2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 문제지

제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $2^{\sqrt{3}} \times 2^{2-\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

$= 2^{\sqrt{3}+2-\sqrt{3}} = 2^2 = 4$

2. 함수 $f(x)$가

$$f'(x) = 3x^2 - 2x, \quad f(1) = 1$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x) = x^3 - x^2 + C$

$f(1) = 1 - 1 + C = C = 1$

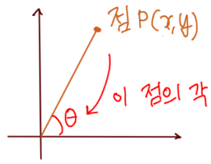
$f(2) = 2^3 - 2^2 + 1 = 5$

3. $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = \frac{12}{5}$일 때, $\sin\theta + \cos\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{17}{13}$ ② $-\frac{7}{13}$ ③ 0 ④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{17}{13}$

개념

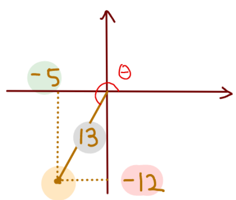
삼각함수는 삼각형으로 하는게 아니다.
점으로 하는 것이다!



$\sin\theta = \frac{\text{점의 y좌표}}{\text{점까지 거리}}$

$\cos\theta = \frac{\text{점의 x좌표}}{\text{점까지 거리}}$

$\tan\theta = \frac{\text{점의 y좌표}}{\text{점의 x좌표}}$

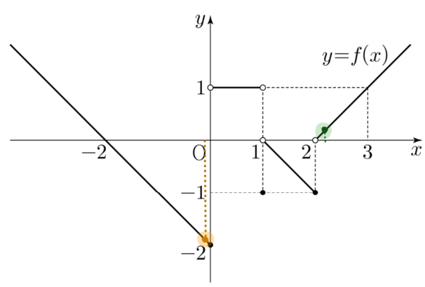


$\sin\theta = \frac{\text{점의 y좌표}}{\text{점까지 거리}} = -\frac{12}{13}$

$\cos\theta = \frac{\text{점의 x좌표}}{\text{점까지 거리}} = -\frac{5}{13}$

$\therefore \left(-\frac{12}{13}\right) + \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{17}{13}$

4. 함수 $y = f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$-2 \quad + \quad 0$

$\lim_{x\to 0-} f(x) + \lim_{x\to 2+} f(x)$의 값은? [3점]

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

1	④	2	⑤	3	①	4	①	5	③
6	④	7	②	8	④	9	⑤	10	②
11	②	12	③	13	⑤	14	③	15	②
16	2	17	11	18	4	19	6	20	8
21	24	22	61						

▿ 해설강의

수학 영역

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^2+3)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=1$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

$g'(x) = 2xf(x) + (x^2+3)f'(x)$

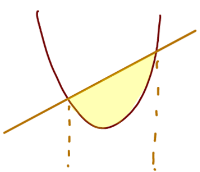
$g'(1) = 2f(1) + 4f'(1)$

$= 2\times 2 + 4\times 1$

$= 8$

6. 곡선 $y=3x^2-x$와 직선 $y=5x$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



0 2

$3x^2-x = 5x$

$3x^2-6x = 0$

$3x(x-2) = 0$

$\therefore x = 0$ or 2

개념 $\int_\alpha^\beta a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3$

$\therefore \frac{3}{6}(2-0)^3 = 4$

7. 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_6=2(S_3-S_2)$$

일 때, S_{10}의 값은? [3점]

① 100 ② 110 ③ 120 ④ 130 ⑤ 140

$a_6 = 2a_3$

$2+5d = 2(2+2d)$

$\therefore d = 2$

$\therefore S_{10} = \frac{10\times\{2\cdot 2+9\cdot 2\}}{2} = 110$

수학 영역

8. 함수

$$\{f(x)\}^2=\begin{cases} \{-2x+6\}^2 & (x<a) \xrightarrow{x\to a-} (-2a+6)^2 \\ \{2x-a\}^2 & (x\ge a) \xrightarrow{x\to a+} (2a-a)^2 \end{cases} =$$

에 대하여 함수 $\{f(x)\}^2$이 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

개념

$f(a)=\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$

$(2a-6)^2=a^2$

$(2a-6)^2-a^2=0$

$\{(2a-6)-a\}\{(2a-6)+a\}=0$

$(a-6)(3a-6)=0$

$\therefore a=2$ or 6

$\therefore 2+6=8$

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우}) \to a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}} \\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우}) \to a_n=\dfrac{1}{8}a_{n+1} \end{cases}$$

이고 $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은? [4점]

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

김지석의 필연성 거꾸로 대입하기꼴으로 변형!

$$a_n=\begin{cases} \dfrac{1}{a_{n+1}} & (n\text{홀}) \\ \dfrac{1}{8}a_{n+1} & (n\text{짝}) \end{cases}$$

4의 주기성!

$a_{12}^{\text{짝}}=\frac{1}{2}$ $=a_4$

$a_{11}=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)}=2$ $=a_3$

$a_{10}=\frac{1}{8}\cdot 2=\frac{1}{4}$ $=a_2$

$a_9=\dfrac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)}=4$ $=a_1$

$a_8^{\text{짝}}=\frac{1}{8}\cdot 4=\frac{1}{2}$ 반복!

$a_{12}=a_8$

$\therefore a_1+a_4$

$=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}$

10. $n\ge 2$인 자연수 n에 대하여 두 곡선

$y=\log_n x$, $y=-\log_n(x+3)+1$

진수조건 : $x>0$, $x+3>0$ $\therefore x>0$

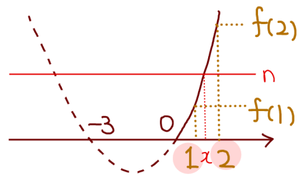
이 만나는 점의 x좌표가 1보다 크고 2보다 작도록 하는 모든 n의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 35 ③ 40 ④ 45 ⑤ 50

$\log_n x=-\log_n(x+3)+1$

$\log_n x(x+3)=\log_n n$

$f(x)=x(x+3)=n$



$\therefore f(1)<n<f(2)$

$4<n<10$

$n=5,6,7,8,9$

$\therefore n$의 합 $=7\times 5=35$

수학 영역

11. 닫힌구간 $[0,1]$에서 연속인 함수 $f(x)$가

$$f(0)=0,\quad f(1)=1,\quad \int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{6}$$

을 만족시킨다. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$의 값은? [4점]

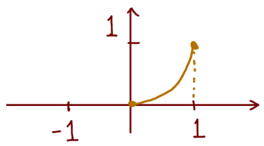
> (가) $g(x)=\begin{cases} -f(x+1)+1 & (-1<x<0) \\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $g(x+2)=g(x)$이다.

① $\frac{5}{2}$ ② $\frac{17}{6}$ ③ $\frac{19}{6}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

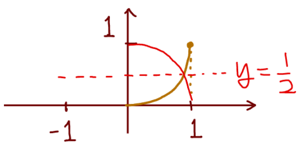
김지석의 필연성 (방법1)

그래프의 의미 해석

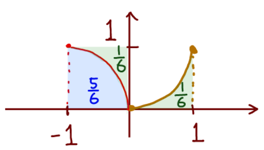
① $y=f(x)$



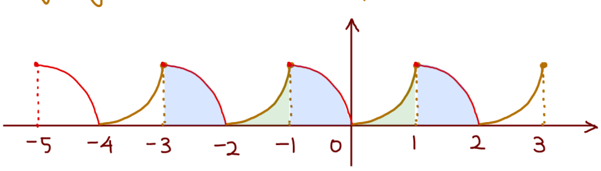
② $y=2\times\frac{1}{2}-f(x)$: $y=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭



③ $y=2\times\frac{1}{2}-f(x+1)$: x축 방향 -1 평행이동



④ $y=g(x)$: 주기 2인 함수



$\therefore \int_{-3}^{2} g(x)\,dx = \frac{5}{6}\times 3+\frac{1}{6}\times 2=\frac{17}{6}$

김지석의 필연성 (방법2)

$\int_{-3}^{2} g(x)\,dx$

↓ 주기가 2이므로 구간길이 2씩 나누자.

$=\int_{-3}^{-1} g(x)\,dx+\int_{-1}^{1} g(x)\,dx+\int_{1}^{2} g(x)\,dx$

↓ $g(x)$에 대한 단서가 구간 $[-1,1]$이므로

$=\int_{-1}^{1} g(x)\,dx+\int_{-1}^{1} g(x)\,dx+\int_{-1}^{0} g(x)\,dx$

↓ $g(x)=\begin{cases}-f(x+1)+1 & (-1<x<0)\\ f(x) & (0\le x\le 1)\end{cases}$

$=3\int_{-1}^{0} g(x)\,dx+2\int_{0}^{1} g(x)\,dx$

$=3\int_{-1}^{0}\{-f(x+1)+1\}\,dx+2\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

↓ 평행이동

$=3\int_{0}^{1}\{-f(x)+1\}\,dx+2\int_{0}^{1} f(x)\,dx$

$=-\int_{0}^{1} f(x)\,dx+3\int_{0}^{1} 1\,dx$

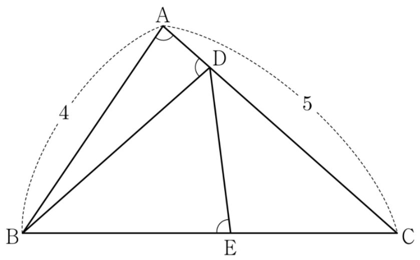
$=-\frac{1}{6}+3=\frac{17}{6}$

수학 영역

12. 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos(\angle BAC)=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 D와 선분 BC 위의 점 E에 대하여

$$\angle BAC = \angle BDA = \angle BED = \theta$$

일 때, 선분 DE의 길이는? [4점]

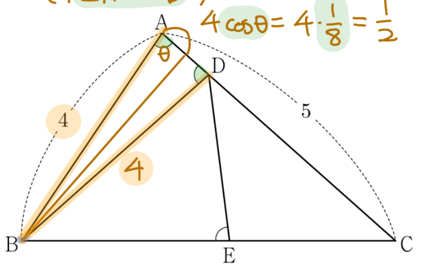


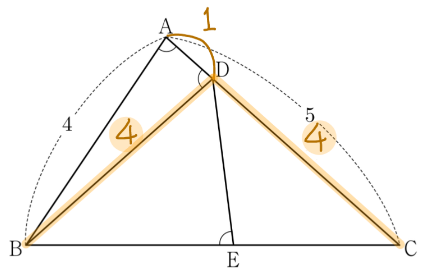
① $\frac{7}{3}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{8}{3}$ ④ $\frac{17}{6}$ ⑤ 3

김지석의 필연성

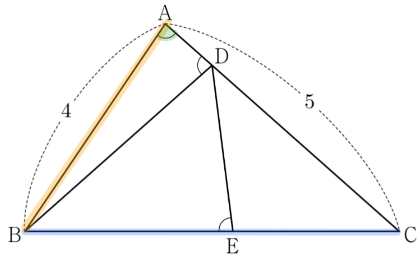
(Step1) 좌우대칭 도형 → 반영
이등변 삼각형 → 직각삼각형
($\because \angle A = \angle D$)

$4\cos\theta = 4\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$





(Step2) 단서 → 답 : 코사인법칙
2변1각 → 1변

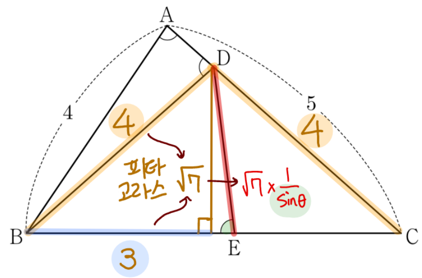


$\overline{BC}^2 = 4^2+5^2-2\cdot4\cdot5\cos\theta$

$= 36$

$\therefore \overline{BC} = 6$

(Step3) 좌우대칭 도형 → 반영
이등변 삼각형 → 직각삼각형



$\therefore \overline{DE} = \sqrt{7}\times\frac{1}{\sin\theta}$

$= \sqrt{7}\times\frac{8}{\sqrt{63}}$

$= \frac{8}{3}$

$\left(\because \cos\theta = \frac{1}{8},\ \sin\theta = \frac{\sqrt{63}}{8}\right)$

수학 영역

13. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 구간 $(0, 1]$에서

$$f(x)=\begin{cases} 3 & (0<x<1) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$$

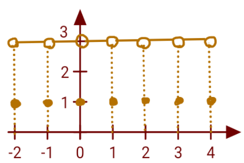
이고, 모든 실수 x에 대하여 $f(x+1)=f(x)$를 만족시킨다.

$\sum_{k=1}^{20} \frac{k \times f(\sqrt{k})}{3}$ 의 값은? [4점]

① 150 ② 160 ③ 170 ④ 180 ⑤ 190

김지석의 필연성

f(x)의 그래프를 파악하자.



$\therefore$ f(정수) $= 1$, f(정수X) $= 3$

$\sqrt{k}$ = 정수

k = 정수^2

$\therefore$ $f(\sqrt{k}) = \begin{cases} 1 & (k=\text{정수}^2) \quad k=1^2, 2^2, 3^2, 4^2 \\ 3 & (k\neq\text{정수}^2) \end{cases}$

$\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{20} k f(\sqrt{k})$

$= \frac{1}{3} \times 1 \times (1^2+2^2+3^2+4^2)$

$+ \frac{1}{3} \times 3 \times \{1+2+3+\cdots+20-(1^2+2^2+3^2+4^2)\}$

$= 190$

수학 영역

14. 두 양수 p, q와 함수 $f(x)=x^3-3x^2-9x-12$에 대하여 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $p+q$의 값은? [4점]

> (가) 모든 실수 x에 대하여 $xg(x)=|xf(x-p)+qx|$이다.
> (나) 함수 $g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하지 않은 실수 a의 개수는 1이다.

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

김지석의 필연성

(Step1) $|x| \to x$가 아닌
$x \to |x|$로 바꿔야하는 역발상

$$x=\begin{cases} |x| & (x>0) \\ -|x| & (x<0) \end{cases}$$

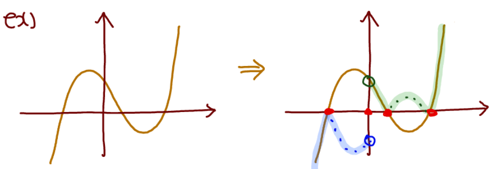
$$xg(x)=\begin{cases} |x|g(x)=|x||x|f(x-p)+q| \\ -|x|g(x)=-|x|\times|f(x-p)+q| \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} |f(x-p)+q| & (x>0) \\ -|f(x-p)+q| & (x<0) \end{cases}$$

↳ $x>0$일 때 x축 아랫부분 접어 올린다.

↳ $x<0$일 때 x축 윗부분 접어 내린다.

ex)



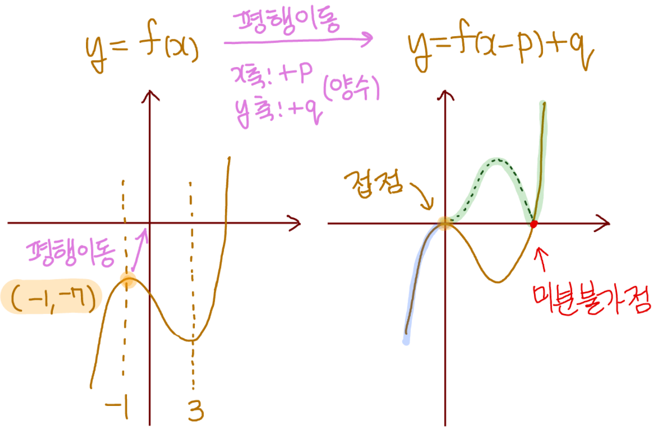
미분불가점 4개

원점을 지나지 않으면 불연속이 된다.
↳ 원점 오른쪽은 접어 올리고
원점 왼쪽은 접어 내린다.
↳ 미분불가점이 1개 뿐이려면
원점에서 x축에 접해야 한다.

(Step2) 계산하기

$f'(x)=3x^2-6x-9$
$=3(x-3)(x+1)$

$f(-1)=-7$



∴ $p=1$, $q=7$

$p+q=8$

수학 영역

15. $-1 \le t \le 1$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식

$$\left(\sin\frac{\pi x}{2} - t\right)\left(\cos\frac{\pi x}{2} - t\right) = 0$$

의 실근 중에서 집합 $\{x \mid 0 \le x < 4\}$에 속하는 가장 작은 값을 $\alpha(t)$, 가장 큰 값을 $\beta(t)$라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

O ㄱ. $-1 \le t < 0$인 모든 실수 t에 대하여 $\alpha(t) + \beta(t) = 5$이다.

O ㄴ. $\{t \mid \beta(t) - \alpha(t) = \beta(0) - \alpha(0)\} = \left\{t \,\middle|\, 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

X ㄷ. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$인 두 실수 t_1, t_2에 대하여 $t_2 - t_1 = \frac{1}{2}$이면 $t_1 \times t_2 = \frac{1}{3}$이다.

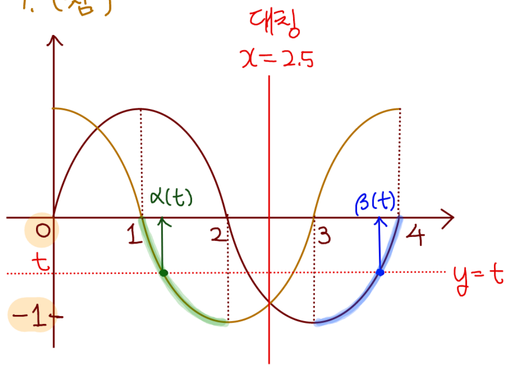
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

김지석의 필연성

삼각함수 그래프 문제

⇒ 반드시 대칭성과 주기성을 활용하라

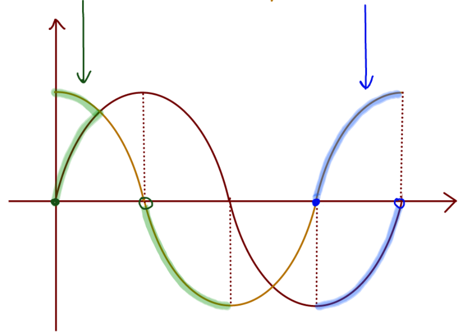
ㄱ. (참)



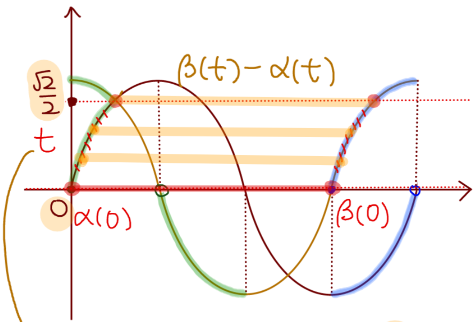
$$\frac{\alpha(t)+\beta(t)}{2} = 2.5$$

$\therefore$ $\alpha(t)+\beta(t) = 2.5 \times 2 = 5$

※ α(t) 존재 가능 지점, β(t) 존재 가능 지점



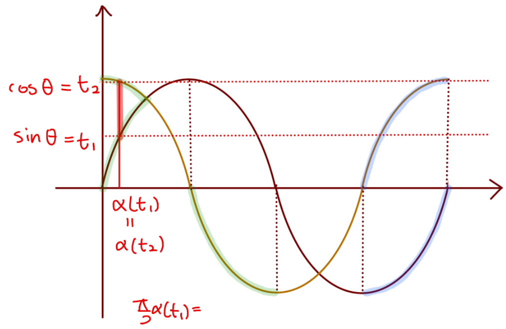
ㄴ. (참)



$(\because \sin\theta = \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2})$

$\therefore\ 0 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$

ㄷ. (거짓)



$t_1 = \sin\theta$, $t_2 = \cos\theta$ $(\because \theta = \frac{\pi}{2}\alpha(t_1) = \frac{\pi}{2}\alpha(t_2))$

$(t_2 - t_1)^2 = \underbrace{t_2^2 + t_1^2}_{= \sin^2\theta + \cos^2\theta} - 2t_1t_2$

$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - 2t_1t_2$

$\therefore\ t_1t_2 = \frac{3}{8}$

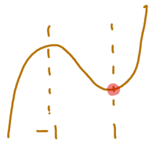
수학 영역

16. $\log_4 \frac{2}{3} + \log_4 24$의 값을 구하시오. [3점]

$= \log_4 \frac{2}{3}\times 24 = \log_4 16 = 2$

17. 함수 $f(x)=x^3-3x+12$가 $x=a$에서 극소일 때, $a+f(a)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) [3점]

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$



극소 $=f(1)=1-3+12=10$

$\therefore a+f(a)=1+10=11$

18. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2=36,\quad a_7=\frac{1}{3}a_5 = a_5 r^2$$

일 때, a_6의 값을 구하시오. [3점]

$\therefore r^2=\frac{1}{3}$

$a_6=a_2 r^4=36\left(\frac{1}{3}\right)^2=4$

19. 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\ (t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$가

$$v(t)=3t^2-4t+k$$

이다. 시각 $t=0$에서 점 P의 위치는 0이고, 시각 $t=1$에서 점 P의 위치는 -3이다. 시각 $t=1$에서 $t=3$까지 점 P의 위치의 변화량을 구하시오. (단, k는 상수이다.) [3점]

위치 $=\int v(t)dt$

$S(t)=t^3-2t^2+kt+C$

$S(0)=C=0$

$S(1)=1-2+k=-3$ $\quad\therefore k=-2$

$\therefore S(3)-S(1)$

$=(3^3-2\cdot 3^2-2\cdot 3)-(1^3-2\cdot 1^2-2\cdot 1)$

$=6$

20. 실수 a와 함수 $f(x)=x^3-12x^2+45x+3$에 대하여 함수

적분변수

$$g(x)=\int_a^x \{f(x)-f(t)\}\times\{f(t)\}^4\,dt$$

↳적분입장에서는 상수

가 오직 하나의 극값을 갖도록 하는 모든 a의 값의 합을 구하시오. [4점]

김지석의 필연성

(step 1) x는 적분입장에서 상수

$g(x)=\int_a^x f(x)\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$

$g(x)=f(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt-\int_a^x\{f(t)\}^5dt$

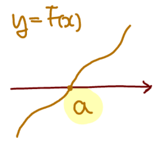
(step2) x는 미분입장에서 변수

$g'(x)=f'(x)\int_a^x\{f(t)\}^4dt+f(x)\left(\int_a^x\{f(t)\}^4dt\right)'-\left(\int_a^x\{f(t)\}^5dt\right)'$

$g'(x)=f'(x)\underbrace{\int_a^x\{f(t)\}^4dt}_{F(x)}+\cancel{f(x)\{f(x)\}^4}-\cancel{\{f(x)\}^5}$

① $F(a)=0$

② $F'(x)=\{f(x)\}^4\ge 0$ 이므로 $F(x)$는 증가함수



$\therefore F(x)=(x-a)^{홀}$(근 없는 식)

$=(3x^2-24x+45)\int_a^x f(t)\,dt$

$=3(x-3)(x-5)\times(x-a)^{홀}$(근없는식)

$g'(x)$의 부호변화가 1번이어야 하므로

또는 $\begin{cases} g'(x)=(x-3)^{짝}(x-5)\ (\text{근없는식}) \\ g'(x)=(x-3)(x-5)^{짝}\ (\text{근없는식}) \end{cases}$

이어야 한다!

$\therefore a=3$ or 5

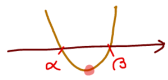
$3+5=8$

수학 영역

21. 다음 조건을 만족시키는 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 존재하도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

> (가) x에 대한 방정식 $(x^n-64)f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖고, 각각의 실근은 중근이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 최솟값은 음의 정수이다.

$f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.



$x^n=64$는

n 홀수 : 1개의 실근 $x=\sqrt[n]{64}$

n 짝수 : 서로 다른 2개의 실근 $x=-\sqrt[n]{64},\ +\sqrt[n]{64}$

∴ 1개의 실근을 가지면 α, β 모두 중근이 될 수 없다.

∴ n은 짝수이고 $\alpha=-\sqrt[n]{64}$, $\beta=+\sqrt[n]{64}$ 이어야 한다!

$$f(x)=(x+\sqrt[n]{64})(x-\sqrt[n]{64})$$
$$=x^2-(\sqrt[n]{64})^2$$
$$f(0)=-(\sqrt[n]{64})^2=-2^{\frac{12}{n}}=\text{정수}$$

∴ $\frac{12}{n}$도 정수 (n은 짝수)

∴ $n=2, 4, 6, 12$

$2+4+6+12=24$

(개념) a의 n제곱근 $x \Leftrightarrow x^n=a$

$x^n=a$	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n 홀	1개 $x=\sqrt[n]{a}>0$	1개 $x=0$	1개 $x=\sqrt[n]{a}<0$
n 짝	2개 $x=-\sqrt[n]{a}<0$ or $x=\sqrt[n]{a}>0$	1개 $x=0$	0개 (실근) 없다

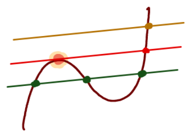
마지막 페이지 〈수학의 단권화〉 참고

22. 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.
> (나) 방정식 $f(x-f(x))=0$의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

$f(1)=4$, $f'(1)=1$, $f'(0)>1$일 때, $f(0)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(개념) 삼차함수와 일차함수는 1~3개의 교점을 갖는다

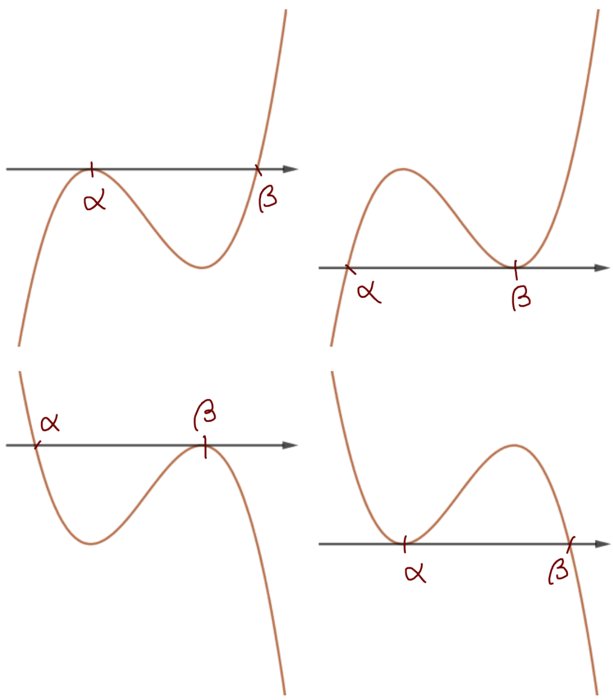


김지석의 필연성

(Step1) 조건 (가) 해석하기

$f(x)=0$ 서로 다른 두 실근

$\Leftrightarrow$ x축에 접한다



수학 영역

(Step2) 조건 (나) 해석하기

$f(\alpha)=0 \rightarrow (\alpha,0)$ 지남

$f(\beta)=0 \rightarrow (\beta,0)$ 지남

$f(x-f(x))=0$

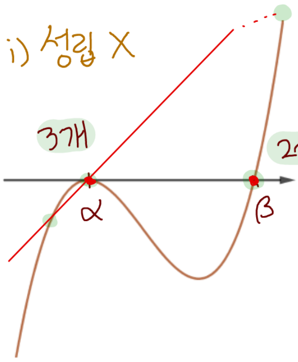
$\therefore x-f(x)=\alpha,\ x-f(x)=\beta$

$\Leftrightarrow f(x)=\underset{(\alpha,0)\text{ 지남}}{x-\alpha},\ f(x)=\underset{(\beta,0)\text{ 지남}}{x-\beta}$

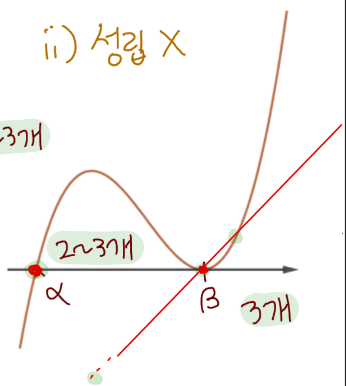
$\therefore$ $y=f(x)$ 의 그래프와
$y=x-\alpha$ 와 $y=x-\beta$ 그래프는
서로 다른 3점에서 만난다.

$\therefore$ $y=x-\alpha$ 와 $y=x-\beta$ 중
한 직선과는 1점,
다른 한 직선과는 2점에서 만난다.
(접할 때)

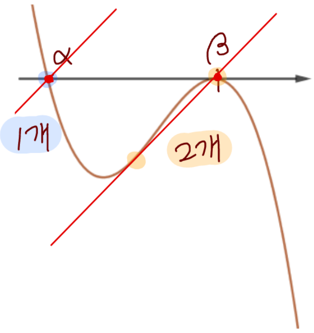
i) 성립 X



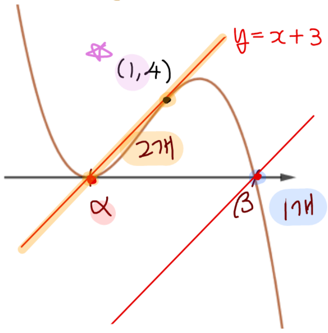
ii) 성립 X



iii) 성립 X



iv) 가능 O



(1,4)에서 ($\because f(1)=4$)
접선기울기 1 ($\because f'(1)=1$)
존재 불가

$\rightarrow$ 접선식은 $y=x+3$

(Step3) 계산하기

$(\alpha,0)$은 $y=x+3$ 위의 점이므로

$\alpha=-3$

$f(x)=a(x+3)^2(x-\beta)$

$f(1)=a\cdot4^2(1-\beta)=4 \quad \therefore 1-\beta=\frac{1}{4a}$

$f'(x)=a\{2(x+3)(x-\beta)+(x+3)^2\cdot1\}$

$f'(1)=a\{2\cdot4\cdot(1-\beta)+4^2\}=1$

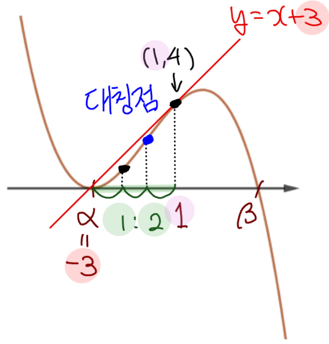
$=a\{2\cdot4\cdot\frac{1}{4a}+4^2\}$

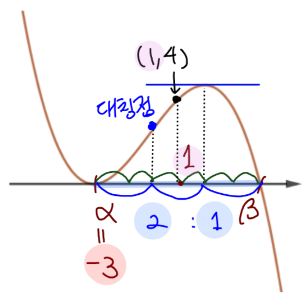
$\therefore a=-\frac{1}{16},\ \beta=5$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

$f(0)=\frac{45}{16},\quad p+q=16+45=61$

[다른 풀이] 비율관계





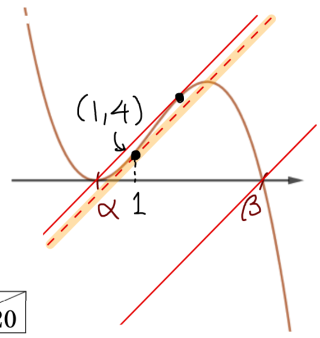
$\therefore \frac{\alpha+\beta}{2}=1,\ \beta=5$

$f(x)=a(x+3)^2(x-5)$

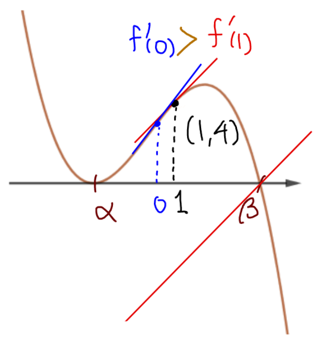
$f(1)=a\cdot4^2(-4)=4 \quad \therefore a=-\frac{1}{16}$

$f(x)=-\frac{1}{16}(x+3)^2(x-5)$

※ 아래 경우는
$f'(0)>1=f'(1)$에 모순



※ 이건 $f'(0)>f'(1)$
성립 가능



2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 문제지

제 2 교시

수학 영역(확률과 통계)

5지선다형

23. 다항식 $(2x+1)^5$의 전개식에서 x^3의 계수는? [2점]

① 20　② 40　③ 60　④ 80　⑤ 100

$_5C_2(2x)^3\, 1^2$

$= \frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}\cdot 2^3 x^3$

$= 5\cdot 4\cdot 2^2 x^3$

$= 80x^3$　　∴ 80

24. 어느 동아리의 학생 20명을 대상으로 진로활동 A와 진로활동 B에 대한 선호도를 조사하였다. 이 조사에 참여한 학생은 진로활동 A와 진로활동 B 중 하나를 선택하였고, 각각의 진로활동을 선택한 학생 수는 다음과 같다.

(단위 : 명)

구분	진로활동 A	진로활동 B	합계
1학년	7	5	12
2학년	4	4	8
합계	11	9	20

이 조사에 참여한 학생 20명 중에서 임의로 선택한 한 명이 진로활동 B를 선택한 학생일 때, 이 학생이 1학년일 확률은? [3점]

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{5}{9}$　③ $\frac{3}{5}$　④ $\frac{7}{11}$　⑤ $\frac{2}{3}$

25. 숫자 1, 2, 3, 4, 5 중에서 중복을 허락하여 4개를 택해 일렬로 나열하여 만들 수 있는 모든 네 자리의 자연수 중에서 임의로 하나의 수를 선택할 때, 선택한 수가 3500보다 클 확률은? [3점]

① $\frac{9}{25}$　② $\frac{2}{5}$　③ $\frac{11}{25}$　④ $\frac{12}{25}$　⑤ $\frac{13}{25}$

김지석의 필연성

전체 : $5\times5\times5\times5 = 5^4$

i) 3 5 $5\times5 = 5^2$

ii) 4 $5\times5\times5 = 5^3$

iii) 5 $5\times5\times5 = 5^3$

$\therefore \frac{5^2+5^3+5^3}{5^4} = \frac{1+5+5}{5^2} = \frac{11}{25}$

26. 빨간색 카드 4장, 파란색 카드 2장, 노란색 카드 1장이 있다. 이 7장의 카드를 세 명의 학생에게 남김없이 나누어 줄 때, 3가지 색의 카드를 각각 한 장 이상 받는 학생이 있도록 나누어 주는 경우의 수는? (단, 같은 색 카드끼리는 서로 구별하지 않고, 카드를 받지 못하는 학생이 있을 수 있다.) [3점]

① 78　② 84　③ 90　④ 96　⑤ 102

김지석의 필연성

(빨 파 노 1개씩 받을 학생 선택) (남은 빨 3 학생 3명에게 나눠주기) (남은 파 1 학생 3명에게 나눠주기)

$\therefore 3 \times {}_3H_3 \times {}_3C_1 = 90$

23	④	24	②	25	③	26	③	27	①
28	⑤	29	48	30	47				

수학 영역(확률과 통계)

27. 주사위 2개와 동전 4개를 동시에 던질 때, 나오는 주사위의 눈의 수의 곱과 앞면이 나오는 동전의 개수가 같을 확률은? [3점]

① $\frac{3}{64}$ ② $\frac{5}{96}$ ③ $\frac{11}{192}$ ④ $\frac{1}{16}$ ⑤ $\frac{13}{192}$

김지석의 필연성

(동전 앞면) (주사위 눈)

i) 1개 (1,1) $\quad {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \frac{1}{36}$

$+$

ii) 2개 (2,1),(1,2) $\quad {}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{2}{36}$

$+$

iii) 3개 (3,1),(1,3) $\quad {}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \frac{2}{36}$

$+$

iv) 4개 (4,1),(2,2),(1,4) $\quad {}_4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \frac{3}{36}$

$=$

$\frac{3}{64}$

※

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4		
2	2	4				
3	3					
4	4					
5						
6						

28. 한 개의 주사위를 한 번 던져 나온 눈의 수가 3 이하이면 나온 눈의 수를 점수로 얻고, 나온 눈의 수가 4 이상이면 0점을 얻는다. 이 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 a, b, c, d라 할 때, 얻은 네 점수의 합이 4가 되는 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [4점]

① 187 ② 190 ③ 193 ④ 196 ⑤ 199

김지석의 필연성

a,b,c,d 배열 　 4or5or6 선택

$4 = a+b+c+d$

$= 3+1+0+0 \rightarrow \frac{4!}{2!} \times 3^2 = 199$

$+$

$= 2+2+0+0 \rightarrow \frac{4!}{2!2!} \times 3^2$

$+$

$= 2+1+1+0 \rightarrow \frac{4!}{2!} \times 3^1$

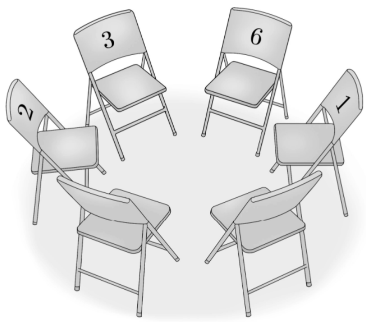
$+$

$= 1+1+1+1 \rightarrow 1$

수학 영역(확률과 통계)

단답형

29. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6개의 의자가 있다. 이 6개의 의자를 일정한 간격을 두고 원형으로 배열할 때, 서로 이웃한 2개의 의자에 적혀 있는 수의 곱이 12가 되지 않도록 배열하는 경우의 수를 구하시오.
(단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점]



김지석의 필연성

되 = 전체 − 안돼 idea 써야하는 상황

① 문제에서 안되는 것이 명시됐을 때

② 케이스가 너무 많을 때

(적어도 ~, ~이상, ~이하)

(Step1)

$12 = 12\times 1$

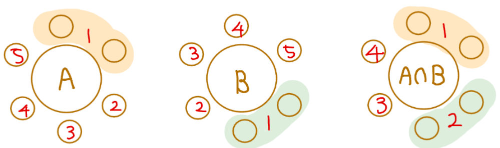
$= 6\times 2 \rightarrow$ A: 2, 6 이웃하는 사건

$= 4\times 3 \rightarrow$ B: 3, 4 이웃하는 사건

(Step2)

전체 − $n(A\cup B)$

= 전체 − $\{n(A) + n(B) - n(A\cap B)\}$

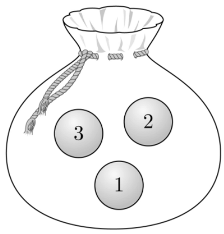


$= (6-1)! - \{(5-1)!\times 2! + (5-1)!\times 2! - (4-1)!\times 2!2!\}$

$= 48$

30. 숫자 1, 2, 3이 하나씩 적혀 있는 3개의 공이 들어 있는 주머니가 있다. 이 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 공에 적혀 있는 수를 확인한 후 다시 넣는 시행을 한다. 이 시행을 5번 반복하여 확인한 5개의 수의 곱이 6의 배수일 확률이 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

2가 한번 이상
and
3이 한번 이상



김지석의 필연성

되 = 전체 − 안돼 idea 써야하는 상황

① 문제에서 안되는 것이 명시됐을 때

② 케이스가 너무 많을 때

(적어도 ~, ~이상, ~이하)

A: 1, 3만 선택 (2가 0번)

B: 1, 2만 선택 (3이 0번)

$1 - P(A\cup B)$

1만 선택

$= 1 - \{P(A) + P(B) - P(A\cap B)\}$

$= 1 - \left\{\frac{2^5}{3^5} + \frac{2^5}{3^5} - \frac{1^5}{3^5}\right\}$

$= \frac{20}{27}$

$\therefore p+q = 27+20 = 47$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「**선택과목(미적분)**」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 문제지

제 2 교시

수학 영역(미적분)

5지선다형

23. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}-n}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n+\frac{1}{4}}-n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{(n+\frac{1}{2})^2}-n}$

$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cancel{n}+\frac{1}{2}-\cancel{n}} = 2$

24. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=e^t+\cos t,\quad y=\sin t$$

에서 $t=0$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

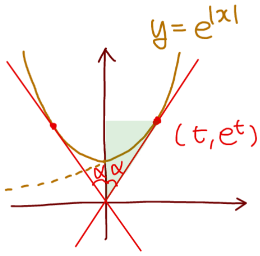
① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\cos t}{e^t-\sin t} = \frac{\cos 0}{e^0-\sin 0} = \frac{1}{1-0} = 1$

25. 원점에서 곡선 $y=e^{|x|}$에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $\frac{e}{e^2+1}$ ② $\frac{e}{e^2-1}$ ③ $\frac{2e}{e^2+1}$ ④ $\frac{2e}{e^2-1}$ ⑤ 1

김지석의 필연성



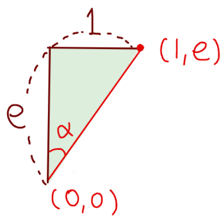
곡선 밖의 점 O에서 곡선에 그은 접선

어떤 접점에서 그은 접선이 점O를 지난다.

$(t, f(t))$

$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

$0=f'(t)(0-t)+f(t)$



$0=e^t(-t)+e^t$

$0=e^t(1-t)$

$\therefore t=1$, 접점 $(1,e)$

$\tan\alpha=\frac{1}{e}$

$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{2\frac{1}{e}}{1-(\frac{1}{e})^2}$

$= \frac{2e}{e^2-1}$

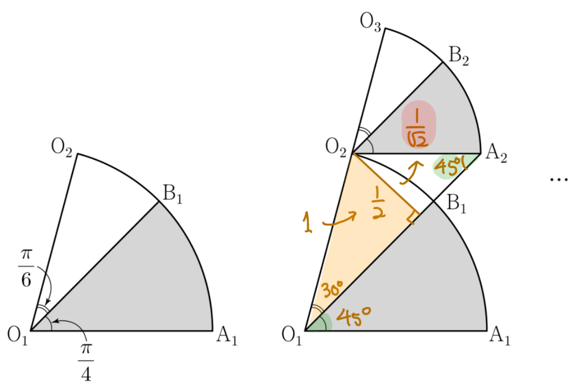
23	②	24	②	25	④	26	③	27	④
28	①	29	17	30	11				

수학 영역(미적분)

26. 그림과 같이 중심이 O_1, 반지름의 길이가 1이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_1A_1O_2$가 있다. 호 A_1O_2 위에 점 B_1을 $\angle A_1O_1B_1 = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_1A_1B_1$에 색칠하여 얻은 그림을 R_1이라 하자.

그림 R_1에서 점 O_2를 지나고 선분 O_1A_1에 평행한 직선이 직선 O_1B_1과 만나는 점을 A_2라 하자. 중심이 O_2이고 중심각의 크기가 $\frac{5\pi}{12}$인 부채꼴 $O_2A_2O_3$을 부채꼴 $O_1A_1B_1$과 겹치지 않도록 그린다. 호 A_2O_3 위에 점 B_2를 $\angle A_2O_2B_2 = \frac{\pi}{4}$가 되도록 잡고, 부채꼴 $O_2A_2B_2$에 색칠하여 얻은 그림을 R_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은? [3점]



R_1 R_2 …

① $\frac{3\pi}{16}$ ② $\frac{7\pi}{32}$ ③ $\frac{\pi}{4}$ ④ $\frac{9\pi}{32}$ ⑤ $\frac{5\pi}{16}$

김지석의 필연성

문제에서
30°, 60°, 정△ 나오면 → 직각△ 1 : 2 : $\sqrt{3}$ 사용!

평행선 → 각도

길이비 $= 1 : \frac{1}{\sqrt{2}}$

넓이비 $= 1^2 : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

공비 $= \frac{1}{2}$

$S = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$

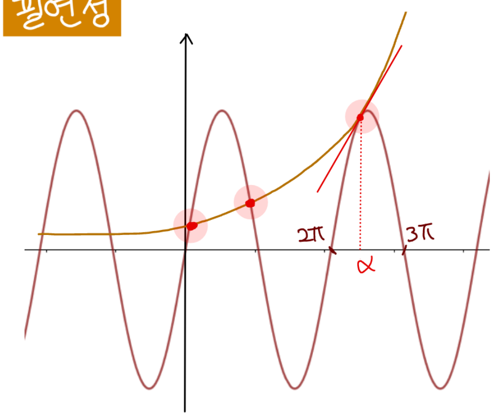
27. 두 함수

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은? [3점]

① $\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}}$ ② $\sqrt{2}e^{\frac{7\pi}{4}}$ ③ $\sqrt{2}e^{2\pi}$
④ $\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$ ⑤ $\sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{2}}$

김지석의 필연성



두 곡선이 접한다 ⇒ 공통접선 갖는다.

① $f(\alpha) = g(\alpha)$ $e^\alpha = k\sin\alpha$

② $f'(\alpha) = g'(\alpha)$ $e^\alpha = k\cos\alpha$

$\therefore \tan\alpha = \dfrac{k\sin\alpha}{k\cos\alpha} = \dfrac{e^\alpha}{e^\alpha} = 1$

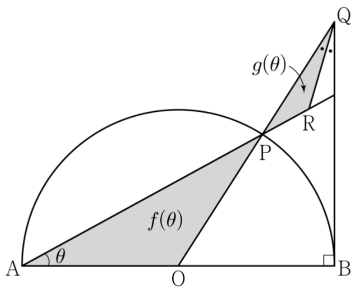
$\alpha = 2\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4}$

$e^{\frac{9\pi}{4}} = k\sin\frac{9\pi}{4} = k\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore k = \sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$

수학 영역(미적분)

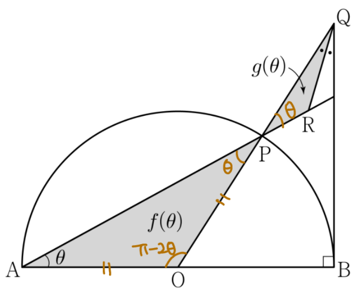
28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 점 B를 지나고 선분 AB에 수직인 직선이 직선 OP와 만나는 점을 Q라 하고, ∠OQB의 이등분선이 직선 AP와 만나는 점을 R라 하자. ∠OAP $= \theta$일 때, 삼각형 OAP의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 PQR의 넓이를 $g(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^4 \times f(\theta)}$의 값은? (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$) [4점]



① 2　② $\frac{5}{2}$　③ 3　④ $\frac{7}{2}$　⑤ 4

김지석의 필연성

(step1) $f(\theta)$ 구하기



$f(\theta) = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \sin(\pi - 2\theta) = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

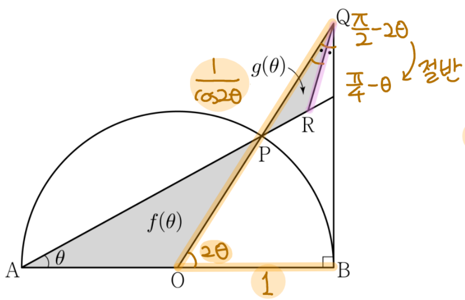
(step2) $g(\theta)$ 구하기

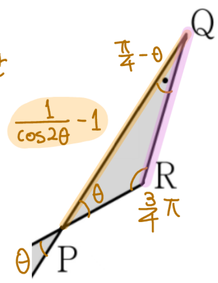
△PQR에서 점 R이

가장 복잡하게 규정되어 있기 때문에

$\overline{PR}$과 $\overline{QR}$은 구하기 어렵다.

⇒ $\overline{PQ}$부터 구한다.





각에 대한 단서가 많으면 sin법칙

$$\frac{\overline{PQ}}{\sin\frac{3}{4}\pi} = \frac{\overline{QR}}{\sin\theta} \qquad \therefore \overline{QR} = \overline{PQ}\,\frac{\sin\theta}{\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$g(\theta) = \frac{1}{2}\overline{PQ} \times \overline{QR}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overline{PQ} \times \overline{PQ} \times \frac{\sin\theta}{\sin\frac{\pi}{4}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}-1\right)^2 \times \sqrt{2}\sin\theta\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{g(\theta)}{\theta^4 f(\theta)}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{\cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{\cos 2\theta}-1\right)^2 \times \sqrt{2}\sin\theta\,\sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)}{\theta^4\,\cancel{\frac{1}{2}}\sin 2\theta}$$

$$= \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos^2 2\theta}\left\{\frac{1-\cos 2\theta}{(2\theta)^2}\right\}^2 \times 16 \times \sqrt{2} \times \frac{\sin\theta}{\sin 2\theta} \times \sin\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$$

$$= \frac{1}{1^2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 16 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

수학 영역(미적분)

단답형

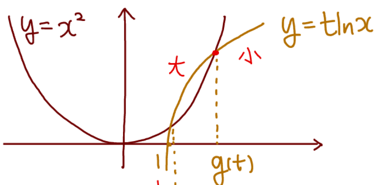
29. $t>2e$ 인 실수 t에 대하여 함수 $f(x)=t(\ln x)^2-x^2$이 $x=k$에서 극대일 때, 실수 k의 값을 $g(t)$라 하면 $g(t)$는 미분가능한 함수이다. $g(\alpha)=e^2$인 실수 α에 대하여 $\alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

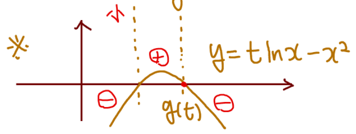
김지석의 필연성

$f'(x)=2t\ln x\,\frac{1}{x}-2x$

$=\frac{2}{x}(t\ln x-x^2)$

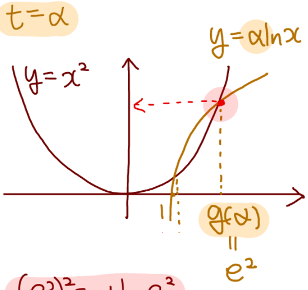
$\therefore\ t\ln x=x^2$ 일 때 극값





$t\ln g(t)-\{g(t)\}^2=0$

$t=\alpha$



$(e^2)^2=\alpha\ln e^2$

$e^4=2\alpha$

$\therefore\ \alpha=\frac{1}{2}e^4$

$1\cdot\ln g(t)+t\,\frac{1}{g(t)}\,g'(t)-2g(t)g'(t)=0$

$\ln g(\alpha)+\alpha\,\frac{1}{g(\alpha)}\,g'(\alpha)-2g(\alpha)g'(\alpha)=0$

$\ln e^2+\frac{1}{2}e^4\,\frac{1}{e^2}\,g'(\alpha)-2e^2g'(\alpha)=0$

$\therefore\ g'(\alpha)=\frac{4}{3e^2}$

$\therefore\ \alpha\times\{g'(\alpha)\}^2=\frac{1}{2}e^4\times\left\{\frac{4}{3e^2}\right\}^2=\frac{8}{9}$

$9+8=17$

30. $t>\frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y=\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y=x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2)=\frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[풀이1]

계산은 간편하지만 일반적으로 잘 통하는 풀이는 아니다.

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t})=x+t$

$1+(e^x)^2-e^{-2t}=e^{x+t}$

$(e^x)^2-e^t\,e^x-e^{-2t}+1=0$

$e^x=\dfrac{e^t\pm\sqrt{e^{2t}+4e^{-2t}-4}}{2}$

$=\dfrac{e^t\pm\sqrt{(e^t-2e^{-t})^2}}{2}$

$\therefore\ e^x=e^t-e^{-t}$ or e^{-t}

$x=\underbrace{\ln(e^t-e^{-t})}_{\beta}$ or $\underbrace{\ln e^{-t}}_{\alpha}$

$f(t)=\sqrt{2}\{\ln(e^t-e^{-t})-\ln e^{-t}\}$

$=\sqrt{2}\ln(e^{2t}-1)$

$\therefore\ f'(t)=\sqrt{2}\,\dfrac{2e^{2t}}{e^{2t}-1}$

$\therefore\ f'(\ln 2)=\dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

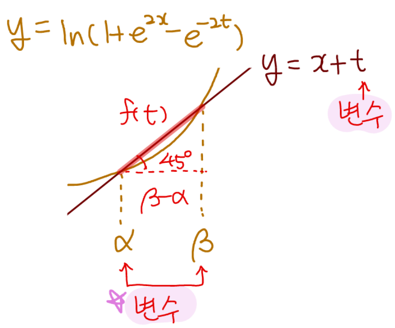
$p+q=3+8=11$

수학 영역(미적분)

30. $t > \frac{1}{2}\ln 2$인 실수 t에 대하여 곡선 $y = \ln(1+e^{2x}-e^{-2t})$과 직선 $y = x+t$가 만나는 서로 다른 두 점 사이의 거리를 $f(t)$라 할 때, $f'(\ln 2) = \frac{q}{p}\sqrt{2}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

김지석의 필연성 [풀이2]

(step1) 그래프 해석



$\therefore f(t) = \sqrt{2}(\beta-\alpha)$

$f'(t) = \sqrt{2}\left(\frac{d\beta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\right)$

(step2) α, β 파악

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2t}) = x+t$

상수 → $t = \ln 2$일 때

$\ln(1+e^{2x}-e^{-2\ln 2}) = x+\ln 2$

$1+e^{2x}-e^{-2\ln 2} = e^{x+\ln 2}$

$1+(e^x)^2 - e^{\ln\frac{1}{4}} = e^x e^{\ln 2}$

$(e^x)^2 - 2e^x + \frac{3}{4} = 0$

$e^x = \frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$

$\therefore \underbrace{t = \ln 2}_{\text{상수}}$일때 $e^\alpha = \frac{1}{2}$, $e^\beta = \frac{3}{2}$

$(\alpha = \ln\frac{1}{2} \quad \beta = \ln\frac{3}{2})$

상수

(Step3) $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}$ 구하기

(변수) $\ln(1+e^{2\alpha}-e^{-2t}) = \alpha+t$

미분

$$\frac{2e^{2\alpha}\frac{d\alpha}{dt} - e^{-2t}(-2)}{1+e^{2\alpha}-e^{-2t}} = \frac{d\alpha}{dt}+1$$

(상수) $t = \ln 2$ $(\alpha = \ln\frac{1}{2})$대입

$$\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{d\alpha}{dt} + 2\cdot\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}} = \frac{d\alpha}{dt}+1$$

$\therefore \frac{d\alpha}{dt} = -1$

같은 방법으로 $\beta = \ln\frac{3}{2}$ 일 때

$$\frac{2\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{d\beta}{dt} + 2\left(\frac{1}{4}\right)}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} = \frac{d\beta}{dt}+1$$

$\therefore \frac{d\beta}{dt} = \frac{5}{3}$

$\therefore f'(\ln 2) = \sqrt{2}\left(\frac{d\beta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt}\right)$

$= \sqrt{2}\left(\frac{5}{3}-(-1)\right) = \frac{8}{3}\sqrt{2}$

$p+q = 3+8 = 11$

2022학년도 대학수학능력시험 6월 모의평가 문제지

제 2 교시

수학 영역(기하)

5지선다형

23. 두 벡터 $\vec{a}=(k+3,\ 3k-1)$과 $\vec{b}=(1,\ 1)$이 서로 평행할 때, 실수 k의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$k+3=3k-1$

$\therefore k=2$

24. 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(2,\ \sqrt{2})$에서의 접선의 x절편은? [3점]

① 3　② $\frac{13}{4}$　③ $\frac{7}{2}$　④ $\frac{15}{4}$　⑤ 4

$\frac{2x}{8}+\frac{\sqrt{2}y}{4}=1$

$y=0$ 대입

$\frac{1}{4}x+0=1$

$\therefore x=4$

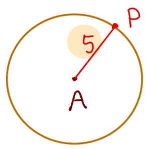
25. 좌표평면 위의 두 점 A(1, 2), B(−3, 5)에 대하여

$$|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AB}|$$

를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 길이는? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 10π　② 12π　③ 14π　④ 16π　⑤ 18π

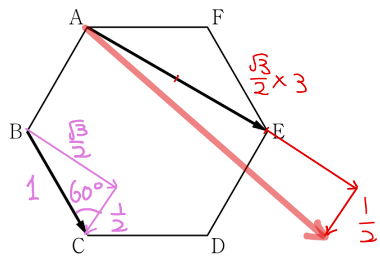
$|\overrightarrow{AP}|=\sqrt{\{1-(-3)\}^2+(2-5)^2}=5$



$\therefore 2\pi r=10\pi$

26. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $|\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BC}|$의 값은? [3점]

↳ 60° 활용



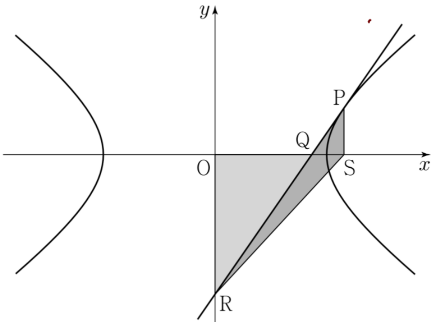
① $\sqrt{6}$　② $\sqrt{7}$　③ $2\sqrt{2}$　④ 3　⑤ $\sqrt{10}$

$\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{7}$

23	②	24	⑤	25	①	26	②	27	③
28	③	29	80	30	48				

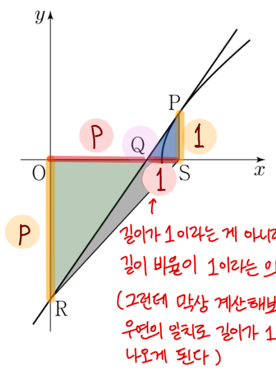
수학 영역(기하)

27. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(4,\,k)\,(k>0)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q, y축과 만나는 점을 R라 하자. 점 $\mathrm{S}(4,\,0)$에 대하여 삼각형 QOR의 넓이를 A_1, 삼각형 PRS의 넓이를 A_2라 하자. $A_1:A_2=9:4$일 때, 이 쌍곡선의 주축의 길이는? (단, O는 원점이고, a와 b는 상수이다.) [3점]



① $2\sqrt{10}$　② $2\sqrt{11}$　③ $4\sqrt{3}$　④ $2\sqrt{13}$　⑤ $2\sqrt{14}$

김지석의 필연성



길이가 1이라는 게 아니라 길이 비율이 1이라는 의미 (그런데 막상 계산해보면 우연의 일치로 길이가 1이 나오게 된다)

길이비
$\triangle PQS : \triangle RQO = 1 : p$

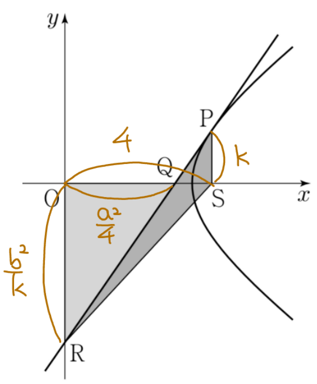
$A_1 : A_2$
$= \frac{1}{2}p^2 : \frac{1}{2}1^2 + \frac{1}{2}\cdot 1\cdot p$
$= 9 : 4$

$\therefore\ 4p^2 = 9(p+1)$
$p = 3$ or $-\frac{4}{3}$

$\overline{OQ} : \overline{QS} = 3 : 1$
$\overline{OQ} + \overline{QS} = 4$이므로 $\overline{OQ} = 3$
$\therefore\ Q(3,0)$ → 대입

(4, k)에서의 접선
접선: $\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$
$\frac{12}{a^2} = 1$
$\therefore\ 2a = 4\sqrt{3}$

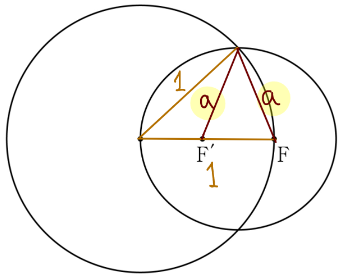
[다른 풀이]
(step1) (4, k)에서의 접선
접선: $\frac{4x}{a^2} - \frac{ky}{b^2} = 1$
$Q(\frac{a^2}{4}, 0)$　$R(0, -\frac{b^2}{k})$
$4A_1 = 9A_2$
$4\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{4}\cdot\frac{b^2}{k}\right) = 9\left(\frac{1}{2}\cdot k\cdot 4\right)$
$\therefore\ k = \frac{1}{6}ab$



(step2) (4, k) 대입
$\frac{4^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1$
$\frac{4^2}{a^2} - \left(\frac{1}{6}ab\right)^2\frac{1}{b^2} = 1$
$a^4 + 36a^2 - 4^2 6^2 = 0$
$(a^2-12)(a^2+48) = 0$
$2a = 4\sqrt{3}$

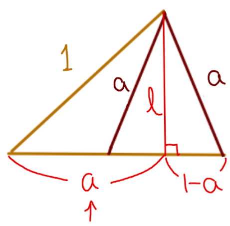
28. 두 초점이 F, F′이고 장축의 길이가 $2a$인 타원이 있다. 이 타원의 한 꼭짓점을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1인 원이 이 타원의 서로 다른 두 꼭짓점과 한 초점을 지날 때, 상수 a의 값은? [4점]

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$　② $\frac{\sqrt{6}-1}{2}$　③ $\sqrt{3}-1$　④ $2\sqrt{2}-2$　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$



김지석의 필연성

이차곡선에서 초점 언급 ⇒ 정의 활용
타원 ⇒ 두 초점으로부터 거리 합 = 장축길이

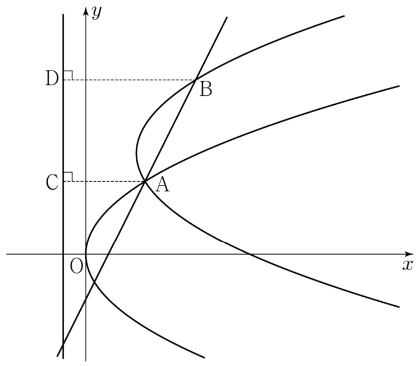


$l^2 = 1^2 - a^2 = a^2 - (1-a)^2$
$a^2 + 2a - 2 = 0$
$\therefore\ a = \sqrt{3} - 1$

수학 영역(기하)

단답형

29. 포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=2x-4$가 만나는 점 중 제1사분면 위에 있는 점을 A라 하자. 양수 a에 대하여 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 점 A를 지날 때, 직선 $y=2x-4$와 포물선 $(y-2a)^2=8(x-a)$가 만나는 점 중 A가 아닌 점을 B라 하자. 두 점 A, B에서 직선 $x=-2$에 내린 수선의 발을 각각 C, D라 할 때, $\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}=k$이다. k^2의 값을 구하시오. [4점]



김지석의 필연성

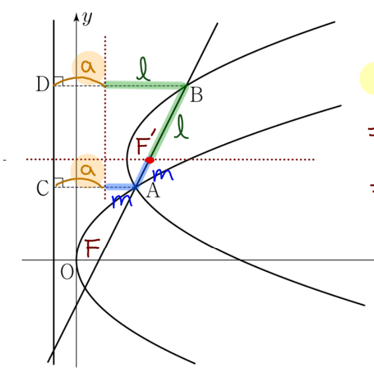
(step1)

포물선의 정의를 쓸 수 있는지 파악하기 위해 초점이 $\overline{AB}$ 위에 있는지 확인해야 한다.

$y^2=4\cdot2\cdot x$ → 초점 F(2, 0)

$(y-2a)^2=4\cdot2\cdot(x-a)$ → 초점 F′(2+a, 2a)

(y = 2x−4 위의 점
(초점이 $\overline{AB}$ 위에 존재!

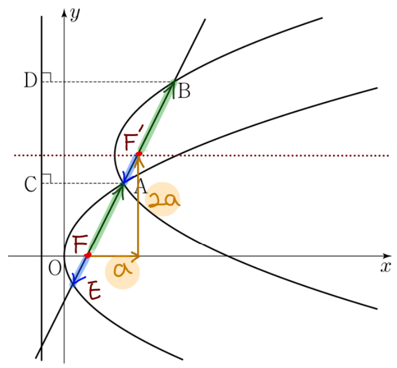


$\overline{AC}+\overline{BD}-\overline{AB}$

$=(m+a)+(l+a)-(m+l)$

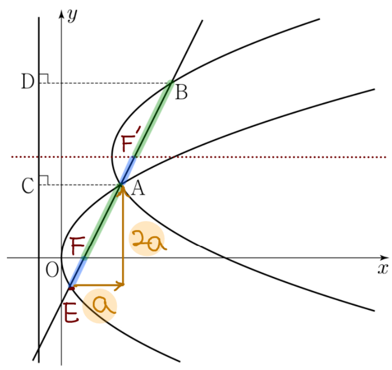
$=2a=k$

(Step2) 합동관계 파악



초점에서 기울기 2로 위로 뻗은 지점
F′→B F→A

초점에서 기울기 2로 아래로 뻗은 지점
F′→A F→E



A→E도
(x축: +a
  y축: +2a)
평행이동이다!

a = A의 x좌표와 E의 x좌표 차이

$y=2x-4$ $y^2=8x$

$(2x-4)^2=8x$

$x^2-6x+4=0$

$\alpha+\beta=6$ $\alpha\beta=4$

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$a^2=36-16=20$

$\therefore k^2=(2a)^2=4a^2=80$

수학 영역(기하)

30. 좌표평면 위의 네 점 A(2, 0), B(0, 2), C(−2, 0), D(0, −2)를 꼭짓점으로 하는 정사각형 ABCD의 네 변 위의 두 점 P, Q가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$
> (나) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq 0$이다.
> (다) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OQ}\geq -2$이고 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OQ}\leq 0$이다.

점 R(4, 4)에 대하여 $\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

김지석의 필연성

(Step1) 조건(가) 해석하기

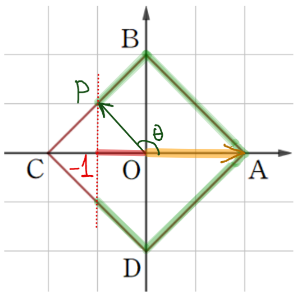
$(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB})\times(\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD})=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ or $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AD}=0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AB}$ or $\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{PQ}$는 ↗ or ↖ 방향

(Step2) 조건 (나),(다) 해석하기

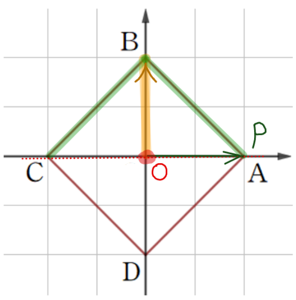


$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}\geq -2$

$=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta$

$=2\times|\overrightarrow{OP}|\cos\theta\geq -2$

$\therefore |\overrightarrow{OP}|\cos\theta\geq -1$

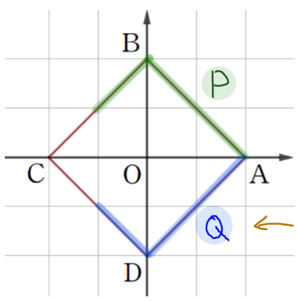


$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}\geq 0$

$=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OP}|\cos\theta$

$=2\times|\overrightarrow{OP}|\cos\theta\geq 0$

$\therefore |\overrightarrow{OP}|\cos\theta\geq 0$

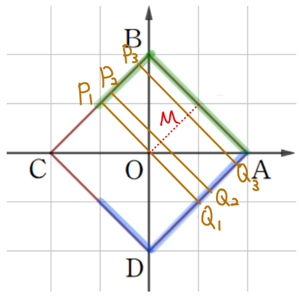


← 같은 방식으로 조건(다) 해석

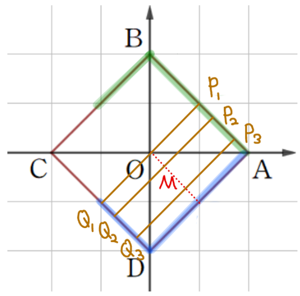
(Step3) 조건 (가)(나)(다) 종합

대칭형이니까 중점 M을 관찰해두자.

(case 1)



(case 2)

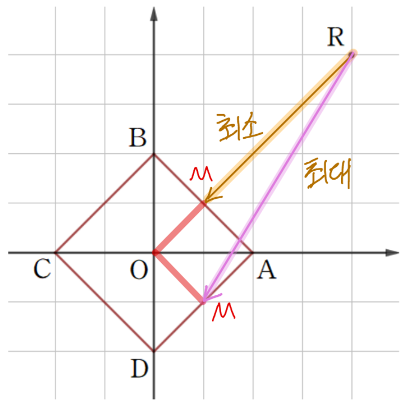


(Step4) 계산하기

$\overrightarrow{RP}\cdot\overrightarrow{RQ}=(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP})\cdot(\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MQ})$

$=|\overrightarrow{RM}|^2+(\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{MQ})\cdot\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}$

$=|\overrightarrow{RM}|^2+0+\sqrt{2}\sqrt{2}(-1)$



$\therefore$ 최대 $=(3^2+5^2)-2=32$

최소 $=(3^2+3^2)-2=16$

$M+m=32+16=48$

수학의 단권화 ✕ 개념 연구

연구03 a의 n제곱근을 빈칸에 쓰시오.

연구04 다음을 제곱근 기호를 이용해 표현하시오.

이번 시험 21번
관련 내용!
정독하고 자기 것으로
소화하자!

2 거듭제곱과 거듭제곱근

①a 의 n 거듭제곱: 실수 a 를 n 번 곱한 a^n

(a 는 밑, n 는 지수)

②a 의 n 제곱근: $x^n = a$ 가 되는 x

(n 제곱해서 a 가 되는 것)

연구 03

$x^n=a$	n이 홀수	n이 짝수
$a>0$	$x=\sqrt[n]{a}$ ⊕ 1개	$x=\sqrt[n]{a}$ ⊕ $x=-\sqrt[n]{a}$ ⊖ 2개
$a=0$	$x=0$ 1개	$x=0$ 1개
$a<0$	$x=\sqrt[n]{a}$ ⊖ 1개	없다 0개

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a\geq 0) \\ -a & (a<0) \end{cases}$$

a의 n제곱근 중 음수를 쓰시오.

n홀수 : $\sqrt[n]{a}$ (단, $a<0$) $a>0$이면 $\sqrt[n]{a}>0$

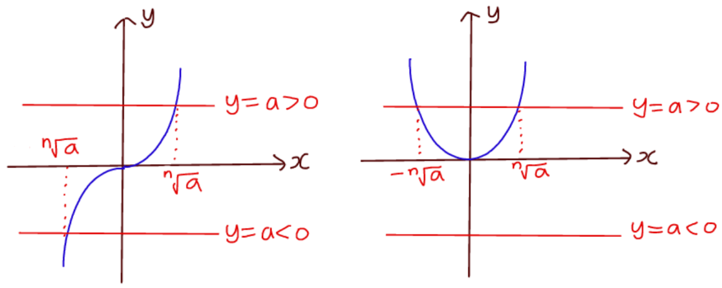
n짝수 : $-\sqrt[n]{a}$ (단, $a>0$) $a<0$이면 $\sqrt[n]{a}$ 없다

※ 기호 사용이 일관성이 없다.

거듭제곱근

②a 의 n 제곱근

a. n 이 홀수인 경우　　b. n 이 짝수인 경우



【ex】 다음을 제곱근 기호를 이용해 표현하시오.

연구 04

(1) 64의 2제곱근 중 음수 : $-\sqrt[2]{64}=-8$

(2) 64의 3제곱근 중 음수 : 없다

(3) -64의 3제곱근 중 음수 : $\sqrt[3]{-64}=-4$

(4) -64의 2제곱근 중 음수 : 없다

(5) 64의 2제곱근 중 양수 : $\sqrt[2]{64}=8$

(6) 64의 3제곱근 중 양수 : $\sqrt[3]{64}=4$

(7) -64의 3제곱근 중 양수 : 없다

(8) -64의 2제곱근 중 양수 : 없다

수 I