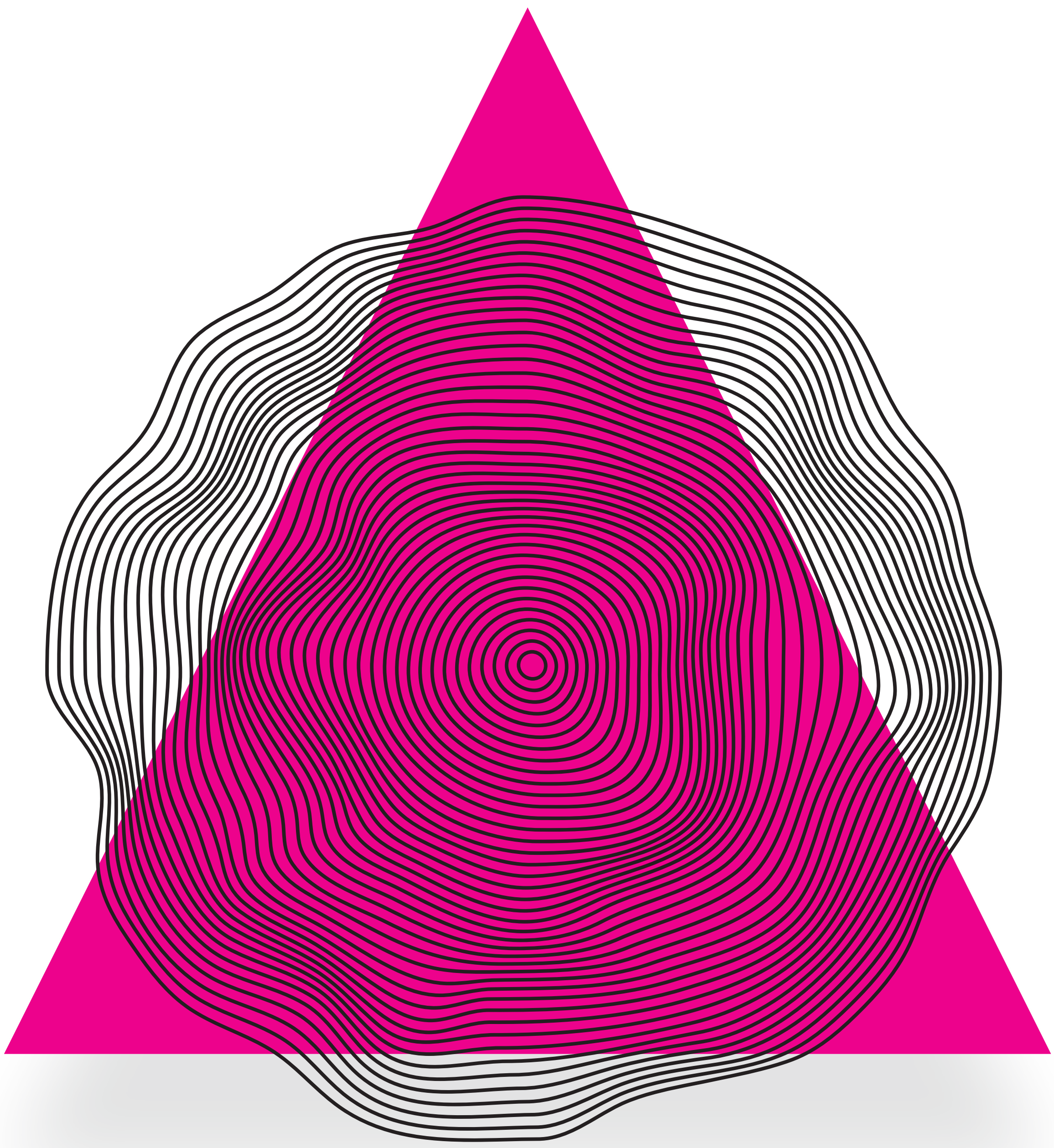
기출의_ 파급효과



smart is sexy

Orbi.kr

수학영역 × 수학Ⅱ / 상 × EXTENSION

수학Ⅱ(상)
EXTENSION
기출의 파급효과

수학Ⅱ(상)

저자의 말

1. 기출의 파급효과 standard에는 수학Ⅱ 기출을 푸는 데 필수적인 태도와 도구만을 모두 정리했습니다.
1년 동안 열심히 공부한 학생이 현장에서 평가원 문제를 틀리는 이유는 개념이 부족해서가 아니라, 조건이 필연적으로 요구하는 태도와 도구가 없기 때문입니다. 따라서 각 Chapter를 교과서 목차를 따르지 않고 기출을 푸는데 필요한 태도와 도구를 바탕으로 작성했습니다.

2. 분권의 이유
'미적분도 아니고 수학Ⅱ 수준에서 분권이 필요할 정도의 분량이 나올 수 있나?' 하는 의문이 들 수도 있습니다. 분권에는 크게 두 가지 이유가 존재하는데,

(1) 필수적이지만 교과서에는 없는 Chapter의 존재
〈Chapter 3. 다양한 정리와 함수의 극대, 극소〉, 〈Chapter 4. 다항함수, 대칭성〉, 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉, 〈Chapter 10. 복합적 개념이 포함된 킬러 문항〉 다섯 개의 챕터는 교과서에 없지만 중요한 태도와 도구를 정리한 챕터입니다.

특히 〈Chapter 6. 함수의 방정식vs항등식vs부등식〉, 〈Chapter 9. 합성함수와 역함수〉는 저학년 과정에서 모두 배우는 내용이지만 방정식, 항등식, 부등식, 합성함수, 역함수의 대강의 '느낌'만 가진 채 실제 문제에서 '어떻게' 처리해야 하는지 모르는 학생이 많아 독립된 챕터를 구성했습니다. 따라서 실제 수학Ⅱ 교육과정에서 직접적으로 다루는 내용보다 훨씬 많은 내용을 다룹니다.

(2) 자세한 해설
기출 해설을 정말 자세히 썼습니다.

어떤 조건부터 적용해야 하는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 할 수밖에 없는지,
이 조건을 보고 왜 이러한 생각을 하면 안 되는지,
여기서 왜 식으로 풀어야 하는지,
여기서 왜 그래프로 풀어야 하는지에 관한 내용을 다 담았습니다.

'딱딱하고', '불친절하게' 해설하면 분량은 많이 줄일 수 있겠으나, 그 경우 '기출의 파급효과'를 선택하는 의미가 퇴색되죠. 진정한 기출 분석은 위와 같은 질문에 모두 답할 수 있게끔 공부하는 것이기에 최대한 해설을 자세하게 썼습니다.

따라서 위의 두 가지 이유로 불가피하게 분권하게 되었습니다. 추천하는 것은 상하권을 순차적으로 학습하는 것이지만 본인이 어느 한 권에 해당하는 내용에는 자신이 있으면 다른 한 권만 공부하셔도 됩니다.

3. 최중요 준킬러 이상급의 기출을 기출의 파급효과 standard 칼럼 예제로 들어 칼럼에서 배운 태도와 도구를 바로 활용할 수 있도록 하였습니다.

칼럼 속 태도와 도구가 킬러, 준킬러에서 어떻게 보편적으로 이용되는지 직접 확인한다면 태도와 도구들이 더욱 와닿을 것입니다. 어떠한 한 문제에만 적용되는 특수한 스킬 같은 것이 아닙니다. 예제로 든 평가원 기출을 태도와 도구뿐만 아니라 진화 단계별로도 배치했습니다. 예제들을 '순서대로' 풀다보면 자연스럽게 기출의 진화과정을 느낄 수 있습니다. 태도와 도구 정리가 완성되면 최종 진화 형태인 후반부의 최신 기출문제는 혼자 clear 할 수 있고 이에 대한 보람을 느끼실 겁니다.

4. 선별 문항

교육청 및 사관학교 문제가 진화한 형태가 평가원에 출제되고 있습니다. 따라서 기존 평가원 기출만을 푸는 것만으로 매년 빠르게 발전하는 수능을 대비하기에는 부족합니다. 하지만 교육청 및 사관학교 문제들까지 모두 풀자니 양이 너무 많습니다. 이를 해결하기 위해 핵심적인 평가원, 교육청, 사관학교 문제를 필요한 만큼만 선별했습니다. 기출의 파급효과 수학II standard에는 평가원, 교육청, 사관학교, 경찰대 기출 중 가장 핵심이 되는 150문제를 담았습니다. 경찰대 문제는 매우 적습니다. **standard 수학II(상) 90문제, standard 수학II(하) 60문제입니다.**

※ 문제 좌표에서 '가형' 또는 'B형' 또는 '자연계'라고 표시된 것을 제외하면 전부 나형' 또는 'A형' 또는 '인문계' 기출입니다.

5. 더 많은 좋은 기출을 풀어보고 싶은 학생들을 위하여 기출의 파급효과 extension도 준비하였습니다.

기출의 파급효과 extension은 기출에 대한 태도와 도구를 체화하기 위해 예제보다는 다소 쉬운 유제 **extension 수학II(상) 158문제, extension 수학II(하) 116문제**로 구성되어 있습니다. extension의 유제는 연도순으로 배치되어있습니다.

standard와의 호환성을 위하여 extension에 담긴 기출 역시 standard의 목차를 따릅니다. **standard를 학습한 학생들이라면 extension을 워크북처럼 이용하시면 됩니다. standard 학습을 하면서 extension도 병행한다면 효과도 배가 될 것입니다.** standard를 잘 학습하셨다면 extension에 담긴 기출도 무리 없이 풀릴 겁니다.

standard를 학습하고 더 이상의 기출보단 n제로 학습하길 희망하는 학생들은 n제로 넘어가셔도 좋습니다. standard로 정말 중요한 기출을 거의 다 본 것이나 마찬가지이기 때문입니다.

짧거나 쉬운 Chapter는 2~3일을 잡으시고 길거나 어려운 Chapter는 6~7일 정도를 잡으시면 됩니다.
이를 따른다면 교재를 빠르면 한 달 내로 늦어도 두 달 내로 완료할 수 있을 것입니다.

개념을 한 번 떼고 쉬운 3~4점 n제(쎈 등)를 완료한 후 혼자 힘으로 할 수 있는 만큼 기출을 한 번 정도 열심히 풀고 기출의 파급효과를 시작하면 효과가 좋을 것입니다.

9월 평가원을 응시하기 전에 standard와 extension을 '제대로' 1회독을 완료하기만 해도 실력이 부쩍 늘어나 있을 것입니다. 9월 평가원 이후 수능 전까지는 기출의 파급효과에서 잘 안 풀렸던 기출 위주로 다시 풀며 끊임없이 실전 모의고사로 실전 연습을 한다면 수능 때도 분명 좋은 결과가 있을 것입니다.

수학 1등급, 아직 늦지 않았습니다. 마지막으로 한 번쯤 봐야 할 기출, 기출의 파급효과와 함께 합시다.

Chapter

04

다항함수, 대칭성

유제

01 01학년도 수능 11번

삼차함수 $y=f(x)$가 서로 다른 세 실수 a, b, c에 대하여

$$f(a)=f(b)=0,\ f'(a)=f'(c)=0$$

을 만족시킨다. c를 a와 b로 나타내면? [2점]

① $a+b$ ② $\dfrac{a+b}{2}$ ③ $\dfrac{a+b}{3}$

④ $\dfrac{a+2b}{3}$ ⑤ $\dfrac{2a+b}{3}$

02 05학년도 6월 평가원 가형 15번

세 실수 a, b, c에 대하여 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$$

일 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $a=b=c$이면, 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖는다.

ㄴ. $a=b\neq c$이고 $f(a)<0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

ㄷ. $a<b<c$이고 $f(b)<0$이면, 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

03 06학년도 사관 가형 15번

실수 전체의 집합에서 정의된 다항함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하고, 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)$를 만족한다. 이 함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & (x\neq 0)\\ f'(0) & (x=0)\end{cases}$$

으로 정의하자. <보기>에서 함수 $g(x)$에 대한 설명으로 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

<보 기>

ㄱ. 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=g(x)$이다.

ㄷ. 함수 $g(x)$는 일차함수이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

04 06학년도 9월 평가원 가형 6번

등차수열 $\{x_n\}$과 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. 수열 $\{f'(x_n)\}$은 등차수열이다.

ㄴ. 수열 $\{f(x_{n+1})-f(x_n)\}$은 등차수열이다.

ㄷ. $f(0)=3$, $f(2)=5$, $f(4)=9$이면 $f(6)=15$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

05 07학년도 6월 평가원 가형 9번

세 다항함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $f(0)=0$이면 $f'(0)=0$이다.

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g(x)=g(-x)$이면 $g'(0)=0$ 이다.

ㄷ. 모든 실수 x에 대하여 $|h(2x)-h(x)| \le x^2$ 이면 $h'(0)=0$ 이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

06 07학년도 사관 가형 28번

삼차함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 모두 만족한다.

(가) 곡선 $y=f(x)+1$은 $x=1$에서 x축에 접한다.

(나) 곡선 $y=f(x)-1$은 $x=-1$에서 x축에 접한다.

이 때, $f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

07 07년 7월 교육청 가형 22번

원점을 지나는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $y=f(x)$가 다음 두 조건을 만족한다.

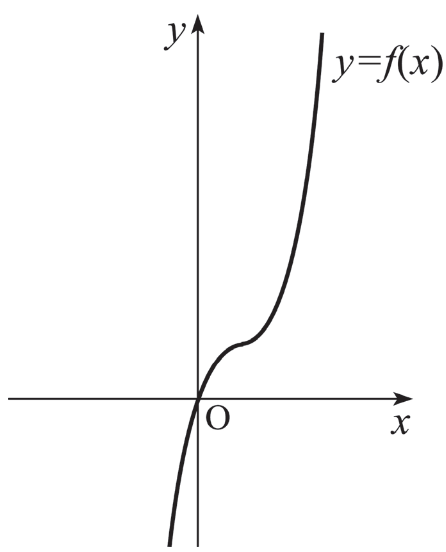
(가) $f(2+x)=f(2-x)$

(나) $x=1$에서 극솟값을 갖는다.

이때, $f(x)$의 극댓값을 a라 할 때, a^2의 값을 구하시오. [4점]

08 07년 10월 교육청 가형 25번

그림은 삼차함수 $f(x)=x^3-3x^2+3x$의 그래프이다.



원점을 지나고 곡선 $y=f(x)$에 접하는 직선은 두 개다.

두 접선과 곡선 $y=f(x)$의 교점 중 원점이 아닌 점들의 x좌표의 합을 S라 하자. 이때, $10S$의 값을 구하시오. [4점]

09 09학년도 6월 평가원 가형 23번

모든 계수가 정수인 삼차함수 $y=f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

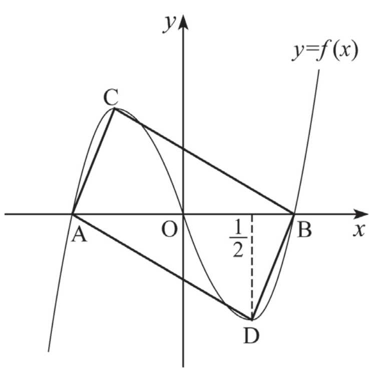
(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=-f(x)$이다. (나) $f(1)=5$ (다) $1<f'(1)<7$

함수 $y=f(x)$의 극댓값은 m이다. m^2의 값을 구하시오. [3점]

10 08년 10월 교육청 가형 7번

그림은 원점 O에 대하여 대칭인 삼차함수 $f(x)$의 그래프이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 만나는 점 중 원점이 아닌 점을 각각 A, B라 하고, 함수 $f(x)$의 극대, 극소인 점을 각각 C, D라 하자.

점 D의 x좌표가 $\frac{1}{2}$이고 사각형 ADBC의 넓이가 $\sqrt{3}$일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값은? [3점]



① 1　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{5}{3}$　④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$　⑤ $\sqrt{2}$

11 10학년도 수능 가형 8번

실수 a에 대하여 집합

$\{x \mid ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0,\ x$는 실수$\}$의

원소의 개수를 $f(a)$라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

<보 기>

ㄱ. $\lim_{a\to 0} f(a)=f(0)$

ㄴ. $\lim_{a\to c+} f(a) \neq \lim_{a\to c-} f(a)$인 실수 c는 2개다.

ㄷ. 함수 $f(a)$가 불연속인 점은 3개이다.

① ㄴ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄴ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

12 10년 10월 교육청 가형 7번

삼차식 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} 3 & (x<-1) \\ f(x) & (-1 \le x \le 1) \\ -1 & (x>1) \end{cases}$$

로 정의하자. 함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $g'(-1)=g'(1)$

ㄴ. 모든 실수 x에 대하여 $g'(x) \le 0$

ㄷ. 함수 $g'(x)$의 최솟값은 -2이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

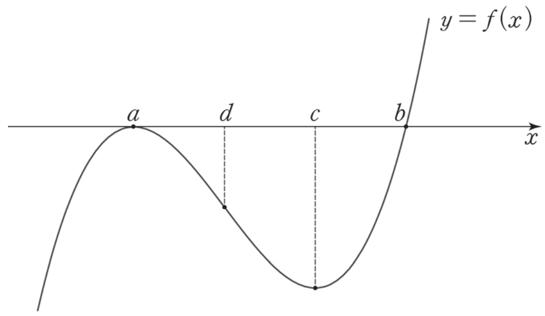
CHAPTER

04 해설

01 01학년도 수능 11번

답 : ④

1. 주어진 조건에 따라 그래프를 그려 보자. a, b의 대소관계에 관한 조건은 없으므로 대소관계와 상관 없이 답이 나올 것이다. $a<b$인 그래프를 그리자.



2. 삼차함수 비율을 이용하자. 변곡점의 x좌표를 d 라 하면 $b-c=c-d=d-a$가 성립한다.

   즉, $(b-c):(c-a)=1:2$이다. 이 식을 풀면 $c=\dfrac{a+2b}{3}$이다.

   ※ 혹은 내분점 공식을 이용해도 좋다. 점 $(c, 0)$은 점 $(a, 0)$과 점 $(b, 0)$의 $2:1$ 내분점이므로 $c=\dfrac{2b+a}{2+1}=\dfrac{a+2b}{3}$이다.

02 05학년도 6월 평가원 가형 15번

답 : ⑤

사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$의 식이 인수분해된 형태로 제시되었다. a, b, c에 대해 주어진 바는 없으므로 바로 보기로 들어가자.

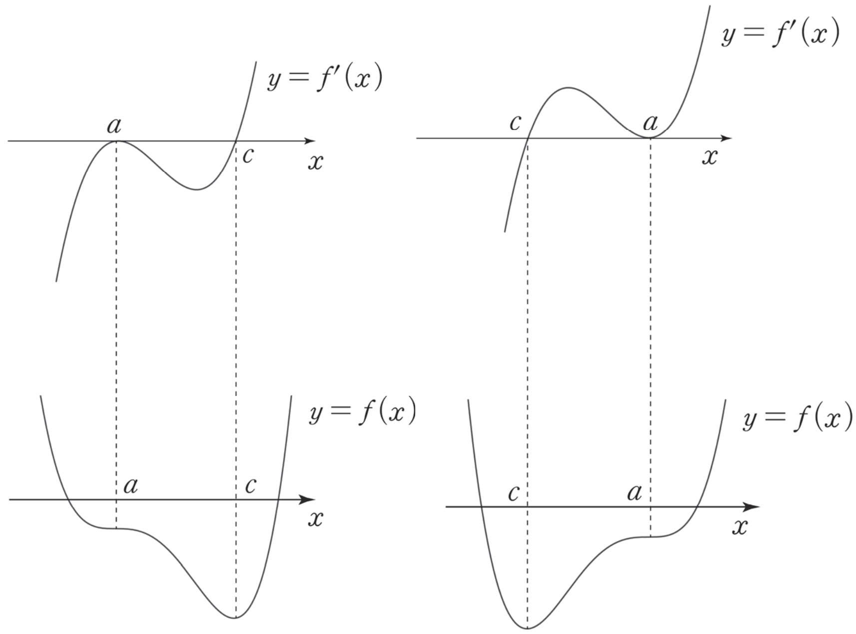
1. $f'(x)=(x-a)^3$이므로 $f(x)=\dfrac{(x-a)^4}{4}+C$ (C는 적분상수)이다.

   $C>0$인 경우 방정식 $f(x)=0$은 실근을 갖지 않는다. (X)

   ※ 그래프 판단

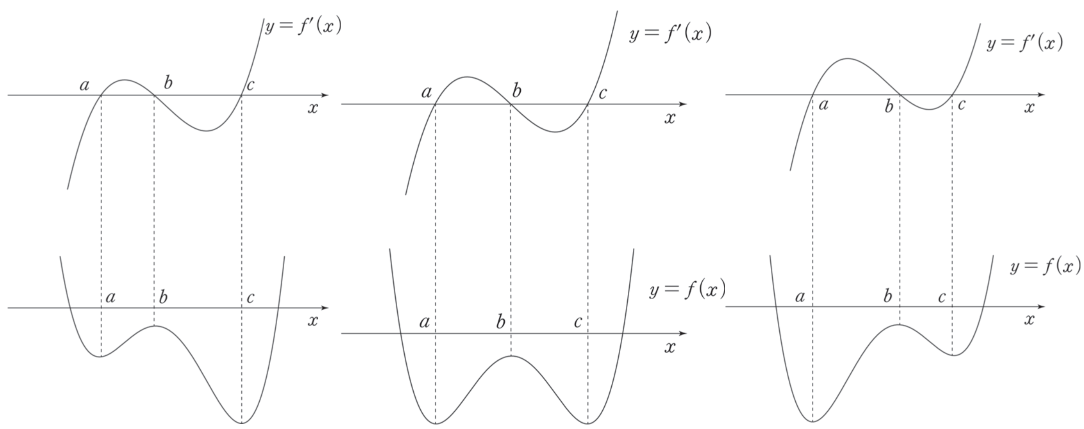
   $f'(x)=(x-a)^3$인 경우 사차함수 $f(x)$는 아래로 볼록한 이차함수와 비슷한 그래프 개형을 가진다. 이러한 그래프는 x축과 만나지 않을 수 있으므로 ㄱ은 틀렸다.

2. $f'(x)=(x-a)^2(x-c)$이다. $y=f'(x)$ 그래프를 통해 $y=f(x)$ 그래프를 그려보자. a, c의 대소관계는 알 수 없으므로 두 가지 개형이 가능하다.



$a=b\neq c$ 이고 $f(a)<0$ 이면 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (O)

3. $f'(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ $(a<b<c)$이다. $y=f'(x)$ 그래프를 통해 $y=f(x)$ 그래프를 그려보자.



⟨Chapter 4⟩에서 배웠듯이 b가 a와 c 중 어느 것에 더 가까이 있는지에 따라 $y=f'(x)$의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 달라지므로 $y=f(x)$의 두 극솟값 $f(a)$와 $f(c)$의 대소관계도 달라질 수 있다. 그러나 두 극솟값의 대소관계와 상관없이 $f(b)<0$이면 방정식 $f(x)=0$ 은 서로 다른 두 실근을 갖는다. (O)

옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

03 06학년도 사관 가형 15번

답 : ③

(ㄱ), (ㄴ) 선지는 두 가지 풀이가 가능하다. 첫 번째 풀이부터 살펴보자.

<첫 번째 풀이>

모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)$이므로 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=2f(0)$이다.
즉, $f(0)=0$이다. 다항함수 $f(x)$에 대해 $f(0)=0$이므로 $f(x)=xh(x)$이다. (단, $h(x)$는 다항함수)
따라서 $g(x)=\begin{cases} h(x) & (x\neq 0) \\ h(0) & (x=0) \end{cases}$ 이다. ($f'(x)=h(x)+xh'(x)$이므로 $f'(0)=h(0)$이다.)

이를 바탕으로 (ㄱ), (ㄴ) 선지를 판단하자.

1. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=h(0)$이고, $g(0)=h(0)$이다. $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=g(0)$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (O)

2. $g(x)=h(x)$이므로 $g(2x)=h(2x)$이고, $g(x)=h(x)$이다. 그러므로 모든 실수 x에 대해서 $h(2x)=h(x)$인지 판단하면 된다.

   $x=0$일 때 : $h(0)=h(0)$이므로 등식이 성립한다.
   $x\neq 0$일 때 : $f(2x)=2f(x)$에 $f(x)=xh(x)$를 대입하면, $2xh(2x)=2xh(x)$이므로
   양변을 $2x$로 나누면 $h(2x)=h(x)$이다.

   따라서 모든 실수 x에 대해서 $g(2x)=g(x)$이다. (O)

<두 번째 풀이>

1. 연속의 정의를 이용하자. $\lim\limits_{x\to 0-}g(x)=\lim\limits_{x\to 0+}g(x)=g(0)$이면 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

   $g(x)=\begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & (x\neq 0) \\ f'(0) & (x=0) \end{cases}$ 이므로 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$을 만족하면
   함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

   ※ $\lim\limits_{x\to 0}$은 $x\neq 0$을 내포하므로 $\dfrac{f(x)}{x}$에 $\lim\limits_{x\to 0}$을 취할 수 있다.

   항등식 $f(2x)=2f(x)$의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이다.
   따라서 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$이므로 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이다. (O)

2. $g(x)$는 구간에 따라 정의된 함수이므로 $g(x)$에 관한 항등식도 당연히 구간에 따라 판정해야 한다.

ⅰ) $x=0$일 때 : $g(0)=g(0)$이므로 등식이 성립한다.

ⅱ) $x \neq 0$일 때 : $g(2x)=\dfrac{f(2x)}{2x}$

$f(2x)=2f(x)$이므로 $g(2x)=\dfrac{f(2x)}{2x}=\dfrac{2f(x)}{2x}=\dfrac{f(x)}{x}=g(x)$이다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 $g(2x)=g(x)$이다. (O)

3. (ㄷ) 선지도 두 가지 풀이가 가능하다.

(1) 귀류법을 이용하자.

함수 $g(x)$가 일차함수라고 가정한다면, $g(x)=ax+b\,(a \neq 0)$이다. 선지 (ㄴ)에서 구한 항등식 $g(2x)=g(x)$에 $g(x)$의 식을 대입하여 이를 판정하자.

$a(2x)+b=ax+b$

위 등식이 모든 실수 x에 대해 성립할 조건은 $a=0$이므로 $g(x)$는 일차함수가 아니다. (X)

※ **귀류법 :** 어떤 명제가 참임을 보여주기 위해, 명제의 결론을 부정함으로써 모순이 발생함을 보여주어 해당 명제의 결론이 참임을 보여주는 방법.

(2) 최고차항 설정 후 대입

차수와 계수가 알려지지 않은 다항함수 $f(x)$를 포함한 항등식 $f(2x)=2f(x)$이 제시되었으므로 계수 비교법을 이용하여 차수와 계수를 알아낼 수 있다.

$f(x)$의 최고차항을 ax^n($a \neq 0$, n은 음이 아닌 정수)으로 놓고 최고차항만 항등식에 대입한 다음 양변의 최고차항을 비교하자.

※ 단, $f(x)=0$인 경우는 따로 체크해야 한다. $f(x)=0$일 때도
$f(2x)=2f(x)$이므로 $f(x)=0$도 가능하다. (여기서 $g(x)=0$이 되므로
사실 반례가 벌써 등장한 셈이다.)

좌변의 최고차항 : $a(2x)^n$·
우변의 최고차항 : $2ax^n$
계수 비교법을 적용하면 $a \cdot 2^n=2a$이다.

$a \neq 0$이므로 $n=1$이다. 따라서 $f(x)$는 일차함수이다.

$f(x)$의 전체 식을 알기 위해 $f(x)=ax+b\,(a \neq 0)$을 $f(2x)=2f(x)$에 대입하면
$2ax+b=2ax+2b$

위 등식이 모든 실수 x에 대해 성립하려면 $b=0$이어야 한다. 즉, $f(x)=ax$이다.

따라서 $f(x)=ax\ (a\neq 0)$ **또는** $f(x)=0$**이다.** 이를 $g(x)$의 식에 대입하면 어느 경우든 $g(x)$는 상수함수이므로 ㄷ은 틀렸다. (X)

옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

comment

1. 문제를 출제 의도대로 푸는 데에 **최고차항 설정 후 대입 도구**는 필요하지 않다. 그럼에도 불구하고 ※에서 이 도구를 적용한 것은 본문 내용을 일관되게 적용하기 위함이고, 문제를 좀 더 다채롭게 분석하기 위함이다.

2. 도구 : $f(x)$에 관한 항등식이 제시되었다면 최고차항 대입을 통해 차수와 최고차항 계수를 알아내는 것뿐만 아니라, $f(x)$의 전체 식을 대입하여 다른 계수에 관한 정보도 얻을 수 있다.

04 06학년도 9월 평가원 가형 6번

답 : ⑤

수학 I 에서 수열을 '자연수의 집합을 정의역으로 하는 함수'로 볼 수 있다는 점을 배웠을 것이다. 혹시나 몰랐다면 반드시 알아두자.

첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열의 일반항은 $a+(n-1)d$이므로 **등차수열은 자연수 n에 대한 일차 이하의 다항식**이다. 따라서 (ㄱ), (ㄴ)에서 수열의 등차수열 여부를 판정해야 하는 상황에서, **수열의 일반항이 n에 대한 일차 이하의 다항식 꼴**인지 확인해주면 된다. 등차수열 $\{x_n\}$의 일반항을 $pn+q$로 놓고 들어가자.

1. $f'(x)=2ax+b$이고, $x_n=pn+q$이다.
   $f'(x_n)=2a(pn+q)+b=2apn+2aq+b$
   따라서 수열 $\{f'(x_n)\}$은 n에 대한 일차 이하의 다항식이다. (O)

2. $x_n=pn+q$, $x_{n+1}=pn+p+q$이다. ㄱ에서 한 것처럼 $f(x)$의 x 자리에 x_{n+1}과 x_n을 대입하여 계산해도 되지만 계산량이 많다. 여기서 센스를 발휘할 필요가 있다. 절대 뜬금없는 발상이 아닌 필연적인 센스다.

   수열의 일반항이 n에 대한 일차 이하의 다항식이기만 하면 해당 수열은 등차수열이다. 이를 다시 해석하면, **수열의 일반항이 이차 이상의 항을 단 하나라도 갖지 않는다면 해당 수열은 등차수열이다.**

   $f(x_{n+1})$에서 최고차항은 $a(pn)^2$이다. $f(x_n)$에서 최고차항 역시 $a(pn)^2$이다.
   따라서 $f(x_{n+1})-f(x_n)$의 최고차항의 차수는 일차 이하이므로
   수열 $\{f(x_{n+1})-f(x_n)\}$은 일차 이하의 다항식이다. (O)

3. $f(0)=3$, $f(2)=5$, $f(4)=9$을 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대입하여 미지수 a, b, c의 값을 알아내고 $f(6)$을 구할 수도 있지만, 출제 의도는 이것이 아니다. 이렇게 푼다면 ㄱ, ㄴ의 의미는 무색해진다. **ㄱㄴㄷ문항에서 ㄱㄴ보기는 ㄷ보기를 위한 초석이자 힌트이다.** 이 태도를 잊지 말자.

   이전 보기에서 등차수열과 이차함수의 관계를 물었으므로 (ㄷ)에서도 당연히 등차수열과 이차함수의 관계를 물을 것이다. $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=4$라고 할 때, 수열 $\{x_n\}$은 등차수열이다.
   따라서 (ㄴ)에 의해 수열 $\{f(x_{n+1})-f(x_n)\}$ 또한 등차수열이다.
   $f(x_2)-f(x_1)=f(2)-f(0)=2$
   $f(x_3)-f(x_2)=f(4)-f(2)=4$
   $f(x_4)-f(x_3)=f(6)-f(4)=6$

   $\therefore f(6)=6+f(4)=15$ (O)

ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳다.

05 07학년도 6월 평가원 가형 9번

답 : ⑤

1. 반례는 수없이 많다. 다항함수 $f(x)$에 대해 $f(0)$은 상수항, $f'(0)$은 일차항의 계수를 의미하는데, 상수항이 0이라고 해서 일차항의 계수가 0이라는 보장은 없다. (X)

2. ⅰ) **$y=g(x)$의 그래프로 따지기 :** $g(x)$는 우함수다. y축에 대칭인 다항함수 그래프 개형을 직접 그려보면 $g'(0)=0$을 직관적으로 파악할 수 있다. $g'(0)\neq 0$인 경우를 그려봐도 y축에 대칭되는 그래프를 그릴 수 없음을 알 수 있다.

   ⅱ) **$y=g'(x)$의 그래프로 따지기 :** 다항함수 $g(x)$는 우함수이므로 $g'(x)$는 실수 전체의 집합에서 정의된 기함수다. $x=0$에서 정의된 기함수는 항상 원점을 지나므로 $g'(0)=0$이다.

   ⅲ) **식으로 따지기 :** 그래프로 따지는 것이 시원찮다면 식으로 따질 수도 있다. 다항함수 $g(x)$는 우함수이므로 $g(x)$의 함수식은 짝수차항만으로 구성된다. $g(x)=\cdots+ax^4+bx^2+c$라 할 때, $g'(x)=\cdots+4ax^3+2bx$이므로 $g'(0)=0$이다. (O)

3. **조건 간 관계**를 살피자. $h'(0)$과 $|h(2x)-h(x)|\leq x^2$의 관계에서 미분계수의 정의가 떠올라야 한다. $\lim_{x\to 0}\dfrac{h(2x)-h(x)}{2x-x}=h'(0)$을 이용하자. **$\dfrac{0}{0}$꼴의 극한식이 미분가능한 함수의 평균변화율 형태라면 극한값은 미분계수**이다. – 〈Chapter 2〉
   $|h(2x)-h(x)|\leq x^2$, $-x^2\leq h(2x)-h(x)\leq x^2$

   미분계수의 정의를 이용하기 위해 양변을 x로 나눠야 한다. 이때, x의 부호에 유의하자.

   ※ 부등식을 변수로 나눌 때는 변수의 부호에 유의해야 한다.

우선, 나누는 수가 0이면 안되므로 $x \neq 0$이다.

$x>0$인 경우 부등식의 양변을 x로 나누면 $-x \leq \dfrac{h(2x)-h(x)}{2x-x} \leq x$이다.

$x<0$인 경우 부등식의 양변을 x로 나누면 부등호 방향이 바뀌므로

$x \leq \dfrac{h(2x)-h(x)}{2x-x} \leq -x$이다.

$\displaystyle\lim_{x\to 0}$**은** $(x \neq 0)$**을 내포하므로 부등식에** $\displaystyle\lim_{x\to 0}$**을 취할 수 있다.**

$x>0$인 경우 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}(-x) \leq \lim_{x\to 0+}\frac{h(2x)-h(x)}{2x-x} \leq \lim_{x\to 0+}(x)$

$x<0$인 경우 $\displaystyle\lim_{x\to 0-}(x) \leq \lim_{x\to 0-}\frac{h(2x)-h(x)}{2x-x} \leq \lim_{x\to 0-}(x)$

샌드위치 정리에 의해 $\displaystyle\lim_{x\to 0+}\frac{h(2x)-h(x)}{2x-x} = \lim_{x\to 0-}\frac{h(2x)-h(x)}{2x-x} = h'(0)=0$ (O)

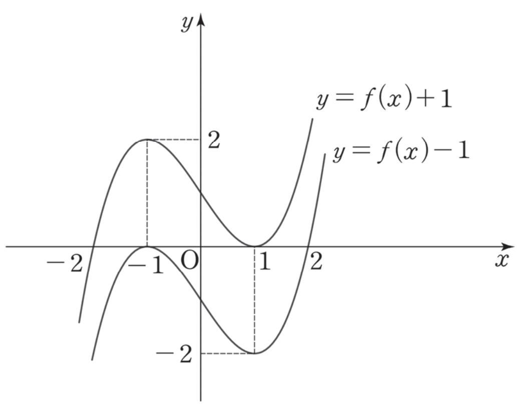
옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

06 07학년도 사관 가형 28번

답 : 26

1. 〈Chapter 4〉의 삼차함수 파트를 잘 공부했는지 확인할 수 있는 문항이다. 조건 자체는 간단하기에 단순하게 풀고자 하면 (가) 조건을 통해 $f(1)=-1,\ f'(1)=0$을 도출하고 (나) 조건을 통해 $f(-1)=1,\ f'(-1)=0$을 도출해서 풀면 된다. 삼차함수는 미지수 4개를 포함하므로 4개의 조건을 통해 4개의 미지수를 모두 밝혀낼 수 있다.

2. 그러나 위의 풀이를 익히자고 이 책을 공부하는 것은 아닐 것이다. 본문에서 배운 **삼차함수의 그래프 특징**을 이용해 보자. (가), (나) 조건을 그래프로 표현하면 다음과 같다.



$y=f(x)-1$의 그래프는 $y=f(x)+1$의 그래프를 y축 방향으로 -2만큼 평행이동한 것이므로 $y=f(x)+1$는 $x=-1$에서 극댓값 2을 갖는다. $y=f(x)+1$의 그래프를 -2만큼 내렸을 때 $x=-1$에서 x축에 접해야 하기 때문이다.

3. 그래프를 바탕으로 $y=f(x)+1$의 식을 작성하자. **삼차함수** $1:1:1$ **비율**에 의해 함수 $y=f(x)+1$이 x축과 만나는 또 다른 점의 x좌표는 -2이다.

$f(x)+1=a(x+2)(x-1)^2$

$y=f(x)+1$은 $(-1,2)$를 지나므로 $a\times1\times(-2)^2=2$. $a=\dfrac{1}{2}$

※ 주의 : $f(-1)=2$로 실수하지 말자. 우리가 다루는 함수는 $y=f(x)+1$이지 $y=f(x)$가 아니다.

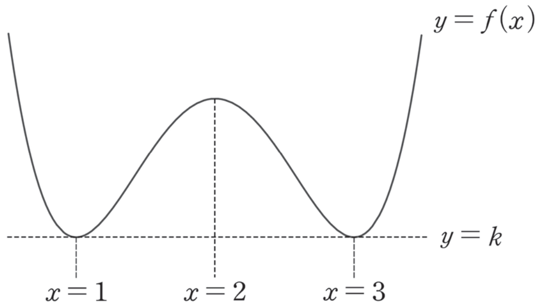
$\therefore f(x)+1=\dfrac{1}{2}(x+2)(x-1)^2$

$f(4)+1=\dfrac{1}{2}\times6\times9$이므로 $f(4)=26$

07 07년 7월 교육청 가형 22번

답 : 64

1. (가)에 의해 함수 $f(x)$의 그래프는 $x=2$에 대하여 대칭이다. (나)에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극솟값을 가지므로 $y=f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



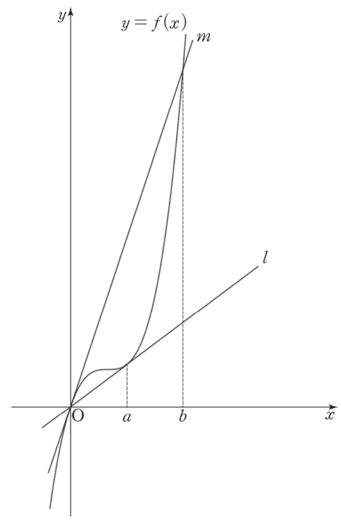
2. $f(x)$의 극솟값을 k라 할 때, 차이함수를 이용해주면 $f(x)-k=(x-1)^2(x-3)^2$
$f(x)$는 원점을 지나므로 $f(0)=0$이다. 따라서 $f(0)-k=9$이므로 $k=-9$

$\therefore f(x)+9=(x-1)^2(x-3)^2$

$f(x)$는 $x=2$에서 극댓값을 가지므로 $a=f(2)=1-9=-8$
$a^2=64$이다.

08 07년 10월 교육청 가형 25번

답 : 45

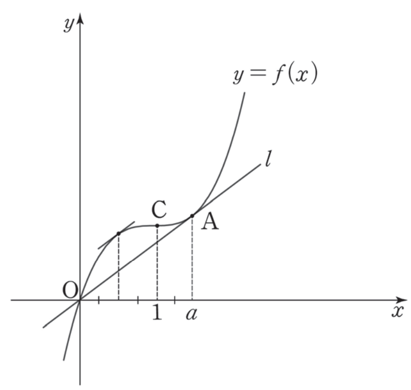


1. 원점을 지나고 함수 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$에 접하는 직선은 두 개 존재한다.

   원점을 지나고 곡선과 $x = a$에서 접하는 직선을 l,
   곡선과 원점에서 접하고 $x = b$에서 만나는 직선을 m이라 하자.

   두 접선과 곡선 $y = f(x)$의 교점 중 원점이 아닌 점들의 x 좌표의 합 $S = a + b$이다.

   두 접선의 방정식을 구한 다음 이를 $f(x)$와 연립하여 a, b 값을 구할 수도 있지만, **삼차함수 비율과 비율 확장 내용을 적극 활용하자.** 그래프를 그리자마자 비율 반응이 왔다면 Good.

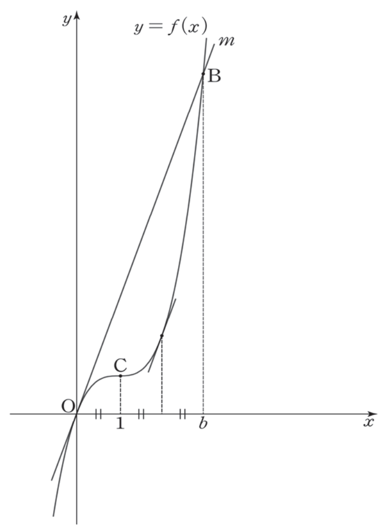


2. 삼차함수와 접선이 이루는 $1:1:1$ 비율을 이용하자.
   $f''(1) = 0$이므로 변곡점의 x좌표는 1이다.
   ※ 삼차함수 $f(x)$의 변곡점의 x좌표는 $f''(x) = 0$을 만족하는 x이다.

① (점 A의 x좌표와 변곡점 C의 x좌표의 차):
(변곡점 C의 x좌표와 점 O의 x좌표의 차)$=$ $1:2$

점 A의 x좌표를 a라 할 때 $2(a-1) = 1$

$\therefore a = \dfrac{3}{2}$



② (점 O의 x좌표와 변곡점 C의 x좌표의 차):
(변곡점 C의 x좌표와 점 B의 x좌표의 차)$=$ $1:2$

점 B의 x좌표를 b라 할 때 $2 = b - 1$
$\therefore b = 3$

3. 따라서 $S = a + b = \dfrac{3}{2} + 3 = \dfrac{9}{2}$이므로 $10S = 45$이다.

comment

'(변곡점의 x좌표)$\times 3 =$ 삼차방정식의 세 근의 합' 공식을 이용하여 a, b의 값을 구해도 좋다.

$3 = 0 + a + a$, $3 = 0 + 0 + b$에서 $a = \dfrac{3}{2}, b = 3$이다.

09 09학년도 6월 평가원 가형 23번

답 : 32

문제에서 주어진 '모든 계수가 정수인'에 밑줄 긋고 시작하자. 자연수, 정수, 양수, 음수 따위의 조건도 다른 조건 못지않게 중요하다.

1. (가)에 의해 $f(x)$는 기함수이다. 따라서 $f(x)=ax^3+bx$ (단, $a \neq 0$, a, b는 상수)

2. (나)에 의해 $a+b=5$이다.
   $f'(x)=3ax^2+b$이므로 (다)에 의해 $1<3a+b<7$이다.

   $a+b=5$를 이용해 부등식을 a에 관해 정리하자.
   $b=5-a$이므로 $1<2a+5<7$, $-2<a<1$

   a는 정수이므로 가능한 a의 값은 0, -1이다. 그런데 $f(x)$가 삼차함수이므로 $a \neq 0$이다.
   따라서 $a=-1$이고 $b=6$이다.

3. 식을 다시 쓰면 $f(x)=-x^3+6x$, $f'(x)=-3x^2+6$이므로 $f(x)$는 $x=\sqrt{2}$에서 극대이다.
   $m=f(\sqrt{2})=-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}=4\sqrt{2}$이므로 $m^2=32$이다.

10 08년 10월 교육청 가형 7번

답 : ①

1. 삼차함수 $f(x)$가 원점 O에 대하여 대칭이므로 $f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(0,0)$이다. 또한, x축이 $f(x)$의 변곡점을 지나가므로 점 B의 x좌표를 b라 하면 삼차함수의 $1:\sqrt{3}$ 비율에 의해 $\frac{1}{2}:b=1:\sqrt{3}$이다. 따라서 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$이고, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$이다.

2. 사각형 ADBC의 넓이는 삼각형 ABC의 넓이의 2배이다.
   (사각형 ADBC의 넓이)$=$(삼각형 ABC의 넓이)$\times 2=\sqrt{3}\times f(c)\times\frac{1}{2}\times 2=\sqrt{3}$
   $f(c)=1$, $f(x)$의 극댓값$=f(c)=1$이다.

11 10학년도 수능 가형 8번

답 : ④

$f(a)$는 **새롭게 정의한 함수**이다.

새롭게 정의한 함수의 정의역과 치역의 실질적 의미를 빠르게 흡수하자.

정의역 : 실수 a

치역 : 방정식 $ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$의 실근의 개수

$f(a)$에서는 변수가 a이지만, 방정식 내에서 변수는 x이고 a는 상수다. 또한 $f(a)$의 치역은 실근의 '값'이 아닌 '개수'라는 점이 포인트다.

$ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$은 x에 관한 이차방정식처럼 보이지만 그렇지 않다. a가 0일 가능성도 있기 때문이다. **다항함수 또는 다항식이 제시되었을 때 차수와 최고차항의 계수 파악은 필수적**이다.

따라서 CASE를 분류하자.

i) $a=0$**일 때 : 일차방정식**

$ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$, $-4x+2=0$

$x=\dfrac{1}{2}$이므로 실근의 개수는 1이다.

ii) $a\neq 0$**일 때 : 이차방정식**

$ax^2+2(a-2)x-(a-2)=0$은 이차방정식이므로 실근의 개수는 판별식으로 따진다.

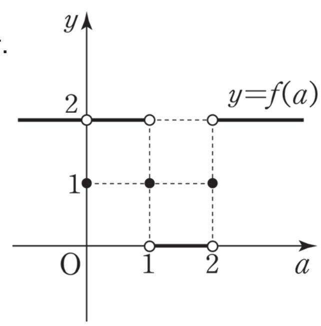
$$\frac{D}{4}=(a-2)^2+a(a-2)=2a^2-6a+4=2(a-2)(a-1)$$

방정식은 $a<1$ 또는 $a>2$일 때 서로 다른 두 실근을 갖고,

$a=1$ 또는 $a=2$일 때 중근을 갖고, $1<a<2$일 때 허근을 갖는다.

i)과 ii)를 종합하면, a에 관한 함수 $f(a)$의 식과 그래프는 다음과 같다.

$$f(a)=\begin{cases}2 & (a<0)\\ 1 & (a=0)\\ 2 & (0<a<1)\\ 1 & (a=1)\\ 0 & (1<a<2)\\ 1 & (a=2)\\ 2 & (a>2)\end{cases}$$



함수 $y=f(a)$의 그래프를 바탕으로 보기를 판단하자.

1. $\lim\limits_{a\to 0}f(a)=2$, $f(0)=1$이다. (X)
2. 함수 $f(a)$의 우극한과 좌극한이 다른 a 값을 묻고 있다. 그래프를 관찰하면 $a=1$과 $a=2$에서 우극한과 좌극한이 다르다. (O)
3. 함수 $f(a)$는 $a=0$, $a=1$, $a=2$에서만 불연속이다. (O)

옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

12 10년 10월 교육청 가형 7번

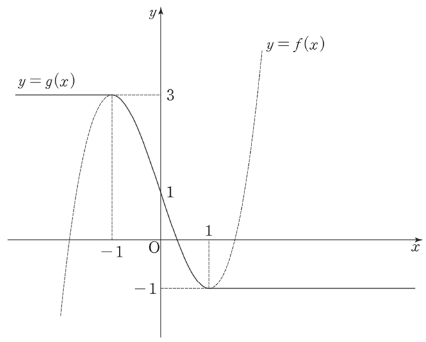
답 : ②

$$g'(x)=\begin{cases}0 & (x<-1, x>1)\\ f'(x) & (-1<x<1)\end{cases}$$

함수 $g(x)$가 모든 실수에서 미분가능하므로 $g(x)$는 $x=-1$, $x=1$**에서 미분가능**하다. 따라서 $x=\pm1$에서 $g(x)$의 함숫값과 극한값은 일치하고(미분가능은 연속을 내포하기 때문), $g(x)$의 좌미분계수와 우미분계수가 일치해야 한다.

$\therefore f(-1)=3$, $f(1)=-1$, $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$

삼차함수 $f(x)$가 네 조건을 만족하려면 **삼차함수 그래프 개형**을 **고려**했을 때 $x=-1$**에서 극댓값을 가지고,** $x=1$**에서 극솟값**을 가져야 한다. 따라서 $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



1. $g'(-1)=g'(1)=0$이다. (O)

2. $x<-1$에서 $g'(x)=0$, $-1\le x\le 1$에서 $g'(x)\le 0$, $x>1$에서 $g'(x)=0$이므로 $g'(x)\le 0$이다. (O)

3. $g'(x)$가 최솟값을 갖는 구간은 $[-1,\ 1]$이다. 삼차함수 파트에서 배웠듯이 **최고차항의 계수가 양수인 삼차함수의 미분계수는 변곡점에서 최솟값**을 갖는다. 삼차함수의 비율에 따라 변곡점의 x좌표는 0이므로 $f'(0)$을 구하자.

   $f'(-1)=0$, $f'(1)=0$이므로 $f'(x)=a(x+1)(x-1)=ax^2-a$

   $f'(x)$를 x에 대해 적분하면, $f(x)=\int(ax^2-a)dx=\frac{a}{3}x^3-ax+C$

   $f(-1)=3$을 대입하면 $\frac{2}{3}a+C=3$, $f(1)=-1$을 대입하면 $-\frac{2}{3}a+C=-1$

   두 식을 연립하면 $a=3, C=1$이다.

   $f'(x)=3x^2-3$에서 $f'(0)=-3$이므로 $g'(x)$의 최솟값은 -3이다. (X)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.