e와 π의 초월성

雀
sukita1729@gmail.com

Ⅰ. 자연상수 e의 정의

- 자연상수 e는 자연의 연속 성장을 표현하기 위해 고안된 상수이다. 더 구체적으로는, 100%의 성장률을 가지고 1회 연속 성장할 때 얻게 되는 성장량이다. e의 수식적 정의는 다음과 같으며, 본문에서는 e가 등장하게 된 수열의 극한부터 시작하여 e로의 수렴성을 보인 후, e가 초월수임을 보인다. (초월수란, 어떤 다항 방정식의 해도 될 수 없는 복소수이자 유리계수를 가진, 유한한 0이 아닌 근을 의미한다.)

- e는 다음과 같은 수열에서 유래하였다 :

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ n \geq 1.$$

우선, 수열 $\{a_n\}$이 수렴함을 단조수렴 정리로 증명하자. $\{a_n\}$이 증가수열이라는 것과 $\{a_n\}$이 유계임을 보이면 된다.

1. $\{a_n\}$이 증가수열임을 보이자.

$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n > 0$이므로 산술기하평균 부등식에 의해

$$1+\frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1} = \frac{1+n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

이고, 양변을 $n+1$제곱하면

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

에서 $a_{n+1} \geq a_n$이 성립한다. 한편 $1 \neq 1+\dfrac{1}{n}$이므로

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \geq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

에서 $\{a_n\}$은 증가수열이다.

2. $\{a_n\}$이 유계임을 보이자.

이항정리에 의해

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

이고, $k \geq 2$이므로

$$\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k\cdot k!} = \prod_{i=1}^{k}\frac{n-i+1}{ni} < \frac{1}{k!} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$$

이다.

$$\therefore \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k < 2+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) = 3-\frac{1}{n} < 3.$$

단조수렴 정리에 의해 수열 $\{a_n\}$은 수렴한다.

3. e의 정의

위 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k!}\cdot\prod_{i=1}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)\right)$$
$$= 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

이다.

1. $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$
$$< 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leq \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$$

임이 자명하다. 여기서 $n \to \infty$의 극한을 취하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n \le \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

이다.

2. $n \ge m$일 때, 다음 식이 성립한다 :

$$a_n \ge 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+ \cdots + \frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

m을 고정시킨 상태에서 $n\to\infty$의 극한을 취하면

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ge 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+ \cdots + \frac{1}{m!}$$

이고, 위 식에서 $m\to\infty$의 극한을 취하면 다음을 얻는다 :

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} \le \lim_{n\to\infty} a_n.$$

1, 2에서 조임 정리에 의해 다음이 성립한다 :

$$e \equiv \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+ \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Ⅱ. e의 초월성

- 우선 자연상수 e가 초월수가 아닌 대수적 수라 가정하자. 대수적 수의 성질에 의해, 어떤 정수 c_i $(n \ge i \in \mathbb{N}_0)$가 존재하여 다음 등식이 성립한다. (단, c_i 중 0이 아닌 수가 적어도 하나 존재한다.)

$$\sum_{k=0}^{n} c_k e^k = c_0 + c_1 e + c_2 e^2 + c_3 e^3 + \cdots + c_n e^n = 0 \quad \cdots \quad [1].$$

어떤 m차 다항식 $f(x)$에 대하여, $F(x)$, $G(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$F(x) := f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x),$$

$$G(x) := e^{-x}F(x).$$

이때 다음이 성립한다.

$$G'(x)=e^{-x}[F'(x)-F(x)]=-e^{-x}f(x).$$

또한, 사잇값 정리에 의해 다음을 만족하는 $\epsilon\in(0,\ x)$가 존재한다 :

$$\frac{G(\epsilon)-G(0)}{x-0}=G'(\epsilon).$$

따라서,

$$G(x)-G(0)=e^{-x}F(x)-F(0)=xG'(\epsilon)=-xe^{-\epsilon}f(\epsilon)$$

$$\therefore e^{x}F(0)=F(x)+xe^{x-\epsilon}f(\epsilon)\quad\cdots\quad[2].$$

[1]의 양변에 $F(0)$을 곱하고 식 [2]를 이용하면 다음을 얻는다 :

$$\sum_{i=0}^{n}c_ie^iF(0)=c_0F(0)+c_1e^1F(0)+c_2e^2F(0)+\cdots+c_ne^nF(0)$$
$$=c_0\left[F(0)+0\cdot e^{0-\epsilon_0}f(\epsilon_0)\right]+c_1\left[F(1)+1\cdot e^{1-\epsilon_1}f(\epsilon_1)\right]+\cdots+c_n\left[F(n)+n\cdot e^{n-\epsilon_n}f(\epsilon_n)\right]=0.$$

$$\therefore c_0F(0)+c_1F(1)+\cdots+c_nF(n)=-\left[c_1e^{1-\epsilon_1}f(\epsilon_1)+c_2e^{2-\epsilon_2}f(\epsilon_2)+\cdots+c_ne^{n-\epsilon_n}f(\epsilon_n)\right]\quad\cdots\quad[3]$$
(단, $\epsilon_n\in(0,\ n)$)

이제 $p>n$을 만족하는 정수 n과 소수 p에 대하여 $f(x)$를 다음과 같이 정의하자.

$$f(x):=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]^p=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}\left[\prod_{i=1}^{n}(x-i)\right]^p$$

이를 전개하면

$$f(x)=\frac{x^{p-1}}{(p-1)!}[(x-1)(x-2)\cdots(x-n)]^p=\frac{1}{(p-1)!}\left[(-1)^{np}(n!)^px^{p-1}+a_px^p+A_{p+1}x^{p+1}+\cdots\right]$$

이고, 테일러 전개를 이용하면

$$f(x)=f(a)+\frac{(x-a)}{1!}f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^m}{m!}f^{(m)}(a).$$

이때 $(x-a)^k$를 $k!$으로 치환하면 $F(a)$를 구할 수 있으므로, 위 식에서 x^k를 $k!$으로 치환

하여 $F(0)$을 구한다.

$$F(0)=\frac{1}{(p-1)!}\left[(-1)^{np}(n!)^{p}(p-1)!+A_{p}p!+A_{p+1}(p+1)!+\cdots\right]$$
$$=(-1)^{np}(n!)^{p}+pK \quad (K\in\mathbb{Z}).$$

pK는 p의 배수이며, $p>n$이고 p는 소수이므로 $(-1)^{np}(n!)^{p}$는 p의 배수가 아니다. 따라서 $F(0)$는 정수이고 p의 배수가 아니다.

$1\leq z\leq n$인 정수 z에 대하여 $x=z+(x-z)$이므로,

$$(x-1)(x-2)\cdots(x-n)=\prod_{i=1}^{n}(x-i)$$

에 $(x-z)$라는 인수가 하나 이상 포함되고 $f(x)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다 :

$$f(x)=\frac{1}{(p-1)!}\left[B_{p}(x-z)^{p}+B_{p+1}(x-z)^{p+1}+\cdots\right]$$
$$(B_{p},\ B_{p+1},\ \cdots\in\mathbb{Z}).$$

상술한 $F(0)$을 구한 방법과 동일한 방법으로 $(x-z)^{k}$를 $k!$으로 치환하여 $F(z)$를 구한다.

$$F(z)=\frac{1}{(p-1)!}\left[B_{p}p!+B_{p+1}(p+1)!+\cdots\right]=pB \quad (B\in\mathbb{Z}).$$

따라서 $1\leq z\leq n$인 모든 정수 z에 대하여 $F(z)$는 정수이고 p의 배수이다. 그리고 [3]의 좌변은 0이 아닌 정수이다.

한편 $k\leq n$인 자연수 k에 대하여 $0<\epsilon_{k}<k\leq n$이므로

$$k-\epsilon_{k}<n,\ e^{k-\epsilon_{k}}<e^{n}$$

이다. 그리고

$$f(\epsilon_{k})=\frac{\epsilon_{k}^{p-1}}{(p-1)!}\left[(\epsilon_{k}-1)(\epsilon_{2}-1)\cdots(\epsilon_{k}-n)\right]^{p}<\frac{n^{p-1}}{(p-1)!}n^{np}$$

이다. 따라서 $\max\{|c_{1}|,\ |c_{2}|,\ \cdots,\ |c_{n}|\}<c\in\mathbb{Z}$에 대하여 다음 부등식이 성립한다 :

$$\left|c_{1}e^{1-\epsilon_{1}}f(\epsilon_{1})+c_{2}e^{2-\epsilon_{2}}f(\epsilon_{2})+\cdots+c_{n}e^{n-\epsilon_{n}}f(\epsilon_{n})\right|<nce^{n}\frac{n^{p-1}}{(p-1)!}n^{np}.$$

p의 값이 증가하면 $nce^n \dfrac{n^{p-1}}{(p-1)!} n^{np}$는 0에 수렴하고, 소수는 무한히 많으므로 충분히 큰 p가 존재하여

$$0 < nce^n \frac{n^{p-1}}{(p-1)!} n^{np} < 1$$

이다. 따라서

$$0 < c_0F(0) + c_1F(1) + \cdots + c_nF(n) = -\left[c_1e^{1-\epsilon_1}f(\epsilon_1) + c_2e^{2-\epsilon_2}f(\epsilon_2) + \cdots + c_ne^{n-\epsilon_n}f(\epsilon_n)\right] < 1$$

이다. 그러나 위 식을 만족시키는 정수 $\sum_{i=0}^{n} c_iF(i)$는 존재하지 않는다. 즉 [1]의 식을 만족시키는 $c_i \in \mathbb{Z}$가 존재하지 않으므로 이는 자연상수 e가 대수적 수라는 가정에 모순이다. 따라서 자연상수 e는 초월수이다.

Ⅲ. π의 초월성

- 위에서 증명한 자연상수 e의 초월성을 이용하면 원주율 π가 초월수임을 쉽게 보일 수 있다. 자연상수의 초월성을 이용하지 않고 Lindemann의 방법인 추상대수학과 복소함수론을 이용하여 π가 초월수임을 보이는 방법이 있지만, 본문에서는 이를 생략하여 자연상수 e와 대수적 수의 특성을 이용하는 방법 만을 제시한다.

1. 린데만 - 바이어슈트라스 정리(Lindemann - Weierstrass Theorem)

- 대수적 수란 초월수의 정반대 개념으로, 최고차항의 계수가 0이 아닌 n차 방정식($n \in \mathbb{N}_0$)으로 표현될 수 있는 수를 일컫는다. 선형 독립이란 집합의 원소들 중 어떤 원소도 상수를 곱하거나 더해서 서로 다른 원소가 될 수 없다는 것이다.

- 린데만 - 바이어슈트라스 정리에 의해, 서로 다른 대수적 수 a_i $(n \geq i \in \mathbb{N})$에 대하여 $e^{a_1},\ e^{a_2},\ e^{a_3},\ \cdots,\ e^{a_n}$은 대수적 수체 위에서 선형 독립이다.

2. 오일러 공식(Euler's Formula)

- 오일러 공식은 세계에서 가장 아름다운 공식으로도 불리는 공식으로, 허수 지수를 동반하여 삼각함수와 지수함수 사이의 관계를 나타낸다.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \quad (i = \sqrt{-1},\ x \in \mathbb{R}).$$

- 이 공식의 증명 방법에는 여러 가지가 있으나, 본문에서는 가장 간단한 방법인 테일러 급수를 이용한 증명을 제시한다.

함수 $f(x)$의 $x=a$ 부근에서의 테일러 전개 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$을 이용하면

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
$$

을 얻는다. 이때 $z\in\mathbb{C}$일 때 위의 무한급수를 각각의 함수로 정의하면,

$$
\begin{aligned}
e^{iz} &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^n}{n!}=1+iz+\frac{(iz)^2}{2!}+\frac{(iz)^3}{3!}+\frac{(iz)^4}{4!}+\frac{(iz)^5}{5!}+\frac{(iz)^6}{6!}+\frac{(iz)^7}{7!}+\frac{(iz)^8}{8!}+\cdots \\
&= 1+iz-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{iz^5}{5!}-\frac{z^6}{6!}-\frac{iz^7}{7!}+\frac{z^8}{8!}+\cdots \\
&= \left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\frac{z^8}{8!}-\cdots\right)+i\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos z+i\sin z.
\end{aligned}
$$

3. π의 초월성

- 2의 오일러 공식에 $z=\pi$를 대입하면 $e^{i\pi}=\cos\pi+i\sin\pi=-1$을 얻는다. 만약 원주율 π가 대수적 수라고 가정하면, 대수적 수와 대수적 수의 곱은 대수적 수이므로 $\pi\times i=\pi i$는 대수적 수이다. 그리고, 린데만 - 바이어슈트라스 정리에 의해 $\{1,\ e^{i\pi}\}$는 대수적 수에서 선형독립이고, 결국 임의의 대수적 수 α에 대해 $e^{i\pi}\neq\alpha$이다. 하지만 $e^{i\pi}=-1$로 대수적 수이므로, 이는 모순이고 결국 π는 초월수이다.

Ⅳ. 참고문헌

planetmath, *e is transcendental*, 2018. 02. 09.
https://planetmath.org/EIsTranscendental

네이버 블로그, *자연상수 e :: 초월수임을 증명*, 2013. 12. 22.
https://m.blog.naver.com/PostView.naver?isHttpsRedirect=true&blogId=biohazard235&logNo=30181761169

네이버 블로그, *원주율이 초월수임을 증명(The Transcendence of π, by Lindemann)*, 2016. 08. 05.
https://m.blog.naver.com/biohazard235/220780001571

위키백과, *Taylor series*, 2021. 10. 31.
https://en.wikipedia.org/wiki/Taylor_series

위키백과, *Lindemann – Weierstrass Theorem*, 2021. 10. 18.
https://en.wikipedia.org/wiki/Lindemann%E2%80%93Weierstrass_theorem

위키백과, *Euler's formula*, 2021. 10. 29.
https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_formula