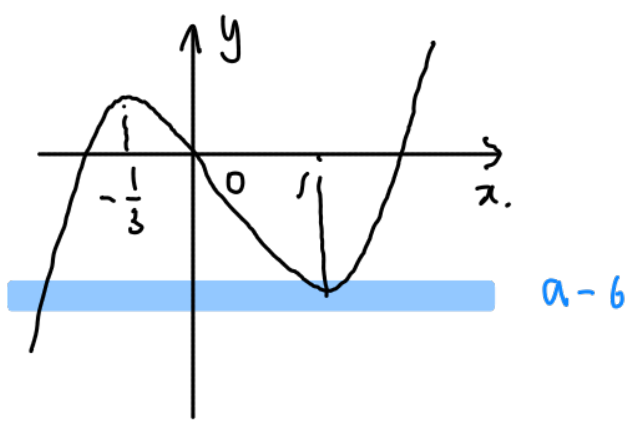
가 성립할 때, 실수 a의 최댓값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)-g(x) = x^3-x^2-x+6-a$

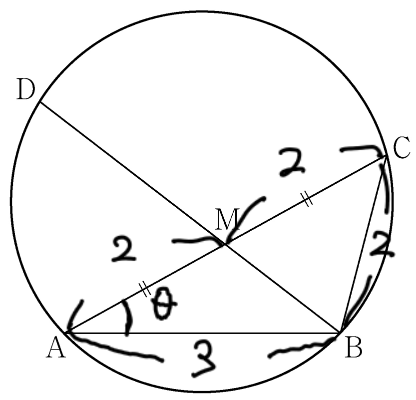
$\rightarrow \underbrace{x^3-x^2-x}_{h(x)} \geq a-6$

$h'(x)=3x^2-2x-1 = (3x+1)(x-1)$



$-1\geq a-6 \rightarrow 5\geq a$

10. 그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=2$, $\overline{AC}>3$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{7}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC의 중점을 M, 삼각형 ABC의 외접원이 직선 BM과 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D라 할 때, 선분 MD의 길이는? [4점]



① $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ ② $\frac{7\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{4\sqrt{10}}{5}$ ④ $\frac{9\sqrt{10}}{10}$ ⑤ $\sqrt{10}$

코사인 법칙에 의해 $\overline{AC}=4$

수학 (상)에 나오는 파푸스의 중선정리에 의해

$(3^2+2^2) = 2(2^2+\overline{BM}^2)$

$\rightarrow \overline{BM}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

할선에 관한 공식에 의해

$\overline{AM}\times\overline{MC}=\overline{MD}\times\overline{MB}$ 가 성립한다.

$2\times 2 = \overline{MD}\times\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\rightarrow \overline{MD}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

C 코레 X.

$a_7 > a_5$

11. 시각 $t=0$일 때 동시에 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t \geq 0)$에서의 속도가 각각

$$v_1(t) = 2 - t, \quad v_2(t) = 3t$$

이다. 출발한 시각부터 점 P가 원점으로 돌아올 때까지 점 Q가 움직인 거리는? [4점]

① 16 ② 18 ③ 20 ④ 22 ⑤ 24

$S_1(t) = 2t - \frac{1}{2}t^2$

$S_2(t) = \frac{3}{2}t^2$

$t=4$ 일때 $S_1(t) = 0$ 이다.

$\Rightarrow S_2(4) = \frac{3}{2}(4)^2 = 24$

12. 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_{10}의 값은? [4점]

⊖ ⊕

(가) $a_5 \times a_7 < 0$
(나) $\sum_{k=1}^{6} \lvert a_{k+6} \rvert = 6 + \sum_{k=1}^{6} \lvert a_{2k} \rvert$

① $\frac{21}{2}$ ② 11 ③ $\frac{23}{2}$ ④ 12 ⑤ $\frac{25}{2}$

by (가) 조건 $a_1 \sim a_5 < 0$, $a_7 \sim \cdots > 0$

(준식) $\Rightarrow a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12}$

$= 6 - a_2 - a_4 + |a_6| + a_8 + a_{10} + a_{12}$

$a_3 + a_4 - |a_6| + a_7 + a_9 + a_{11} = 6$

a_6로 통일하자.

$a_6 - 12 + a_6 - 6 - |a_6| + a_6 + 3 + a_6 + 9 + a_6 + 15 = 6$

$\rightarrow 5a_6 - |a_6| = -3$

(귀류) if) $a_6 > 0$ 일때 $4a_6 = -3$ 이므로 모순!

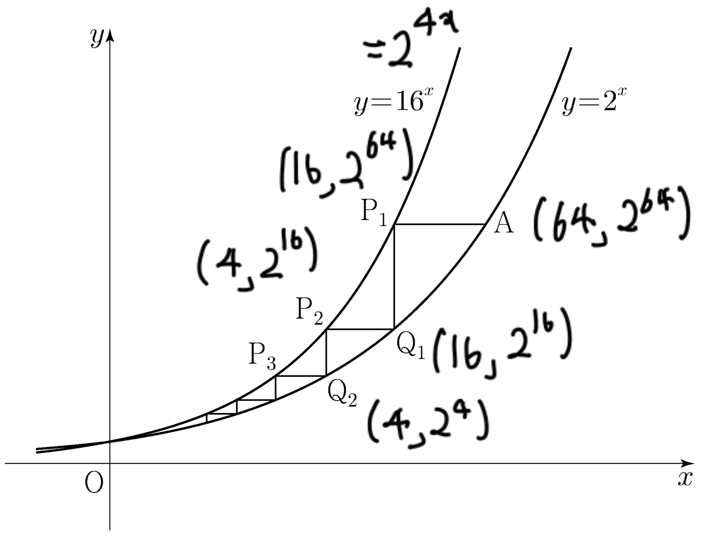
$\therefore a_6 < 0 \quad \rightarrow a_6 = -\frac{1}{2}$

$a_{10} = a_6 + 4d = -\frac{1}{2} + 4 \times 3 = \boxed{\frac{23}{2}}$

13. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64,\ 2^{64})$이 있다. 점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.
점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \dfrac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는? [4점]

$n=6$ 가능 → $x_6 < \frac{1}{k}$
$n=5$ 불가능 → $x_5 \geq \frac{1}{k}$

① 48 ② 51 ③ 54 ④ 57 ⑤ 60



※ 귀납적으로 규칙성을 찾은 뒤
일반화시키는 것이 중요!

$x_1=16$, $x_2=4$, $x_3=1$ ...

$\rightarrow x_n = 4^{3-n}$

$x_n < \frac{1}{k}$ 을 만족시키는 k의 최솟값이

6이므로 $x_6 < \frac{1}{k} \leq x_5$ 가 성립

$\therefore \frac{1}{64} < \frac{1}{k} \leq \frac{1}{16}$

$\rightarrow 16 \leq k < 64$

$\boxed{48개}$

14. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$와 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$가

$$g(x) = \begin{cases} -\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x<0) \\ \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt & (x \geq 0) \end{cases}$$

$$g'(x) = \begin{cases} -f(x) & (x<0) \\ f(x) & (x \geq 0) \end{cases}$$

→ $g(0)=0$ $g'(0)=0$

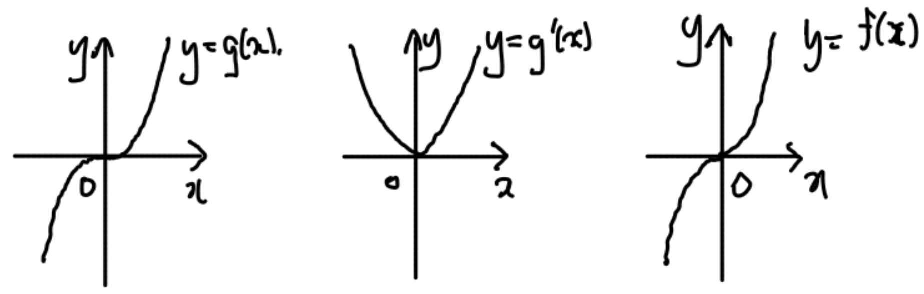
을 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>
ㄱ. $f(0)=0$
ㄴ. 함수 $f(x)$는 극댓값을 갖는다.
ㄷ. $2<f(1)<4$일 때, 방정식 $f(x)=x$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

ㄱ. 삼차함수 $g(x)$는 실수 전체에서 미.가이므로
$-f(0) = f(0)$ → $f(0)=0$ (참)

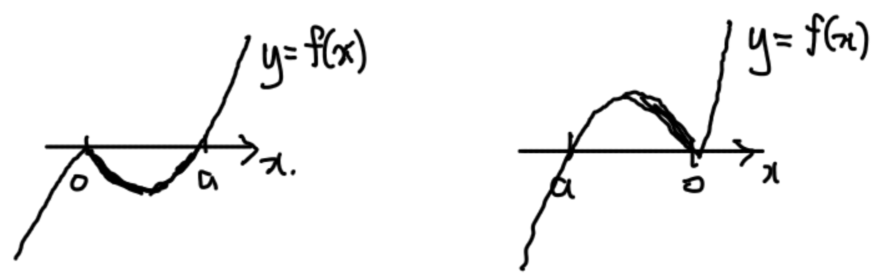
ㄴ. (반례) $g(x)=x^3$ 일 때



→ 이 경우에 $f(x)$는 극값을 가지지 않는다. (거짓)

ㄷ. $g'(x) = 3x(x-a)$ 라고 하자.

case1) $a>0$ 일때   case2) $a<0$ 일때



$f(1) = g'(1) = 3-3a$ → $2 < 3-3a < 4$
→ $-\frac{1}{3} < a < \frac{1}{3}$

case1 과 case 2에서 $y=3x(x-a)$의 $x=0$에서
미분계수가 $-1 <$ (미분계수) < 1 이면 성립.

$-1 < -3a < 1$이므로 참 (참)

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1 = 0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + \frac{1}{k+1} & (a_n \le 0) \\ a_n - \frac{1}{k} & (a_n > 0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_{22} = 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

※ 임의의 실수 p에 대해 $a_p=0$ 이 존재한다고 생각하자

$a_1 = a_p = 0$, $a_2 = a_{p+1} = \frac{1}{k+1}$, ⋯ 이므로

a_n이 주기가 $(p-1)$인 주기함수임을 알 수 있다.

$a_1 = a_{22} = 0$ 이므로 a_n은 주기가 21의 약수인 주기함수이다. 우리는 $a_1=0$ $a_2 = \frac{1}{k+1}$ $a_3 = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ 임을 알고 있으므로 주기는 3 이상이다.

case1) 주기가 3일때

$$a_4 = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} = 0 \rightarrow k=1$$

case 2) 주기가 7일때

$$a_8 = \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k} = 0 \rightarrow k=3$$

case3) 주기가 21일때

$$a_{22} = \frac{11}{k+1} - \frac{10}{k} = 0 \rightarrow k=10$$

$\therefore 1+3+10 = \boxed{14}$

단답형

16. 방정식 $\log_2(x+2) + \log_2(x-2) = 5$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\log_2(x^2-4) = 5$

$\rightarrow x^2 - 4 = 2^5$

$\rightarrow x^2 = 36$

로그의 진수 조건에 의해 $x>2$이므로

$x=6$이다.

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x) = 8x^3 + 6x^2$이고 $f(0) = -1$일 때, $f(-2)$의 값을 구하시오. [3점]

$f(x) = 2x^4 + 2x^3 - 1$

$x=-2$ 대입

$f(-2) = 32 - 16 - 1 = \boxed{15}$

18. $\sum_{k=1}^{10}(4k+a)=250$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

$$\Rightarrow 4\sum_{k=1}^{10}k + \sum_{k=1}^{10}a$$

$$= 4\times 55 + 10a = 250$$

$$\rightarrow 10a = 30$$

$$\boxed{a=3}$$

$f'(1)=0$

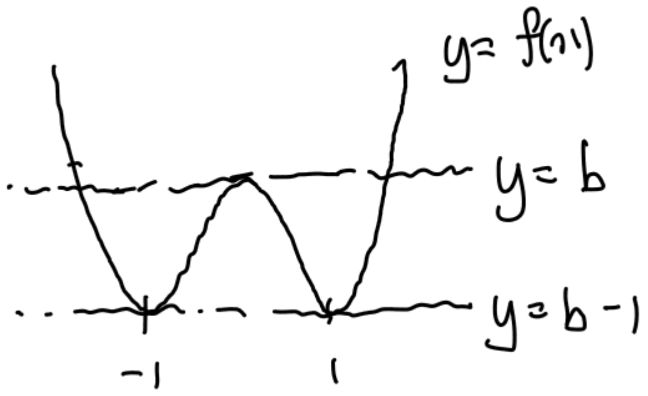
19. 함수 $f(x)=x^4+ax^2+b$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극댓값이 4일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 상수이다.) [3점]

$f'(x)=4x^3+2ax$

$f'(1)=0$이므로 $a=-2$

$\therefore f(x)=x^4-2x^2+1+b-1$

$=(x^2-1)^2+b-1$

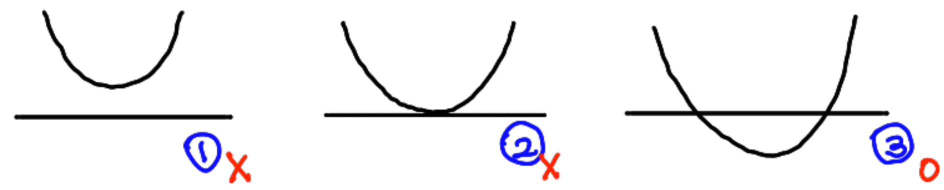


극댓값이 4이므로 $b=4$

$a+b=-2+4=\boxed{2}$

20. 최고차항의 계수가 2인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\int_x^{x+1}|f(t)|dt$는 $x=1$과 $x=4$에서 극소이다. $f(0)$의 값을 구하시오. [4점]

이차함수 $f(x)$의 개형



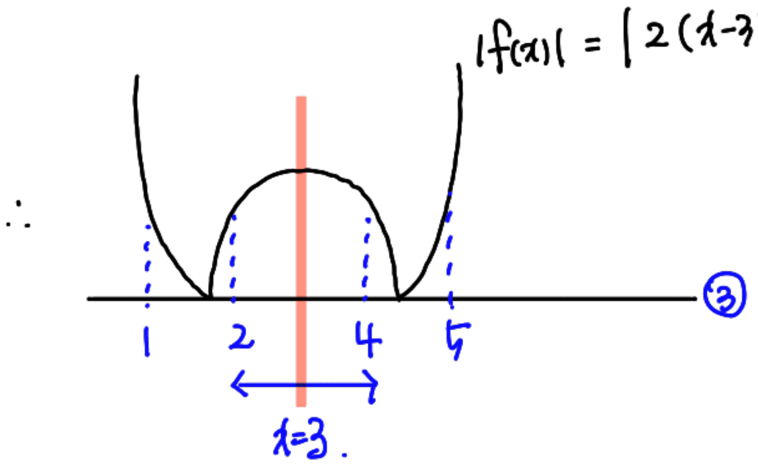
$g(x)=\boxed{\int_x^{x+1}}|f(t)|dt$ 는 $x=1$, $x=4$ 극소.

구간 길이가 1인 구간에서 $|f(x)|$의 넓이

①,②의 경우, 축을 기준으로 $\frac{1}{2}$씩 떨어져 형성된 구간 1개가 극소.

$|f(x)| = |2(x-3)^2+k|$

$\therefore$



$f(1)>0$: $k+8>0$

$f(2)<0$: $k+2<0$

$\Rightarrow -8<k<-2$

★절댓값 있는 함수도 미분가능!!

$g'(x)=|f(x+1)|-|f(x)|$

$x=1 \rightarrow |f(2)|=|f(1)|$

$\therefore -k-2=k+8$

$\therefore 2k=10$

$f(0)=2\cdot 9-5=13$

$\boxed{\therefore 13}$

 211227 (가) 변형

수학 영역

21. 자연수 n에 대하여 $4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)$의 값이 정수가 되도록 하는 1000 이하의 모든 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

k로 두자

$4\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right) = k$ 로 두자.

$\log_{64}\left(\frac{3}{4n+16}\right)^4 = k$.

$\rightarrow 2^{6k} = \left(\frac{3}{4n+16}\right)^4$

$\rightarrow (2\sqrt{2})^k = \frac{3}{4n+16}$

$\rightarrow \frac{4n+16}{3} = (2\sqrt{2})^{-k}$.

$\therefore \frac{4n+16}{3}$ 이 8의 거듭제곱이어야 함.

n은 1000 이하의 자연수이므로

$4n+16 = 8\times3$

$4n+16 = 8^2\times3$ 만 가능하다.

$4n+16 = 8^3\times3$

$n = 2,\ 44,\ 380$ $\boxed{426}$

22. 두 양수 a, $b\,(b>3)$과 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

$$g(x)=\begin{cases}(x+3)f(x) & (x<0)\\(x+a)f(x-b) & (x\ge0)\end{cases}$$

최고차 1인 3차함수.

이 실수 전체의 집합에서 연속이고 다음 조건을 만족시킬 때, $g(4)$의 값을 구하시오. [4점]

$\rightarrow (4+a)f(4-b)$

> $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$의 값이 존재하지 않는 실수 t의 값은 -3과 6뿐이다.

· $g(x)$ 연속 : $3f(0) = af(-b)$ ··· ①

· $\lim\limits_{x\to-3}\frac{\sqrt{|g(x)|+\{g(t)\}^2}-|g(t)|}{(x+3)^2}$ 가 존재 X

└ 우선 $\sqrt{\ }$ 가 있으니 풀어주자. (수II 니까..)

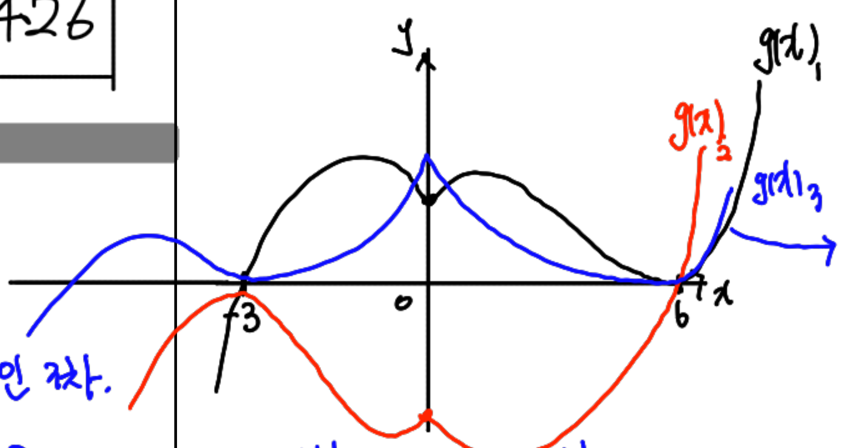
$\therefore \lim\limits_{x\to-3}\frac{|g(x)|+\cancel{\{g(t)\}^2}-\cancel{|g(t)|^2}}{(x+3)^2\left\{\sqrt{g(x)+\{g(t)\}^2}+|g(t)|\right\}}$

└ 여기서 $x\to-3$ 이니 $g(x)$에서 $x<0$ 인 CasE.

$\lim\limits_{x\to-3}\frac{|(x+3)f(x)|}{(x+3)^2\{g(t)+g(t)\}} = \frac{|\cancel{(x+3)}|\,|f(x)|}{(x+3)^{\cancel{2}}\{2g(t)\}}$ $<^{-}_{+}$

얘의 값이 존재 X (분모 0)

음수부 1개, 양수부 1개.



$\therefore f(x) = (x+3)(x-k)$

$(x-b+3)(x-b-k) = (x-b)^2$

$\therefore \underline{b=9},\ \underline{k=-3}$

$\therefore 3\cdot9 = a\times(36)$

$\therefore a=\frac{3}{4}$. $g(4)=\frac{19}{4}\times(-2)(-2)$

$\underline{=19}$

#22 g(x) 그래프 첨언.

→ 음수부 1개. 양수부 1개,

g(x)는 $x\ge0$. $x<0$ 모두 최고차항 계수 1인 3차.

그런데 $x=-3$ 과 $x=b$ 만을 지나야 하므로

3가지 개형만 나옴. 거기다 a.b 양수. (b>3)

NO! * $g(x)_1$ 에서 $(x+a)f(x-b)$ 가 $(x-b)^2$을 내포.

→ 이때 $f(x)=(x-k)^2$, $b+k=b$ 이면 ①조건에서 모순. (부정해)

NO! * $g(x)_2$ 에서 $f(x)$가 $(x+3)$을, $\underline{f(x-b)가\ (x-b)를\ 내포.}$

$\therefore b=3$ (조건 모순)

Yes! * $g(x)_3$ 에서 $f(x)=(x+3)(x-k)$. $\underline{f(x-b)가\ (x-b)^2을\ 내포.}$

$\therefore (x+3-b)(x-b-k)=(x-b)^2$

* 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(확률과 통계)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

- 고려대학교 교육학과 21학번 김나영M

5지선다형

23. 5개의 문자 a, a, a, b, c를 모두 일렬로 나열하는 경우의 수는? [2점]

① 16 ② 20 ③ 24 ④ 28 ⑤ 32

* 같은 것이 있는 순열

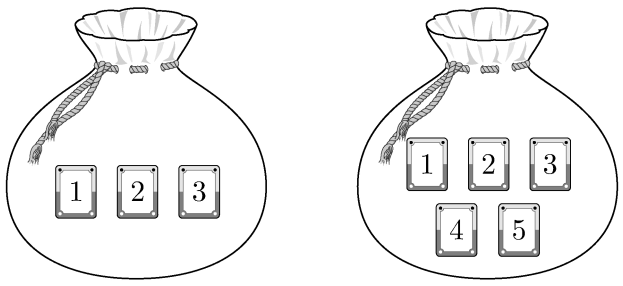
: n개 중 p, q, r ⋯ 개가 같을 때,

$\frac{n!}{p!\,q!\,r!\cdots}$

$\frac{5!}{3!} = 5\cdot 4 = 20$

24. 주머니 A에는 1부터 3까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 3장의 카드가 들어 있고, 주머니 B에는 1부터 5까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 5장의 카드가 들어 있다.
두 주머니 A, B에서 각각 카드를 임의로 한 장씩 꺼낼 때, 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 수의 차가 1일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{7}{15}$ ④ $\frac{8}{15}$ ⑤ $\frac{3}{5}$



A B

* 확률

전체 경우 : ${}_3C_1\cdot{}_5C_1 = 15$

차가 1 : 1-2 / 2-1 / 2-3 / 3-2 / 3-4

⇒ $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

25. 수직선의 원점에 점 P가 있다. 한 개의 주사위를 사용하여 다음 시행을 한다.

> 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가
> $\frac{2}{3}$ 6의 약수이면 점 P를 양의 방향으로 1만큼 이동시키고,
> 6의 약수가 아니면 점 P를 이동시키지 않는다.
> $\frac{1}{3}$

이 시행을 4번 반복할 때, 4번째 시행 후 점 P의 좌표가 2 이상일 확률은? [3점]

① $\frac{13}{18}$ ② $\frac{7}{9}$ ③ $\frac{5}{6}$ ④ $\frac{8}{9}$ ⑤ $\frac{17}{18}$

* 여사건

2 이상 = 전체 - 1 이하

*독립시행 ⇒ ${}_nC_{n-r}\cdot p^r\cdot(1-p)^r = {}_nC_n\cdot p^n\cdot(1-p)^r$

① P 좌표 : 0

${}_4C_4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

② P 좌표 : 1

${}_4C_3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{8}{81}$

⊕ $= \frac{9}{81} = \frac{1}{9}$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

26. 다항식 $(x^2+1)^4(x^3+1)^n$의 전개식에서 x^5의 계수가 12일 때, x^6의 계수는? (단, n은 자연수이다.) [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

* 이항정리

$\Rightarrow (a+b)^n = {}_nC_0a^n + {}_nC_1a^{n-1}b + \cdots + {}_nC_nb^n$

$(x^2+1)^4(x^3+1)^{n=3}$

① x^5 : x^2 × x^3 만 가능. ⇒ 계수 : ${}_4C_1\cdot{}_nC_1 = 4n = 12$

$\therefore n=3$

② x^6 : x^6 × 상수 ⇒ 계수 : ${}_4C_3 = 4$

상수 × x^6 ⇒ 계수 : ${}_3C_2 = 3$

⊕ = 7

27. 네 문자 a, b, X, Y 중에서 중복을 허락하여 6개를 택해 일렬로 나열하려고 한다. 다음 조건이 성립하도록 나열하는 경우의 수는? [3점]

> (가) 양 끝 모두에 대문자가 나온다.
> (나) a는 한 번만 나온다.

① 384　② 408　③ 432　④ 456　⑤ 480

*중복순열 : ${}_n\Pi_r = n^r$

(가) ⇒ $\underset{X,Y}{\_}$ _ _ _ _ $\underset{X,Y}{\_}$ ⇒ ${}_2\Pi_2 = 4$

(나) ⇒ _ $\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{a}$ _ ⇒ ${}_4C_1 = 4$

⇒ 남은 3자리 (a 제외 3가지)

${}_3\Pi_3 = 27$

$\therefore 4 \cdot 4 \cdot 27 = 432$

28. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 택할 때, 택한 수가 5의 배수 또는 3500 이상일 확률은? [4점]

① $\frac{9}{20}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{11}{20}$　④ $\frac{3}{5}$　⑤ $\frac{13}{20}$

*순열, 확률

전체 : ${}_5P_4 = 120$

① 5의 배수

_ _ _ 5 ⇒ ${}_4P_3 = 24$

② 3500 이상

$$\left.\begin{array}{l} 35\_\ \_ \Rightarrow {}_3P_2 = 6 \\ 4\_\ \_\ \_ \Rightarrow {}_4P_3 = 24 \\ 5\_\ \_\ \_ \Rightarrow {}_4P_3 = 24 \end{array}\right\} 54$$

③ 1-2 중복 ⇒ 제거!

4 _ _ 5 ⇒ ${}_3P_2 = 6$

⇒ $24 + 54 - 6 = 72$

$\therefore \frac{72}{120} = \frac{3}{5}$

단답형

29. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \to X$의 개수를 구하시오. [4점]

(가)	$f(f(1)) = 4$
(나)	$f(1) \le f(3) \le f(5)$

*case 분류, 중복조합, 중복순열

① $f(1) = 1 \Rightarrow f(1) = 4$ ∴ 모순!

② $f(1) = 2 \Rightarrow f(2) = 4$

$f(3), f(5) \to 2 \sim 5$: ${}_4H_2 = {}_5C_2 = 10$

$f(4) \to 1 \sim 5$: 5

⇒ 50가지

③ $f(1) = 3 \Rightarrow f(3) = 4$

$f(5) \to 4 \sim 5$: 3

$f(2), f(4) \to 1 \sim 5$: ${}_5\Pi_2 = 25$

⇒ 50가지

④ $f(1) = 4 \Rightarrow f(4) = 4$

$f(3), f(5) \to 4 \sim 5$: ${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$

$f(2) \to 1 \sim 5$: 5

⇒ 15가지

⑤ $f(1) = 5 \Rightarrow f(5) = 4$ ∴ 모순!

답 : 115가지

30. 주머니에 1부터 12까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 12개의 공이 들어 있다. 이 주머니에서 임의로 3개의 공을 동시에 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 작은 수부터 크기 순서대로 a, b, c라 하자. $b - a \ge 5$일 때, $c - a \ge 10$일 확률은 $\frac{q}{p}$이다. $p + q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

*조건부확률, 하키스틱

① $b - a \ge 5$ 인 경우

a	b	c
1	6~12	${}_7C_2$
2	7~12	${}_6C_2$
⋮		⋮
6	11 12	${}_2C_2$

⊕ $= {}_2C_2 + \cdots + {}_7C_2$ (하키스틱)

$= {}_8C_3 = 56$

② $b - a \ge 5$ 일 때, $c - a \ge 10$ 인 경우

1) $b - a = 5$

1 6 11.12

2 7 12

) 3가지

2) $b - a = 6$

1 7 11.12

2 8 12

) 3가지

⋮

5) $b - a = 9$

1 10 11.12

2 11 12

) 3가지

6) $b - a = 10$

1 11 12 − 1가지 ⇒ 16가지

$\Rightarrow \frac{16}{56} = \frac{2}{7}$ 답 : 9

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

$\frac{C}{\sqrt{A}-\sqrt{B}}$ 꼴 ⇒ 유리화 ⇒ $\frac{C(\sqrt{A}+\sqrt{B})}{A-B}$

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2+n})(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n})}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2+n}}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{2}$$

$$=\frac{1+1}{2}=1$$

∴ ①

24. 곡선 $x^2-y\ln x+x=e$ 위의 점 (e,e^2)에서의 접선의 기울기는? [3점]

$= \frac{dy}{dx}$ 를 ○ 라고 표시하자.

① $e+1$ ② $e+2$ ③ $e+3$ ④ $2e+1$ ⑤ $2e+2$

$(x^2-y\ln x+x=e)' \Rightarrow 2x-○\ln x-\frac{y}{x}+1=0$

(e, e^2) 대입

$\Rightarrow 2e-○-e+1=0$

$\Rightarrow ○=e+1$

∴ ①

25. 함수 $f(x)=x^3+2x+3$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, $g'(3)$의 값은? [3점] $f(a)=b \Rightarrow g'(f(a))=\frac{1}{f'(a)}$

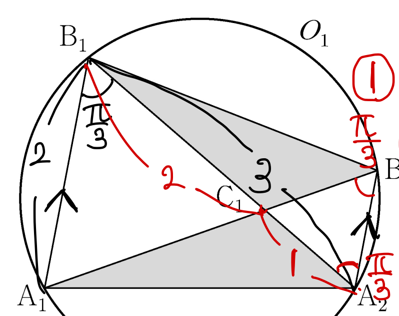
① 1 ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

$g'(3)=g'(f(0))=\frac{1}{f'(0)}=\frac{1}{2}$

∴ ②

26. 그림과 같이 $\overline{A_1B_1}=2$, $\overline{B_1A_2}=3$이고 $\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 $A_1A_2B_1$과 이 삼각형의 외접원 O_1이 있다.
점 A_2를 지나고 직선 A_1B_1에 평행한 직선이 원 O_1과 만나는 점 중 A_2가 아닌 점을 B_2라 하자. 두 선분 A_1B_2, B_1A_2가 만나는 점을 C_1이라 할 때, 두 삼각형 $A_1A_2C_1$, $B_1C_1B_2$로 만들어진 ⧖ 모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.
그림 R_1에서 점 B_2를 지나고 직선 B_1A_2에 평행한 직선이 직선 A_1A_2와 만나는 점을 A_3이라 할 때, 삼각형 $A_2A_3B_2$의 외접원을 O_2라 하자. 그림 R_1을 얻은 것과 같은 방법으로 두 점 B_3, C_2를 잡아 원 O_2에 ⧖ 모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.
이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]

R_1

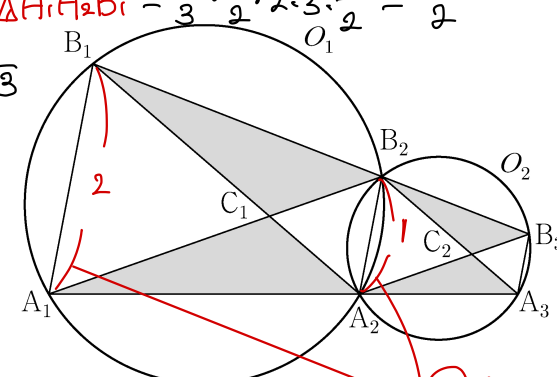


$\Rightarrow \triangle A_2B_2C_1$, $\triangle A_1B_1C_1$은 정삼각형

② $\triangle A_1A_2C_1=\triangle B_1B_2C_1$
$=\frac{1}{3}\triangle A_1A_2B_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow S_1=\sqrt{3}$

R_2



③ 넓이 비 $=2^2:1^2=4:1$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\sqrt{3}}{1-\frac{1}{4}}$
$=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

∴ ②

① $\frac{11\sqrt{3}}{9}$ ② $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ③ $\frac{13\sqrt{3}}{9}$ ④ $\frac{14\sqrt{3}}{9}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$

① 첫번째 그림으로 S_1을 구한다.

② 두번째 그림으로 넓이비(=길이비^2)를 구한다. (ex) $1:r$)

③ $\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{S_1}{1-r}$

$a_n = an+b$, $a+b=4$

27. 첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$$

이 실수 S에 수렴할 때, S의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

① $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)=0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{an+b}{n}=a=3$, $b=1$

$\therefore a_n = 3n+1$

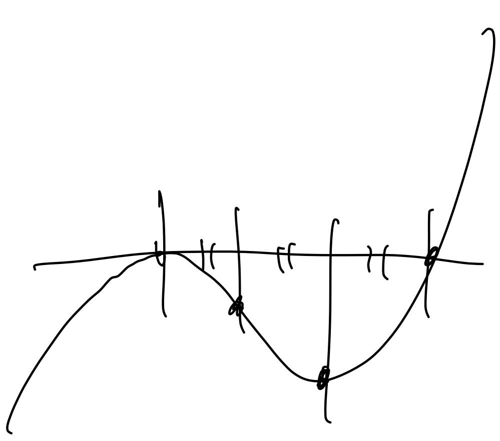
② $S=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n}-\frac{3n+7}{n+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$

$\therefore$ ③

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$



28. 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$가

$$g(x)=\begin{cases}\ln|f(x)| & (f(x)\neq 0)\\ 1 & (f(x)=0)\end{cases}$$

$g'(x)=\begin{cases}\frac{f'(x)}{f(x)} & (f(x)\neq 0)\\ 0 & (f(x)=0)\end{cases}$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, 함수 $g(x)$의 극솟값은? [4점]

> (가) 함수 $g(x)$는 $x\neq 1$인 모든 실수 x에서 연속이다.
> (나) 함수 $g(x)$는 $x=2$에서 극대이고, $\Rightarrow g'(2)=0$
> 함수 $|g(x)|$는 $x=2$에서 극소이다.
> (다) 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

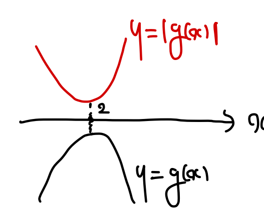
① $\ln\frac{13}{27}$ ② $\ln\frac{16}{27}$ ③ $\ln\frac{19}{27}$ ④ $\ln\frac{22}{27}$ ⑤ $\ln\frac{25}{27}$

① (가) $g(x)$가 불연속 $\Rightarrow f(x)=0$

$\Rightarrow$ $y=f(x)$의 근은 $x=1$ 하나

② (나) $g'(2)=\frac{f'(2)}{f(2)}=0 \Rightarrow f'(2)=0$

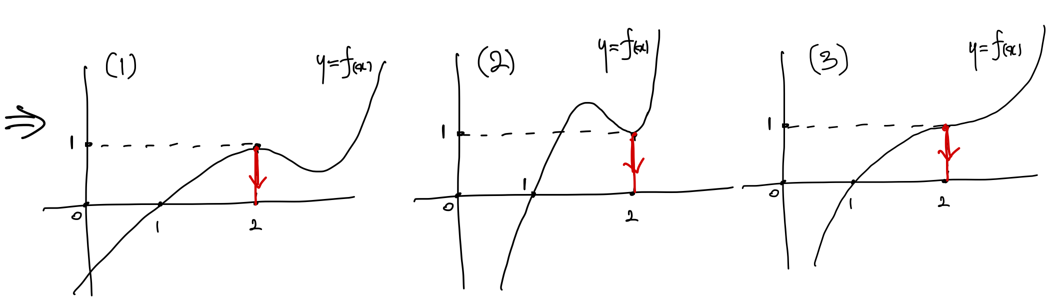
$|g(x)|$가 $x=2$에서 극소 $\Rightarrow$ + $g(x)$는 극대



$\therefore g(2)=\ln|f(2)|\leq 0$

$\hookrightarrow 0<f(2)\leq 1$

$\Rightarrow$

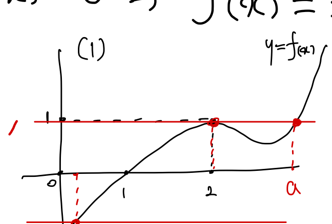


즉, $g(2)$가 극댓값 이므로 $g'(2-)=\frac{f'(2-)}{f(2-)}>0$

$\Rightarrow f'(2-)>0$ 즉, (1) (3) 중 하나이다.

③ (다) $g(x)=0 \Rightarrow f(x)=\pm 1$

(1) + $f(2)=1$의 경우,



근 3개. $\Rightarrow \frac{1}{2}(x-2)^2(x-a)+1$

$f(1)=\frac{1}{2}(1-a)+1=\frac{3-a}{2}=0$

$\Rightarrow a=3$

$\Rightarrow \therefore f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2(x-3)+1$ / 극점 $\frac{8}{3}$, 3

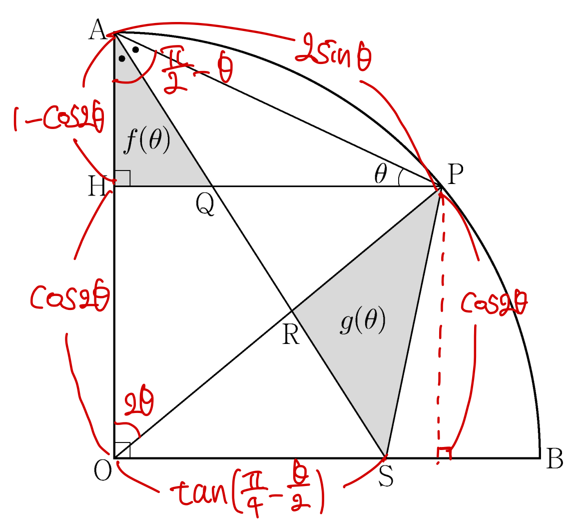
$\therefore$ $g(x)$의 극솟값 $=g(\frac{8}{3})=\ln(1-\frac{2}{27})=\ln\frac{25}{27}$

$\therefore$ ⑤

단답형

29. 그림과 같이 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$ 인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위의 점 P에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 하고, $\angle$OAP를 이등분하는 직선과 세 선분 HP, OP, OB의 교점을 각각 Q, R, S라 하자. $\angle \mathrm{APH}=\theta$일 때, 삼각형 AQH의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PSR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자.

$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta^3\times g(\theta)}{f(\theta)}=k$일 때, $100k$의 값을 구하시오. (단, $0<\theta<\frac{\pi}{4}$) [4점]



① $f(\theta)=\frac{1}{2}(1-\cos2\theta)^2\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

② $\overline{OR}:\overline{RP}=1:2\sin\theta$

$\Rightarrow \triangle OSR : \triangle PSR = 1 : 2\sin\theta$

$g(\theta)=\triangle PSR=\triangle PSO\cdot\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}=\frac{1}{2}\cos2\theta\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\cdot\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}$

③ $\lim_{\theta\to0+}\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cos2\theta\cdot\frac{2\sin\theta}{1+2\sin\theta}\cdot\cancel{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\theta^3}{\cancel{\frac{1}{2}}(1-\cos2\theta)^2\cancel{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}}$

$=\lim_{\theta\to0+}\left\{\frac{\cos2\theta}{1+2\sin\theta}\cdot\frac{\frac{2\sin\theta}{\theta}}{\left(\frac{1-\cos2\theta}{\theta^2}\right)^2}\right\}=\frac{2}{\left(\frac{4}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$

$\hookrightarrow \lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos a\theta}{\theta^2}=\frac{a^2}{2}$

$\therefore k=\frac{1}{2}$ / $100k=50$

$\therefore 50$

30. 양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\frac{x^2-ax}{e^x}$$

$\begin{cases} f'(x)=e^{-x}(-x^2+(a+2)x-a) \\ f''(x)=e^{-x}(x^2-(a+4)x+2a+2) \end{cases}$

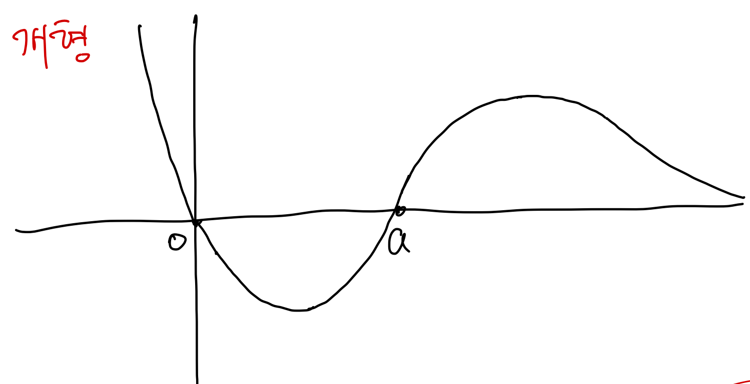
이다. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$f(x)=\underline{f'(t)(x-t)+f(t)}$ $(t, f(t))$에서의 접선

의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자.

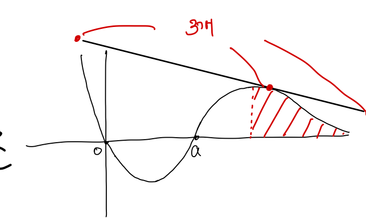
$g(5)+\lim_{t\to5}g(t)=5$일 때, $\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$를 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

① 개형

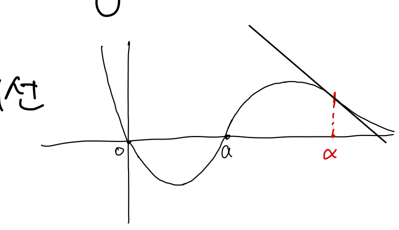


② $g(t)$의 치역 $=\{1,2,3\}$ 이므로

$5=2+3$ $\Rightarrow$ $g(t)=3$ 인 부분은



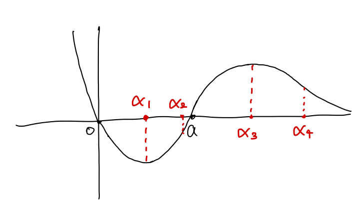
해당 범위 안 변곡점에선



이므로 $g(\alpha)=2$

즉, $\alpha=5$ $\Rightarrow$ $f''(5)=e^{-5}(25-3a-18)=0$ / $\therefore a=\frac{7}{3}$

③ $\lim_{t\to k-}g(t)\neq\lim_{t\to k+}g(t)$ 이 가능한 점 $\Rightarrow$ 극점, 변곡점



$\Rightarrow$
(1) $g(\alpha_1-)=1$, $g(\alpha_1+)=2$
(2) $g(\alpha_2-)=2$, $g(\alpha_2+)=2$
(3) $g(\alpha_3-)=2$, $g(\alpha_3+)=3$
(4) $g(\alpha_4-)=g(\alpha_4+)$

$\alpha_1+\alpha_3=\frac{q}{p}$
$=a+2=\frac{13}{3}$
$f'(x)=0$ 의 근과 계수의 관계

$\therefore 16$

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터

$$\vec{a}+2\vec{b},\quad 3\vec{a}+k\vec{b}$$

가 서로 평행하도록 하는 실수 k의 값은? (단, $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$) [2점]

① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

Sol)

$1 : 2 = 3 : k$　$k=6$　③

24. 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 주축의 길이가 6이고 한 점근선의 방정식이 $y=2x$일 때, 두 초점 사이의 거리는? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① $4\sqrt{5}$　② $6\sqrt{5}$　③ $8\sqrt{5}$　④ $10\sqrt{5}$　⑤ $12\sqrt{5}$

Sol)

$\dfrac{b}{a}=2$

주축의 길이 $=2a=6$

$a=3$, $b=6$

$c^2=a^2+b^2=45$.　$c=3\sqrt{5}$ (초점거리)

두 초점사이의 거리 $=6\sqrt{5}$.　②

25. 좌표평면에서 두 직선

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y-5}{3},\quad x-1=\frac{2-y}{3}$$

가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\cos\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{\sqrt{11}}{11}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{10}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ⑤ $\frac{\sqrt{7}}{7}$

Sol).

직선사이의 각

두 직선의 방향벡터

$(4,3)$, $(1,-3)$.

이때. $\vec{d_1}=(4,3)$, $\vec{d_2}=(1,-3)$ 이라하면.

$\vec{d_1}\cdot\vec{d_2} = 4-9=-5 = 5\cdot\sqrt{10}\cos\theta$

$\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

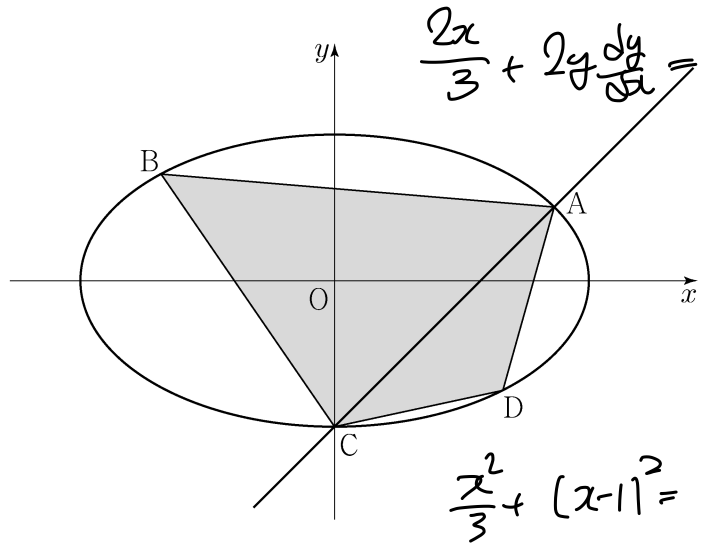
이때 예각은 $\pi-\theta$ 이므로

$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta = \frac{\sqrt{10}}{10}$. ②

26. 좌표평면에서 타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$과 직선 $y=x-1$이 만나는 두 점을 A, C라 하자. 선분 AC가 사각형 ABCD의 대각선이 되도록 타원 위에 두 점 B, D를 잡을 때, 사각형 ABCD의 넓이의 최댓값은? [3점]

① 2 ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{11}{4}$ ⑤ 3

$\frac{2x}{3}+2y\frac{dy}{dx}=0.$



$\frac{x^2}{3}+(x-1)^2=1$

$x^2+3x^2-6x+3=3$

$4x^2-6x=0$ $x=0,\frac{3}{2}$

Sol)

SNUTip.

사각형 ABCD의 넓이를 어떻게 구할런지 생각해 보자.

⇒ AC를 밑변으로 한 두 삼각형 ABC, ADC 의 넓이의 합.

생각의 근거: A, C가 고정점이기 때문.

이때, AC를 밑변으로 한 삼각형의 높이가 최대가 되려면. B, D가 기울기 1인 직선과 타원의 접점에 있으면 된다.

기울기가 1인 접선.

$\therefore y = x\pm\sqrt{3+1}$

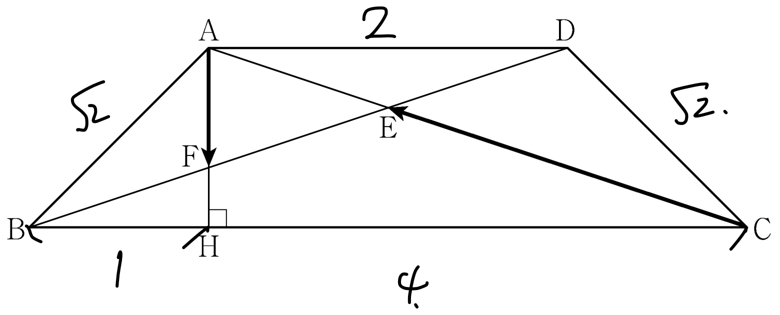
$y = x\pm 2$. 이때. 이두 직선사이의 거리 $=\frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$. $AC=\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

넓이 최대 $=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times 2\sqrt{2}$.

$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\sqrt{2}\times 2\sqrt{2} = 3$. ⑤

27. $\overline{AD}=2$, $\overline{AB}=\overline{CD}=\sqrt{2}$, $\angle ABC=\angle BCD=45°$ 인 사다리꼴 ABCD가 있다. 두 대각선 AC와 BD의 교점을 E, 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H, 선분 AH와 선분 BD의 교점을 F라 할 때, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{CE}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{9}$ ② $-\frac{2}{9}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{4}{9}$ ⑤ $-\frac{5}{9}$



Sol)

등변사다리꼴 : 닮음이 나온다.

△AED ∽ △BEC (1:2) 닮음.

∴ AE : EC = 1:2

$\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{EA}$

△AFD ∽ △HFB (2:1) 닮음.

∴ AF : FH = 2:1

따라서 BF : FE : ED = 1:1:1 이다.

이때. $\overrightarrow{EC}$의 $\overrightarrow{AF}$ 방향 성분의 길이는 AF와 크기는 같고 방향은 반대이므로.

$\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{EC} = -|AF|^2 = -\frac{4}{9}$ ④

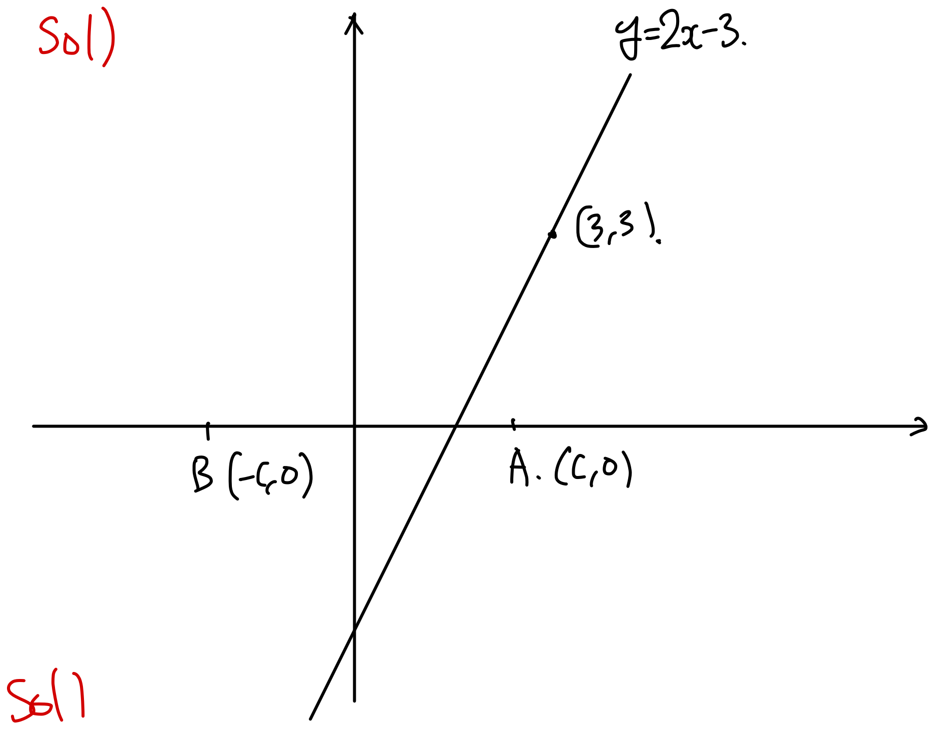
$AF = \frac{2}{3}$

28. 좌표평면에서 직선 $y=2x-3$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 점 A$(c, 0)$, B$(-c, 0)$ $(c>0)$에 대하여 $\overline{PB}-\overline{PA}$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표가 $(3, 3)$일 때, 상수 c의 값은? [4점]

① $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ ③ $3\sqrt{2}$

④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{10}}{2}$

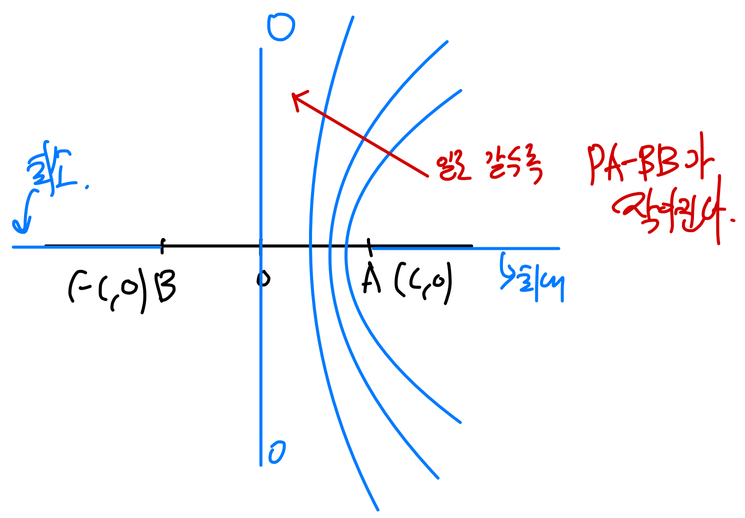
Sol)



Sol)

SNU Tip.

$\overline{PB}-\overline{PA}$: 쌍곡선을 생각한다.



⇒. A, B를 초점으로 하는 쌍곡선이 (3,3)에서 $y=2x-3$과 접한다고 생각하면 된다.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

접선 $\frac{3x}{a^2}-\frac{3y}{b^2}=1 \rightarrow y=\frac{b^2}{a^2}x-\frac{b^2}{3}$

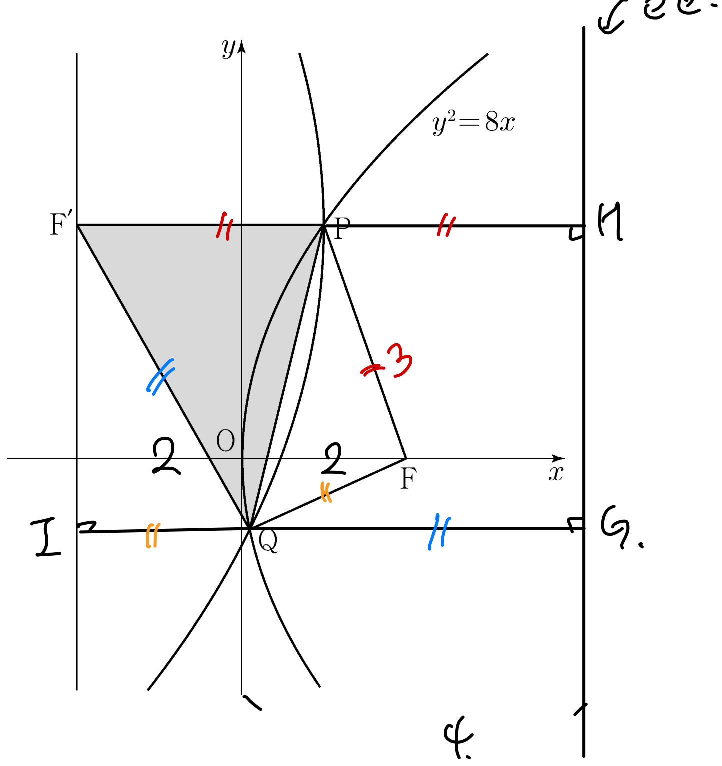
$= 2x-3$ $b=3$.

$c^2=a^2+b^2=9+\frac{9}{2}=\frac{27}{2}$ $a=\frac{3}{\sqrt{2}}$

$c=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}}{2}$. ①

단답형

29. 초점이 F 인 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 P를 지나고 x축과 평행한 직선이 포물선 $y^2=8x$의 준선과 만나는 점을 F′이라 하자. 점 F′을 초점, 점 P를 꼭짓점으로 하는 포물선이 포물선 $y^2=8x$와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 사각형 PF′QF의 둘레의 길이가 12일 때, 삼각형 PF′Q의 넓이는 $\frac{q}{p}\sqrt{2}$ 이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 P의 x좌표는 2보다 작고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



Sol)

SNU Tip

$\boxed{\text{포물선에서 준선은 당연히 그려줘야 한다.}}$

2번째 포물선의 준선을 그리고.

P, Q에서 준선에 수선의 발을 H, G라 하자.

PF′QF의 둘레

$= F'P + PF + FQ + QF'$) 그림참고.

$= 2 \times F'H = 12.$

$F'H = 6.$

따라서 새로운 준선의 식은 $x=4$이다.

P에서 x축에 수선을 내리면 $2\sqrt{2}$, 3

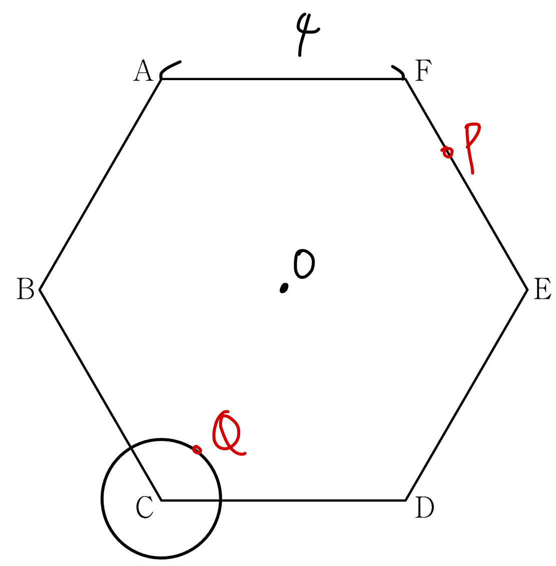
$\Rightarrow P(1, 2\sqrt{2})$이다.

30. 좌표평면에서 한 변의 길이가 4인 정육각형 ABCDEF의 변 위를 움직이는 점 P가 있고, 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원 위를 움직이는 점 Q가 있다. 두 점 P, Q와 실수 k에 대하여 점 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최소가 되도록 하는 k의 값을 α, $|\overrightarrow{CX}|$의 값이 최대가 되도록 하는 k의 값을 β라 하자.

(가) $\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$

(나) $\overrightarrow{XA}+\overrightarrow{XC}+2\overrightarrow{XD}=k\overrightarrow{CD}$

$\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하시오. [4점]



SNU Tip.

위치벡터는 기준점 기준으로 바꿔주자.

⇒ 기준점 C.

$\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$

$\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CX}-\overrightarrow{CX}+2(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CX})=k\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{CA}+(2-k)\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{CX}$.

$\overrightarrow{CX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}+(2-k)\overrightarrow{CD})$. ①

$\overrightarrow{CX}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{CQ}$ ②

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

두번째 포물선의 식은

$(y-2\sqrt{2})^2 = -12(x-1). = -12x+12$

따라서 두 포물선의 교점은.

$$\begin{cases}(y-2\sqrt{2})^2 = -12x+12 \\ y^2 = 8x \quad \text{연립.}\end{cases}$$

대입.

$(y-2\sqrt{2})^2 = -\frac{3}{2}y^2+12$

$\frac{5}{2}y^2 - 4\sqrt{2}y + 8 = 12.$

$5y^2 - 8\sqrt{2}y - 8 = 0.$

$$\begin{matrix} 1 & \times & -2\sqrt{2} \\ 5 & & 2\sqrt{2} \end{matrix} \qquad (y-2\sqrt{2})(5y+2\sqrt{2}) = 0.$$

Q의 y 좌표는 $-\frac{2\sqrt{2}}{5}.$

$\triangle PFQ$ 넓이 $= \frac{1}{2} \times 3 \times \left(2\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{5}\right)$

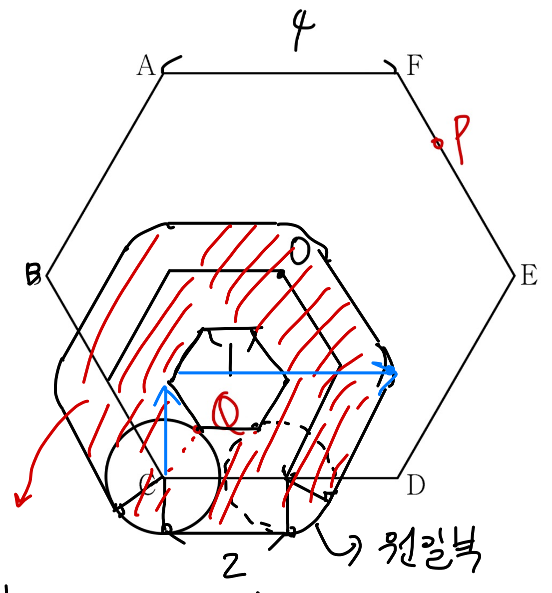
$= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{12\sqrt{2}}{5} = \frac{18}{5}\sqrt{2}.$

답: $\boxed{23}$

12번 ② 식을 해석해보자.

$\frac{1}{2}\vec{CP}$는 C를 기준으로 정육각형을 축소한것.

$\vec{CQ}$는 주위에 원을 추가한것.



이 영역이 $\vec{CX}$의 가능한 자취이다.

이때 $\vec{CX} = \frac{1}{4}\vec{CA} + \frac{(2-k)}{4}\vec{CD}$

이때 $\frac{1}{4}\vec{CA}$는 표시한 화살표 이고,

$\vec{CD}$는 가로와 평행한 성분이므로

① $k=2$ 일때 $\vec{CX}$가 최소이다. $\alpha=2$

② 또한 $\longrightarrow$ 가로로 최대일때

$\vec{CX}$가 최대가 된다.

이때 파란색 가로 화살표의 길이는

4이고, 이는 CD와 같다.

따라서 $\frac{2-k}{4} = 1$ $k=-2$ 이다.

$\beta = 2.$

$\alpha^2+\beta^2 = 8.$ $\boxed{8}$