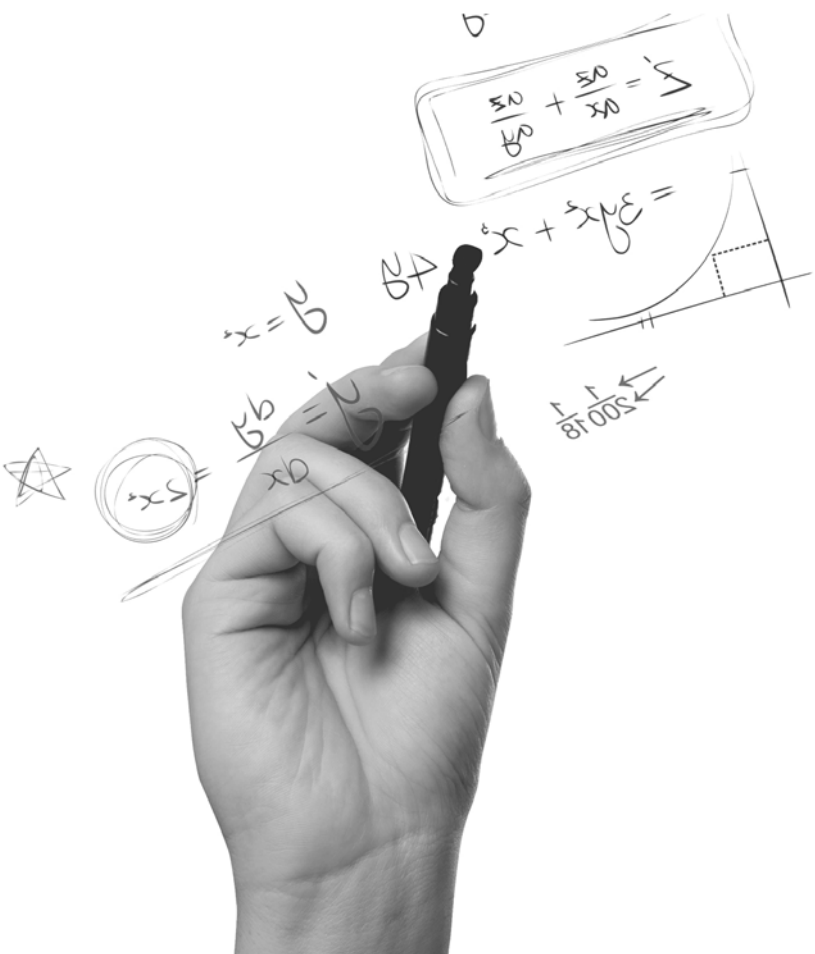
부산교육 2013-106

2013학년도 대학별 **수리논술고사** 분석

수리논술나침반 V



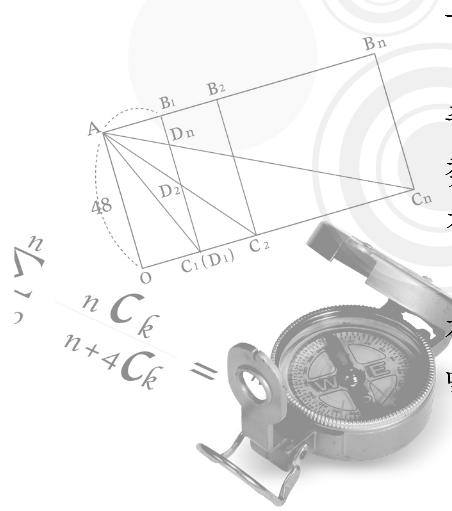
부산광역시교육청
BUSAN METROPOLITAN CITY OFFICE OF EDUCATION

발 간 사

정보화 사회, 지식기반 사회에서 창의 인재가 지녀야 할 중요한 능력 중 하나는 자신이 습득한 지식과 정보들을 융합하여 창의적인 아이디어로 새로운 문제 상황을 해결하는 능력입니다. 논리적 분석력으로 다양한 지식과 정보를 통섭하고 비판적 사고력으로 자신의 견해를 생산해 내는 능력이 무엇보다 요청되는 것입니다. 그러므로 미래지향적인 인재는 논리적 분석력, 비판적 사고력, 문제해결력, 창의력 등을 갖추어야 하는데 수학 교육과 논술 교육은 이러한 능력을 신장하는 데 많은 도움이 됩니다.

우리 교육청에서는 교실 수업을 통해 논리적 표현력, 비판적 사고력과 문제 해결력 등을 신장하기 위해 꾸준히 노력해 왔으며, 논술 교육의 일환으로 논술 캠프 운영, 수시대비 모의면접 교실 운영, 논술교재 발간 등의 사업을 펼쳐 왔습니다. 특히 수리논술 교육을 위해 수학나침반 교사동아리가 중심이 되어 2008년부터 매년 발간해 온 장학 자료『수리논술나침반』은 올해로 5년째 접어들었습니다.

『수리논술나침반 Ⅴ』는 주요 대학의 수리논술 모의고사 문제와 기출 문제의 논제 및 제시문을 분석하고 이와 관련하여 학습할 내용을 소개함으로써, 수학적 개념이나 원리를 활용하여 문제 상황을 논리적으로 해결하는 방법을 제시해 주고 있습니다. 또한 논제와 연관된 읽기 자료, 수능 기출 문제 등도 함께 제시하여 수학의 심화 학습을 유도하고 있습니다.



예로부터 길을 잃은 사람이 나아갈 방향을 알지 못할 때 나침반은 중요한 역할을 해 왔습니다. 앞으로 수학 공부와 수리논술의 방향을 찾는 학생들에게『수리논술나침반 Ⅴ』이 올바른 방향을 알려주는 길라잡이가 되었으면 합니다.

그동안 학교 현장에서 학생들을 지도하시느라 바쁘신 중에도 자료 개발을 위해 애쓰신 수학나침반 동아리 선생님들께도 감사의 말씀을 드립니다.

2013. 6. 10.

부산광역시교육감 **임 혜 경**

차 례

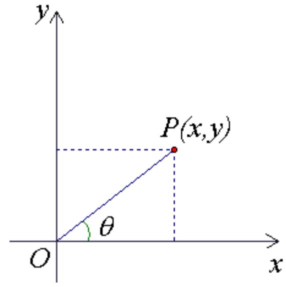

1 경희대학교 모의

제시문 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.** [1)]

[가] 인수분해가 되지 않는 x, y에 관한 이차방정식 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$을 만족하는 평면 위의 점 $P(x,y)$의 집합을 이차곡선이라 하고, 그 계수의 값에 따라 포물선, 원, 타원, 쌍곡선으로 분류할 수 있다. 이들은 또한 원뿔곡선이라고도 불리는데, 그 이유는 원뿔을 평면으로 자를 때 얻어지는 단면 곡선이기도 하기 때문이다.

[나] 이차곡선을 이해하는 또 하나의 관점은 이들을 평면 위의 두 정점과의 위치관계에 따라 분류하는 방법이다. 즉, 두 정점 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$로부터 점 P까지의 거리를 각각 $d_1=\overline{\mathrm{PF}_1}, d_2=\overline{\mathrm{PF}_2}$ 라 할 때, d_1+d_2를 일정하게 하는 점 P의 집합은 타원이고 $|d_1-d_2|$를 일정하게 하는 점 P의 집합은 쌍곡선이다. 이 두 점 F_1, F_2를 초점이라 하는데, 일찍이 케플러(1571-1630)는 포물선 역시 두 초점 중 하나가 "무한히" 멀리 떨어져 있는 타원 또는 쌍곡선으로 볼 수 있음을 이해하였다. 물론, 원은 두 초점이 일치하는 타원의 특별한 경우로 볼 수 있고, 또한 d_1/d_2를 일정하게 하는 점 P의 집합으로 이해할 수도 있다.(아폴로니우스의 원)

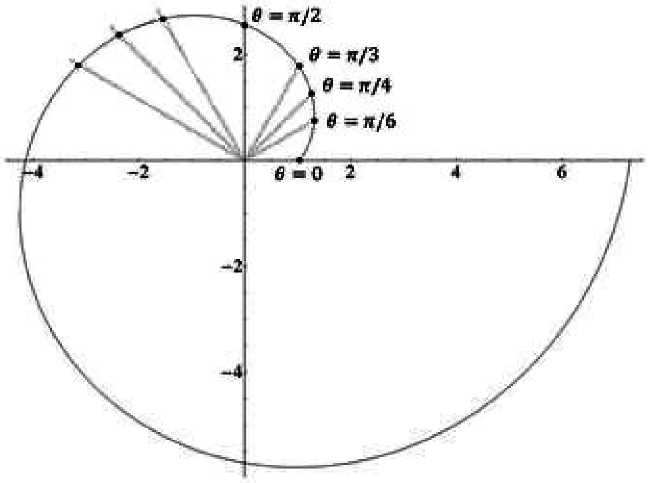
[다] 평면 위의 점은 직교좌표를 이용하여 실수의 순서쌍 (x,y)로 나타낼 수 있다. 또 다른 방법으로 원점 O로부터 점 P까지의 거리 $\overline{\mathrm{OP}}=r$과 $\overline{\mathrm{OP}}$가 x축의 양의 방향으로 회전한 각 θ를 이용하여 (r,θ)로 나타낼 수 있다. 이를 극좌표라고 하며, $r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ 일 때, $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$를 만족한다. 예를 들어 원점을 중심으로 하는 반지름 1인 원을 나타내는 방정식은 직교좌표로는 $x^2+y^2=1$인데 반해 극좌표로는 $r=1$이다. 점 P의 직교좌표와 극좌표의 관계는 아래와 같이 정리할 수 있다.



1) 경희대학교 입학처

$$r = \sqrt{x^2+y^2}\,, \tan\theta = \frac{y}{x}(x \neq 0),\ x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$$

극좌표 r, θ의 방정식으로 표현된 곡선은 몇 개의 θ에 대한 r의 값을 구하고, 이에 대응하는 점을 표시한 후 이렇게 얻은 점들을 적당히 연결하여 그 개형을 구할 수 있다. 예를 들어 $r = 1+\theta$를 만족하는 점들의 집합은 $0 \le \theta < 2\pi$일 때, 다음 그림과 같은 나선이 될 것이다.



제시문 (나)의 논의를 확장하여 이제 두 정점 $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$로부터 거리의 곱이 일정한 점 P의 집합에 대하여 알아보자. 편의상 $\mathrm{F}_1(1,0)$, $\mathrm{F}_2(-1,0)$이라 하고 상수 k에 대하여 $d_1 d_2 = k$를 만족하는 점 P의 자취에 대하여 알아보자.

논제 I-1

$d_1 d_2 = k$를 만족하는 점 P에 관한 x, y의 관계식과 r, θ의 관계식을 각각 구하여라.(10점)

논제 I-2

$d_1 d_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$를 만족하는 θ의 범위를 구하고, 원점을 지나고 이 곡선에 접하는 접선의 기울기(또는 x축의 양의 방향과 이루는 각)를 구하여라. (20점)

논제 I-3

$k \ge 0$의 값이 변하면 곡선 $d_1 d_2 = k$의 모양도 변할 것이다. 원점을 지나는 직선으로서 k의 값에 관계없이 이러한 곡선들과 항상 만나는 것이 존재하겠는가? (10점)

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학1-2문항(총 2-3문항)	시간	120분
연관 개념	이차곡선, 방정식의 근, 삼각방정식, 접선		

제 시 문 분 석

제시문〈가〉

이차곡선의 대수적 표현 방식을 설명하고 있다. 또 이차곡선을 원뿔곡선이라고 부르는 이유에 대해서 설명하고 있다.

제시문〈나〉

이차곡선의 종류를 정점과 동점 사이의 관계로 설명하고 있다.

제시문〈다〉

극좌표와 극좌표로 표시되는 곡선을 설명하고 있다. 또 극좌표와 직교좌표 사이의 관계에 대하여 설명하고 있다. 이차곡선의 개념에서 유추한 새로운 곡선의 탐색을 시사하고 있다.

논 제 분 석

논제 I-1

주어진 조건을 만족하는 곡선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻는 문항이다. 또한 직교좌표로 표현된 곡선의 방정식을 극좌표로 표현할 수 있는지를 묻고 있다.

논제 I-2

[논제 1-1]에서 구한 곡선의 방정식을 극좌표로 표현할 때, 각의 범위를 구할 수 있는지를 묻는 문항이다. 또 이 때, 곡선이 접한다는 것은 대수적으로 무엇을 의미하는지를 묻고 있다.

논제 I-3

[논제 1-2]에서 구한 극좌표에서 θ의 값이 점점 작아질 때 구하는 도형은 어떤 점에 수렴하는지를 묻고 있다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 이차곡선의 분류

가. 이차곡선의 중심

두 일차식의 곱으로 인수분해 되지도 않고, 원도 아닌 일반적인 x, y에 관한 이차방정식

$$F(x,y)=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \cdots \quad (1)$$

은 어떤 곡선을 표시하는가를 생각해 보자. 한 점 $\mathrm{M}(x_0,y_0)$을 지나는 직선은 그 방향벡터을 (l,m)이라 하면 t를 매개변수로 하여

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt \quad \cdots \quad (2)$$

로 표시된다. 이 직선과 이차 곡선 (1)과의 교점을 A,B라 하고 A,B에 대응하는 t의 값을 구하기 위하여 식 (2)를 (1)에 대입하면

$$(al^2+2hlm+bm^2)t^2+2\{l(ax_0+hy_0+g)+m(hx_0+by_0+f)\}t+F(x_0,y_0)=0$$

점 M을 지나는 모든 직선에 대하여, M이 선분AB의 중점일 때 이 방정식은 절댓값이 같고, 부호가 반대인 두 근을 가져야 한다. 그러기 위해서는

$$l(ax_0+hy_0+g)+m(hx_0+by_0+f)=0$$

이어야 한다. 이것은 $l^2+m^2=1$을 만족하는 모든 l,m에 대하여 성립하여야 하므로 $l=1, m=0$및 $l=0, m=1$이라 놓으면

$$ax_0+hy_0+g=0,\ hx_0+by_0+f=0 \quad \cdots \quad (3)$$

을 얻는다. 이것을 x_0, y_0에 관한 연립방정식으로 풀면

①$ab-h^2 \neq 0$일 때는 한 쌍의 해

$$x_0=\frac{hf-bg}{ab-h^2},\ y_0=\frac{hg-af}{ab-h^2} \quad \cdots \quad (4)$$

를 갖는다. 이러한 좌표를 가지는 점 $\mathrm{M}(x_0,y_0)$을 이차곡선의 중심이라 하며, 이런 점 M이 존재하는 식 (1)을 유심 이차곡선(central conic)이라 한다.

②$ab-h^2=0$ 일 때는 $\frac{a}{h}=\frac{h}{b}\neq\frac{g}{f}$이면 식 (3)은 해를 갖지 않는다. $\frac{a}{h}=\frac{h}{b}=\frac{g}{f}$이면 식 (3)은 무수히 많은 해를 갖는다. 이러한 곡선을 무심 이차곡선(non-central conic)이라 한다.

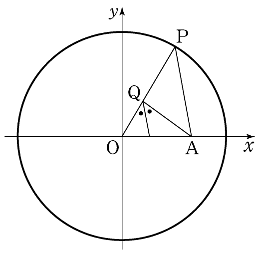
나. 이차곡선의 분류

유심이차곡선은 타원 혹은 쌍곡선이 되고 무심 이차곡선은 포물선이 된다. 구체적인 계산방법은 고등학교 교육과정을 벗어난다.

풀 어 보 기

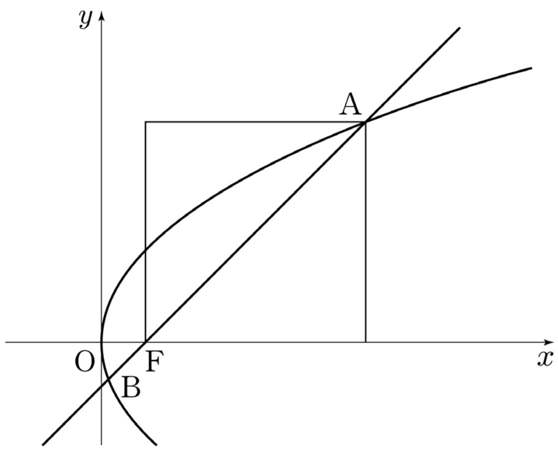
문제 1 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=36$ 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$와 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 점 Q 전체의 집합을 X라 하자. (단, $b\neq 0$)

(가) 점 Q는 선분 OP 위에 있다.
(나) 점 Q를 지나고 직선 AP에 평행한 직선이 $\angle\mathrm{OQA}$를 이등분한다.



집합 X를 구하시오.(2008년 9월 평가원)

문제 2 그림과 같이 좌표평면에서 꼭짓점이 원점 O이고 초점이 F인 포물선과 점F를 지나고 기울기가 1인 직선이 만나는 두점을 각각 A, B라 하자. 선분 AF를 대각선으로 하는 정사각형의 한 변의 길이가 2일 때, 선분AB의 길이가 $a+b\sqrt{2}$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.)



문제3 $0<x<2\pi$ 일 때, 방정식 $(\cos 2x-\cos x)\sin x=0$ 을 만족시키는 모든 해의 합은 $k\pi$ 이다. $10k$ 의 값을 구하시오. (2012년 6월 평가원)

읽 기 자 료

복소수의 극형식과 드무브르 정리

(1) 복소수의 극형식

$z=a+bi$라고 하자. 이것을 표현하는 다른 방법은 다음과 같다.

$z=\sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)$ 그런데 여기서

$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta,\ \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$ $\sqrt{a^2+b^2}=r$로 두면 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$로 둘 수 있다.

위와 같이 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$로 표현하는 것을 복소수의 극형식이라고 한다.

이렇게 복소수를 극형식으로 표현하면 어떤 장점이 있는지를 살펴보자.

$z^2=r(\cos\theta+i\sin\theta)r(\cos\theta+i\sin\theta)=r^2(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)$이므로

$=r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta+i\,2\cos\theta\sin\theta)=r^2(\cos2\theta+i\sin2\theta)\cdots$(※)를 의미한다.

또한, (※)식에서 $z^3=r^3(\cos3\theta+i\sin3\theta)$을 쉽게 유추할 수 있다. 이렇듯 복소수를 극형식으로 표현하면 복소수의 곱셈을 매우 간결한 형태로 표현할 수 있다는 장점이 있다. 이것은 조금 뒤에 드무아브르의 정리에서 다시 설명하기로 한다.

지금 복소수의 극형식으로 $z^2=i$라는 이차방정식을 풀어보자.

$r=|z|$이므로 $|z^2|=|i|$에서 $|z||z|=1$이므로 $|z|=1$을 구할 수 있다.

따라서 $z=\cos\theta+i\sin\theta$이고 $z^2=\cos2\theta+i\sin2\theta=i$에서

$\cos2\theta=0,\ \sin2\theta=1$의 해를 $0\le x\le 2\pi$에서 구하면 $\theta=\dfrac{\pi}{4},\theta=\dfrac{5\pi}{4}$를 구할 수 있다. 이를 $z=\cos\theta+i\sin\theta$에 대입하면 $z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i,\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$이다.

(2) 드무아브르의 정리

드무아브르의 정리: $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$라고 두면, 임의의 자연수(정수까지 확장 가능)n에 대하여 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$이다.

증명)수학적 귀납법으로 증명하자.

$n=1$일 때, $z=\cos\theta+i\sin\theta$이므로 당연하다.

이제 $n=k$일 때, 성립함을 가정하면 다음과 같다.

$z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)$이다. 이제 $n=k+1$일 때를 생각하자.

$$z^{k+1}=z \cdot z^{k}=r(\cos\theta+i\sin\theta)r^{k}(\cos k\theta+i\sin k\theta)$$
$$=r^{k+1}(\cos\theta\cos k\theta-\sin\theta\sin k\theta+i(\cos\theta\sin k\theta+\cos k\theta\sin\theta))$$
$$=r^{k+1}(\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta)$$

따라서 $n=k+1$일 때도 성립한다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $z^{n}=r^{n}(\cos n\theta+i\sin n\theta)$가 성립한다.

※ 정수까지 확장하려면

$$z^{-n}=\frac{1}{z^{n}}=\frac{1}{r^{n}(\cos n\theta+i\sin n\theta)}=r^{-n}(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

$=r^{-n}(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta))$이므로 $-n$까지 확장할 수 있다.

(3) 드무아브르 정리의 활용

$z^{3}=i$의 근을 찾아보자.

$|z^{3}|=|i|=1$, $|z|=1$이므로 $z=\cos\theta+i\sin\theta$라고 하자.

$z^{3}=\cos 3\theta+i\sin 3\theta=i$ 에서

$\cos 3\theta=0$ 에서 $3\theta=\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\frac{9\pi}{2},\frac{11\pi}{2},$

$\sin 3\theta=0$ 에서 $3\theta=\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\frac{9\pi}{2}$이므로 $\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}$이므로

$$z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i,\ z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ z=-i$$

(4) 허수의 허수 제곱(i^{i})을 구하기

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$로 정의하자. 그러면 임의의 복소수 $z=e^{i\theta+c}$(c는 상수)와 같은 형식으로 정의될 수 있다.

이제 i를 지수형식으로 정의하면 다음과 같다.

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$i^{i}=(e^{i\frac{\pi}{2}})^{i}=e^{-\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}}$[2])로 생각할 수 있다.

---

2) 위의 값은 $\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$에서 $k=0$ 이외에도 성립하므로, $k=1,2,3\cdots$의 값을 가지면 i^{i}값도 달라진다.

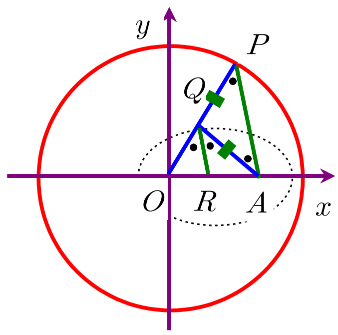
예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 $\overline{QR} // \overline{PA}$이므로, $\angle RQA = \angle QAP$

$\angle OQR = \angle QPA$가 성립한다.

$\therefore$ $\triangle PQA$는 이등변삼각형



주어진 원위의 점 P에 대하여 $\overline{OP}(=6)$는 항상 일정하다. 따라서 점 Q의 자취는 점 O, A를 초점으로 하는 타원이 된다. 그리고 타원의 중심은 (2, 0)이므로 이는 x축 방향으로 2만큼 평행이동 한 것이다. 따라서 타원의 방정식을 아래와 같이 두면,

$$\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ ,\ b>0$$

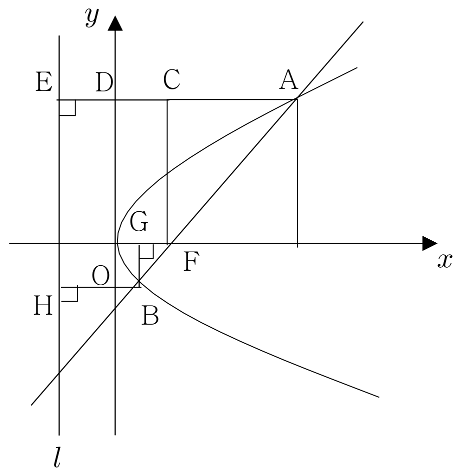
타원의 중심으로부터 초점까지의 거리는 2이므로,

$$3^2-b^2=2^2\ ,\ \therefore b=\sqrt{5}$$

따라서 점 Q의 자취의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$$

문제 2



위의 그림에서 제 1사분면의 정사각형의 한 꼭짓점을 C, 점 A에서 y축과 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 D, E라 하고, 점 B에서 x축과 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 G, H라 하자.

$$\overline{AF}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2},\ \overline{AC}=2 \text{ 이므로}$$
$$\overline{CE}=\overline{AE}-\overline{AC}=\overline{AF}-\overline{AC}=2\sqrt{2}-2=2(\sqrt{2}-1)$$

또한, $\overline{BF}=k$라 하면, $\overline{CE}=\overline{BH}+\overline{GF}=\overline{BF}+\overline{GF}=k+\frac{\sqrt{2}}{2}k=\frac{k}{2}(2+\sqrt{2})$

따라서, $\frac{k}{2}(2+\sqrt{2})=2(\sqrt{2}-1)$이므로 $k=\frac{4(\sqrt{2}-1)}{2+\sqrt{2}}=6\sqrt{2}-8$

$$\therefore\ \overline{AB}=\overline{BF}+\overline{AF}=(6\sqrt{2}-8)+2\sqrt{2}=8\sqrt{2}-8$$
$$\therefore\ a^2+b^2=(-8)^2+8^2=128$$

문제 3 $(\cos 2x-\cos x)\sin x=0$, $(2\cos^2 x-\cos x-1)\sin x=0$,

$(2\cos x+1)(\cos x-1)\sin x=0$

(ⅰ) $\cos x=-\frac{1}{2}$일 때, $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{4}{3}\pi$

(ⅱ) $\cos x=1$일 때, $0<x<2\pi$에서 x는 존재하지 않는다.

(ⅲ) $\sin x=0$일 때, $x=\pi$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 모든 해의 합은 $\frac{2}{3}\pi+\frac{4}{3}\pi+\pi=3\pi=k\pi$

$$\therefore 10k=10\cdot 3=30$$

논제 Ⅰ-1[3]

구하는 점을 $P(x,y)$라고 하면 점 $F_1(1,0)$과의 거리 $d_1=\sqrt{(x-1)^2+y^2}$이고 $F_2(-1,0)$과의 거리 $d_2=\sqrt{(x+1)^2+y^2}$이 된다. 이 때 두 거리의 곱이 일정하므로

$d_1d_2=k$가 된다. 오른쪽 식의 양변을 제곱하면

$\{(x-1)^2+y^2\}\{(x+1)^2+y^2\}=k^2$이 되고 이것을 정리하면

$(x^2+y^2)^2-2x^2+2y^2-k^2+1=0$이 된다.

위의 식에 $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$을 대입하면

$r^4-2r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)-k^2+1=0$ 또는 $r^4-2r^2\cos 2\theta-k^2+1=0$ ……(1)이 된다.

논제 Ⅰ-2

$k=\frac{1}{\sqrt{2}}$이면 위의 (1) 식은 $r^4-2r^2\cos 2\theta+\frac{1}{2}=0$……(2)이 되고

(2) 식은 r^2에 관한 이차방정식이 된다. 따라서 r^2에 관한 이차방정식이 음이 아닌 실

3) 경희대 예시답안 참조

근을 적어도 하나 가질 조건을 구하면 되는데, 이 경우에는 두 근의 곱이 양수이므로 두 근이 모두 양수일 조건을 구하는 것으로 바뀐다.

(2) 식의 판별식에서 $\cos^2 2\theta - \frac{1}{2} \geq 0$이 성립하고

(2) 식의 두 근의 합이 양수이므로 $\cos 2\theta > 0$

(2) 식의 두 근의 곱 $\frac{1}{2} > 0$ 이 성립한다.

위의 세 조건을 연립하여 풀면 $\cos 2\theta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$이 되고 이를 만족하는 θ의 범위는

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{8}$, $\frac{7\pi}{8} \leq \theta \leq \frac{9\pi}{8}$, $\frac{15\pi}{8} \leq \theta \leq 2\pi$가 된다.

접선을 가질 조건

$(x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 - k^2 + 1 = 0$에 $y = mx$, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$을 대입하면

$(1+m^2)^2 x^4 - 2(1-m^2)x^2 + \frac{1}{2} = 0$을 얻는데, x^2에 관한 이차방정식(x^2을 하나의 미지수로 본다는 의미임, 이 경우, x^4은 x^2에 관한 이차항이 된다.)이 중근을 가질 조건은 $(1-m^2)^2 - \frac{1}{2}(1+m^2)^2 = 0$이다. 이 식을 간단히 하면

$m = \pm(\sqrt{2}-1)$을 얻을 수 있는데, $\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$이다.

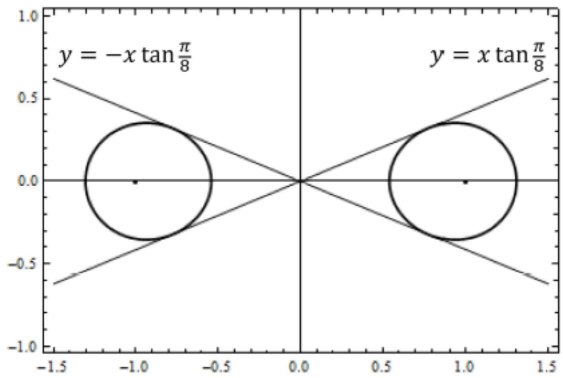
※ 접선을 가질 조건의 다른 풀이

$r^4 - 2r^2\cos 2\theta + \frac{1}{2} = 0 \cdots\cdots(2)$가 중근을 가질 조건과 일치한다.

이 때, 판별식 $\cos^2 2\theta - \frac{1}{2} = 0$에서 $\cos 2\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$이고 이로부터

$\theta = \frac{\pi}{8}$, $\theta = \frac{7\pi}{8}, \theta = \frac{9\pi}{8}$, $\theta = \frac{15\pi}{8}$가 되는데 따라서 접선의 방정식은

$y = \pm\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)x$가 됨을 알 수 있다.



논제 Ⅰ-3

k의 값이 0에 가까워짐에 따라 곡선 $d_1d_2=k$은 점점 작아져 결국 정점 F_1, F_2으로 수렴한다. 따라서 논제의 직선이 만약 존재한다면 그것은 x축이 되어야 한다. 식 (1)에 $y=0$을 대입하면 $k^2=(x^2-1)^2$이 되므로, 직선 $y=0$는 임의의 k에 대하여 곡선$d_1d_2=k$과 $(\pm\sqrt{1+k},0)$에서 만난다.

2 경희대학교 수시(토)

제시문 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.** [4)]

[가] 공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

공간에서 한 점 C로부터 일정한 거리에 있는 점 P의 집합을 구라고 한다. 좌표공간에서 중심이 점 $\mathrm{C}(a, b, c)$이고 반지름의 길이가 r인 구의 방정식은 다음과 같다.

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

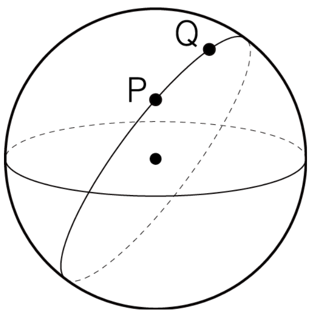
공간에서 도형 F의 각 점에서 평면 α에 내린 수선의 발로 이루어진 도형 F′을 도형 F의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다. 예를 들어, 위에서 주어진 구의 xz 평면 위로의 정사영은 $(x-a)^2 + (z-c)^2 \le r^2$을 만족하는 xz 평면 위의 점의 집합이다.

[나] 공간에서 두 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1, z_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2, z_2)$를 지나는 직선의 방정식은

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad (\text{단, } x_1 \ne x_2,\ y_1 \ne y_2,\ z_1 \ne z_2)$$

이 직선의 xz 평면 위로의 정사영은 $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$을 만족한다.

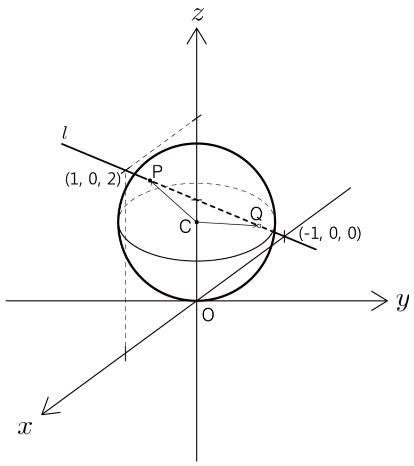
[다] 구에서의 대원은 구의 중심을 지나는 평면으로 구를 자를 때 생기는 원이다. 구면 위의 두 점을 잇는 구면 위의 최단 경로의 길이는 두 점을 지나가는 대원을 이용해 구할 수 있다. 공간에서 평면이 구를 자를 때, 구의 잘린 부분의 부피는 회전체 부피를 구하는 방법을 이용해 구할 수 있다.



4) 경희대학교 입학처

논제 Ⅰ -1

공간에서 두 점 $(-1,0,0)$, $(1,0,2)$를 지나는 직선 l 위의 점 A와 점 $\mathrm{C}(0,0,r)$ 사이의 거리가 최소가 되는 점 A의 좌표를 구하시오. (구해진 최솟값은 직선 l과 점 C 사이의 거리가 된다.)(9점)



논제 Ⅰ -2

중심이 $\mathrm{C}(0,0,r)$이고 반지름이 r인 $(r>0)$ 구가 점 $(-1,0,0)$과 점 $(1,0,2)$를 지나는 직선 l에 접하기 위한 r의 값을 구하고 그 방법을 서술하시오.(9점)

논제 Ⅰ-3

$r=\frac{1}{2}$일 때, 위 논제에서 제시된 구와 직선 l은 두 점 P, Q에서 만난다. 이 두 점을 잇는 구면 위의 가장 짧은 곡선을 구하는 방법을 설명하고 그 곡선의 길이를 구하시오.(10점)

논제 Ⅰ-4

점 $(-1,0,0)$, $(1,0,2)$, $(-1,1,0)$을 지나는 평면(이 평면은 위 논제에서 제시된 직선 l을 포함하고 y축과 평행하다)은 r의 범위에 따라 위 논제에서 주어진 구(중심이 $\mathrm{C}(0,0,r)$이고 반지름이 r인 구)와 만나지 않을 수도, 접할 수도, 혹은 그 구를 자를 수도 있다. 주어진 평면이 구를 자를 때, 구의 잘려진 윗부분의 부피를 r의 범위에 따라 어떻게 계산할 수 있는지 적분식을 이용해 논술하시오. (적분값을 구할 필요는 없음)(12점)

논술유형분석

문항 수	수학 1문항, 과학1-2문항(총 2-3문항)	시간	120분
연관 개념	공간도형, 직선의 방정식, 미적분		

제시문분석

제시문은 공간도형의 기본 성질을 간단히 설명한 것이다. 즉, 공간에서 두 점 사이의 거리, 직선의 방정식, 구의 성질 등을 설명하고 있다. 이 때 제시문은 학교수업시간에 배운 내용을 간단히 확인시켜주는 의미를 가지고 있다.

논제분석

논제Ⅰ-1

공간에서 두 점을 지나는 직선의 방정식을 구할 수 있는지를 묻고, 아울러 내적을 이용하여 공간에서 직선과 점 사이의 최단 거리를 구할 수 있는지를 묻고 있다.

논제Ⅰ-2

공간에서 직선이 구에 접할 때 어떤 조건을 활용할 수 있는지를 묻는 문항이다.

논제Ⅰ-3

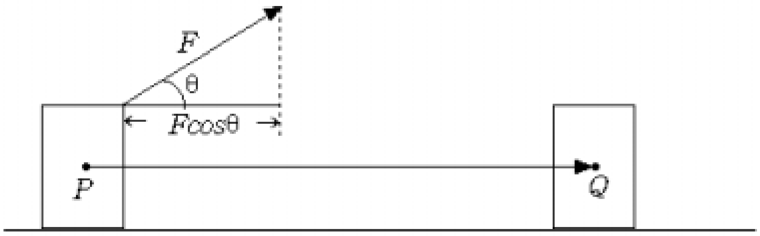
구면에서 두 점을 지나는 가장 짧은 곡선은 대원의 일부임을 아는 지를 묻고, 또 공간도형의 성질을 이용하여 가장 짧은 곡선의 길이를 구할 수 있는지를 묻고 있다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 벡터의 내적의 의미

(1) 벡터 내적의 유래

일정한 힘으로 물건을 옮길 때 행하여지는 일을 계산할 때 내적의 계산이 편리하다.



일정한 힘 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 가 변위 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 사이에 행하는 일(W)은

$$\mathrm{W}=(|\overrightarrow{\mathrm{F}}|\cos\theta)|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{F}}||\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|\cos\theta=\overrightarrow{\mathrm{F}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

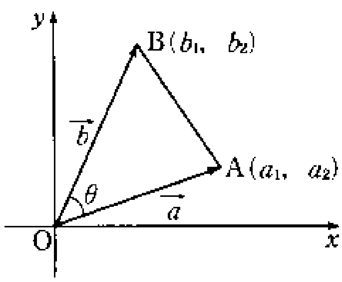
로 정의된다. 여기서 θ 는 $\overrightarrow{\mathrm{F}}$ 와 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ 사이의 각이다. 이와 같이 힘과 변위가 벡터로 표현될 때 두 벡터의 내적은 이 변위가 진행되는 동안에 그 힘이 하는 일을 나타낸다. 이 때, 내적의 결과가 스칼라 값이므로 내적을 스칼라곱이라고도 한다.

벡터의 내적

두 벡터 $\vec{a},\vec{b}$ 가 이루는 각의 크기가 $\theta\,(0\le\theta\le\pi)$라고 하면 $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 내적(inner product 또는 dot product)을 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ 로 나타내고, 다음과 같이 정의한다.

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

(2) 내적의 다양한 표현



$\triangle$OAB 에서 제2코사인법칙을 이용하면

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{OA}}^2+\overline{\mathrm{OB}}^2-2\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta$$

이 때,

$$\overline{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\vec{a}|,\quad \overline{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\vec{b}|$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}^2=|\vec{a}|+|\vec{b}|-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\cdots\cdots①$$

을 얻는다. 이제 평면벡터의 내적을 성분을 써서 나타내보자.

위의 물음에서 $\vec{a}=(a_1,a_2),\vec{b}=(b_1,b_2)$라고 하면

$\mathrm{A}(a_1,a_2), \mathrm{B}(b_1,b_2)$이고 $\overline{\mathrm{AB}}^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = (b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2$

$$|\vec{a}|^2 = a_1^2+a_2^2,\quad |\vec{b}|^2 = b_1^2+b_2^2, |\vec{a}||\vec{b}|cos\theta = \vec{a}\cdot\vec{b}$$

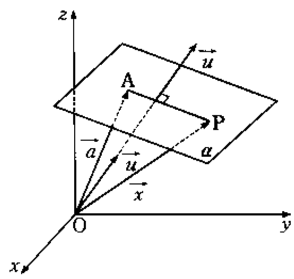
이므로, 이들을 ①에 대입하면

$$(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2 = (a_1^2+a_2^2)+(b_1^2+b_2^2)-2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

에서 $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2 \cdots\cdots$ ② 를 얻는다.

(3) 내적의 활용

벡터의 내적을 이용하여 공간에서 직선과 점 사이의 최단 거리, 평면의 방정식 등을 구할 수 있다. 여기서는 평면의 방정식을 유도하는 과정만 보인다.



좌표공간에서 한 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}$와 수직인 평면을 α라고 하자.

점 A와 평면 α위에 있는 임의의 점 P의 위치벡터를 각각 $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{x}$라 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{u}$이므로 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\vec{u} = 0$에서

$$(\vec{x}-\vec{a})\cdot\vec{u} = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

역으로, ①에서 $\vec{x} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$인 점 P의 집합은 $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$인 점 A를 지나고 $\vec{u}$와 수직인 평면 α가 된다. 이 때, 방정식 ①을 평면 α의 벡터방정식이라 하고 벡터 $\vec{u}$를 평면 α의 법선벡터라고 한다.

위에서 $\vec{a} = (x_1,y_1,z_1), \vec{u} = (a,b,c), \vec{x} = (x,y,z)$라 하고 ①을 성분을 써서 나타내면 $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0$ 을 얻는다. 이를 풀어서 정리하면 다음과 같은 평면의 방정식을 얻는다.

$$ax+by+cz+d = 0$$

풀 어 보 기

문제 1 좌표공간에서 직선 $\frac{x}{2}=y=z+3$과 평면 $\alpha : x+2y+2z=6$의 교점을 A라 하자. 중심이 점 $(1,\ -1,\ 5)$이고 점 A를 지나는 구가 평면 α와 만나서 생기는 도형의 넓이는 $k\pi$이다. k의 값을 구하시오. (2011학년도 수능문제)

문제 2 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자. 점 P가 선분 AH 위를 움직일 때, $|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}|$의 최댓값은 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) (2013학년도 수능문제)

문제 3 좌표공간에서 중심이 원점이고 직선 $x+1=2-y=z$와 서로 다른 두 점 A, B에서 만나는 구와 이 구 위를 움직이는 점 P가 있다. 두 벡터 $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$에 대하여 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AB}|^2$이 성립할 때, 점 P가 나타내는 도형의 길이는?
(2011년 10월 전국연합)

① π ② 2π ③ $2\sqrt{2}\pi$ ④ $2\sqrt{3}\pi$ ⑤ 4π

읽 기 자 료

벡터의 내적을 이용한 삼각형의 성질 증명[5)]

(가) 삼각형의 외심

삼각형의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

증명 그림에서 직선KQ는 선분AC의 수직이등분선이므로 $|\overrightarrow{KC}|=|\overrightarrow{KA}|$

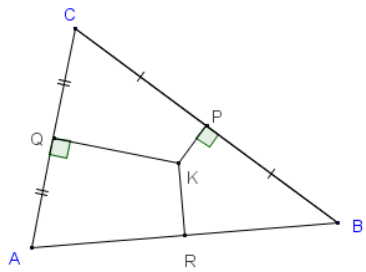
직선KP는 선분BC의 수직이등분선이므로 $|\overrightarrow{KC}|=|\overrightarrow{KB}|$이다.

따라서 $|\overrightarrow{KA}|=|\overrightarrow{KB}|$이다.

점 R이 선분 AB의 중점일 때, $\overrightarrow{KR}$과 $\overrightarrow{AB}$가 수직임을 보이면 된다.

$$\overrightarrow{KR}\bullet\overrightarrow{AB}=\frac{\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}}{2}\bullet(\overrightarrow{KB}-\overrightarrow{KA})=\frac{|\overrightarrow{KB}|^2-|\overrightarrow{KA}|^2}{2}=0$$

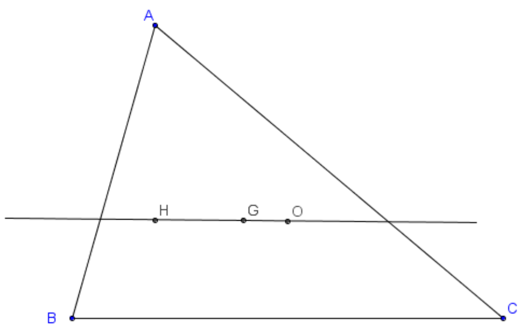
이다. 그러므로 $\overrightarrow{KR}$과 $\overrightarrow{AB}$가 수직이다.



(나) 오일러 직선과 오일러 직선의 성질

삼각형 ABC에서 무게중심, 외심, 수심은 한 직선 위에 있고, 무게중심은 외심과 수심을 1:2로 내분한다.

증명 삼각형 ABC에서 외심을 O, 무게중심을 G라고 하자.



5) 참고문헌: 강수철 외 5인 **대수학과 기하학 (경문사)**

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$ 라 하고, H 에 대하여

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AH}=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA})=(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$$
$$=|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=0$$

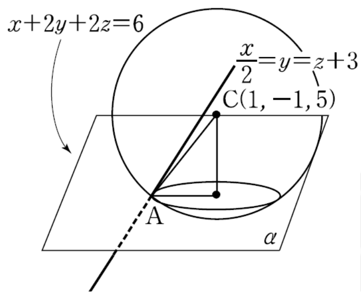
그러므로 $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ 이다. 마찬가지로 $\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ 이다.

따라서 H 는 수심이며, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}$ 이므로 $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$ 가 성립한다. 그러므로 무게중심은 외심과 수심을 1:2 로 내분한다.

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1



$\frac{x}{2}=y=z+3=t$ 라 하면 $\mathrm{A}=(2t,\ t,\ t-3)$ 이고 점 A가 평면 α 위의 점이므로

$2t+2t+2(t-3)=6$, $6t=12$, $\therefore\ t=2$, $\therefore \mathrm{A}(4,\ 2,\ -1)$

$$\overline{AC}=\sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2+(-1-5)^2}=\sqrt{54}$$

중심에서 $(1,\ -1,\ 5)$ 에서 평면까지의 거리를 d 라 하면

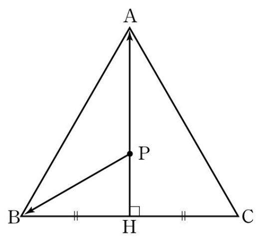
$$d=\frac{|\,1-2+10-6\,|}{\sqrt{1+4+4}}=1$$

따라서 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름 r 는

$r=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-d^2}=\sqrt{54-1}=\sqrt{53}$ 따라서 구하는 넓이를 S 라 하면 $S=53\pi$

$$\therefore k=53$$

문제 2



$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\bullet\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=|\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}\cos\theta|=\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}$ 이고 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PH}}=\sqrt{3}$ 이므로 산술-기하평균에 의하여

$$\sqrt{3}=\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PH}}\geq 2\sqrt{\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PH}}}$$

$$\therefore\ \overline{\mathrm{PA}} \cdot \overline{\mathrm{PH}} \le \frac{3}{4}$$

따라서 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PB}}|$의 최댓값은 $\frac{3}{4}$이므로 $p+q=4+3=7$

문제 3

두 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$가 이루는 각의 크기를 θ라 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = |\overrightarrow{\mathrm{AP}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$에서 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta = |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|$가 성립하므로 점 P는 점 B를 지나고 직선 AB에 수직인 평면과 구의 교선인 원 위에 있다. 이때, 이 원의 반지름의 길이는 구의 중심과 직선 AB 사이의 거리와 같다. 한편, 원점 O에서 직선 $x+1=2-y=z$에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(t-1,\ 2-t,\ t)$라 하면

$(t-1, 2-t, t) \cdot (1, -1,\ 1) = 0$에서 $t=1$이다. 이때, $\mathrm{H}(0,1,1)$이므로 $\overline{\mathrm{OH}} = \sqrt{2}$ 이다.

따라서 구하는 도형의 길이는 $2\sqrt{2}\pi$이다.

논제 Ⅰ-1

공간에서 두 점 $(-1,0,0)$, $(1,0,2)$를 지나는 직선 l 의 방정식을 먼저 구하면 다음과 같다.

$$\frac{x+1}{2} = \frac{z}{2}\ ,\ \ y=0$$

따라서 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}(2t-1, 0, 2t)$이고 구의 중심이 $\mathrm{C}(0,0,r)$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (2t-1, 0, 2t-r)$ 이고 직선 l 의 방향벡터를 $\vec{u}$라고 하면 $\vec{u} = (2,0,2)$ 이고 $\vec{u}$와 $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$는 서로 수직이므로 $\vec{u} \cdot \overrightarrow{CA} = 4t-2+4t-2r=0$ 이다. 따라서 $t = \frac{r+1}{4}$임을 알 수 있다. 이를 점 A에 대입하면 $\mathrm{A}\left(\frac{r-1}{2}, 0, \frac{r+1}{2}\right)$을 구할 수 있다.

논제 Ⅰ-2

구와 직선이 접하려면 $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$ 와 반지름 r의 크기가 같으면 된다. 따라서 다음 식을 구할 수 있다.

$$r = \overline{\mathrm{AC}} \text{ 에서 } r = \sqrt{\left(\frac{r-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-r}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2r^2-4r+2}$$

무리방정식을 풀면 $4r^2 = 2r^2-4r+2$에서 $r = -1+\sqrt{2}$

논제 Ⅰ-3

$r=\frac{1}{2}$일 때, 구의 방정식은 $x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$이다.

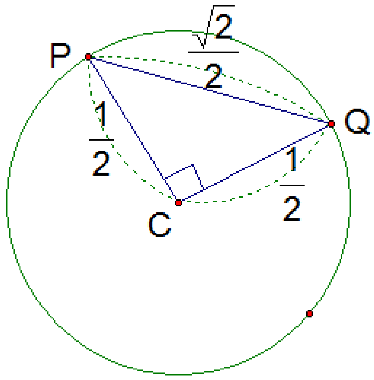
여기에 $x=2t-1, y=0, z=2t$를 대입하면

$4t^2-4t+1+4t^2-2t+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$을 구할 수 있고 식을 간단히 정리하면

$8t^2-6t+1=0$을 구할 수 있고 해를 구하면, $t=\frac{1}{2}$ or $t=\frac{1}{4}$이다.

이제 이 값을 대입하면 $\mathrm{P}(0,0,1)$, $\mathrm{Q}\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$을 구할 수 있다.

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로 두 점 P, Q를 잇는 구면 위의 가장 짧은 곡선은 $\widehat{\mathrm{PQ}}=\frac{\pi}{4}$이다.



논제 Ⅰ-4

점 $(-1,0,0)$, $(1,0,2)$, $(-1,1,0)$을 지나는 평면의 방정식을 $ax+by+cz+d=0$이라고 하자. 점 $(-1,0,0)$, $(1,0,2)$, $(-1,1,0)$을 차례로 대입하면 $a=d$, $c=-a$, $b=0$ 가 되므로 평면의 방정식은

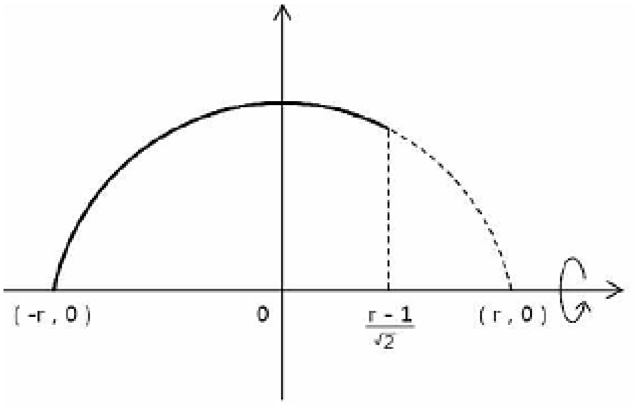
$$ax-az+a=0,\ \text{즉}\ x-z+1=0$$

이다. 따라서 구의 중심$(0,0,r)$과 평면 $x-z+1=0$ 사이의 거리 d는 다음과 같다.

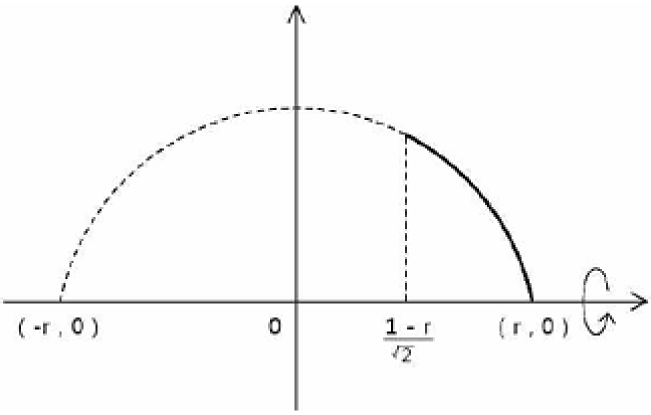
$$d=\frac{|r-1|}{\sqrt{2}}$$

반지름이 r인 구의 부피는 원 $x^2+y^2=r^2$을 x축 둘레로 회전시킨 입체의 부피와 같으므로 구의 중심으로부터 거리가 $d=\frac{|r-1|}{\sqrt{2}}$만큼 떨어진 평면에 의해 잘려진 구의 부피는 다음과 같은 식으로 계산할 수 있다.

첫째, $r \geq 1$인 경우, $V = \pi \int_{-r}^{\frac{r-1}{\sqrt{2}}} (r^2 - x^2)dx$



둘째, $\sqrt{2} - 1 \leq r < 1$인 경우, $V = \pi \int_{\frac{1-r}{\sqrt{2}}}^{r} (r^2 - x^2)dx$



3 경희대학교 수시(일)

제시문 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**[6)]

[가] 이차곡선은 태양계의 행성이나 혜성의 궤도를 밝히는 데 중요한 역할을 하며, 천체를 관측하는 망원경을 제작할 때에도 활용된다. 또한 운동 물체의 궤도를 연구하는 운동 역학 분야, 다리나 터널을 설계하는 토목 공학 분야, 소리의 효과를 연구하는 음향학 분야 등에도 많이 활용된다. 이차곡선은 일반적으로 인수분해되지 않는 x, y에 관한 이차방정식 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$을 만족하는 평면 위의 점 (x,y)의 집합이며, 그 계수의 값에 따라 포물선, 원, 타원, 쌍곡선으로 분류할 수 있다. 이 중 특히 타원은 두 초점으로부터의 거리의 합이 일정한 점들의 집합으로 정의된다.

[나] ①타원의 표면에서 빛이 반사된다고 가정할 때, 타원은 한 초점에서 출발한 빛이 타원 표면에서 반사된 후 다른 초점으로 모아진다는 성질을 가지고 있다. 이러한 성질은 빛, 소리, 충격파에도 적용될 수 있으며, 타원의 이러한 성질을 활용하여 치과에서 환자를 치료할 때 사용하는 타원형 반사경, 체외 충격파 쇄석기, 워싱턴 국회의사당 조각 홀, 런던 세인트 폴 대성당의 '속삭이는 회랑' 등을 고안할 수 있었다. 타원형 반사경의 경우 한 초점에 놓인 전구에서 나온 빛이 반사경에 반사되어 다른 초점에 놓인 치아에 모이게 되며, 체외 충격파 쇄석기는 한 초점에 위치한 발생기에서 나온 충격파가 다른 초점에 놓인 환자의 결석에 모여 결석을 분쇄시킨다. 또한 앞의 건축물들에서는 방의 벽과 천장이 타원 모양으로 되어 있어서 어느 특정한 곳에서 속삭이듯 작은 소리로 이야기하더라도 소리가 벽이나 천장에 반사된 후 또 다른 특정한 곳으로 모이게 되어서, 멀리 떨어진 다른 특정한 곳에서 그 소리를 또렷하게 들을 수 있다. 위에서 언급된 예들은 모두 타원을 축의 둘레로 회전하여 만든 형태의 곡면 입체를 활용하여 만든 것으로, 곡면의 한 초점에서 나온 빛은 타원의 성질에 의하여 곡면에서 반사된 후 다른 초점에 모이게 된다는 원리를 이용한 것이다.

[다] 좌표평면 위의 각 점을 그 평면 위의 점으로 대응시키는 함수를 변환이라고 한

6) 경희대학교 입학처

다. 그 중 일차변환은 다음과 같이 상수항이 없는 x, y에 관한 일차식으로 표현된다.

$$x' = ax + by,\ y' = cx + dy$$

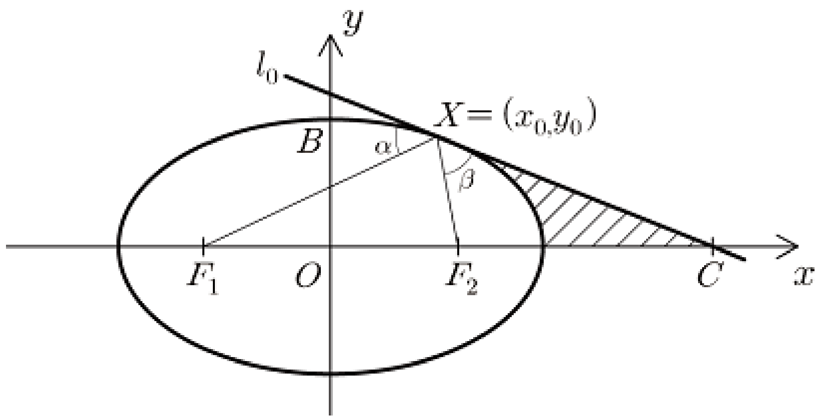
일차변환의 예로는 대칭변환, 닮음변환, 회전변환이 있다. 특히, 회전변환의 경우 점 (x,y)가 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전이동한 점 (x',y')은 아래와 같이 결정된다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

회전변환에 의하여 평면 위의 두 점 A, B가 A′, B′으로 변환된다고 할 때, A′과 B′ 사이의 거리는 변환 전의 두 점 사이의 거리와 같다. 즉 회전변환은 두 점 사이의 거리를 보존하는 성질이 있다.

논제 Ⅰ-1 제시문 [가]와 [나]를 참조하여 다음 질문에 답하시오. (15점)

아래 그림의 타원에서 두 초점이 $F_1 = (-1,0)$, $F_2 = (1,0)$이고, $B = (0,1)$이다. 직선 l_0는 타원 위의 점 $X = (x_0, y_0)$에서의 접선이고, 이 접선과 선분 XF_1, XF_2가 이루는 예각을 각각 α, β라고 하자.



(1) $\cos\alpha$의 값을 y_0에 관한 식으로 표현하시오.

(2) 제시문 [나]의 ①은 각 α와 β가 동일함을 의미한다. (1)를 이용하여 이 사실이 성립함을 논술하시오.

논제Ⅰ-2 제시문 [가]와 [다]를 참조하여 다음 질문에 답하시오. (10점)

〈논제 I-1〉의 그림에서 두 초점이 $\mathrm{F}_1=(-1,0)$, $\mathrm{F}_2=(1,0)$이고, $\mathrm{B}=(0,1)$, $\mathrm{C}=(3,0)$일 때, 빗금 친 영역을 x축을 중심으로 회전시킨 입체의 부피를 구하고 그 근거를 서술하시오.

논제Ⅰ-3 제시문 [가]와 [다]를 참조하여 다음 질문에 답하시오. (15점)

〈논제 I-1〉의 그림에서 타원의 두 초점이 $\mathrm{F}_1=(-1,0)$, $\mathrm{F}_2=(1,0)$이고, $\mathrm{B}=(0,1)$일 때, 이 타원을 x축을 중심으로 하여 회전시킨 회전체를 V라고 하자. 또한 이 회전체 V에 내접하면서 각 면이 xy, yz 혹은 zx평면과 평행인 직육면체들 중에서 부피가 최대가 되는 직육면체를 R이라고 하자.

(1) 부피가 최대가 되는 직육면체 R의 한 꼭짓점을 (a,b,c)라고 할 때, 이 꼭짓점은 타원 위의 점이 x축을 중심으로 $\frac{\pi}{4}$ 혹은 $-\frac{\pi}{4}$만큼 회전 이동한 것임을 보이고 그 근거를 서술하시오.

(2) 부피가 최대가 되는 직육면체 R의 가로, 세로, 높이의 길이를 구하고 그 근거를 서술하시오.

논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 1문항, 과학1-2문항(총 2-3문항)	시간	120분
연관 개념	이차곡선, 회전체의 부피		

제 시 문 분 석

제시문

제시문은 이차곡선의 정의와 이차곡선의 성질 등에 관해서 간략히 설명하고 있다. 또 회전변환을 설명하여 어떤 도형을 회전시켰을 때 상대적 위치는 변하지 않음을 설명하고 있다. 고등학생으로서 정상적인 교육과정을 이수하면 누구나 알 수 있는 평이한 내용으로 구성되어 있다.

논 제 분 석

논제Ⅰ-1

(1) 이차곡선의 접선의 방정식을 구하고, 또 그 기울기를 이용하여 두 직선이 이루는 각의 크기를 구할 수 있는지를 묻고 있다.(이차곡선의 접선을 이용하고 두 벡터 사이의 각을 구하는 공식으로 문제를 풀 수도 있다.)

(2) 위의 (1)에서 구한 두 직선 사이의 각의 크기로 코사인 값을 구하여 코사인값이 같으면 각의 크기가 같음을 의미함을 알고 있는지 묻고 있다.

논제Ⅰ-2

접선과 곡선으로 이루어진 도형의 회전체의 부피를 구할 수 있는지를 묻고 있다.

논제Ⅰ-3

원에 내접하는 직사각형의 넓이가 최대가 될 조건과 도형의 부피의 최댓값을 미분을 통하여 구할 수 있는지를 묻고 있다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 이차곡선 위의 점을 지나는 접선의 방정식

(1) 타원 위의 점을 지나는 접선의 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1,y_1)에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1\cdots\cdots①$$

①을 원으로 바꾸어 생각하면 $a=b=r$이므로

원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 (x_1,y_1)에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x_1x}{r^2}+\frac{y_1y}{r^2}=1,\ 즉,\ x_1x+y_1y=r^2 이다.$$

(2) 포물선 위의 점을 지나는 접선의 방정식

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 (x_1,y_1)에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

(3) 쌍곡선 위의 점을 지나는 접선의 방정식

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 (x_1,y_1)에서 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

2. 두 직선 사이의 각을 구하는 방법

(1) 직선의 기울기를 이용하는 방법

두 직선의 기울기가 각각 m_1, m_2 이고 두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라고 하면 다음이 성립한다.

$$\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$$

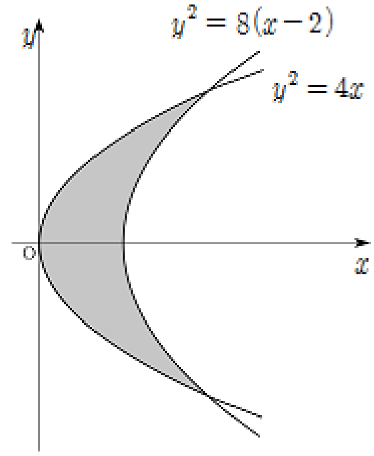
(2) 벡터의 내적을 이용하는 방법

두 직선이 이루는 예각의 크기를 θ라 하고 두 직선과 평행한 벡터를 각각 $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$라고 하면 다음이 성립한다.

$$\cos\theta=\left|\frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}\right|$$

풀 어 보 기

문제 1 두 포물선 $y^2=4x$와 $y^2=8(x-2)$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피가 V일 때, $\frac{V}{\pi}$의 값을 구하시오.(2012년 10월 전국연합)



문제 2 자연수 n에 대하여 포물선 $y^2=\frac{x}{n}$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=1$이고 $\overline{\mathrm{FQ}}=a_n$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}$의 값은? (2013학년도 수능)

① 210 ② 205 ③ 200 ④ 195 ⑤ 190

문제 3 함수 $f(x)=kx^2e^{-x}$ $(k>0)$과 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 한 점에서만 미분가능하지 않도록 하는 k의 최댓값은? (2013학년도 수능)

① $\frac{1}{e}$ ② $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ③ $\frac{e}{2}$ ④ $\sqrt{e}$ ⑤ e

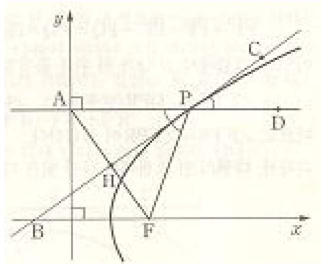
읽 기 자 료

이차곡선과 빛의 반사[7)]

(1) 포물선에서 빛의 반사

포물선에 평행하게 입사한 빛은 초점을 지나고, 또 초점에서 나간 빛은 축에 평행하게 반사된다는 것을 증명해 보자. 이 증명에서는 빛은 입사각과 반사각이 같게 반사된다는 사실을 이용한다.

증명) x, y축 위에 각각 초점 F와 점 A를 잡는다. 선분 AF의 수직이등분선과 점 A를 지나고 y 축에 수직인 직선의 교점을 P라고 하자.



점 A가 y축 위를 움직일 때 $\overline{PA} = \overline{PF}$ 이므로

점 P의 자취는 포물선이다.

이 때, y축은 준선, 점 F는 초점이다.

그림에서 직선 AP 위에 점 D를 잡으면

$$\angle CPD = \angle APH \ (\because \text{맞꼭지각})$$

그런데 $\angle FPH = \angle APH$이므로

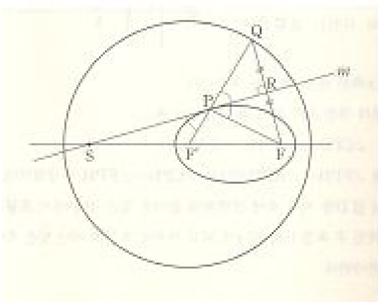
$\angle CPD = \angle FPH$가 성립한다.

따라서 점 D를 지나 축에 평행하게 들어온 빛은 점 P에서 포물선에 부딪혀 꺽인 후 초점 F를 지나게 되고 거꾸로 초점을 지난 빛은 축에 평행하게 반사된다.

(2) 타원에서 빛의 반사

타원의 한 초점에서 나간 빛은 다른 초점으로 반사된다는 사실을 증명해 보자.

증명) 원 F′위의 점 Q, 원 내부의 임의의 점 F에 대하여



$\overline{FQ}$의 수직이등분선을 m이라 하면

$\overline{PF'} + \overline{PF} = \overline{PF'} + \overline{PQ} = \overline{F'Q}$ =(원의 반지름)

이므로, 그림에서 점 Q가 원 위를 움직일 때

점 P의 자취는 타원이다.

$\angle F'PS = \angle QPR$(맞꼭지각), $\angle QPR = \angle FPR$

이므로 $\angle F'PS = \angle FPR$이 성립한다.

따라서, 타원의 초점에서 나간 빛은 다른 초점으로 반사된다.

7) 자료의 출처 : 남호영외 3인 **원뿔에서 태어난 이차곡선 (수학사랑)**

(3) 쌍곡선에서 빛의 반사

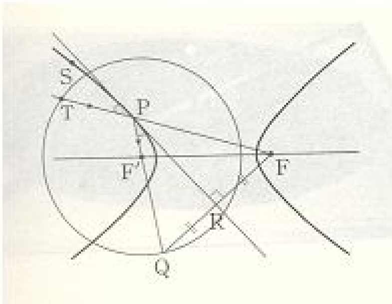
쌍곡선의 한 초점을 향해 직진하는 빛은 쌍곡선에 부딪히면 다른 초점을 향해 반사된다.

증명) 그림에서 원 F′ 위의 점 Q에 대하여

$\overline{\mathrm{PR}}$은 $\overline{\mathrm{FQ}}$의 수직이등분선이라고 하면,

점 Q가 원 F′위를 움직일 때의

점 P의 자취는 쌍곡선이다.



$\angle \mathrm{TPS} = \angle \mathrm{FPR}$(맞꼭지각)

$\triangle \mathrm{PQR}$과 $\triangle \mathrm{PFR}$은 합동이므로

$\therefore \angle \mathrm{FPR} = \angle \mathrm{QPR}$

$\therefore \angle \mathrm{TPS} = \angle \mathrm{F'PR}$

쌍곡선의 한 초점을 향해 직진하는 빛은 쌍곡선에 부딪히면 다른 초점을 향해 반사된다.

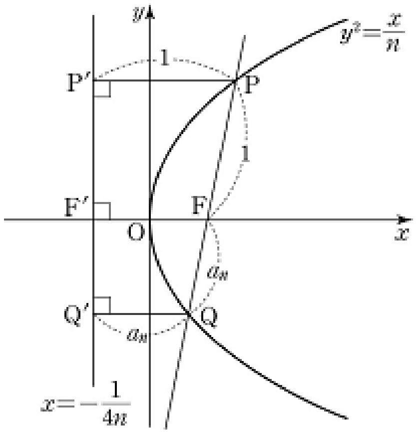
예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 두 곡선의 교점의 x좌표는 $8(x-2)=4x$에서 $x=4$

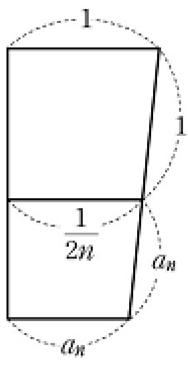
$$V=\pi\int_0^4 4x\,dx-\pi\int_2^4 8(x-2)\,dx=\pi\left[2x^2\right]_0^4-\pi\left[4x^2-16x\right]_2^4=32\pi-16\pi=16\pi \quad \therefore\ \frac{V}{\pi}=16$$

문제 2



포물선 $y^2=\dfrac{x}{n}$의 초점은 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{4n},\ 0\right)$이다.

세 점 P, F, Q에서 준선 $x=-\dfrac{1}{4n}$에 내린 수선의 발을 각각 P′, F′, Q′이라 하면 $\overline{\mathrm{FF'}}=\dfrac{1}{2n}$이고,



포물선의 정의에 의해 $\overline{\mathrm{PP'}}=1$, $\overline{\mathrm{QQ'}}=a_n$

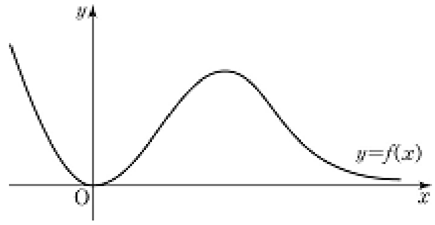
$$\frac{1}{2n}=\frac{1\cdot a_n+1\cdot a_n}{1+a_n},\ \frac{1}{2n}=\frac{2a_n}{1+a_n}\ ,\quad 4na_n=1+a_n,\ a_n(4n-1)=1$$

$$\therefore a_n=\frac{1}{4n-1},\ \sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(4n-1)=4\cdot\frac{10\cdot 11}{2}-10=210$$

문제 3 $f(x)=kx^2e^{-x}\,(k>0)$에서

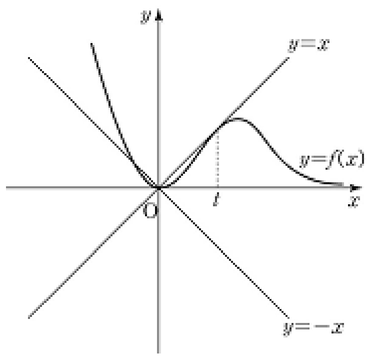
$$f'(x)=2kxe^{-x}-kx^2e^{-x}=kx(2-x)e^{-x}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$



x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	$\frac{4k}{e^2}$	↘

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서 x축까지의 거리와 y축까지의 거리 중 크지 않은 값을 $g(t)$라 하므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$, $y=-x$와 만나는 교점을 찾는다.



이때, 미분가능하지 않은 점이 한 곳만 있으려면 $x>0$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 만나지 않거나 접해야 한다.

접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$라 하면 $kt^2e^{-t}=t$ …… ㉠이고 $x=t$에서 접선의 기울기가 1이므로 $kt(2-t)e^{-t}=1$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $2-t=1$ $\therefore t=1,\ k=e$

따라서 k의 최댓값은 e이다.

논제 Ⅰ-1

(1) 먼저 타원의 방정식을 구하면 $b=1, c=1$이므로 $a^2=b^2+c^2=1+1=2$이다.

따라서 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$이다.

이제 접선의 방정식을 구하면 $\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$이고 여기에 $y=0$을 입력하면 $x=\frac{2}{x_0}$이다.

따라서 점 C 의 좌표는 $\left(\frac{2}{x_0}, 0\right)$이다.

$F_1(-1,0), F_2(1,0), X(x_0, y_0)$이므로, $\overrightarrow{F_1X}=(x_0+1, y_0)$, $\overrightarrow{CX}=(x_0-\frac{2}{x_0}, y_0)$이다.

$\overrightarrow{F_1X}, \overrightarrow{CX}$ 사이의 예각의 크기는 α이므로 $\left|\overrightarrow{F_1X} \cdot \overrightarrow{CX}\right|=\left|\overrightarrow{F_1X}\right|\left|\overrightarrow{CX}\right|\cos\alpha$

따라서 다음 식이 성립한다.

$$\cos\alpha=\frac{\left|\overrightarrow{F_1X} \cdot \overrightarrow{CX}\right|}{\left|\overrightarrow{F_1X}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CX}\right|}=\frac{\left|(x_0+1)(x_0-\frac{2}{x_0})+y_0^2\right|}{\sqrt{(x_0+1)^2+y_0^2}\ \sqrt{(x_0-\frac{2}{x_0})^2+y_0^2}}$$

$$=\frac{\left|x_0^2-2+x_0-\frac{2}{x_0}+y_0^2\right|}{\sqrt{x_0^2+2x_0+1+y_0^2}\ \sqrt{x_0^2-4+\frac{4}{x_0^2}+y_0^2}}$$

그런데 $\frac{x_0^2}{2}+y_0^2=1$이므로 $x_0^2=2(1-y_0^2)$을 위의 식에 대입하면

$$\cos\alpha=\frac{\left|2-2y_0^2-2+y_0^2+\frac{x_0^2-2}{x_0}\right|}{\sqrt{2-2y_0^2+2x_0+1+y_0^2}\ \sqrt{2-2y_0^2-4+\frac{4}{x_0^2}+y_0^2}}=\frac{\left|-y_0^2-\frac{2y_0^2}{x_0}\right|}{\sqrt{3-y_0^2+2x_0}\ \sqrt{-2-y_0^2+\frac{4}{x_0^2}}}$$

$$=\frac{\left|\frac{(x_0+2)y_0^2}{x_0}\right|}{\sqrt{3-y_0^2+2\sqrt{2-2y_0^2}}\ \frac{1}{x_0}\sqrt{4-x_0^2(2+y_0^2)}}=\frac{\left|(x_0+2)y_0^2\right|}{\sqrt{3-y_0^2+2\sqrt{2-2y_0^2}}\ \sqrt{2y_0^4+2y_0^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2}\,(\sqrt{1-y_0^2}+\sqrt{2})|y_0|}{\sqrt{3-y_0^2+2\sqrt{2-2y_0^2}}\ \sqrt{2}\ \sqrt{y_0^2+1}}=\frac{(\sqrt{1-y_0^2}+\sqrt{2})|y_0|}{\sqrt{3-y_0^2+2\sqrt{2-2y_0^2}}\ \sqrt{y_0^2+1}}=\frac{|y_0|}{\sqrt{y_0^2+1}}$$

$$(\because\ \sqrt{3-y_0^2+2\sqrt{2-2y_0^2}}=\left(\sqrt{1-y_0^2}+\sqrt{2}\right))$$

다 른 풀 이

타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 라고 하자. 타원의 정의에 의해 $2a=\overline{\mathrm{F_1B}}+\overline{\mathrm{F_2B}}=2\sqrt{2}$

즉, $a=\sqrt{2}$ 이다. 그리고 그림에서 $b=1$ 이므로 주어진 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$이다.

타원 위의 한 점 (x_0,y_0)에서의 접선의 방정식은 $l_0:\frac{x_0x}{2}+y_0y=1$이고 l_0가 x축과 이루는 양의 방향의 각을 θ_1 이라고 하면 l_0의 기울기는 $\tan\theta_1=-\frac{x_0}{2y_0}$이다.

그리고 $\overline{\mathrm{XF_1}}$ 이 x축과 이루는 양의 방향의 각을 θ_2라고 하면 $\overline{\mathrm{XF_1}}$ 의 기울기는 $\tan\theta_2=\frac{y_0}{x_0+1}$이다.

그러면 $\alpha=\pi-(\theta_1-\theta_2)$, $\tan\alpha=\tan(\theta_2-\theta_1)=\left|\frac{\tan\theta_2-\tan\theta_1}{1+\tan\theta_2\tan\theta_1}\right|$이고,

이를 계산하면 $\tan\alpha=\left|\frac{1}{y_0}\right|$이고, 조건에서 α는 예각이므로 $\cos\alpha=\frac{|y_0|}{\sqrt{1+y_0^2}}$이다.

(2) $\overrightarrow{\mathrm{F_2X}}=(x_0-1,y_0),\overrightarrow{\mathrm{CX}}=(x_0-\frac{2}{x_0},y_0)$ 이다. 앞과 같은 방식으로 $\cos\beta$를 계산하면 다음과 같다.

$$\cos\beta=\frac{|\overrightarrow{\mathrm{F_2X}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CX}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{F_{21}A}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CX}}|}=\frac{\left|(x_0-1)(x_0-\frac{2}{x_0})+y_0^2\right|}{\sqrt{(x_0-1)^2+y_0^2}\sqrt{(x_0-\frac{2}{x_0})^2+y_0^2}}$$

$$=\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{1-y_0^2})|y_0|}{\sqrt{3-y_0^2-2\sqrt{2-2y_0^2}}\sqrt{y_0^2+1}}=\frac{|y_0|}{\sqrt{y_0^2+1}}$$

$$(\because\ \sqrt{3-y_0^2-2\sqrt{2-2y_0^2}}=\left(\sqrt{2}-\sqrt{1-y_0^2}\right))$$

$$\therefore \cos\alpha=\cos\beta$$

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$에서 $\cos x$는 일대일 함수이므로 위의 식은 입사각과 반사각은 서로 같음을 의미한다.

논제 Ⅰ-2

$F_1=(-1,0)$, $F_2=(1,0)$이고, $B=(0,1)$, $C=(3,0)$이므로 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$이고

$3=\frac{2}{x_0}$에서 $x_0=\frac{2}{3}, y_0=\frac{\sqrt{7}}{3}$을 구할 수 있다.

이제 접선의 방정식을 구하면 $\frac{\frac{2}{3}x}{2}+\frac{\sqrt{7}}{3}y=1$, $y=-\frac{1}{\sqrt{7}}x+\frac{3}{\sqrt{7}}$

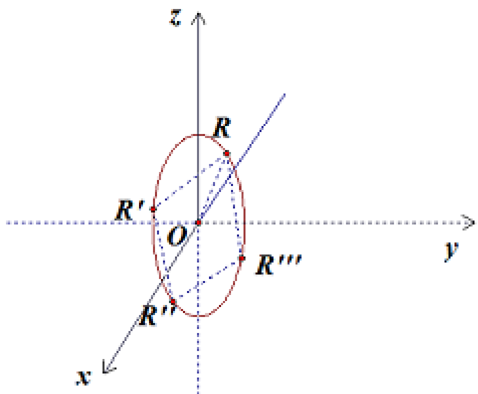
따라서 구하는 입체의 부피는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$V=\pi\int_{\frac{2}{3}}^{3}\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{7}}x-\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2\right\}dx-\pi\int_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}}\left(1-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{7}\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_{\frac{2}{3}}^{3}-\pi\left[x-\frac{1}{6}x^3\right]_{\frac{2}{3}}^{\sqrt{2}}=\frac{49\pi}{81}-\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{50}{81}\right)\pi=\frac{11}{9}\pi-\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

논제 Ⅰ-3

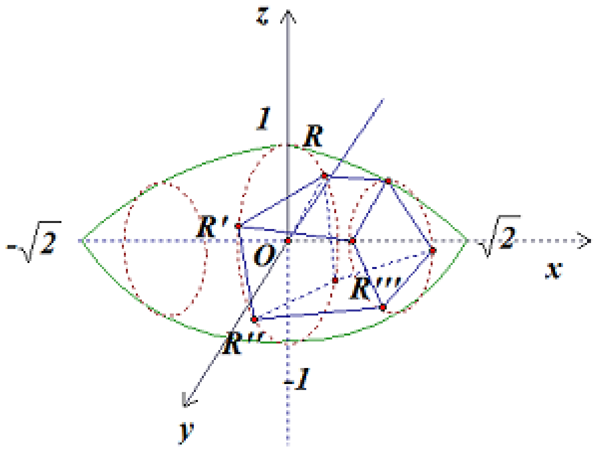
(1) 부피가 최대가 되는 직육면체 R의 한 꼭짓점을 (a,b,c)라고 할 때, 이 점을 포함하고 xz평면에 평행한 면으로 잘랐을 때 그 단면의 모양은 아래의 그림처럼 원에 내접하는 정사각형이 된다.



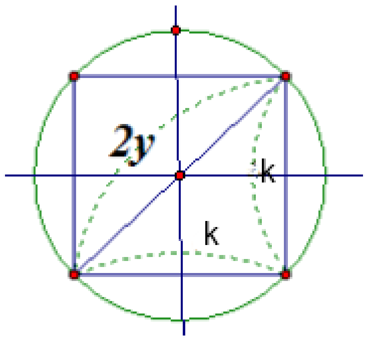
(임의의 원에 내접하는 직사각형 중에서 넓이가 최대인 직사각형은 정사각형이다. 임의의 원의 방정식을 $x^2+y^2=r^2$이라고 그 원에 내접하는 직사각형의 넓이를 S라 하면 $S=4xy\,(x>0, y>0)$. 그런데 $xy=\sqrt{x^2y^2}\le\frac{x^2+y^2}{2}=\frac{r^2}{2}$이므로 xy는 $x^2=y^2$일 때, 즉 $x=y$일 때 최댓값을 가진다. 이것은 S가 정사각형임을 의미한다.)

위의 그림에서 정사각형 $RR'R''R'''$은 xy 평면에 수직이므로 xy 평면과 선분 OR의 크기

는 45˚가 된다. 즉, x축을 중심으로 45˚회전한 점은 R이 된다.



(2) 위의 그림에서 x축에 수직이고 yz평면에 평행하게 자른 회전체의 단면의 반지름은 y이다. 따라서 그 때 정사각형의 한 변의 길이를 k라고 하면,



따라서 구하는 부피는 $V=2\times x\times k^2\cdots\cdots$①이다.

그런데 $\sqrt{2k^2}=2y$이므로 $k^2=2y^2$이고 $y^2=1-\dfrac{x^2}{2}$이다. 이 식을 ①에 대입하면

$V=2\times x\times(2-x^2)=4x-2x^3$ 이다. 이제 위의 식의 양변을 x로 미분하면

$\dfrac{dV}{dx}=4-6x^2=0$에서 $x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 이고 $y=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ 이다.

이것은 직육면체(정사각기둥)의 부피가 최대일 때, 정사각기둥의 높이는 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$이고 가로 세로의 길이는 $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$임을 의미한다.

4 고려대학교 모의

제시문 **다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.** 8)

(가) 그림 1과 같이 좌표공간에서 두 평면 $z=a$와 $z=b$ 사이에 있는 입체 A를 평면 $z=z_0$으로 자른 단면의 넓이가 $S(z_0)$일 때, A의 부피는

$$V_A=\int_a^b S(z)dz$$

이다. 그림 2에서 입체 B는 그림 1의 입체 A를 z축 방향으로 k배 늘여서 얻어진다. 입체 B의 부피를 V_B라 한다.

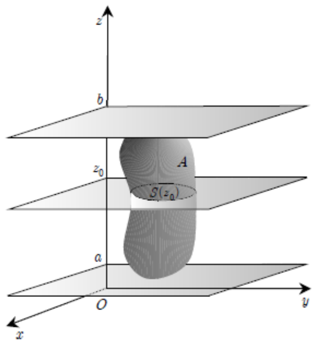


그림 1.

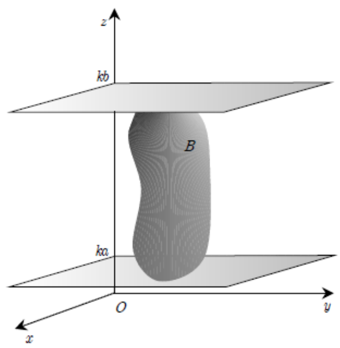


그림 2.

(나) 그림 3과 같이 반지름이 1인 구가 평면 α와 점 O에서 접한다. 점 O를 포함하고 평면 α와 수직이 아닌 평면 β가 평면 α와 이루는 예각을 ϕ라 한다.

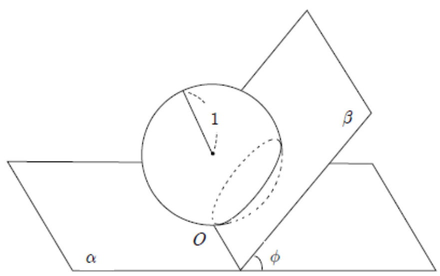


그림 3.

(다) 좌표공간에서 zx평면 위의 타원 $x^2+\dfrac{(z-2)^2}{4}=1$을 z축 둘레로 회전하여 얻어진 곡면으로 둘러싸인 입체를 C라 한다. 원점을 포함하고 zx평면과 수직이 아닌 평면 γ가 zx평면과 이루는 예각을 θ라 한다.

8) 고려대학교 입학처

논제 I

(a) 치환적분을 이용하여 제시문 (가)에서 V_A와 V_B의 관계식을 구하시오.

(b) 제시문 (나)에서 평면 β에 의해 잘린 구의 두 영역 중 작은 영역의 부피 $U(\phi)$를 구하시오.

(c) 제시문 (다)에서 평면 γ에 의해 나눠지는 C 의 두 영역 중 작은 영역의 부피를 $W(\theta)$ 라 하자. 극한 $\lim_{\theta \to 0+} \theta^a W(\theta)$가 수렴할 때, 실수 a와 극한값을 구하시오.

논술유형분석

문항 수	수학 1문항(필수), 과학4문항(택1)	시간	100분
연관 개념	치환적분, 정적분, 극한, 공간도형		

제시문분석

제시문

단면의 넓이가 주어진 임의의 입체에 대하여 부피를 구하는 방법에 대해 소개가 되어 있고 회전체의 부피를 구하는 데 필요한 각 사이의 관계를 제시하고 있다.

논제분석

논제

(a) 치환적분의 원리를 통해 임의의 입체와 그 입체를 한쪽 방향으로 늘인 입체의 부피에 대한 관계식을 작성할 수 있는가를 묻고 있다.

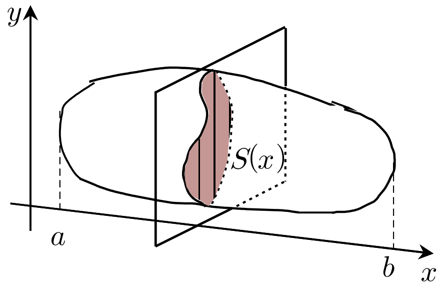
(b) 입체도형의 단면을 평면에 나타내고 정적분을 이용하여 회전체의 부피를 구할 수 있는가를 묻고 있다.

(c) 타원은 원을 한쪽 방향으로 늘이거나 줄인 것이기 때문에 (a)와 (b)를 이용하여 부피를 구하고 주어진 극한을 생각해본다. 먼저, 극한이 수렴하기 위한 a의 범위를 생각해보고 a의 값에 따라 극한이 달라지는 것에 유의하여야 한다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 정적분을 이용한 입체의 부피

구간 $[a, b]$의 임의의 점 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체의 부피 $V=\int_a^b S(x)\,dx$ 이다.



2. 회전체의 부피

① 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는 $V_x=\pi\int_a^b y^2\,dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

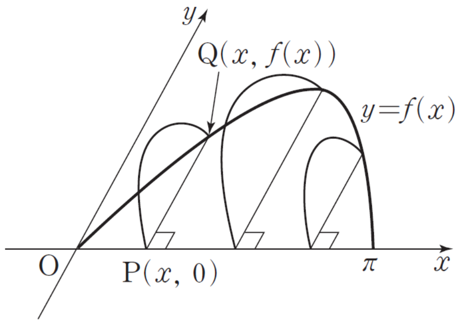
② 구간 $[c, d]$에서 연속인 함수 $x=g(y)$의 그래프를 y축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는 $V_y=\pi\int_c^d x^2\,dy=\pi\int_c^d \{g(y)\}^2\,dy$

③ $0\le g(x)\le f(x)$일 때, 구간 $[a, b]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분을 x축 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피는

$$V=\pi\int_a^b\left[\{f(x)\}^2-\{g(x)\}^2\right]dx$$

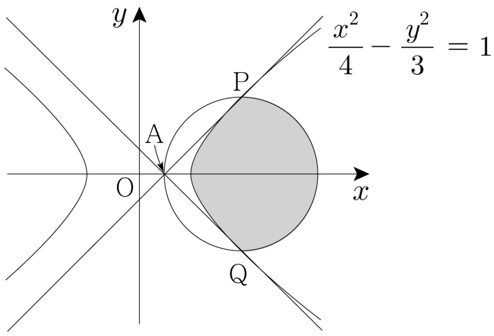
풀 어 보 기

문제 1 좌표평면 위의 곡선 $y=f(x)$ $(0 \le x \le \pi)$와 x축으로 둘러싸인 부분을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. $0 \le x \le \pi$일 때, 두 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$, $\mathrm{Q}(x,\ f(x))$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 이 입체도형을 자른 단면은 선분 PQ를 지름으로 하는 반원이라 한다. $\overline{\mathrm{OQ}}=x+\sin x$일 때, 이 입체도형의 부피는? (단, O는 원점이다.) (EBS 2012 수능완성)



① $\frac{1}{8}\pi^2$　② $\frac{3}{16}\pi^2$　③ $\frac{1}{4}\pi^2$　④ $\frac{5}{16}\pi^2$　⑤ $\frac{3}{8}\pi^2$

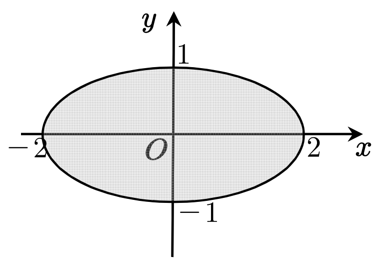
문제 2



그림과 같이 점 A$(1,0)$에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$에 그은 접선이 쌍곡선과 만나는 두 점을 각각 P, Q라 하자. 세 점 A, P, Q를 지나는 원의 내부가 쌍곡선에 의해 나뉘어서 생긴 두 영역 중에서 넓이가 큰 영역을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는 V이다. $\frac{V}{\pi}$의 값을 구하시오. (2009년 전국연합)

문제 3

다음 그림과 같이 곡선 $x^2+4y^2=4$로 둘러싸인 부분을 y축의 둘레로 회전시켜서 생기는 회전체의 부피를 구하여라.



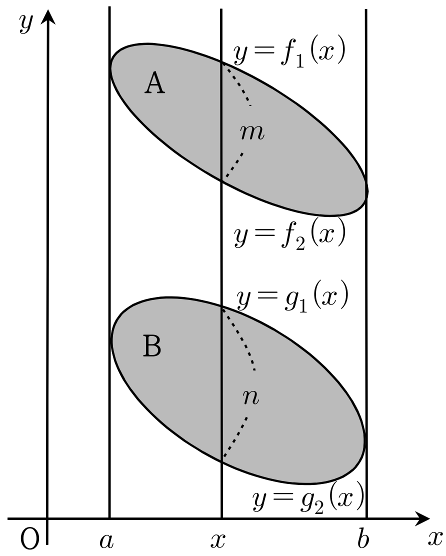
읽 기 자 료

카발리에리의 원리[9)]

카발리에리의 원리(Cavalieri's principle)는 이탈리아의 수학자인 카발리에리가 발견한 것으로 '두 개의 평면도형을 정직선에 평행인 직선으로 잘랐을 때, 두 평면도형 내에 있는 선분의 길이의 비가 항상 $m:n$으로 같은 경우, 두 평면도형의 넓이의 비도 $m:n$과 같다.' 라는 것이다. 이 원리는 입체인 경우로 확장할 수 있다. 즉, '두 개의 입체도형을 일정한 평면에 평행한 평면으로 잘랐을 때, 두 입체도형의 단면의 넓이의 비가 항상 $m:n$으로 같은 경우, 두 입체도형의 부피의 비도 $m:n$과 같다. ' 라고 할 수 있다.

(1) 넓이에 관한 카발리에리의 원리 증명

두 평면도형 A, B를 정직선에 평행한 임의의 직선으로 잘랐을 때, 두 평면도형 내에 있는 선분의 길이의 비가 $m:n$이면 두 도형 A, B의 넓이의 비도 $m:n$과 같다.



〈증명〉 오른쪽 그림과 같이 y축에 평행하면서 도형 A, B를 끼고 있는 두 직선이 x축과 만나는 점의 x좌표를 $a, b\,(a<b)$라 하자.

이제 $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$를 도형 A를 둘러싸는 그래프의 함수, $y=g_1(x)$, $y=g_2(x)$를 도형 B를 둘러싸는 그래프의 함수라 하면

$$\{f_1(x)-f_2(x)\} : \{g_1(x)-g_2(x)\}=m : n$$

이므로

$$\{f_1(x)-f_2(x)\} = \frac{m}{n}\{g_1(x)-g_2(x)\}$$

이다. 이때,

$$(\text{A의 넓이})=\int_a^b\{f_1(x)-f_2(x)\}\,dx = \frac{m}{n}\int_a^b\{g_1(x)-g_2(x)\}\,dx=\frac{m}{n}(\text{B의 넓이})$$

이 성립하고, 따라서 두 도형 A, B의 넓이의 비는 $m:n$이다.

(2) 부피에 관한 카발리에리의 원리 증명

일정한 평면에 수직인 한 직선을 x축이라 하고 일정한 평면에 평행하면서 입체를 끼고

9) 구자관, 신통 수리논술2, 더텍스트, 2011

있는 두 평면이 x축과 만나는 점의 x좌표를 $a, b\ (a<b)$라 하자.

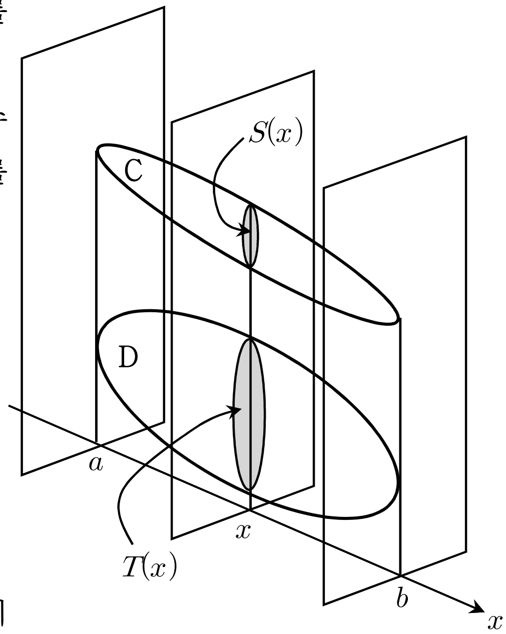
이제 x축 위의 좌표가 x인 점을 지나고 x축에 수직인 평면이 입체도형 C, D를 자른 단면의 넓이를 각각 $S(x)$, $T(x)$라 하면

$$S(x) : T(x) = m : n,$$

즉 $S(x) = \frac{m}{n}T(x)$ 이고,

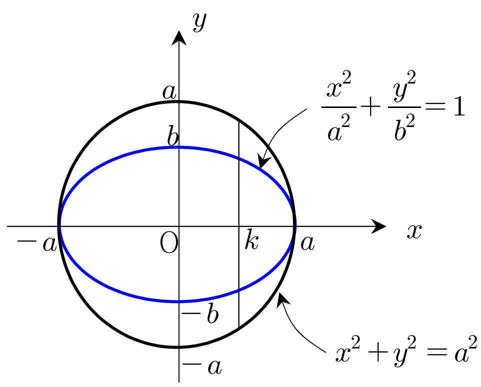
$$(\text{C의 부피}) = \int_a^b S(x)\,dx$$
$$= \frac{m}{n}\int_a^b T(x)\,dx = \frac{m}{n}(\text{D의부피})$$

따라서 두 입체도형 C, D의 부피의 비는 $m : n$이다.



(3) 카발리에리의 원리를 이용한 타원의 넓이

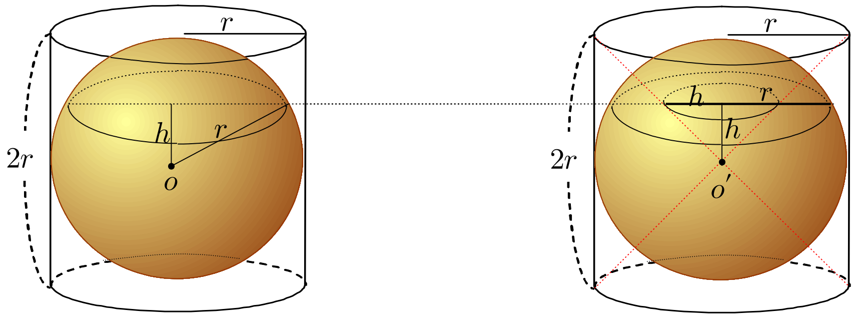
타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>b>0$)의 넓이를 카발리에리의 원리를 이용해서 구해 보자. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$에서 $y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ 이고 원 $x^2+y^2=a^2$에서 $y=\pm\sqrt{a^2-x^2}$ 이다. 이때, 직선 $x=k(-a\le k\le a)$에 의해 타원과 원의 잘린 선분의 길이의 비는 $\frac{b}{a}:1=b:a$이다. 따라서 카발리에리의 원리에 의해 타원의 넓이와 원의 넓이의 비 역시 $b:a$가 된다. 이때, 원의 넓이가 πa^2이므로 타원의 넓이를 S라 하면 $S:\pi a^2=b:a$에서 $S=\pi ab$이다.



(4) 카발리에리의 원리를 이용한 구의 부피

그림A를 평행 이동하여 그림B를 생각한다. 그림B에서 O'를 정점으로 하고, 이 직원기둥의 윗면과 아랫면을 밑면으로 하는 직원뿔을 뺀 것을 생각하자. 이렇게 하여 얻어진 두 개의 그림을 밑면에 평행하게 O, O'에서 거리가 h만큼 떨어진 곳에 있는 평면으로 자른다. 그러면 그림A의 단면에는 반지름의 길이가 $\sqrt{r^2-h^2}$인 원이 나타난다. 따라서

이 단면의 넓이는 $\pi(r^2-h^2)$이다. 또한 그림B의 단면에는 반지름이 r과 h인 두 개의 동심원 사이에 부분이 나타난다. 따라서 이 단면의 넓이는 $\pi(r^2-h^2)$이다. 따라서 단면의 넓이는 항상 같다. 이 사실로부터 카발리에리 원리에 의해 구의 부피는 그림 B의 직원기둥의 부피에서 직원뿔의 부피를 뺀 것과 같아진다. 직원기둥 전체의 부피는 $2\pi r^3$이며 직원뿔의 부피는 $\dfrac{2}{3}\pi r^3$이다. 따라서 구의 부피는 $2\pi r^3-\dfrac{2}{3}\pi r^3=\dfrac{4}{3}\pi r^3$이다.



그림A 그림B

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 ④

직각삼각형 OPQ 에서

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x+\sin x)^2-x^2}=\sqrt{2x\sin x+\sin^2 x}$$

두 점 $P(x,\ 0)$, $Q(x,\ f(x))$를 지나고 x축에 수직인 평면으로 입체도형을 자른 단면의 넓이를 $S(x)$라 하면

$$S(x)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2x\sin x+\sin^2 x}\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{8}(2x\sin x+\sin^2 x)$$

$$=\frac{\pi}{16}(4x\sin x-\cos 2x+1)\ (\because \cos 2x=1-2\sin^2 x)$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^{\pi} S(x)\,dx=\frac{\pi}{16}\int_0^{\pi}(4x\sin x-\cos 2x+1)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{16}\left[\ -4x\cos x+4\sin x-\frac{1}{2}\sin 2x+x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{\pi}{16}\times 5\pi\ =\frac{5}{16}\pi^2$$

문제 2 정답 26

접선의 방정식은 $y=\pm(x-1)$이고, 두 접점 P, Q의 좌표는 각각 $(4,3)$, $(4,-3)$이다.

이때, 점 A, P, Q를 지나는 원의 방정식은 $(x-4)^2+y^2=9$ 이다. 따라서,

$$V=\pi\int_2^4\left(\frac{3}{4}x^2-3\right)dx+18\pi=26\pi$$

$$\therefore\ \frac{V}{\pi}=26$$

문제 3 정답 $\frac{16}{3}\pi$

$x^2+4y^2=4$에서 $x^2=4-4y^2$이므로

$$(\text{부피})=2\pi\int_0^1 x^2dy\ =2\pi\int_0^1(4-4y^2)dy\ =2\pi\left[4y-\frac{4}{3}y^3\right]_0^1=\frac{16}{3}\pi$$

카발리에리의 원리를 이용하면, $2\times\frac{8}{3}\pi=\frac{16}{3}\pi$ 이다.

논제 I

(a) 입체 B는 입체 A를 z축 방향으로 k배 늘여서 얻어지므로 입체 B를 평면 $z=z_0$으로 자른 단면의 넓이는 $S\left(\frac{z_0}{k}\right)$이고 입체 B의 부피는 $V_B=\int_{ka}^{kb}S\left(\frac{z}{k}\right)dz$이다. $\frac{z}{k}=t$로 치환하면 $V_B=\int_{ka}^{kb}S\left(\frac{z}{k}\right)dz=k\int_a^b S(t)dt=kV_A$이다.

(b) 단면의 넓이는 $\pi(1-z^2)$이고 z는 $\cos\phi$부터 1까지 변하므로 작은 영역 $U(\phi)$는

$$U(\phi)=\pi\int_{\cos\phi}^{1}(1-z^2)dz=\pi\left[z-\frac{1}{3}z^3\right]_{\cos\phi}^{1}=\pi\left(\frac{2}{3}-\cos\phi+\frac{1}{3}\cos^3\phi\right)$$

이다.

(c) 제시문(다)의 입체 C는 $x^2+(z-1)^2=1$을 z축 둘레로 회전하여 얻은 입체 D를 z축으로 2배 늘여서 만든 입체이다. 평면 γ가 zx평면과 이루는 예각을 θ, 평면 γ에 의해 나눠지는 D의 두 영역 중에서 작은 영역의 부피를 $X(\theta)$라 하면

$$\lim_{\theta\to0+}W(\theta)=\lim_{\theta\to0+}2X(\theta)$$

이다. $X(\theta)$의 부피는

$$X(\theta)=\pi\int_{\sin\theta}^{1}(1-z^2)dz=\pi\left[z-\frac{1}{3}z^3\right]_{\sin\theta}^{1}=\pi\left(\frac{2}{3}-\sin\theta+\frac{1}{3}\sin^3\theta\right)$$

이므로 $\lim_{\theta\to0+}W(\theta)=\frac{4}{3}\pi$이다. 그러므로 $\lim_{\theta\to0+}\theta^a W(\theta)$가 수렴하기 위한 필요충분조건은 $a\geq0$이고 $\lim_{\theta\to0+}\theta^a W(\theta)$의 값은 아래와 같다.

$$\lim_{\theta\to0+}\theta^a W(\theta)=\begin{cases}\frac{4}{3}\pi & (a=0)\\ 0 & (a>0)\end{cases}$$

다 른 풀 이

$\theta\to0$이면 $X(\theta)\to\frac{4}{3}\pi$이다.(왜냐하면 입체 C의 부피의 절반의 부피가 된다. $\theta=0$이므로 zx평면으로 자른 부피가 된다.) 따라서 $\lim_{\theta\to0+}\theta^a W(\theta)$가 수렴하기 위한 필요충분조건은 $a\geq0$이고 $\lim_{\theta\to0+}\theta^a W(\theta)$의 값은 아래와 같다.

$$\lim_{\theta\to0+}\theta^a W(\theta)=\begin{cases}\frac{4}{3}\pi & (a=0)\\ 0 & (a>0)\end{cases}$$

5 고려대학교 수시(오전)

제시문 **다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.**[10)]

(가) 정의역이 $\{x|1 \le x \le 2\}$이고 공역이 $\{y|1 \le y \le 2\}$인 연속함수 $y=f(x)$가 있다. 자연수 n에 대하여 함수 $y=f_n(x)$를

$$f_n = f \circ f \circ \cdots \circ f \ (f\text{가 } n\text{개})$$

라 하고 $a_n = \int_1^2 f_n(x)\,dx$로 나타냈더니 수열 $\{a_n\}$은 $a_{n+1} = \dfrac{3a_n - 2}{a_n}$를 만족하고 첫째항이 $\dfrac{5}{3}$인 수열이 되었다.

(나) 어떤 함수 $y=g(x)$의 그래프가 제시문 (가)에서 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프와 점$(3,3)$에 대하여 점대칭이라 하면, 함수 $y=g(x)$는 정의역이 $\{x|4 \le x \le 5\}$이고 공역이 $\{y|4 \le y \le 5\}$인 연속함수가 된다. 이때 자연수 n에 대하여 함수 $y=g_n(x)$를

$$g_n = g \circ g \circ \cdots \circ g \ (g\text{가 } n\text{개})$$

로 나타낸다.

(다) 정의역이 $\{x|0 \le x \le 1\}$이고 공역이 $\{y|0 \le y \le 1\}$인 함수 $y=h(x)$가 $0 \le x < \dfrac{1}{3}$일 때 $h(x)=2x$를, $\dfrac{1}{3} \le x \le 1$일 때 $h(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$을 만족한다. 이 때 자연수 n에 대하여 함수 $y=h_n(x)$를

$$h_n = h \circ h \circ \cdots \circ h \ (h\text{가 } n\text{개})$$

로 나타낸다.

(a) 정의역이 $\{x|1 \le x \le 2\}$이고 공역이 $\{y|1 \le y \le 2\}$인 연속함수 $y=p(x)$가 일대일 대응이라 하자.
$\int_1^2 p(x)\,dx = \dfrac{4}{3}$일 때 역함수의 적분값 $\int_1^2 p^{-1}(x)\,dx$에 대하여 간단히 설명하시오.

10) 고려대학교 입학처

(b) 제시문 (가)에서 주어진 수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n을 구하시오.

(c) 제시문 (나)에서 주어진 함수 $y=g_n(x)$를 제시문 (가)의 함수 $y=f_n(x)$로 어떻게 나타낼 수 있는가를 수학적 귀납법을 이용하여 설명하고, 적분값 $\int_4^5 g_5(x)\,dx$를 구하시오.

(d) 제시문 (다)에서 주어진 함수 $y=h_n(x)$에 대하여 적분값 $\int_0^1 h_n(x)\,dx$를 구하시오.

논술유형분석

문항 수	수학 1문항(필수), 과학 1문항(선택)	시간	100분
연관 개념	수열의 점화식, 수학적 귀납법, 함수의 합성 및 그 함수의 적분		

제시문분석

제시문 (나)는 주어진 함수를 어떤 점에 대해 점대칭한 함수의 합성함수에 관한 내용이고, 제시문 (다)는 구간마다 다르게 정의된 함수의 n번 합성한 함수에 관한 내용이다.

논제분석

논제 a

일대일 대응 함수의 역함수의 적분을 묻는 문제로 주어진 함수가 증가일 때와 감소일 때로 나누어 생각해야 한다.

논제 b

주어진 점화식으로 일반항을 찾는 문제로 점화식을 적당히 정리하여 우리가 알고 있는 점화식의 형태로 고치는 것이 필요하다.

논제 c

함수를 대각선 위의 점에 대하여 점대칭한 후 합성을 하는 경우와 합성을 먼저 한 후 점대칭을 하는 것이 같다는 것을 수학적 귀납법을 통해 확인하는 문제이다.

논제 d

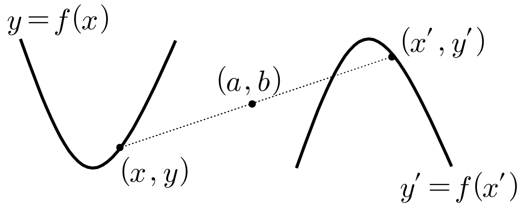
함수의 합성 과정에서 그 규칙성을 찾고 이를 이용하여 적분을 할 수 있는가를 묻는 문제이다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 함수의 점대칭

다음 그림과 같이 함수 $y=f(x)$위의 임의의 점 (x,y)가 점 (a,b)에 대칭되어 점 (x',y')이 된다고 하면

$$\frac{x+x'}{2}=a,\ \frac{y+y'}{2}=b$$



이고 $x=2a-x'$, $y=2b-y'$이므로 이것을 $y=f(x)$에 대입하면

$$2b-y'=f(2a-x')$$

따라서 $y=f(x)$를 점 (a,b)에 대칭이동한 도형의 방정식은

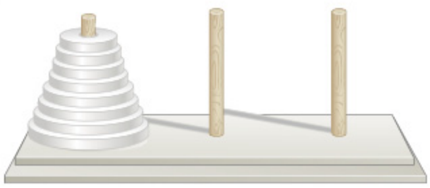
$$y=-f(2a-x)+2b$$

이다.

2. 후진대입법(Backward substitution)

점화식의 일반항을 구하는 방법은 여러 가지가 있다. 그 중에서 후진대입법이란 주어진 점화식에서 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots$을 차례로 구하여 초기조건이 나올 때까지 순차적으로 대입해서 일반항을 구하는 방법을 말한다. 예를 들어 루카스(Lucas, E)의 하노이 탑 문제에서 나오는 점화식

$$a_n=2a_{n-1}+1\ (n\ge 2),\ a_1=1$$

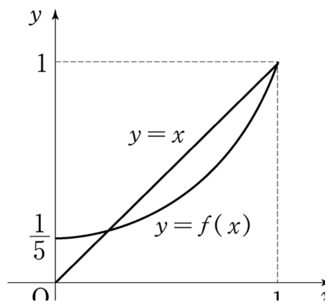


을 후진대입법으로 일반항을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} a_n &= 2a_{n-1}+1=2(2a_{n-2}+1)+1=2^2a_{n-2}+2+1 \\ &= 2^2(2a_{n-3}+1)+2+1=2^3a_{n-3}+2^2+2+1 \\ &\ \ \vdots \\ &= 2^{n-1}a_1+2^{n-2}+\cdots+2+1 \\ &= 2^n-1 \end{aligned}$$

풀 어 보 기

문제 1 오른쪽 그림은 직선 $y=x$와 다항함수 $y=f(x)$의 그래프의 일부이다. 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) \geq 0$이고 $f(0)=\frac{1}{5}$, $f(1)=1$일 때, 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은?
(2005년 평가원)



[보 기]

ㄱ. $f'(x)=\frac{4}{5}$인 x가 개구간 $(0,1)$에 존재한다.

ㄴ. $\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{1}{5}}^1 f^{-1}(x)dx=1$

ㄷ. $g(x)=(f\circ f)(x)$일 때, $g'(x)=1$인 x가 개구간 $(0,1)$에 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2 후진대입법을 이용하여 점화식

$$a_n=3na_{n-1}\ ,\ a_1=1$$

의 일반항을 구하여라.

읽 기 자 료

이상한 수학적 귀납법 11)

수학적 귀납법을 적용하여 증명을 할 때, 각 단계를 논리적으로 정확하게 밝혀야 한다. 다음은 수학적 귀납법을 이용하여 모든 말은 색이 같음을 증명한 것이다.

[정리] 모든 말은 색이 같다.

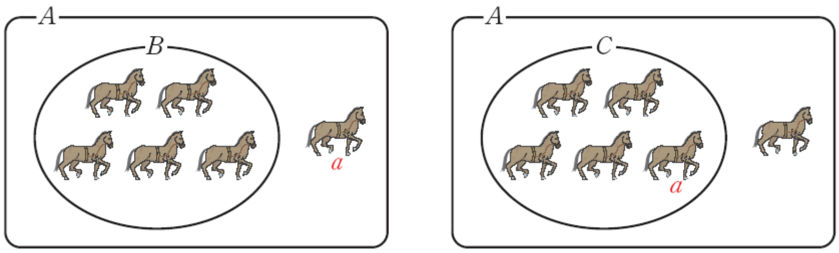
[증명] 이 정리를 증명하기 위하여 자연수 n에 대하여 명제 $p(n)$을 'n마리의 말로 이루어진 집합에 속하는 모든 말은 색이 같다.' 로 놓고, n에 대하여 수학적 귀납법을 적용한다.

❶ 한 마리의 말로 이루어진 집합에 속한 말의 색은 같으므로 $n=1$이면 $p(1)$은 명백히 참이다.

❷ $n \geq 1$이고, $p(n)$이 참이라고 가정하자.

❸ $n+1$마리의 말로 이루어진 임의의 집합 A가 있을 때 A에서 말 한 마리(이 말을 a라고 하자)를 제외한 집합을 B라고 하자. 그러면 집합 B에는 n마리의 말이 있으므로, 가정에 의하여 모든 말은 색이 같다.

이제 a를 집합 A에 다시 포함시키고 A에서 a가 아닌 말 한 마리를 제외한 집합을 C라고 하자. 그러면 집합 C에도 n마리의 말이 있으므로, 가정에 의하여 모든 말은 색이 같다.



❹ 집합 A의 모든 말은 색이 같으므로, $p(n+1)$이 참이다.

따라서 모든 자연수 n에 대하여 $p(n)$이 참이므로, 모든 말은 색이 같다.

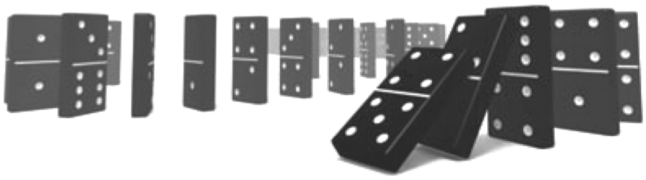
위의 증명의 어느 부분이 잘못되었는지 알아보자.

11) 신사고 수학 I. p130

증명 과정 ❸에서 $n=1$이면 $n+1=2$이므로 두 마리의 말로 이루어진 집합을 $A=\{a,\ b\}$라고 하자. 이때 집합 A에서 a를 제거한 집합은 $B=\{b\}$이고 당연히 집합 B에 속한 말은 색이 같다.

이제 a를 집합 A에 다시 포함시키고 b를 제거한 집합을 C라고 하면 $C=\{a\}$이므로 당연히 집합 C에 속한 말은 색이 같다. 그러나 이 경우에 a, b의 색이 같다는 보장이 없다. 즉 a, b의 색이 달라도 앞의 설명은 참이 된다.

따라서 ❸에서 “가정에 의하여 모든 말은 색이 같다.”라는 것이 성립하지 않는다.



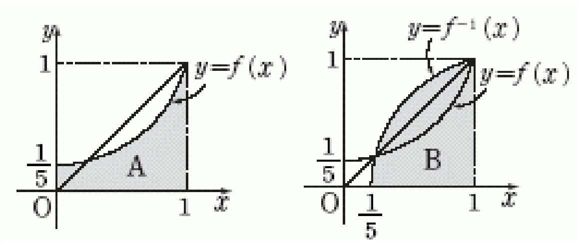
예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1

ㄱ. 함수 $y=f(x)$는 폐구간 $[0,1]$에서 연속이고 개구간 $(0,1)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(c)$인 c가 개구간 $(0,1)$에 적어도 하나 존재한다. 이 때, $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=1-\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{5}$이므로 $f'(x)=\dfrac{4}{5}$인 x가 개구간 $(0,1)$에 존재한다. ($\therefore$ 참)

ㄴ. $S=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx+\int_{\frac{1}{5}}^1 f^{-1}(x)dx$라 하면 S는 다음 그림의 빗금친 부분의 넓이의 합이므로 $S=1$이다.($\therefore$ 참)



ㄷ. 다항함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[0,1]$에서 연속이고 개구간 $(0,1)$에서 미분가능하므로 $g(x)=(f\circ f)(x)$도 폐구간 $[0,1]$에서 연속이고 개구간 $(0,1)$에서 미분가능하다. 한편

$y=x$와 $y=f(x)$의 교점을 (a,a), $(1,1)$ $(0<a<1)$이라 하면

$\dfrac{f(1)-f(a)}{1-a}=1=f'(c)$인 c가 개구간 $(a,1)$에 적어도 하나 존재한다.

이때, $g(a)=(f\circ f)(a)=f(a)=a$, $g(1)=(f\circ f)(1)=f(1)=1$이므로

$\dfrac{g(1)-g(a)}{1-a}=1=g'(k)$인 k가 개구간 $(a,1)$에 적어도 하나 존재한다. ($\therefore$ 참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

문제 2 $a_n=3na_{n-1}=3n\cdot 3(n-1)a_{n-2}$

$\vdots$

$=3n\cdot 3(n-1)\cdot 3(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot a_1$

$=3^{n-1}\cdot n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1=3^{n-1}n!$

1-a

그림을 그려서 생각해보면

(i) 함수 $p(x)$가 증가함수일 때, $\int_1^2 p^{-1}(x)dx = 1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

(ii) 함수 $p(x)$가 감소함수일 때, $\int_1^2 p^{-1}(x)dx = 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$

다 른 풀 이

$p^{-1}(x)=t$로 치환하면

$$p^{-1}(p(1))=1,\ p^{-1}(p(2))=2,\ x=p(t),\ \frac{dx}{dt}=p'(t)$$

이므로

$$\int_{p(1)}^{p(2)} p^{-1}(x)dx = \int_1^2 tp'(t)dt = [tp(t)]_1^2 - \int_1^2 p(t)dt = 2p(2)-p(1)-\frac{4}{3}$$

한편, 정의역이 $\{x|1\le x\le 2\}$이고 공역이 $\{y|1\le y\le 2\}$인 연속함수 $y=p(x)$가 일대일 대응이므로 $p(1)=1$, $p(2)=2$ 또는 $p(1)=2$, $p(2)=1$이다. 그러므로

i) $p(1)=1$이고 $p(2)=2$일 때

$$\int_1^2 p^{-1}(x)dx = \int_{p(1)}^{p(2)} p^{-1}(x)dx = 4-1-\frac{4}{3}=\frac{5}{3}$$

ii) $p(1)=2$이고 $p(2)=1$일 때

$$\int_1^2 p^{-1}(x)dx = -\int_{p(1)}^{p(2)} p^{-1}(x)dx = -\left(2-2-\frac{4}{3}\right)=\frac{4}{3}$$

1-b

후진대입법을 이용하여 구해보면

$$a_n = \frac{3a_{n-1}-2}{a_{n-1}} = \frac{3\cdot\dfrac{3a_{n-2}-2}{a_{n-2}}-2}{\dfrac{3a_{n-2}-2}{a_{n-2}}} = \frac{(2^3-1)a_{n-2}-(2^3-2)}{(2^2-1)a_{n-2}-(2^2-2)} = \frac{(2^4-1)a_{n-3}-(2^4-2)}{(2^3-1)a_{n-3}-(2^3-2)}$$

$$= \cdots = \frac{(2^n-1)a_1-(2^n-2)}{(2^{n-1}-1)a_1-(2^{n-1}-2)} = \frac{2^n(a_1-1)-a_1+2}{2^{n-1}(a_1-1)-a_1+2}$$

이다. 여기에 $a_1=\frac{5}{3}$를 대입하면

$$a_n = \frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\ (n\ge 1)$$

이다.

다른풀이 1

함수 $f(x)=\dfrac{3x-2}{x}$ 의 계수행렬을 A 라 하면 $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\1 & 0\end{pmatrix}$이고, $a_n=f(a_{n-1})$ 이다.

따라서

$$a_n=(f\circ f)(a_{n-2})=(f\circ f\circ f)(a_{n-3})=\cdots=(f\circ f\circ\cdots\circ f)(a_1)$$

이다. (단, 위 식의 마지막 항은 f 를 $n-1$개 합성한 것으로 이것을 f^{n-1}로 표기하기로 한다.)

여기서 함수 $f^{n-1}(x)$의 계수행렬은 A^{n-1}이 되고

$$A^{n-1}=\begin{pmatrix}2^n-1 & -2^n+2\\2^{n-1}-1 & -2^{n-1}+2\end{pmatrix}$$

이므로

$$a_n=f^{n-1}(a_1)=\frac{(2^n-1)a_1-2^n+2}{(2^{n-1}-1)a_1-2^{n-1}+2}$$

이다. 여기에 $a_1=\dfrac{5}{3}$ 를 대입하면

$$\therefore\ a_n=\frac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\ (n\geq 1)$$

다른풀이 2

$$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{\dfrac{3a_n-2}{a_n}-\alpha}{\dfrac{3a_n-2}{a_n}-\beta}=\frac{3-\alpha}{3-\beta}\cdot\frac{a_n-\dfrac{2}{3-\alpha}}{a_n-\dfrac{2}{3-\beta}}\ \text{에서}$$

$\dfrac{2}{3-\alpha}=\alpha,\ \dfrac{2}{3-\beta}=\beta$ 이므로 α, β는 이차방정식 $x^2-3x+2=0$의 두 근이다. 따라서 $(\alpha,\beta)=(1,2),(2,1)$ 이다.

(ⅰ) $(\alpha,\beta)=(1,2)$일 때

$\dfrac{a_{n+1}-1}{a_{n+1}-2}=\dfrac{2}{1}\cdot\dfrac{a_n-1}{a_n-2}=2\left(\dfrac{a_n-1}{a_n-2}\right)$ 이므로 수열 $\left\{\dfrac{a_n-1}{a_n-2}\right\}$ 는 첫째항이 $\dfrac{a_1-1}{a_1-2}$이고,

공비가 2인 등비수열이다. $a_1=\dfrac{5}{3}$ 이므로 $\dfrac{a_n-1}{a_n-2}=-2^n\ (n\geq 1)$ 이다.

이것을 정리하면

$\therefore a_n = \dfrac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\ (n \ge 1)$

이다.

(ⅱ) $(\alpha, \beta) = (2, 1)$ 일 때도 (ⅰ)과 같은 방법으로 $a_n = \dfrac{2^{n+1}+1}{2^n+1}\ (n \ge 1)$ 을 구할 수 있다.

1-c

$g_n(x) = -f_n(-x+6)+6$ 이다. 이를 수학적 귀납법으로 증명해보자.

(ⅰ) $n=1$일 때:

$y=f(x)$를 x축 방향으로 -3, y축 방향으로 -3 만큼 평행 이동시키면 $y=f(x+3)-3$ 이다. 이것을 원점에 대칭 이동한 다음 다시 x축 방향으로 3, y축 방향으로 3만큼 평행 이동시키면 $y=g(x)$가 된다. 먼저 $y=f(x+3)-3$를 원점에 대해 대칭이동하면 $-y=f(-x+3)-3$이고 이것을 x축 방향으로 3, y축 방향으로 3만큼 평행 이동시키면 $-(y-3)=f(-(x-3)+3)-3$ 즉, $y=-f(-x+6)+6$이 되고 이것이 $y=g(x)$이다. 따라서 $g_1(x)=-f_1(-x+6)+6$이므로 $n=1$일 때 성립한다.

또는 앞의 (배경지식쌓기1)에서 $a=b=3$을 대입하면

$$y=-f(-x+6)+6$$

가 되므로 이를 이용하여 $n=1$일 때 성립함을 보여도 된다.

(ⅱ) $n=k$일 때 성립함을 가정하자. 즉

$$g_k(x)=-f_k(-x+6)+6$$

가 성립한다고 하자. 이때,

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= g_1(g_k(x)) = g_1(-f_k(-x+6)+6) = -f_1(-(-f_k(-x+6)+6)+6)+6 \\ &= -f_1(f_k(-x+6))+6 = -f_{k+1}(-x+6)+6 \end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일때도 성립한다. 따라서 모든 자연수 n에 대해

$$g_n(x)=-f_n(-x+6)+6$$

이 성립한다.

그리고 $\displaystyle\int_4^5 g_5(x)\,dx = \int_4^5 \{-f_5(-x+6)+6\}dx$이다. 여기서 $-x+6=t$라 두면 앞식은 $\displaystyle -\int_1^2 f_5(t)dt+6$이 되고 $\displaystyle\int_1^2 f_5(t)dt = a_5 = \frac{2^6+1}{2^5+1} = \frac{65}{33}$ 이므로

$$\int_4^5 g_5(x)\,dx = -\int_1^2 f_5(x)dx+6 = \frac{133}{33}$$

이다.

1-d

함수를 몇 번 합성해 보면

$$h_2(x)=\begin{cases} 2^2 x & (0 \le x < 1/6) \\ \dfrac{2x+1}{2} & (1/6 \le x < 1/3) \\ \dfrac{x+3}{2^2} & (1/3 \le x \le 1) \end{cases}, \quad h_3(x)=\begin{cases} 2^3 x & (0 \le x < 1/12) \\ \dfrac{2^2 x+1}{2} & (1/12 \le x < 1/6) \\ \dfrac{2x+3}{2^2} & (1/6 \le x < 1/3) \\ \dfrac{x+7}{2^3} & (1/3 \le x \le 1) \end{cases}, \cdots$$

가 되므로 $h_n(x)$는 다음과 같다.

$$h_n(x)=\begin{cases} \dfrac{2^n x+2^0-1}{2^0} & \left(0 \le x < \dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}\right) \\ \dfrac{2^{n-1}x+2^1-1}{2^1} & \left(\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}} \le x < \dfrac{1}{3\cdot 2^{n-2}}\right) \\ \dfrac{2^{n-2}x+2^2-1}{2^2} & \left(\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-2}} \le x < \dfrac{1}{3\cdot 2^{n-3}}\right) \\ \vdots & \\ \dfrac{2^{n-n}x+2^n-1}{2^n} & \left(\dfrac{1}{3} \le x \le 1\right) \end{cases}$$

따라서

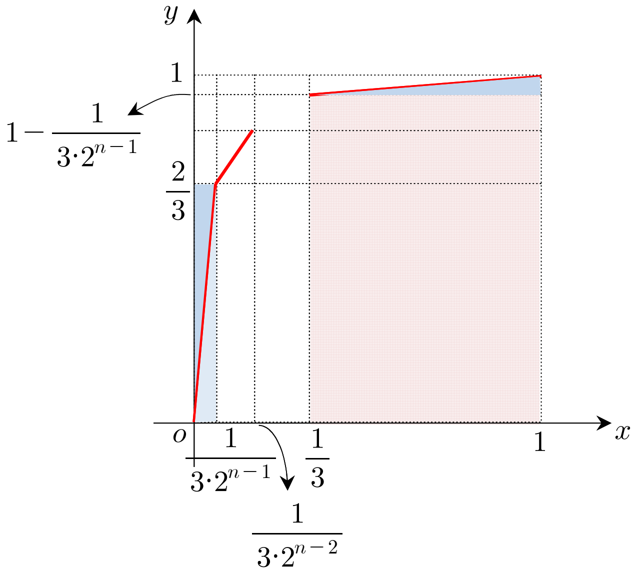
$$\int_0^1 h_n(x)dx=\int_0^{\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}} 2^n x\,dx+\int_{\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}}^{\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}} \frac{2^{n-1}x+1}{2}\,dx+\int_{\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}}^{\frac{1}{3\cdot 2^{n-3}}} \frac{2^{n-2}x+3}{2^2}\,dx+$$

$$\cdots+\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{x+2^n-1}{2^n}\,dx$$

가 된다. 여기서 첫항과 끝항의 합은 가로와 세로가 각각 $\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$, $\dfrac{2}{3}$ 와 $\dfrac{2}{3}$, $1-\dfrac{1}{3\cdot 2^{n-1}}$ 인 두 직사각형의 넓이의 합과 같으므로

$$\int_0^{\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}} 2^n x\,dx+\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{x+2^n-1}{2^n}\,dx=\frac{2}{9\cdot 2^{n-1}}+\frac{3\cdot 2^n-2}{9\cdot 2^{n-1}}=\frac{2}{3}$$

이다.



이제 중간에 있는 $(n-1)$개의 적분의 합을 구해보자.

$$\int_{\frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}}^{\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}} \frac{2^{n-1}x+1}{2}\,dx = \frac{1}{3\cdot 2^{n+1}} + \frac{1}{3\cdot 2^{n}}$$

$$\int_{\frac{1}{3\cdot 2^{n-2}}}^{\frac{1}{3\cdot 2^{n-3}}} \frac{2^{n-2}x+3}{2^2}\,dx = \frac{1}{3\cdot 2^{n+1}} + \frac{3}{3\cdot 2^{n}}$$

$$\int_{\frac{1}{3\cdot 2^{n-3}}}^{\frac{1}{3\cdot 2^{n-4}}} \frac{2^{n-3}x+7}{2^3}\,dx = \frac{1}{3\cdot 2^{n+1}} + \frac{7}{3\cdot 2^{n}}$$

이므로 그 합은 $\frac{n-1}{3\cdot 2^{n+1}} + \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3\cdot 2^{n}} = \frac{1}{3} - \frac{n+3}{3\cdot 2^{n+1}}$ 이다. 따라서

$$\int_0^1 h_n(x)dx = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} - \frac{n+3}{3\cdot 2^{n+1}} = 1 - \frac{n+3}{3\cdot 2^{n+1}}$$

이다.

다 른 풀 이

x축, y축, $x=1$ 및 $y=1$로 둘러싸인 사각형에서 적분값 $\int_0^1 h_n(x)dx$를 제외한 부분의 넓이를 수열 $\{a_n\}$이라 하면

$$a_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{3}\right\}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}+\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{6}\right\} = \frac{1}{2}a_1+\frac{1}{3\cdot 2^3}$$

가 되므로 점화식을 찾으면

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{3 \cdot 2^{n+2}} \quad , \quad a_1 = \frac{1}{3}$$

가 된다. 이 수열의 일반항을 후진대입법으로 구해보면

$$a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{3\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a_{n-2}+\frac{1}{3\cdot 2^n}\right)+\frac{1}{3\cdot 2^{n+1}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 a_{n-2}+\frac{2}{3\cdot 2^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3 a_{n-3}+\frac{3}{3\cdot 2^{n+1}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} a_1+\frac{n-1}{3\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{3\cdot 2^{n-1}}+\frac{n-1}{3\cdot 2^{n+1}}$$

$$= \frac{n+3}{3\cdot 2^{n+1}}$$

따라서 구하려는 적분값은 $\int_0^1 h_n(x)dx = 1-\frac{n+3}{3\cdot 2^{n+1}}$이다.

6 고려대학교 수시(오후)

제시문 **다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.**[12)]

(가) 임의의 양의 유리수 r에 대하여 $r=\frac{q}{p}$를 만족하고 서로소인 자연수의 순서쌍 (p,q)는 유일하다. 이 때 분모 p를 $d(r)$로 나타내기로 하자. 예를 들어, $d\left(\frac{2}{3}\right)=3,\ d\left(\frac{6}{8}\right)=4,\ d(0.8)=5$ 이다.

(나) 다음 성질을 만족하는 모든 수열 $\{a_n\}$들의 집합을 S라 하자.

(i) 모든 자연수 n에 대하여 a_n은 0과 1사이의 유리수이다.

(ii) 자연수 m, n에 대하여 $m\neq n$이면 $a_m\neq a_n$이다.

제시문 (가)와 (나)를 읽고 다음 물음에 답하시오.

(a) 수열 $\{a_n\}$이 S에 속할 때, 집합 $\{n|d(a_n)=10\}$의 원소의 개수는 최대 몇 개인가?

(b) r이 양의 유리수이고 $b_n=d(2nr)$이라 하자. n이 무한대로 갈 때 수열 $\{b_n\}$이 수렴할 r의 조건을 찾으시오.

(c) p와 q는 서로소인 자연수이고, f는 주기가 p인 주기함수일 때

$$\sum_{k=1}^{p} f(k)=\sum_{k=1}^{p} f(kq)$$

가 성립함을 설명하시오.

(d) $a_n=\frac{n}{3n+10}$이고 $g(x)=\left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)^{10}$일 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d(a_n)}\sum_{k=1}^{d(a_n)} g(ka_n)$을 구하시오. (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

12) 고려대학교 입학처

논술유형분석

문항 수	수학 1문항(필수), 과학 1문항(선택)	시간	100분
연관 개념	약수와 배수, 자연수의 나눗셈 정리, 정적분의 정의		

제시문분석

제시문 (가)는 r 이 기약분수일 때, $d(r)$은 기약분수 r 의 분모임을 설명하고 있다.

논제분석

논제 a

1이상 10이하 자연수 중에서 10과 서로소인 자연수의 개수를 묻는 문제이다.

논제 b

n이 무한대로 갈 때 $b_n = d(2nr)$이 수렴하기 위해서는 r 의 분모가 2의 약수임을 알아야 한다.

논제 c

나눗셈 정리와 서로 소라는 사실을 이용하여 $m \neq n$일 때, mq와 nq를 각각 p로 나눈 나머지를 원소로 갖는 두 집합은 $\{0, 1, 2, 3, \cdots, p-1\}$ 으로 서로 같다는 사실을 보이면 된다.

논제 d

[논제 c]를 이용하여 주어진 식을 정적분으로 표현할 줄 알아야 한다. 이때, 함수 $g(ka_n)$ 을 이해하는 것이 중요하다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 함수의 주기

함수 $f(x)$가 모든 x에 대해

$$f(x+p)=f(x)$$

를 만족하는 최소양수 p가 존재할 때, p를 함수 $f(x)$의 주기라고 하고, 이때 함수 $f(x)$를 주기함수라 한다.

2. 자연수의 나눗셈 정리(Division algorithm)

임의의 자연수 $a\,,b$에 대하여

$$a=bq+r\ (0\le r<b)$$

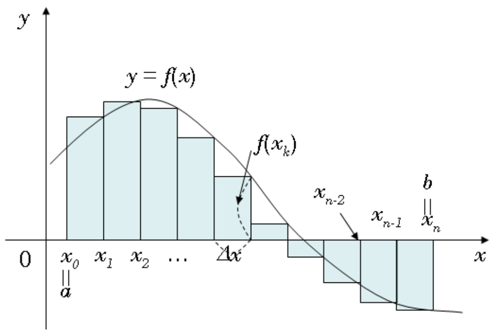
인 음이 아닌 정수 $q\,,r$이 유일하게 존재한다. 이때, q를 몫(Quotient), r을 나머지(Remainder)라 한다.

3. 정적분의 정의

닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$ 에 대해서 구간 $[a,b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점을 차례로

$$x_0(=a)\,,\,x_1\,,\,x_2\,,\,\cdots\,,\,x_{n-1}\,,\,x_n(=b)$$

이라 하고, 각 소구간의 길이를 $\varDelta x$라고 하면 $\varDelta x=\dfrac{b-a}{n}$ 이다.



이 때, 위 그림과 같이 각 소구간의 오른쪽 끝에서의 함숫값을 높이로 하는 직사각형의 넓이의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=f(x_1)\varDelta x+f(x_2)\varDelta x+\cdots+f(x_n)\varDelta x=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\varDelta x$$

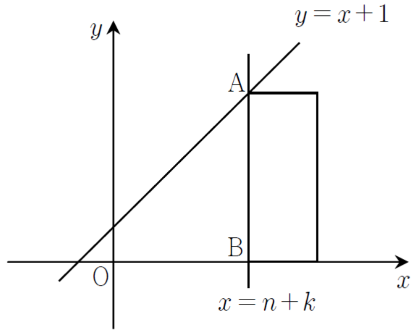
이고 일반적으로, 함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$이 항상 존재함이 알려져 있다. 이 때, 이 극한값을 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고, 기호로

$$\int_a^b f(x)dx$$

와 같이 쓴다.

풀 어 보 기

문제 1 자연수 n에 대하여 그림과 같이 직선 $x=n+k$가 두 직선 $y=x+1$, $y=0$과 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분AB를 세로로 하고 가로의 길이가 2인 직사각형의 넓이를 $f(k)$라 할 때, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{f(k)}$의 값은? (2011년 평가원)



문제 2 $1\le a\le 100$일 때, $\frac{a}{100}$가 기약분수가 되는 정수 a의 개수를 구하여라.

문제 3 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족한다. (2004년 평가원)

(가) $-2\le x\le 2$일 때, $f(x)=x^3-4x$
(나) 임의의 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x+4)$

정적분 $\int_1^2 f(x)\,dx$와 같은 것은?

① $\int_{2004}^{2005} f(x)\,dx$　② $-\int_{2004}^{2005} f(x)\,dx$　③ $\int_{2005}^{2006} f(x)\,dx$

④ $-\int_{2005}^{2006} f(x)\,dx$　⑤ $\int_{2006}^{2007} f(x)\,dx$

읽 기 자 료

한신이 병사를 점고하다.

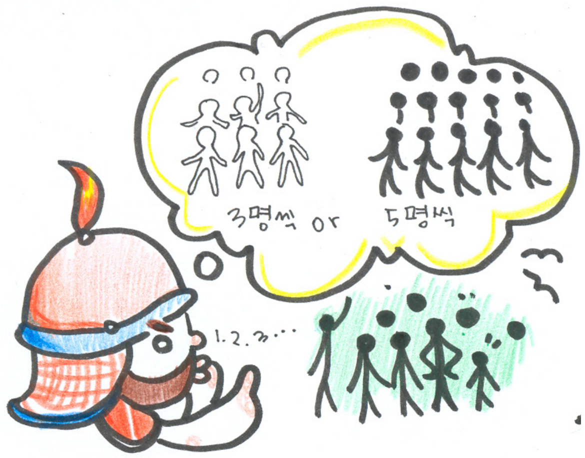
예전부터 중국에서는 전해 내려오는 문제들 중에서 ‘한신이 병사를 점고하다(韓信点兵)’ 라는 문제가 있는데 다음과 같다.

> 개수를 모르는 물건들이 있다. 그것들을 세 개씩 셀 때 한 개가 남고, 다섯 개씩 셀 때 두 개가 남고, 일곱 개씩 셀 때 두 개가 남는다.
> 얼마만큼의 물건이 있는가?

이 문제는 수학사에서 아주 유명한 문제이고 일반적으로는 이것을 ‘중국인의 나머지정리’ 라고 부르는데 그 풀이는「손자산경(孫子算經)」에 나온다.

3씩 헤아리고 남은 수에는 70을 곱하고, 5씩 헤아리고 남은 수에는 21을 곱하고, 7씩 헤아리고 남은 수에는 15를 곱한다. 그 수들을 합한다. 합이 105를 넘으면 합에서 105를 뺀다. 그 차가 여전히 105보다 크면 또 105를 뺀다. 이와 같이 105보다 작은 수로 될 때까지 얻은 수가 구하는 수이다.

과연 물건의 개수는 몇 개일까?



예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1

$\mathrm{A}(n+k,\ n+k+1)$, $\mathrm{B}(n+k,\ 0)$, $\overline{\mathrm{AB}}=n+k+1$ 이므로 $f(k)=2(n+k+1)$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{f(k)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2(n+k+1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\right)\frac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\Big[\ \ln(x+1)\Big]_0^1=\frac{\ln 2}{2}$$

문제 2 a는 2의 배수도 아니고 동시에 5의 배수도 아니다. 2의 배수가 50개, 5의 배수가 20개, 10의 배수가 10개이므로

$$100-(50+20-10)=40(\text{개})$$

문제 3

조건 (나)에서 함수 $f(x)$는 주기가 4 인 주기함수이므로

$\int_1^2 f(x)dx$ 와 같은 값을 가지려면 $\int_{1+4k}^{2+4k} f(x)dx$ (k는 정수)의 꼴이어야 한다.

$$2006=2+4\cdot501,\ \ 2005=1+4\cdot501$$

이므로 $\int_1^2 f(x)dx=\int_{2005}^{2006} f(x)dx$ 이다.

1-a

수열 $\{a_n\}$이 S에 속하므로 $0<a_n<1$ 이다. 그런데 $d(a_n)=10$ 을 만족하므로

$$a_n=\frac{n}{10}\ \text{(단, } n\text{과 10 은 서로소)}$$

꼴이다. 따라서 $n=1, 3, 7, 9$가 되므로 원소의 최대 개수는 4개다.

1-b

양의 유리수 r을 $r=\frac{q}{p}$ (단, p와 q는 서로소)이라 하면 $b_n=d\left(\frac{2nq}{p}\right)$이다. 수열 $\{b_n\}$이

수렴하기 위해서는, n이 무한대로 갈 때 분모 p가 분자 $2nq$들의 공약수가 되어야 하므로 $p=1$ 또는 2가 되어야 한다. 즉

$$r=\frac{k}{2}\ (\text{단, } k\text{는 자연수})$$

꼴이다.

1-c

서로 다른 두 자연수 m, n (단, $1\le n< m\le p$)에 대해 mq와 nq를 p로 나눈 나머지가 r로 같다고 하자. 즉,

$$mq=px+r,\ nq=py+r\ \ (\text{단, } x, y\text{는 정수, } r=0,1,2,\cdots,p-1)$$

두 식을 빼면

$$(m-n)q=(x-y)p$$

이고, p와 q가 서로소이므로 $m-n$은 p의 배수가 되어야 한다. 그런데 이것은 모순이다. 즉 $m\neq n$일 때, mq와 nq를 p로 나눈 나머지는 서로 다르다.

즉, $q, 2q, 3q, \cdots, pq$를 p로 나누었을 때 나머지는 모두 다르고 그 나머지는 $0, 1, 2, \cdots, p-1$이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{p} f(k)=\sum_{k=0}^{p-1} f(k)=\sum_{k=1}^{p} f(kq)$$

이다.

다른풀이

$m\neq n$ (단, $1\le m, n\le p$ 인 자연수)일 때 mq와 nq를 p로 나누었을 때 나머지가 r로서 같다고 하자. 그러면 $mq\equiv r(\mathrm{mod}\,p)$이고 $nq\equiv r(\mathrm{mod}\,p)$
이다. 즉, $mq\equiv nq(\mathrm{mod}\,p)$이다. 그런데 $(p,q)=1$이므로 $m=n(\mathrm{mod}\,p)$
가 되고, 이는 모순이므로 mq와 nq를 p로 나누었을 때 나머지는 모두 다르다.

즉, $q, 2q, 3q, \cdots, pq$를 p로 나누었을 때 나머지는 모두 다르고 그 나머지는 $0, 1, 2, \cdots, p-1$이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{p} f(k)=\sum_{k=1}^{p} f(kq)$$

이다.

1-d

$a_n=\dfrac{q_n}{p_n}$ (p_n, q_n은 서로소인 자연수, $0<q_n<p_n$)라 하자. 그러면 $d(a_n)=p_n$이고

$$ka_n - [ka_n] = \frac{kq_n}{p_n} - \left[\frac{kq_n}{p_n}\right] = \frac{r_n}{p_n}$$

가 된다. (단, r_n 은 kq_n 을 p_n 으로 나눈 나머지) 따라서

$$g(ka_n) = \left(\frac{kq_n}{p_n} - \left[\frac{kq_n}{p_n}\right] - \frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{r_n}{p_n} - \frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{r_n}{d(a_n)} - \frac{1}{2}\right)^{10}$$

이다. 그런데 p_n, q_n은 서로소이므로 논제 [1-c]에 의해 kq_n 을 p_n 으로 나눈 나머지r_n 은 서로 다르고 $k=1,2,\cdots,d(a_n)$에 대해 r_n의 집합은

$$\{0,1,2,\cdots,p_n-1\} = \{1,2,3,\cdots,p_n=d(a_n)\}$$

이 된다. 그리고 $n\to\infty$ 이면 $d(a_n)=p_n\to\infty$이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{1}{d(a_n)}\sum_{k=1}^{d(a_n)} g(ka_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{d(a_n)}\left(\frac{r}{d(a_n)} - \frac{1}{2}\right)^{10}\frac{1}{d(a_n)} = \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^{10}dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^{10}\,dt = \frac{1}{11\cdot 2^{10}} \quad (\text{단, } t = x - \frac{1}{2})$$

이다.

다른풀이

$a_n = \dfrac{q_n}{p_n}$ (p_n, q_n은 서로소인 자연수)라 하면 $d(a_n)=p_n$이다.

한편, $g(x+1) = \left(x+1-[x+1]-\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(x+1-[x]-1-\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(x-[x]-\frac{1}{2}\right)^{10} = g(x)$이므로 $g(x)$는 주기가 1인 주기함수이고,

$$g(ka_n) = g\left(\frac{kq_n}{p_n}\right) = g\left(\frac{r_n}{p_n}\right) \quad (\text{단, } r_n \text{ 은 } kq_n \text{ 을 } p_n \text{ 으로 나눈 나머지})$$

또한, (c)에 의해 kq_n 을 p_n 으로 나눈 나머지 r_n의 집합은 q_n 을 p_n 으로 나눈 나머지의 집합과 같으므로 $\{0,1,2,\cdots,p_n-1\}$ 을 값으로 가진다.

따라서, $n\to\infty$ 일 때, $d(a_n)=p_n\to\infty$이므로 정적분의 정의에 의하여

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{d(a_n)}\sum_{k=1}^{d(a_n)} g(ka_n) = \lim_{p_n\to\infty}\frac{1}{p_n}\sum_{r_n=0}^{p_n-1} g\left(\frac{r_n}{p_n}\right) = \int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)^{10}dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{1}{2}} t^{10}\,dt = \frac{1}{11\cdot 2^{10}} \quad (\text{단, } t = x - \frac{1}{2})$$

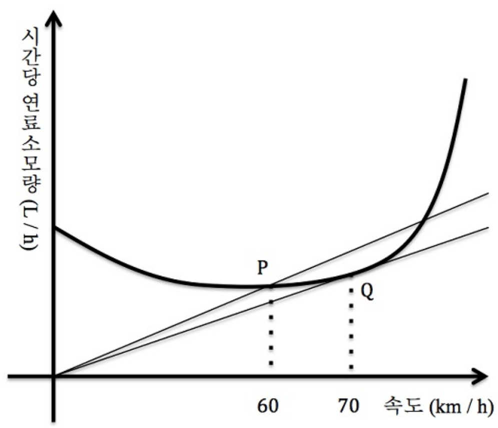
이다.

7 동국대학교 수시

제시문 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**[13)]

자동차에 쓰이는 연료는 자동차를 움직이는 데 꼭 필요한 것이지만 그 배출 가스는 환경오염의 원인이 되고 있다. 따라서 환경오염을 줄이기 위해서는 연료를 될 수 있는 대로 적게 소모해야 한다. 연료를 절감하는 방법 중의 하나는 경제속도로 주행하는 것이다. 경제속도란 가장 적은 연료로 가장 먼 거리를 달릴 수 있는 속도를 뜻한다.

아래의 [그림 1]은 어떤 자동차의 속도(km/h)에 따른 시간당 연료 소모량(L/h)을 나타낸 것이다. 자동차는 시동을 건 상태로 정지해 있는 경우에도 연료가 소모된다. 자동차가 움직이기 시작하면 시간당 연료 소모량은 감소하는데, [그림 1]에서 보는 것처럼 60km/h 정도에서 시간당 연료 소모량이 최소가 된다. 이 자동차의 연비(km/L)는 언뜻 보기에 이때가 가장 최대인 것처럼 보이지만 이때가 가장 효율적인 것은 아니다. 최대의 연비를 구하려면 원점과 곡선위의 점을 지나는 직선의 기울기가 최소인 점을 찾아야 한다. [그림 1]의 경우에는 원점을 지나는 직선이 곡선의 점 Q에서 접할 때 직선의 기울기가 최소가 된다는 것을 알 수 있다. 따라서 이 자동차의 경제속도는 70km/h이며, 이 속도를 유지하면서 정속 주행할 때 가장 효율적인 운전이 되는 것이다.



[그림 1]

13) 동국대학교 입학처

논제 Ⅰ-1

시간조건이 $0 \le t \le 3$일 때 어떤 차량의 연료 소모량 $g(t)$가 아래와 같다고 가정하자.

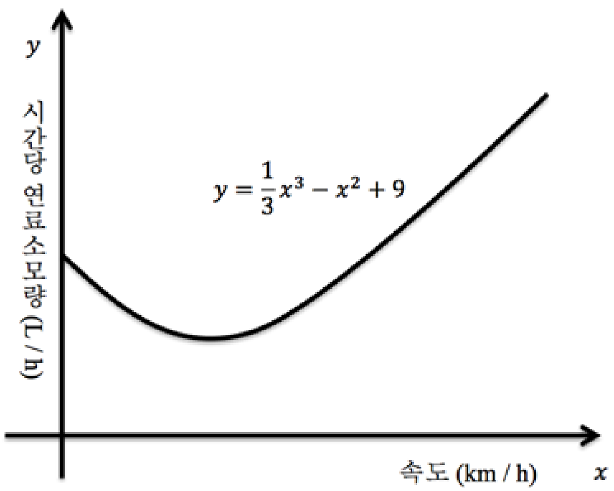
$$g(t) = \int_0^t (2x^3 - 15x^2 + 36x)dx$$

주어진 시간조건에서 이 차량의 시간당 연료 소모량이 최대가 되는 t의 값과 풀이를 기술하시오. (단, 시간당 연료 소모량은 $g'(t)$이다.)

논제 Ⅰ-2

어떤 차량의 속도와 시간당 연료 소모량의 그래프가 아래의 그림과 같다.

$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 9,\ x \ge 0$ 일 때, 이 차량의 시간당 연료 소모량이 최소가 되는 속도와 경제속도를 제시문의 내용을 바탕으로 각각 구하고 풀이를 기술하시오.



논술유형분석

문항 수	수학 2문항, 과학2문항	시간	120분
연관 개념	미분과 적분의 관계, 함수의 최대 · 최소, 접선의 방정식		

제 시 문 분 석

제시문은 자동차의 시간당 연료 소모량과 속도와의 그래프에서 경제속도를 구하는 방법을 소개하고 있다. 시간당 연료가 최소가 되는 곳과 연비가 최대인 곳의 차이를 설명하고 있다.

논 제 분 석

논제Ⅰ-1

연료소모량이 어떤 함수의 적분으로 표현되어 있고, 시간당 연료 소모량은 그 적분의 미분이 된다고 설명하고 있다. 이 때, 주어진 구간에서 시간당 연료 소모량이 최대인 점을 구할 수 있는지 묻는 문항이다.

논제Ⅰ-2

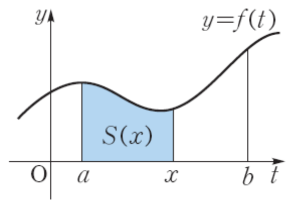
제시문에 나타난 연비가 최대가 되는 점과 시간당 연료 소모량이 최소가 되는 점이 서로 다름을 이해하고, 제시문의 방법을 적용하여 주어진 함수가 최소가 되는 지점과 원점을 지나는 직선이 곡선에 접하는 지점을 찾는 문항이다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 적분과 미분의 관계

함수 $y=f(t)$는 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 $f(t)\geq 0$이라고 하자. 오른쪽 그림과 같이 곡선 $y=f(t)$와 두 직선 $t=a$와 $t=x(a\leq x\leq b)$ 및 t축으로 둘러싸인 부분의 넓이 $S(x)$는

$$S(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad \cdots\cdots \text{①}$$



이다. 이때 x의 증분 Δx에 대한 $S(x)$의 증분을 ΔS라고 하면

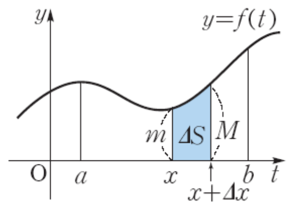
$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)$$

이다.

함수 $y=f(t)$는 닫힌 구간 $[x,\ x+\Delta x]$ 또는 닫힌 구간 $[x+\Delta x,\ x]$에서 연속이므로 최댓값과 최솟값을 갖는다.

$\Delta x>0$일 때, 닫힌 구간 $[x,\ x+\Delta x]$에서 $y=f(t)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면

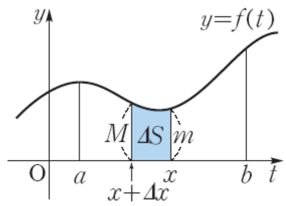
$$m\cdot\Delta x\leq\Delta S\leq M\cdot\Delta x \qquad \cdots\cdots \text{②}$$



이다.

$\Delta x<0$일 때, 닫힌 구간 $[x+\Delta x,\ x]$에서 $y=f(t)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 하면

$$M\cdot\Delta x\leq\Delta S\leq m\cdot\Delta x \qquad \cdots\cdots \text{③}$$



이다.

부등식 ②와 ③의 각 변을 Δx로 나누면 Δx의 부호에 관계없이 다음이 성립한다.

$$m\leq\frac{\Delta S}{\Delta x}\leq M$$

이때 $\Delta x\to 0$이면

$$\lim_{\Delta x\to 0}m\leq\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}\leq\lim_{\Delta x\to 0}M$$

이다.

그런데 함수 $y=f(t)$는 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이므로 $\Delta x\to 0$이면 $m\to f(x)$이고 $M\to f(x)$이다.

따라서 $f(x)\leq\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x}\leq f(x)$, 즉 $f(x)\leq\frac{d}{dx}S(x)\leq f(x)$이므로

$$\frac{d}{dx}S(x)=f(x)$$

이다. ①에서 $S(x)=\int_a^x f(t)dt=f(x)$

이상을 정리하면 다음과 같다.

〈적분과 미분의 관계〉

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때,

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x) \text{ (단, } a \le x \le b)$$

2. 접선의 방정식

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 기울기는 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$와 같다.

즉, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 P에서의 접선은 점 $(a,\ f(a))$를 지나고 기울기가 $f'(a)$인 직선이다.

따라서 접선의 방정식은

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

이다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

〈접선의 방정식〉

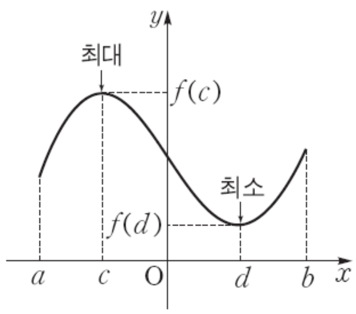
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$에서의 접선의 방정식은

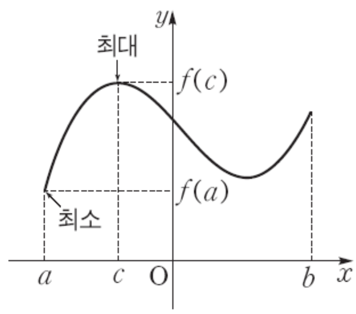
$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

3. 미분가능한 함수의 최대 · 최소

최대 · 최소의 정리에 의하여 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이면 이 구간에서 함수 $f(x)$는 반드시 최댓값과 최솟값을 갖는다.

따라서 $f(x)$에 대하여 극댓값, 극솟값, $f(a)$, $f(b)$ 중에서 가장 큰 값과 가장 작은 값이 각각 $f(x)$의 최댓값과 최솟값이다.





풀 어 보 기

문제 1

점 $(0, -4)$에서 곡선 $y=x^3-2$에 그은 접선이 x축과 만나는 점의 좌표를 $(a, 0)$이라 할 때, a의 값은? (2012년 9월 전국연합)

① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$

문제 2

곡선 $y=x^2$ 위의 점 $(-2, 4)$에서의 접선이 곡선 $y=x^3+ax-2$에 접할 때, 상수 a의 값은? (2010년 6월 전국연합)

① -9 ② -7 ③ -5 ④ -3 ⑤ -1

문제 1

함수 $f(x)=3(x-1)^2+5$에 대하여 함수 $F(x)$를 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 라 하자. 미분가능한 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$F(\,g(x)\,)=\frac{1}{2}F(x)$$

를 만족시킨다. $g'(2)=p$일 때, $30p$의 값을 구하시오. (2012. 대수능)

읽 기 자 료

미분적분학의 기본정리 14)

미적분학의 기본정리는 적절하게 붙여진 명칭이다. 왜냐하면 그것은 미분적분학의 두 분야, 미분학과 적분학 사이에 연관성을 보여주기 때문이다. 미분학은 접선의 문제에서 시작되었고 반면에 적분학은 별로 관련이 없는 듯한 문제인 면적문제로부터 시작되었다. 케임브리지대학교의 뉴턴의 스승인 배로(Isaac Barrow, 1630~1677) 교수는 이 두 문제들 사이에 실제로 밀접한 관계가 있음을 발견하였다. 실제로 그는 미분법과 적분법이 서로 역과정임을 밝혔다. 미분적분학의 기본정리는 도함수와 적분사이에 명백한 역관계가 있음을 보여주고 있다. 뉴턴과 라이프니츠는 이러한 관계를 발전시키고 그것을 이용하여 미분적분학을 체계적인 수학적 방법으로 발전시켰다. 그들은 합의 극한으로 면적과 적분을 계산하지 않고, 미분적분학의 기본정리를 이용하여 면적과 적분을 매우 쉽게 계산할 수 있음을 알았다.

1. 미분적분학의 기본정리1 만일 함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이면, $$g(x)=\int_a^x f(t)dt\ ,\ \ a \le x \le b$$ 에 의하여 정의된 함수 g는 구간 $[a,b]$에서 연속이고 구간(a,b)에서 미분가능하며, $g'(x)=f(x)$이다.

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt=f(x)$로 표기할 수 있으며, 만일 먼저 f를 **적분한 다음에 그 결과를 미분**하면 본래의 함수 f를 다시 얻는다는 사실을 의미한다.

2. 미분적분학의 기본정리2 만일 함수 f가 구간 $[a,b]$에서 연속이면, $$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$ 이다. 여기서 F는 f의 임의의 역도함수, 즉 $F'=f$이다.

$F'(x)=f(x)$이므로 $\displaystyle\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$로 표현될 수 있다. 이것은 한 함수 F를

14) James Stewart, 미분적분학. 2009. 청문각.

택하여 먼저 그것을 미분한 다음에 그 결과를 적분한다면 본래의 함수 F, 그러나 $F(b)-F(a)$ 의 형태를 얻게 된다는 사실을 의미한다. 이는 $a \le x \le b$ 인 모든 x 에 대하여 $f(x)$ 의 모든 값들이 관련되는 복잡한 과정(리만합의 극한)에 의하여 정의되는 정적분 $\int_a^b f(x)dx$ 는 단지 두 점 a 와 b 에서 $F(x)$ 의 값을 구하면 계산된다는 사실은 매우 놀라운 일이다.

프랑스의 수학자 로베르발이 1635년 처음으로 사인함수와 코사인함수의 곡선 아래 영역의 면적을 계산하였을 때, 이 문제는 아주 정교한 기술을 요하는 매우 도전적인 문제였다. 1635년에는 극한을 계산하는 방법이 발견되지 않았기 때문에 로베르발에게는 이 계산이 매우 힘든 일이었다. 그러나 1660년대와 1670년대에 배로에 의하여 미적분학의 기본정리가 발견되고 뉴턴과 라이프니츠에 의하여 탐구되면서 이는 매우 쉬운 문제가 되었다. 기본정리의 두 부분들은 미분법과 적분법이 역과정임을 의미한다. 기본정리의 두 부분들 중에서 하나는 다른 부분이 행하였던 과정을 반대로 행하는 것이다.

미분적분학의 기본정리는 미분적분학에서 가장 중요한 정리이며, 실제로 그것은 인간의 위대한 업적 중의 하나이다. 이 정리가 발견되기 전인 에우독소스와 아르키메데스의 시대로부터 갈릴레오와 페르마의 시대까지는 면적, 부피, 곡선의 길이를 구하는 문제들은 너무 힘들어서 천재들만이 도전할 수 있는 매우 어려운 문제였다. 그러나 지금은 뉴턴과 라이프니츠가 창안해 냈던 기본정리를 체계적으로 잘 배울 수 있기에 우리 모두 이런 어려운 문제도 쉽게 해결할 수 있다.

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 ②

$y'=3x^2$이므로 접점의 좌표를 $A(\alpha,\ \alpha^3-2)$라 하면 점 A에서의 접선의 방정식은

$$y-\alpha^3+2=3\alpha^2(x-\alpha) \qquad \therefore\ y=3\alpha^2x-2\alpha^3-2$$

이 접선이 점 $(0,\ -4)$를 지나야 하므로

$$-4=-2\alpha^3-2 \qquad \therefore\ \alpha=1$$

따라서 접선의 방정식은 $y=3x-4$이므로 x절편은 $a=\frac{4}{3}$이다.

문제 2 정답 ②

$y'=2x$ 이므로 점 $(-2,\ 4)$에서의 접선의 기울기는 -4 이고

따라서 접선의 방정식은 $y=\ -4x-4$ 이다.

이 접선과 곡선 $y=x^3+ax-2$의 접점을 $(t,\ t^3+at-2)$라고 하자.

곡선 $y=x^3+ax-2$ 위의 점 $(t,\ t^3+at-2)$에서의 접선의 기울기는 $3t^2+a$이고

$y=\ -4x-4$의 기울기와 같아야 하므로

$3t^2+a=-4,\ a+4=-3t^2\ \cdots$ ㉠

접점에서 곡선과 접선의 함숫값이 서로 같으므로

$t^3+at-2=-4t-4$,$t^3+(a+4)t+2=0,\quad t^3-3t^3+2=0\quad (\because$ ㉠$)$

$t^3=1,\ t=1$이고, 따라서 $a=-7$이다.

문제 3

$F(x)=\int_0^x f(t)dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$F'(x)=f(x)$이므로 $F(g(x))=\frac{1}{2}F(x)\ \cdots$ ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분한다.

$$f(g(x))g'(x)=\frac{1}{2}f(x)$$

위 식의 양변에 $x=2$를 대입하면

$$f(g(2)) \cdot g'(2) = \frac{1}{2} f(2) = 4 \ \cdots \ ㉡$$

한편 $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \{3(t-1)^2 + 5\} dt = \left[(t-1)^3 + 5t\right]_0^x = (x-1)^3 + 5x - (-1)^3$

$\quad = x^3 - 3x^2 + 8x \ \cdots \ ㉢$

㉠의 양변에 $x = 2$를 대입하면

$$F(g(2)) = \frac{1}{2} F(2)$$

$g(2) = t$로 놓으면 $F(t) = \frac{1}{2} F(2)$이므로 ㉢에서 $t^3 - 3t^2 + 8t = \frac{1}{2}(8 - 12 + 16)$

$$t^3 - 3t^2 + 8t - 6 = 0, \ (t-1)(t^2 - 2t + 6) = 0$$

$\therefore \ t = 1$ 즉, $g(2) = 1$

㉡에서 $f(1)g'(2) = \frac{1}{2} f(2)$이므로 $5p = \frac{1}{2} \times 8$

$$\therefore p = \frac{4}{5} \qquad \therefore \ 30p = 30 \times \frac{4}{5} = 24$$

다른풀이

$F(g(x)) = \frac{1}{2} F(x)$의 양변을 미분하면 $f(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2} f(x)$이다.

$x = 2$ 를 대입하면 $f(g(2)) \cdot g'(2) = \frac{1}{2} f(2) = 4 \ \cdots \ ㉠$

이제 $g(2)$를 구하면 된다.

$F(x) = \int_0^x (3t^2 - 6t + 8) dt = x^3 - 3x^2 + 8x$

$F(g(2)) = \frac{1}{2} F(2) = 6$에서 $g(2) = t$라 하면

$t^3 - 3t^2 + 8t - 6 = 0, \ (t-1)(t^2 - 2t + 6) = 0 \quad \therefore \ t = 1$

$f(1) = 5, \ f(2) = 8$이므로 $5p = 4, \ p = \frac{4}{5} \quad \therefore \ 30p = 24$

논제 Ⅰ-1

시간당 연료 소모량이 $g'(t)$이므로 미분과 적분사이의 관계에 의해

$$g(t)=\int_0^t (2x^3-15x^2+36x)dx$$

$g'(t)=2t^3-15t^2+36t$ 이고, $0 \le t \le 3$에서의 최댓값을 구하기 위해 미분을 한다.

$g''(t)=6t^2-30t+36$이고, $6t^2-30t+36=0$, $t^2-5t+6=0$ 이므로

$t=2$ 또는 $t=3$에서 극값을 가진다.

미분가능한 함수의 최댓값은 극값 또는 범위의 양 끝 값에서 나오므로

$t=0, 2, 3$ 에서 최댓값이 나온다.

따라서 대입하여 비교하면 $t=2$ 일 때 최댓값 28 를 가지므로

이 차량의 시간당 연료 소모량이 최대가 되는 t의 값은 2가 된다.

논제Ⅰ-2

주어진 시간당 연료소모량이 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+9$, $x \ge 0$ 이고, 시간당 연료소모량이 최소가 되는 속도를 구하기 위하여 극값을 구한다.

$y'=x^2-2x=0$ 에서 $x=0, 2$ 에서 극값을 가진다.

$x=2$ 일 때, 극솟값을 가지고 극솟값은 주어진 범위에서 최솟값이 된다.

다음으로 경제속도는 제시문에 방법에 따라서 원점을 지나는 직선이 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+9$에 접하는 접점을 구하면 된다.

$y=\frac{1}{3}x^3-x^2+9$ 위의 점 $\left(t, \frac{1}{3}t^3-t^2+9\right)$에서 접선의 방정식은

$$y-\left(\frac{1}{3}t^3-t^2+9\right)=(t^2-2t)(x-t)$$

이고, 이 직선이 원점을 지나므로 $x=0$, $y=0$을 대입하여 정리하면

$2t^3-3t^2-27=0$, $(t-3)(2t^2+3t+9)=0$ 이고, 만족하는 실수는 $t=3$이다.

시간당 연료 소모량이 최소가 되는 속도는 2 km/h 이고, 경제속도는 3 km/h 이다.

8 서강대학교 모의

제시문 **제시문을 읽고 물음에 답하여라.**[15)]

한국대학교는 교수 100명의 직접투표를 통해 총장 선거를 실시했다. 총장후보자는 A, B, C, D 네 사람이고, 유권자인 교수 100명은 투표용지에 각 후보자의 순위를 적는 방식으로 선거가 진행되었으며, 투표 결과는 다음 표와 같다.

득표수 (명)	1위	2위	3위	4위
35	A	B	C	D
1	A	B	D	C
0	A	C	B	D
1	A	C	D	B
0	A	D	B	C
1	A	D	C	B
0	B	A	C	D
0	B	A	D	C
0	B	C	A	D
1	B	C	D	A
0	B	D	A	C
10	B	D	C	A
0	C	A	B	D
0	C	A	D	B
2	C	B	A	D
25	C	B	D	A
0	C	D	A	B
3	C	D	B	A
0	D	A	B	C
0	D	A	C	B
0	D	B	A	C
1	D	B	C	A
0	D	C	A	B
20	D	C	B	A

투표결과 4명의 후보들은 각자가 총장이 되어야 한다고 주장하였고, 학교의 이사회는 토론 끝에 후보 D를 탈락시킨 후 교수 20명으로 총장 후보 추천 위원회를 새롭게 구성하여 이들로 하여금 후보 A, B, C를 각자 선호하는 순서대로 적는 2차 투표를 실시하였다. 위원회는 2차 투표 결과 단순히 1순위를 가장 많이 얻은 후보가 총장으

15) 서강대학교 입학처

로 당선된다고 룰을 정했고, 개표결과 20명의 위원들 중 11명이 A보다 B를 선호하였고, 14명이 B보다 C를 선호하였으며, 12명이 C보다 A를 선호하였다. 또한 아래 표에서 개표결과 발생 가능한 6가지 결과의 득표수를 나타내는 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6중 단 하나도 0이 아니었다고 공표하였다.

득표수 (명)	1위	2위	3위
f_1	A	B	C
f_2	A	C	B
f_3	B	A	C
f_4	B	C	A
f_5	C	A	B
f_6	C	B	A

논제 I −1

1차 투표결과 세 명의 후보 A, B, C 모두 각자 자신이 총장이 되어야 한다고 주장하였을 때 그 이유가 나름대로 의미 있다고 받아들여진 이유를 설명하시오.

논제 I −2

1차 투표에서 탈락한 후보 D가 총장이 되어야 한다고 주장할 수 있는 근거를 나름의 논리로 설명하시오.

논제 I −3

2차 투표 후 위원회가 공표한 내용만으로 총장 당선자가 결정되었다고 말할 수 있는가? 만일 그렇다면 총장 당선자는 누구인가?

제시문 **제시문을 읽고 물음에 답하여라**

[가] $a>0$가 양의 실수이고 n이 자연수일 때 $a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$, $a^0=1$으로 정의함으로써 양의 실수의 거듭제곱을 정수로 확장시킬 수 있으며, m이 2이상의 자연수이고 n이 자연수일 때 $a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$으로 정의하고 r이 양의 유리수일 때 $a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$로 정의함으로써 양의 실수 a의 거듭제곱을 유리수까지 확장시킬 수 있다. 이때 자연수 지수에서의 지수법칙은 유리수 지수에서까지 성립함을 쉽게 보일 수 있다. 즉 $a>0$인 실수와 임의의 유리수 p, q에 대하여 $a^pa^q=a^{p+q}$ 그리고 $(a^p)^q=a^{pq}$가 성립한다.

[나] 양수의 거듭제곱은 임의의 실수 지수로 확장될 수 있다. 즉 $a>0$와 x가 임의의 실수일 때 a^x을 유리수 지수의 확장이면서 실수에서도 지수법칙이 성립하도록 정의할 수 있다. 실제로, 위로 유계인 단조증가 수열이 반드시 극한을 갖는다는 실수의 기본성질, 수학적으로 표현하자면 무한수열 $\{a_n\}$과 어떤 양수 M이 있어, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le a_{n+1}$이고 $a_n<M$이면, 수열 $\{a_n\}$은 적당한 실수에 수렴하는 성질을 사용하여 a^x를 정의할 수 있다.

[다] 우선 $a>1$, $x>0$이라 가정하고, $x=x_0.x_1x_2\cdots x_k\cdots$을 x의 무한소수 표기라고 하자. 이때 x_0, x_1, $\cdots$, x_k, $\cdots$은 모두 음이 아닌 정수이다. p_n을 x를 소수 n번째 자리까지 표기한 유리수, 즉 $p_n=x_0.x_1x_2\cdots x_n$라 정의하면 수열 $\{p_n\}$은 $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_n \le \cdots$을 만족하면서 (즉, 단조증가하면서) 주어진 양의 실수 x로 수렴한다. 즉 수열 $\{a^{p_n}\}$은 단조증가이며 위로 유계이므로 극한이 존재한다. 이제 $a^x=\lim\limits_{n\to\infty}a^{p_n}$으로 정의한다. 다음으로 $0<a<1$, $x>0$인 경우는 $a=\dfrac{1}{b}$로 놓고, $b>1$임을 이용하여 위의 방법으로 정의된 b^x에 대하여 $a^x=\dfrac{1}{b^x}$라 정의한다. 끝으로 $x<0$인 경우 $a^x=\dfrac{1}{a^{-x}}$으로 정의한다. 이렇게 정의된 함수 $f(x)=a^x$는 실수 위에서 연속이다. 즉, 임의의 실수 x_0에 대하여 $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$가 성립한다.

[라] 함수 $f(x)=2^x$는 실수 전체에서 연속이며 $f(1)=2$, $f(2)=4$이다. 따라서 중간값의 정리에 의하여 $2^\omega=3$을 만족하는 ω가 개구간 $(1,\ 2)$에 존재하며 또한 $f(x)=2^x$는 증가함수이므로 이러한 ω는 유일하게 존재한다. 우리는 $2^\omega=3$을 만족하는 유일한 ω를 $\log_2 3$으로 나타낸다. 이와 마찬가지의 방법으로 $\log_2 5$와 $\log_2 15$도 정의된다.

논제 2-1

a가 양의 실수이고, p, q가 양의 유리수일 때, 자연수 지수에서의 지수법칙을 이용하여 제시문 [가]에서 언급한 $a^p a^q = a^{p+q}$가 성립함을 보이시오.

논제 2-2

제시문 [나]에 제시된 성질을 참조하여 $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\cdots$ 으로 정의된 무한수열이 수렴함을 보이고, 이 수열의 극한값을 구하시오.

논제 2-3

제시문 [다]의 내용을 바탕으로 양의 실수 x, y에 대하여 $2^x 2^y = 2^{x+y}$가 성립함을 보이고 이를 이용하여 제시문 [라]에서 정의된 $\log_2 3$, $\log_2 5$, $\log_2 15$에 대하여 $\log_2 15 = \log_2 3 + \log_2 5$가 성립함을 보이시오.

논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 2문항	시간	120분
연관 개념	논술1. 선거투표방식 논술2. 지수법칙, 극한, 로그의 개념		

제 시 문 분 석

제시문1

다양한 투표방식이 존재함을 알고 합리적인 투표방법을 생각해 보도록 하고 있다.

제시문2

자연수 지수를 가지는 지수법칙에서 실수 지수를 가지는 지수법칙으로 확장하는 개념을 설명하고 지수 함수로부터 로그의 개념을 이끌어 내고 있다.

논 제 분 석

논제 1-1

세 명의 후보 A, B, C가 각각 총장으로 당선될 수 있는 이유를 다양한 투표 방식 중 하나로 설명할 수 있는지 묻고 있다.

논제 1-2

후보 D가 총장으로 당선될 수 있는 이유를 다양한 투표 방식 중 하나로 설명할 수 있는지 묻고 있다.

논제 1-3

위원회가 공표한 내용을 만족하는 총장 당선자를 구할 수 있는지 묻고 있다.

논제 2-1

자연수 지수에서의 지수법칙을 이용하여 a가 양의 실수이고, p, q가 양의 유리수일 때, $a^p a^q = a^{p+q}$ 가 성립함을 보이는 문제이다.

논제 2-2

제시문 [나]에 제시된 성질을 참조하여 정의된 무한수열이 수렴함을 보이고, 이 수열의 극한값을 구하는 문제이다.

논제 2-3

양의 실수 x, y에 대하여 $2^x 2^y = 2^{x+y}$가 성립함을 보이고 이를 이용하여 로그의 성질이 성립함을 보이는 문제이다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 선거투표방식

투표하여 대표를 결정하는 방법에는 여러 가지가 있다.

(1) 단순다수결

출마한 후보자가 여러 명일 때, 유권자들이 후보 중 한 명에게 한 표를 던져 최다 득표자가 당선되는 제도가 단순다수결이다.

그러나 이 경우의 문제점은 후보자가 여러 명 난립하여 유권자들의 표가 분산되었을 때, 과반수에 훨씬 못 미치는 지지율로 당선되는 경우가 있다는 것이다. 이때, 많은 사람이 싫어하게 되므로 그 집단에 소속되어 있는 사람들 사이에 갈등이 일어날 수 있다.

(2) 점수투표

유권자는 여러 명의 후보자 모두에게 순위를 두어 순위별 가중치를 두어 이를 합산한 점수로 선출하는 투표방법이 점수투표이다. 예를 들어, 후보자가 4명일 때, 유권자는 가장 마음에 드는 순서로 각각에게 4점, 3점, 2점, 1점을 준다. 이렇게 많은 유권자들에게 받은 점수를 후보자 별로 합산하여 가장 높은 점수를 받은 후보가 당선된다. 이 투표방법을 프랑스의 수학자 보다(Borda)의 이름을 따서 보다 산출법(Borda count method)이라고 한다. 이 방법은 주로 각종 프로 스포츠에서 MVP를 뽑을 때 많이 쓰고 있다.

(3) 선호투표

유권자는 후보자 각각에 대한 선호도에 따라 1순위, 2순위, 3순위, …의 순으로 순위를 매겨 1순위를 과반수 득표한 사람을 선출한다.

첫 번째 투표에서 과반수가 나오지 않으면 1순위를 최하위로 득표한 후보를 탈락시킨다. 이때, 탈락시킨 후보가 1순위로 받은 표에서 2순위로 지지한 후보에게 탈락시킨 후보의 득표수를 합산해 준다. 그 결과 다시 1순위를 최하위로 득표한 후보를 탈락시키고, 이 후보의 지지표에서 2순위로 지지한 후보에게 두 번째 탈락 후보의 득표수를 합산해 준다. 이렇게 과반수 득표자가 나올 때까지 집계를 반복하는 방식을 선호투표(preferential voting)라고 한다. 미국의 영화제인 아카데미상의 선정방식이 이 투표와 유사하다.

(4) 결선투표

선거에서 후보들이 난립하는 경우가 많기 때문에 1차 투표에서 과반수 득표자가 없는

경우가 빈번하다. 그래서 1차 투표에서 일정 득표 이상 또는 1, 2위 득표를 얻은 후보들만을 대상으로 다시 투표를 실시하여 최종 선출하는 방법을 결선투표(final ballot) 또는 재투표라고 한다. 프랑스나 러시아 대통령 선거가 결선투표이다.

(5) 쌍대비교

후보들을 두 후보씩 짝을 지어 비교하여 두 후보 중 지지도가 높은 후보에게 1점, 지지도가 같으면 각각에게 0.5점씩을 주고 이 점수를 합산하여 가장 높은 점수를 얻은 후보가 당선된다. 이 방법을 쌍대비교 또는 조합비교(method of pairwise comparison)라고 한다.

(6) 찬성투표

유권자는 후보자 중 찬성(지지)하는 모든 후보에게 표를 던져 최고 득표자를 당선시킨다. 이것은 유권자 한 명에게 하나의 투표권을 주는 것이 아니라 한 명의 후보자에게 하나의 투표권을 주는 것과 같다. 유엔사무총장을 선출할 때 이 방법을 사용한다.

2. 단조수렴정리

(1) 수열 $\{x_n\}$이 증가수열이고 위로 유계이면, $\{x_n\}$은 수렴한다.

(2) 수열 $\{x_n\}$이 감소수열이고 아래로 유계이면, $\{x_n\}$은 수렴한다.

풀 어 보 기

문제 1 방정식 $4^x + 4^{-x} + a(2^x - 2^{-x}) + 7 = 0$이 실근을 갖기 위한 양수 a의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값은? (2013학년도 평가원)

문제 2 $2 \le n \le 100$인 자연수 n에 대하여 $(\sqrt[3]{3^5})^{\frac{1}{2}}$이 어떤 자연수의 n제곱근이 되도록 하는 n의 개수는? (2013학년도 수능)

문제 3 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 영역 $\{(x, y) \mid 2^x - n \le y \le \log_2(x+n)\}$에 속하는 점 중 다음 조건을 만족시키는 점의 개수를 a_n이라 하자.

(가) x좌표와 y좌표는 서로 같다. (나) x좌표와 y좌표는 모두 정수이다.

예를 들어, $a_1 = 2$, $a_2 = 4$이다. $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값은? (2013학년도 수능)

읽 기 자 료

형식 불역의 원리에 의한 지수 확장 16)

형식 불역의 원리는 기존 수 체계에서 성립하던 성질(형식, 形式)이 확장된 수 체계에서도 변하지 않고 성립한다(불역, 不易)고 가정하고, 확장된 새로운 수 체계에서의 규칙을 만들어 내는 원리이다. 형식 불역의 원리는 특히 수의 확장에서 매우 중요한 사고양식이 되어 왔다. 기존의 수 체계가 갖고 있던 연산법칙을 그대로 유지하면서 $\frac{2}{3}$는 $3x=2$, -3는 $x+3=0$, $\sqrt{2}$는 $x^2=2$, i는 $x^2=-1$을 만족시키는 한 해로 도입되어 수가 확장된다.

형식 불역의 원리를 지수법칙에 적용하면 자연수 지수에서 정수 지수로 확장할 때는 자연수 지수에서 성립하는 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$이 불변하는 형식이 되며, 유리수 지수로 확장할 때는 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$이 불변하는 형식이 된다.

지수가 자연수일 때 성립하던 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$이 지수가 정수일 때도 여전히 성립할 것이라고 가정하고(형식 불역의 원리) 지수를 정수일 때로 확장해 보자.

지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$은 m이 자연수일 때 성립한다. 그런데 이 법칙이 $m=0$일 때도 성립할 것이라고 가정하자. 그러면 $a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$이다. 양변을 a^n으로 나누면 $a^0=1$을 얻을 수 있다(여기서 $a \neq 0$이라는 조건이 필요하다.). 또, m이 음의 정수일 때, 이를테면 $m=-n$일 때도 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$이 성립한다고 가정하자. 그러면 $a^{-n}a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$이다. 양변을 a^n으로 나누면 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$을 얻는다. 지수법칙이 성립하도록 정수 지수를 정의했기 때문에, 정수 지수에서 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}\,(a \neq 0)$이 성립하는 것은 당연하다.

또한, 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}\,(a>0)$이 지수가 유리수일 때에도 성립한다고 하면 $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a^{\frac{1}{n}\cdot n} = a^1 = a$ 이다. 따라서, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 이다.

지수가 유리수일 때에도 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}\,(a>0)$이 성립한다고 하면 $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m$ 이다. 그런데 $a^m > 0$이므로 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 을 얻는다.

---

16) 우정호, 수학 학습 지도 원리와 방법, 서울대학교 출판부, 2000

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 36

$4^x+4^{-x}+a(2^x-2^{-x})+7=0$은 $(2^x-2^{-x})^2+a(2^x-2^{-x})+9=0$이고 $2^x-2^{-x}=X$라 하면 주어진 방정식은 $X^2+aX+9=0$ (치환한 X의 범위는 모든 실수)이 된다. 이 방정식이 실근을 가지려면 판별식 D가 $D=a^2-36\ge 0$를 만족해야 한다. 이 부등식을 풀면, $a\le -6$ 또는 $a\ge 6$ 이므로 따라서 양수 a의 최솟값 m은 6 이고 $m^2=36$ 이다.

문제 2 정답 16

$$\left(\sqrt[3]{3^5}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(3^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=3^{\frac{5}{6}}$$

이므로 $3^{\frac{5}{6}}$ 이 어떤 자연수의 n제곱근이기 위해서는 $\left(3^{\frac{5}{6}}\right)^n=3^{\frac{5n}{6}}$ 이 자연수가 되어야 한다. 이때, $2\le n\le 100$ 에서 n 은 6 의 배수이어야 하므로 $n=6, 12, \cdots, 96$ 즉, n 의 개수는 16 이다.

문제 3 정답 573

$y=2^x-n$의 역함수를 구해보면 $2^x=y+n$에서 $x=\log_2(y+n)$이므로 x와 y를 서로 바꾸면 $y=\log_2(x+n)$ 즉, $y=2^x-n$와 $y=\log_2(x+n)$은 서로 역함수의 관계이므로 두 곡선은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 따라서 주어진 조건을 만족하는 점의 좌표를 (m, m) (단, m은 정수) 라고 하면

$$2^m-n\le m\le \log_2(m+n)\ \ \therefore 2^m-m\le n\ \cdots\ ㉠$$

또한, $2^{-30}-(-30)=\dfrac{1}{2^{30}}+30,\ 2^{-29}-(-29)=\dfrac{1}{2^{29}}+29,\ \cdots,\ 2^{-3}-(-3)=\dfrac{1}{8}+3,$

$2^{-2}-(-2)=\dfrac{1}{4}+2,\ 2^{-1}-(-1)=\dfrac{1}{2}+1,\ 2^0-0=1,\ 2^1-1=1,\ 2^2-2=2,\ 2^3-3=5,$

$2^4-4=12,\ 2^5-5=27,\ 2^6-6=58$이므로 자연수 n에 대하여 ㉠을 만족시키는 정수 m의 값은 다음과 같다.

$n=1$ 일 때, $m=0, 1$

$n=2$ 일 때, $m=-1, 0, 1, 2$

$n=3$ 일 때, $m=-2, -1, 0, 1, 2$

$n=4$ 일 때, $m=-3, -2, -1, 0, 1, 2$

$n=5$ 일 때, $m=-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$

$\vdots$

$n=30$ 일 때, $m=-29, -28, \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ 에서
$(-29, -29)$의 개수는 1가지, $(-28, -28)$의 개수는 2가지,$\cdots$, $(-1, -1)$의 개수는 29가지, $(0, 0)$의 개수는 30가지, $(1, 1)$의 개수는 30가지, $(2, 2)$의 개수는 29가지, $(3, 3)$의 개수는 26 가지, $(4, 4)$의 개수는 19가지, $(5, 5)$의 개수는 4가지이므로

$$\sum_{n=1}^{30} a_n = (1+2+\cdots+29)+30+30+29+26+19+4=573$$

논제 1-1

A주장의 근거 : 유권자들이 후보 중 한 명에게 한 표를 던져 최다 득표자가 당선되는 단순다수결 방법을 적용해 보자.

이 문제에서는 1순위를 가장 많이 얻은 후보가 당선된다고 생각할 수 있다. A는 1순위 득표수가 38, B는 1순위 득표수가 11, C는 1순위 득표수가 30, D는 1순위 득표수가 21이므로 후보A가 총장으로 당선된다.

B주장의 근거 : 유권자가 여러 명의 후보자 모두에게 순위를 두고 순위별 가중치를 부여하여 이를 합산한 점수로 선출하는 투표방식인 점수투표(보다 산출법, Borda count method)를 적용해 보자.

1, 2, 3, 4 순위에 각각 4점, 3점, 2점, 1점을 부여하면

A의 점수$=4\times38+2\times2+1\times60=216$

B의 점수$=4\times11+3\times64+2\times23+1\times2=284$

C의 점수$=4\times30+3\times22+2\times47+1\times1=281$

D의 점수$=4\times21+3\times14+2\times28+1\times37=219$

이므로 후보B가 총장으로 당선된다.

C주장의 근거 : 후보들을 두 후보씩 짝을 지어 비교하여 두 후보 중 지지도가 높은 후보에게 1점, 지지도가 같으면 각각에게 0.5점씩을 주고 이 점수를 합산하여 가장 높은 점수를 얻은 후보가 당선되는 쌍대비교를 적용해 보자.

$$A:B=38:62,\ A:C=38:62,\ A:D=40:60,$$
$$B:C=48:52,\ B:D=74:23,\ C:D=67:33$$

이므로 A는 0점, B는 2점, C는 3점, D는 1점이 되어 후보C가 총장으로 당선된다.

논제 1-2

1순위를 최하위로 득표한 후보를 탈락시키고 탈락시킨 후보가 1순위를 받은 표에서 2순위로 지지한 후보에게 탈락시킨 후보의 득표수를 합산해 주는 방법을 반복하여 최종 과반수 득표자를 뽑는 방식을 적용해 보자.

1순위 지지자가 11명뿐인 후보B가 가장 먼저 탈락하고, B가 없는 상황에서 투표결과를 상정하면 후보C가 이어서 탈락하고 최종 선발은 남은 후보 A와 D중 다수의 표를 얻은 후보D가 당선된다.

(B를 탈락시키면 C, D에게 각각 1표, 10표를 합산하면 A : 38표, C : 31표, D : 31표가 되어 C, D의 득표수가 같게 된다. 제시문 표의 오류로 보인다.)

논제 1-3

주어진 조건, $f_1+f_2+f_3+f_4+f_5+f_6=20$, $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6 \geq 1$ 와

$f_3+f_4+f_6=11$, $f_2+f_5+f_6=14$, $f_1+f_2+f_3=12$ 로부터 $f_1+f_2+f_5=9$, $f_1+f_3+f_4=6$,

$f_4+f_5+f_6=8$ 을 얻는다. 식 $f_1+f_3+f_4=6$ 으로부터 $2 \leq f_3+f_4 \leq 5$ 가 성립하므로

$f_3+f_4=2, 3, 4, 5$ 를 각각 대입해서 $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ 를 구하자.

(1) $f_3+f_4=2$ 인 경우 $f_1=4, f_3=1, f_4=1$ 이고 $f_1+f_2+f_3=12$ 로부터 $f_2=7$ 을 얻으나 $f_1+f_2+f_5=9$ 를 만족할 수 없다.

(2) $f_3+f_4=3$ 인 경우 $f_1=3, f_3=1, f_4=2$ 또는 $f_1=3, f_3=2, f_4=1$ 이 성립하나 이는 $f_1+f_2+f_3=12$ 와 $f_1+f_2+f_5=9$ 를 동시에 만족할 수 없다.

(3) $f_3+f_4=4$ 인 경우 $f_3+f_4+f_6=11$ 로부터 $f_6=7$ 을 얻으나 $f_4+f_5+f_6=8$ 을 만족할 수 없다.

(4) $f_3+f_4=5$ 인 경우 $f_1=1$ 이고 $f_3+f_4+f_6=11$ 로부터 $f_6=6$ 을 얻고 $f_4+f_5+f_6=8$ 로부터 $f_4=1, f_5=1$ 을 얻고 따라서 $f_3=4$ 가 된다. 또한 $f_1+f_2+f_3=12$ 로부터 $f_2=7$ 을 얻는다. 이렇게 얻어진 $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)=(1, 7, 4, 1, 1, 6)$ 은 모든 식을 만족한다.

따라서 위원회가 공표한 내용만으로 총장 당선자가 유일하게 결정되며, 당선자는 8명에게서 1위 득표를 얻은 후보A이다.

논제 2-1

$p=\dfrac{n}{m}$, $q=\dfrac{i}{j}$ (i, j, m, n은 자연수)라 놓고 자연수 지수에서의 지수법칙을 사용하면

$$a^p a^q = a^{\frac{n}{m}} a^{\frac{i}{j}} = \sqrt[m]{a^n}\ \sqrt[j]{a^i} = \sqrt[mj]{a^{nj}}\ \sqrt[mj]{a^{mi}} = \sqrt[mj]{a^{nj}a^{mi}} = \sqrt[mj]{a^{nj+mi}}$$

이고, 정의에 의하여 $\sqrt[mj]{a^{nj+mi}} = a^{\frac{nj+mi}{mj}} = a^{\frac{n}{m}+\frac{i}{j}} = a^{p+q}$이다. 따라서 $a^p a^q = a^{p+q}$가 성립한다.

논제 2-2

$a_1 = \sqrt{2} < 2$, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$으로 정의된 수열이 위로 유계이며 단조증가임을 수학적 귀납법으로 보이자.

먼저 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 2$임을 보이자(위로 유계).

$a_1 = \sqrt{2} < 2$이다. 이제 임의의 자연수 k에 대하여 $a_k < 2$라고 가정하자. 이때 $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$이므로 수학적 귀납법에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < 2$이다. 따라서 정의된 수열은 위로 유계이다.

이제 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} > a_n$임을 보이자(단조증가).

$a_n < 2$과 $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$으로부터 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (a_n+2) - a_n^2 = (2-a_n)(a_n+1) > 0$이고 $a_n > 0$이므로 $a_{n+1} > a_n$이다. 따라서 정의된 수열은 단조증가이다.

위 수열은 단조증가이고 위로 유계이므로 제시문 [나]에 의하여 극한이 존재한다. $x = \lim_{n\to\infty} a_n$이라 놓으면 $x > 0$이고, $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$에서 $n\to\infty$의 극한이 존재한다. $x = \sqrt{x+2}$ 즉 이차 방정식 $x^2 - x - 2 = 0$가 성립하고, $x > 0$이므로 $x = 2$를 얻는다. 따라서 위 수열이 수렴하는 극한값은 2이다.

논제 2-3

양의 실수 x, y의 무한소수 표기를 각각 $x = x_0.x_1x_2\cdots x_k\cdots$과 $y = y_0.y_1y_2\cdots y_k\cdots$라 하고, 자연수 n에 대하여 유리수 p_n, q_n를 $p_n = x_0.x_1x_2\cdots x_n$ 그리고 $q_n = y_0.y_1y_2\cdots y_n$ 라 정의하면 제시문 [다]에 의하여

$$2^x = \lim_{n\to\infty} 2^{p_n},\ 2^y = \lim_{n\to\infty} 2^{q_n} \text{ 그리고 } 2^{x+y} = \lim_{n\to\infty} 2^{p_n+q_n}$$

이다. 수렴하는 수열에서 극한의 성질과 유리수 지수에서의 지수법칙에 의하여 다음이 성립한다.

$$2^x 2^y = \lim_{n\to\infty} 2^{p_n} \lim_{n\to\infty} 2^{q_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{p_n} 2^{q_n} = \lim_{n\to\infty} 2^{p_n+q_n} = 2^{x+y}$$

이제 $\log_2 3 = x$ 그리고 $\log_2 5 = y$라 놓으면 $2^x = 3$, $2^y = 5$이고 x, y는 양의 실수이므로 $15 = 3\times 5 = 2^x 2^y = 2^{x+y}$가 성립한다. 따라서 $\log_2 3 + \log_2 5 = x + y = \log_2 15$이다.

9 서강대학교 수시(자연1)

제시문 **다음 글을 읽고, 물음에 답하라.**[17)]

[가] 함수 $f(x)$에서 x가 a와 다른 값을 가지면서 a에 한없이 가까워질 때 $f(x)$의 값이 일정한 실수 L에 한없이 가까워지면, $f(x)$는 $x=a$에서 극한(값) L을 갖는다고 말하며 $\lim_{x\to a}f(x)=L$또는 $x\to a$일 때, $f(x)\to L$로 나타낸다. 예를 들면 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$일 때, $\lim_{x\to 1}f(x)=2$이다. 함수의 극한값 $\lim_{x\to a}f(x)$이 존재하면 좌극한 $\lim_{x\to a-0}f(x)$과 우극한 $\lim_{x\to a+0}f(x)$이 존재하고 그 값은 같으며, 이 역도 성립한다. 예를 들면 $f(x)=\dfrac{x-1}{|x-1|}$일 때, $\lim_{x\to 1-0}f(x)=-1$이고 $\lim_{x\to 1+0}f(x)=1$이어서 좌극한과 우극한이 다르므로, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극한이 존재하지 않는다. 또한, 모든 x에 대하여 $g(x)\le f(x)\le h(x)$이고 $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$이면, $\lim_{x\to a}f(x)=L$이 성립함을 극한의 정의로부터 쉽게 알 수 있다. x가 양수이면서 한없이 커질 때 $f(x)$의 값이 일정한 실수 L에 한없이 가까워지는 것을 기호로 $\lim_{x\to\infty}f(x)=L$ 또는 $x\to\infty$일 때 $f(x)\to L$로 나타낸다. 예를 들면 $f(x)=\dfrac{x}{2^x}$일 때, $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$이다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 정의되어 있고, $x=a$에서 극한이 존재하며 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$일 때, 이 함수는 $x=a$에서 연속이라고 한다. 함수 $f(x)$가 구간 I의 모든 점에서 연속일 때, $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(a)\neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$사이에 있는 임의의 값 k에 대하여 $f(c)=k$인 실수 c가 a와 b사이에 적어도 하나 존재함이 알려져 있다. 이를 중간값의 정리라 한다.

함수 $f(x)$에 대하여 극한 $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}\left(=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$이 존재하는 경우 이 함수는 $x=a$에서 미분가능하다고 하며 이 극한값을 $f'(a)$로 나타낸다. 함수 $f(x)$가 구간 I의 모든 점에서 미분가능할 때, $f(x)$는 그 구간에서 미분가능하다고 하며, 구간 I에서

17) 서강대학교 입학처

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(a)}{x}$$

로 정의된 함수 $f'(x)$를 $f(x)$의 도함수라고 한다. 구간 I의 모든 점 x에서 $f'(x)>0$이면 $f(x)$는 I에서 증가함수이고, 구간 I의 모든 점 x에서 $f'(x)<0$이면 $f(x)$는 I에서 감소함수이다. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면

$$\lim_{h\to 0}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0$$

즉 $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$가 성립하므로 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 한편 $f(x)=|x-1|$는 $\lim_{x\to 1}f(x)=0=f(1)$을 만족하므로 $x=1$에서 연속이지만,

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1\neq 1=\lim_{x\to 1+0}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

이므로 $x=1$에서 미분가능하지 않다. 함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 열린 구간 (a,b)에서 미분가능할 때, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$인 실수 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재함이 알려져 있다. 이를 평균값의 정리라 한다.

논제 1-1

실수 위에서 정의된 함수 $f(x)$가 모든 실수 x, w에 대하여 $|f(x)-f(w)|\leq 3|x-w|^{3/2}$를 만족할 때, 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$임을 보여라.

논제 1-2

실수 위에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases}x^2 & (x \text{ 는 유리수})\\ 0 & (x \text{ 는 무리수})\end{cases}$ 는 $x=0$에서 연속인가? $x=0$에서 미분가능한가?

논제 1-3

실수 위에서 정의된 함수 $f(x)=\begin{cases}2^{-(1/x)}+x^2\cos x & (x>0)\\ 0 & (x\leq 0)\end{cases}$는 $x=0$에서 미분가능한가?

논제 1-4

방정식 $\sin x = x^3 - 6x^2 + 13x - 7$은 단 하나의 실근을 갖으며, 그 실근은 0과 1사이에 있음을 보여라.

논제 1-5

평균값의 정리를 사용하여 $\frac{9}{11} < \sqrt{119} - \sqrt{101} < \frac{9}{10}$임을 보여라.

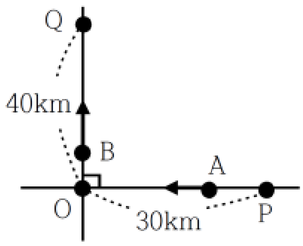
제시문 **다음 글을 읽고 물음에 답하라.**

[가] 르네 데카르트는 1637년에 발간된 '방법서설' 을 통하여 수학적 방법을 어떻게 철학을 비롯한 다른 학문에 적용할 수 있는지를 설명하였는데, 그 책의 부록이 '기하학' 에서 평면 좌표를 도입하여 대수적인 방법으로 중요한 기하적 문제들을 해결할 수 있었다. 평면에 좌표계를 도입하면 각 점은 실수의 순서쌍으로 표현될 수 있고, 기하 곡선은 대수 방정식으로 표현되며, 두 곡선이 만나는 점은 연립방정식을 통하여 구할 수 있기 때문이다. 데카르트의 좌표계는 그때까지 누구도 알지 못했던 대수와 기하 사이의 연결 고리를 찾았다는 점에서 역사적인 혁명과도 같았다. 특히, 좌표평면에서 그래프를 통해 데카르트는 대수방정식을 기하 곡선으로, 마찬가지로 기하 곡선을 대수 방정식. 즉 수치로 나타내는 법을 발견하였고, 두 곡선을 같은 좌표계에 그릴 수 있으며, 이 두 곡선의 교차점은 두 곡선으로 나타내어지는 연립방정식의 해가 된다는 것도 같이 발견하였다. 이로서 데카르트는 오랜 세월 동안 별개라고 생각되었던 대수와 기하를 통합함으로써 해석기하학이라는 분야의 초석을 다지게 되었다.

[나] 삼각형의 면적을 이용하여 좌표평면 위에서 원점과 직선 사이의 거리를 구하는 방법에 대하여 살펴본다. 먼저, 원점과 직선 $4x+3y=12$과의 거리 d를 구하기 위해 이 직선의 x절편, y절편과 원점이 이루는 삼각형의 면적을 두 가지 방법으로 구해서 서로 같게 놓음으로써 $d=\frac{12}{5}$를 얻을 수 있다. <u>이를 일반화하여 원점과 직선의 x절편, y절편을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 면적을 이용하면 a와 b가 0이 아닌 실수일 때 원점 $(0, 0)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리 d는 $d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$임을 보일 수 있다.</u>

[다] 아래 그림과 같이 수직으로 교차하는 두 길에서 A는 P지점에서 출발하여 O지점을 향해 시속 $30km$의 균일한 속력으로 달리고, 동시에 B는 O지점에서 출발하여 Q지점을 향해 시속 $40km$의 균일한 속력으로 달린다. P지점과 O지점 사이의 거리가

$30\,km$일 때, 출발 이후 A와 B사이의 거리의 최솟값을 점과 직선 사이의 거리 공식을 이용하여 구할 수 있음을 살펴보자. 좌표평면에서 A의 위치를 원점으로 고정한 상태에서 B의 상대적인 위치를 생각해 보면, A와 B사이의 거리의 최솟값은 원점과 직선 $4x-3y+120=0$ 사이의 거리임을 알 수 있다. 그러므로 A와 B사이의 거리의 최솟값은 $\dfrac{120}{\sqrt{4^2+3^2}}=24$이다.



[라] 좌표평면의 점 (x, y)를 x축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(x, -y)$이고, (x, y)를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 (y, x)이다. 점의 대칭이동을 이용하고, 삼각형에서 두변의 길이의 합은 다른 한 변의 길이보다 항상 크다는 사실을 이용하여 a와 b가 실수일 때, 좌표평면위의 세 점 (a, a), $(b, 0)$그리고 $(2, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 둘레의 길이의 최솟값 $\sqrt{10}$은 점 $(2, 1)$을 x축에 대하여 대칭이동한 점과 $(2, 1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점 사이의 거리이다.

논제 2-1

제시문 [나]의 밑줄 친 부분을 직접 계산을 통해 증명하고, 이를 이용하여 a와 b가 0이 아닌 실수 일 때, 점 $(x_{1,}\, y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리를 구하여라.

논제 2-2

제시문 [다]의 밑줄 친 부분에서 A와 B사이의 거리의 최솟값을 원점과 직선 $4x-3y+120=0$사이의 거리로 해석할 수 있는 이유를 설명하여라.

논제 2-3

주어진 자연수 n과 삼각형 ABC에서 변 BC를 $n:1$로 내분하는 점을 D라고 하자 $(\overline{\mathrm{BD}} : \overline{\mathrm{DC}} = n : 1)$.

이때 다음의 결과가 성립함을 보여라.

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+n\overline{\mathrm{AC}}^2=(n+1)(\overline{\mathrm{AD}}^2+n\overline{\mathrm{CD}}^2)$$

논제 2-4

제시문 [라]에서 언급한 세 점 (a, a), $(b, 0)$ 그리고 $(2, 1)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 둘레의 길이의 최솟값은 $\sqrt{10}$ 임을 보여라.

논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 2문항	시간	120분
연관 개념	함수의 극한, 연속, 중간값 정리, 미분법, 평균값 정리, 평면좌표, 점과 직선사이의 거리, 대칭이동		

제 시 문 분 석

제시문 1

극한의 정의 및 관련 성질을 설명하고 있다. 좌극한, 우극한, 조임정리, 연속, 중간값의 정리를 제시하고, 미분가능의 정의, 증가ㆍ감소함수, 연속과 미분가능성, 평균값의 정리를 차례로 설명하고 있다.

제시문 2

[가] 데카르트가 평면좌표를 도입함으로써 대수와 기하가 통합되는 역사적 배경을 설명하고 있다.

[나] 삼각형의 면적을 이용하여 점과 직선사이의 거리를 구하는 방법을 설명하고 있다.

[다] 점과 직선사이의 거리를 이용하여 해결할 수 있는 문제 상황을 제시하고 있다.

[라] 대칭이동을 통해 삼각형의 둘레의 길이의 최솟값 구하는 것을 보여준다.

논 제 분 석

논제 1-1

부등식 $|f(x)-f(w)| \le 3|x-w|^{3/2}$을 이용하여 $f'(x)=0$을 보이라는 문제로 미분가능의 정의와 조임정리를 이용해 증명할 수 있다.

논제 1-2

함수 $f(x)=\begin{cases} x^2 & (x \text{ 는 유리수}) \\ 0 & (x \text{ 는 무리수}) \end{cases}$ 의 $x=0$에서 연속성과 미분가능성을 묻는 문제로 미분가능의 정의와 조임정리를 이용해 증명할 수 있다.

논제 1-3

좌극한, 우극한의 정의를 이용해 주어진 함수의 미분가능을 확인해보라는 문제이다.

논제 1-4

고등학교 교육과정 중 흔히 볼 수 있는 문제이다. 중간값의 정리로 실근의 존재성을 보이고, 제시문의 증가 · 감소함수 정의를 이용해 실근의 유일성을 증명할 수 있다.

논제 1-5

평균값의 정리를 사용하여 부등식 $\dfrac{9}{11} < \sqrt{119} - \sqrt{101} < \dfrac{9}{10}$이 성립하는 것을 보이라는 문제이다. 평균값의 정리를 사용하기 위하여 적당한 함수를 두고, 미분가능과 연속의 조건을 만족하는 구간을 설정한다. 이때, 주어진 부등식을 잘 살펴 함수 및 구간을 적절히 세워 문제해결에 접근해야 한다.

논제 2-1

점과 직선사이의 거리를 구할 때, 직선의 수직관계를 이용하는 일반적인 방법과 달리 삼각형의 면적을 이용하여 구할 수 있음을 제시하는 문제이다. 좌표평면에서 두 점 사이의 거리 구하는 식으로 삼각형의 각 변의 길이를 구한 뒤 밑줄 친 부분을 증명해 볼 수 있다.

직선의 평행이동을 이용해 (x_1, y_1)에서 직선까지의 거리로 일반화하여 점과 직선 사이의 거리를 구할 수 있다.

논제 2-2

점 A를 원점으로 고정하여 시간 t에 따른 B의 상대적 위치를 좌표로 나타내면, B가 직선 $4x-3y+120=0$ 위에 있으므로 A와 B 사이의 거리의 최솟값을 점과 직선사이의 거리로 해석할 수 있다.

논제 2-3

중선정리의 증명을 해 본 학생이라면 쉽게 접근할 수 있는 문제로 주어진 삼각형을 좌표평면에 두어 각 꼭짓점의 좌표를 이용하여 증명할 수 있다.

논제 2-4

점의 대칭이동과 관련하여 자주 등장하는 문제로, [라]에 제시된 순서대로 직선에 대하여 점을 대칭이동하여 삼각형의 둘레의 최솟값을 구할 수 있다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 평균값의 정리

함수 $y=f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$에서 연속이고, 열린구간 (a, b)에서 미분가능 할 때

$$\frac{f(a)-f(b)}{b-a}=f'(c)$$

가 되는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

2. 점과 직선사이의 거리

$P(x_1,\ y_1)$과 평면 $ax+by+c=0$사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

이다.

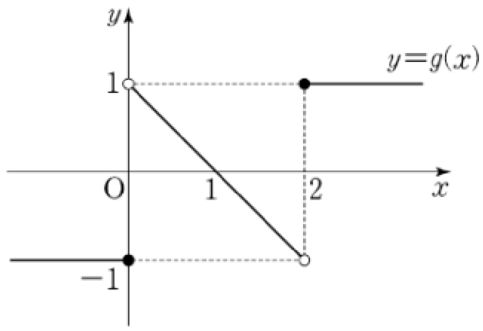
풀 어 보 기

문제 1 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\begin{cases}-1 & (x\le 0)\\ -x+1 & (0<x<2)\\ 1 & (x\ge 2)\end{cases}$$

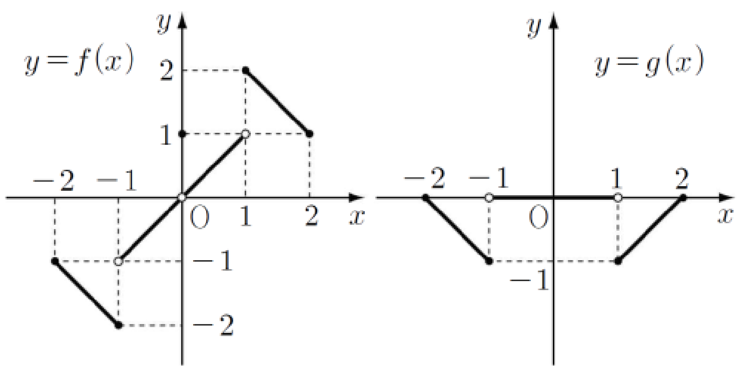
에 대하여 함수 $f(x)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이다. $f(5)$의 값은?

(2013학년도 평가원)



① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23

문제 2 $-2\le x\le 2$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같을 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (2010년 전국연합)



〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim_{x\to -1} g(f(x))=-1$

ㄴ. 함수 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다.

ㄷ. 방정식 $g(f(x))=-\frac{1}{2}$의 실근이 1과 2사이에 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 3 포물선 $y^2 = nx$의 초점과 포물선 위의 점 (n, n)에서의 접선 사이의 거리를 d라 하자. $d^2 \geq 40$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값을 구하시오. (2011학년도 대수능)

문제 4 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 + \overline{\mathrm{AC}}^2 = 2(\overline{\mathrm{AM}^2} + \overline{\mathrm{BM}^2})$$

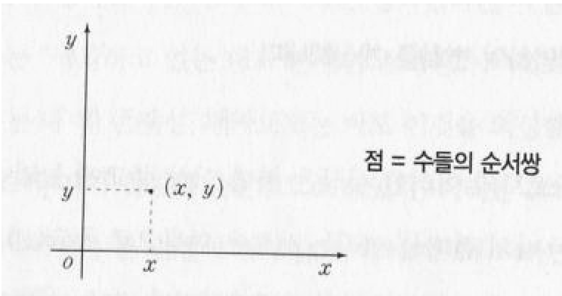
임을 보여라. (중선정리)

읽 기 자 료

좌표를 발명하여 변화를 계산해내다 [18]

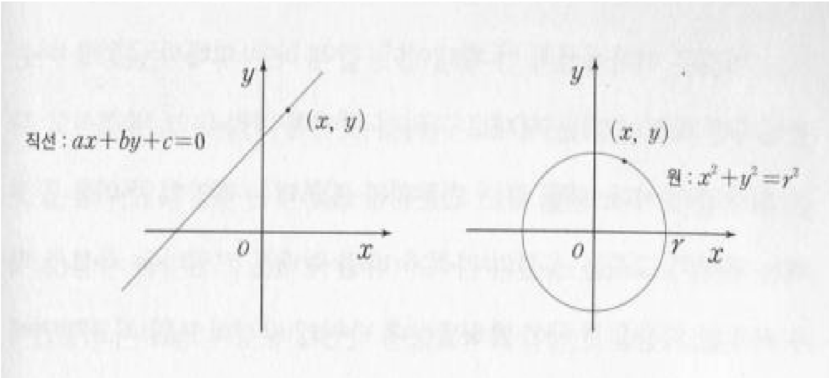
고대 그리스 수학은 수를 다루는 대수학과 도형을 다루는 기하학이 분리되어 있었으며 특히 기하학이 중심이 된, 즉 도형을 주로 다루는 증명의 중심의 사변적 학문이었으므로 난해하기가 그지없었다. 그런데 도형이란 점들이 특정한 규칙에 만족하며 모여 있는 것이다. 즉 모든 도형은 점들의 집합이다. 따라서 '수'로써 점을 표현할 수 있는 새로운 방법이 있다면 모든 도형(원이나 직선 등)을 수로서 표현해낼 수 있을 것이라고 생각한 데카르트는 마침내 점을 수들의 순서쌍으로 표현하는 직교좌표축을 생각해낸다.

[데카르트 (Rene Descartes, 1596~1650)]



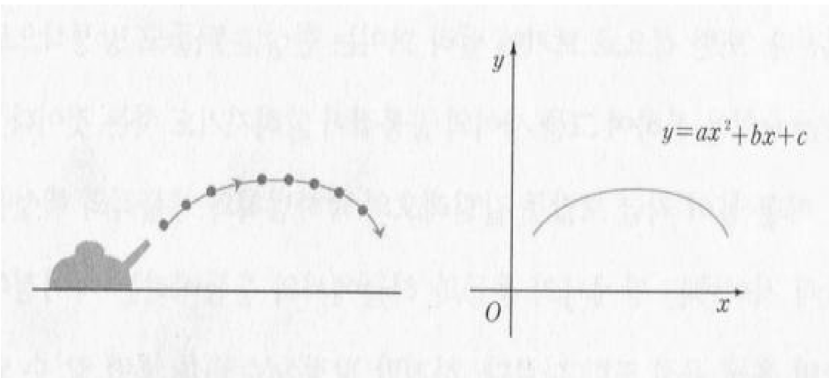
모든 도형을 점들의 모임으로 환원시키고 다시 그 점을 두 수들의 순서쌍으로 표현한 것이다. 철학의 기본원리를 찾는 것처럼 복잡한 대상을 기본적인 요소들로 분해하는 데카르트 철학의 기본정신이 유감없이 발휘되는 과정이었다. 직교좌표축이라는 이러한 새로운 수단에 의하여 직선, 원 등의 도형이 방정식(수식)으로 새롭게 표현된다.(도형의 본질은 그 도형을 구성하는 점들이 만족하는 특정한 규칙이며 그 규칙은 바로 점=순서쌍 (x, y)을 구성하는 x와 y사이에 성립하는 규칙이다. 이 규칙은 수식으로 표현될 수 있다.)

장우석. 수학 철학에 미치다, 숨비소리, 2008.

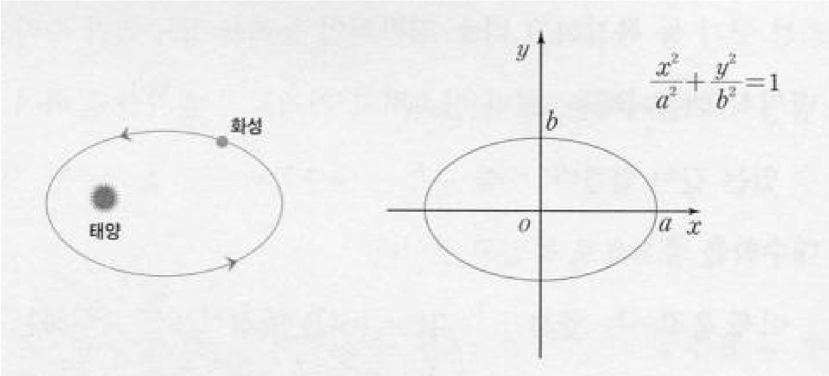


이렇게 도형의 문제(기하)가 방정식의 문제(대수)로 바뀜으로써 보조선 긋기 등 복잡하고 다소 직관적인 능력을 요구했던 수학 문제가 방정식의 풀이라는, 보다 단순하고 기계적인 절차를 통하여 해결 될 수 있는 길이 열렸다. 수를 다루는 대수학과 도형을 다루던 기하학이 대수학을 중심으로 통일된 것이다.

이제 움직이는 물체가 그리는 곡선을 방정식으로 표현하는 것이 가능해졌다. 예를 들어 갈릴레오가 발견한 낙하법칙에 의하면 포탄을 쏘았을 때, 포탄이 날아가면서 그리는 도형은 $y=ax^2+bx+c$형태의 그래프가 된다.



이것은 이차곡선의 한 형태이다. 만약 다른 형태의 운동을 하는 물체라면 곡선이 다른 형태로 그려질 것이며 따라서 그 방정식도 다른 형태일 것이다. 예를 들어 천문학자 케플러는 태양의 주위를 공전하는 화성이 그리는 곡선의 자취가 타원 형태를 그린다는 사실을 매우 복잡한 계산을 통하여 밝혀냈는데 타원의 방정식 또한 좌표평면에서 다음과 같은 이차식으로 표현될 수 있다.



이렇게 좌표를 이용하여 다양한 운동곡선(움직임)을 방정식(움직이지 않는 것)으로 표현할 수 있게 된 것이다. 그렇다면 그 방정식들을 풀어냄으로써 사물의 변화를 이해하고 예측할 수 있을 것이란 생각이 가능해진다. 또한 겉으로 보기에 달라 보이는 현상(운동)들도 방정식으로 나타난 모양을 통하여 그들 사이의 공통점이 밝혀지기도 하는 것이다.

예를 들어 지금 보았듯 갈릴레오의 낙하법칙과 케플러의 행성운행법칙 사이에는 땅에서의 운동과 하늘에서의 운동이라는 차이점이 있으며 운동 곡선 또한 다르다. 하지만 방정식(수식)을 보면 알 수 있듯이 그 둘은 이차식이라는 공통점이 있다.

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 ①

함수 $g(x)$ 는 $x=0,\ x=2$ 에서 불연속이고, 그 외는 연속이다.

따라서 함수 $f(x)g(x)$ 가 $x=0,\ x=2$ 에서 연속일 조건을 구하면 된다.

(i) $\lim_{x\to -0} f(x)g(x)=\lim_{x\to -0} f(x)(-1)=-f(0)$ 이고 $\lim_{x\to +0} f(x)\cdot g(x)=\lim_{x\to +0} f(x)\cdot 1=f(0)$ 에서

$f(0)\cdot g(0)=-f(0)$ 이므로 $f(0)=0$ 이다.

(ii) $\lim_{x\to 2-0} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2-0} f(x)(-1)=-f(2)$ 이고 $\lim_{x\to 2+0} f(x)g(x)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=f(2)$ 에서

$f(2)\cdot g(2)=-f(2)$ 이므로 $f(2)=0$ 이다.

(i), (ii)에서 $f(x)=x(x-2)$ 이므로 $f(5)=5\cdot 3=15$ 이다.

문제 2 정답 ④

$$g(f(x))=\begin{cases} x+1 & (-2\le x\le -1) \\ 0 & (-1<x<0) \\ -1 & (x=0) \\ 0 & (0<x<1) \\ -x+1 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$ 이므로

ㄱ. $\lim_{x\to -1} g(f(x))=0$ (거짓)

ㄴ. $g(f(0))=g(1)=-1$이고, $\lim_{x\to +0} g(f(x))=\lim_{x\to -0} g(f(x))=0$이므로 $g(f(x))$는 $x=0$에서 연속이 아니다. (참)

ㄷ. 함수 $g(f(x))$는 1과 2 사이에서 연속이고 $g(f(1))=0$, $g(f(2))=-1$이므로 중간값의 정리에 의해 방정식 $g(f(x))=-\frac{1}{2}$의 실근이 1과 2 사이에 적어도 하나 존재한다.

문제 3 정답 12

$y^2=nx=4\cdot\frac{n}{4}\cdot x$에서 포물선의 초점을 F라 하면 초점의 좌표는 $\mathrm{F}\left(\frac{n}{4},\ 0\right)$이다.

포물선 $y^2=nx$ 위의 점 $(n,\ n)$에서의 접선 방정식은 $ny=\frac{n}{2}(x+n)$

즉, $x-2y+n=0$ $(\because\ n\neq 0)$

직선 $x-2y+n=0$과 포물선의 초점 $\left(\frac{n}{4},\ 0\right)$사이의 거리 d는

$$d=\frac{\left|1\times\frac{n}{4}-2\times0+n\right|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\frac{\frac{5}{4}n}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{4}n$$ 인데 $d^2\geq40$에서 $\frac{25n^2}{80}\geq40$, $n^2\geq128$이다.

따라서 $11^2=121$, $12^2=144$이므로 $d^2\geq40$을 만족하는 자연수 n의 최솟값은 12이다.

문제 3

직선 BC를 x축, 점 M을 지나고 직선 BC에 수직인 직선을 y축으로 잡으면, 점 M은 좌표 평면의 원점이 된다. 세 점 A, B, C의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(a,b)$, $\mathrm{B}(-c,0)$, $\mathrm{C}(c,0)$으로 놓으면

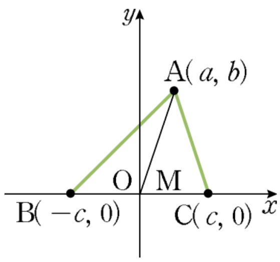
$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=\{(a+c)^2+b^2\}=\{(a-c)^2+b^2\}=2(a^2+b^2+c^2)\ \cdots\cdots\ ㉠$$

한편, $\overline{\mathrm{AM}}^2=a^2+b^2$, $\overline{\mathrm{BM}}^2=c^2$이므로

$$2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)=2(a^2+b^2+c^2)\ \cdots\cdots\ ㉡$$

㉠과 ㉡에서

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{AC}}^2=2(\overline{\mathrm{AM}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2)$$



논제 1-1

$|f(x)-f(w)|\leq3|x-w|^{\frac{3}{2}}=3|x-w|\sqrt{|x-w|}$이므로 양변을 $|x-w|$로 나누면

$\left|\frac{f(x)-f(w)}{x-w}\right|\leq3\sqrt{|x-w|}$가 성립한다. 여기서 $\omega=x+h$로 두고 극한을 취하면

$\lim_{h\to0}\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right|\leq\lim_{h\to0}3\sqrt{|h|}$가 성립하고

$-3\lim_{h\to0}\sqrt{|h|}\leq\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\leq3\lim_{h\to0}\sqrt{|h|}$이므로 임의의 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$이다.

논제 1-2

$0 \le \left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| \le \left|\dfrac{x^2-0}{x-0}\right| = |x|$ 와 $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ 에서 $|f'(0)| = \left|\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right| = 0$

이므로 $f'(0)=0$이다. 따라서 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다. 또한 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하므로 연속이다.

논제 1-3

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h\to -0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to -0}\dfrac{0-0}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h\to +0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to +0}\dfrac{2^{-(1/h)}+h^2\cosh-0}{h} = \lim\limits_{h\to +0}\dfrac{1}{2^{(1/h)}h} = 0 \end{cases}$$

이므로 $x=0$ 에서 미분가능하다.

〈참고〉 $\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{1}{2^{(1/h)}h} = 0$

$\dfrac{1}{h} = x$로 두면 $\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{1}{2^{(1/h)}h} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2^x}$ 이므로 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2^x} = 0$ 을 증명하자.

$g(t) = 2^t - 1 - (\ln 2)t - \dfrac{(\ln 2)^2}{2}t^2$ 라 하자. $t \ge 0$ 일 때, $g'(t) = \ln 2\{2^t - 1 - (\ln 2)t\}$ 이다.

$h(t) = 2^t - 1 - (\ln 2)t$ 라 두면 $t \ge 0$ 일 때, $h'(t) = (\ln 2)(2^t - 1) \ge 0$ 이므로 h는 증가함수이고 $h(0) = 0$ 이므로 $h(t) \ge 0$ 이다.

따라서 $g'(t) \ge 0$ 이므로 g는 증가함수이고 $g(0) = 1$ 이므로 $g(t) \ge 0$ 이다. 따라서 $t \ge 0$ 인 실수 t에 대해 $2^t > 1 + (\ln 2)t + \dfrac{(\ln 2)^2}{2}t^2$ 이다. 역수를 취하여 정리하면

$0 \le \dfrac{t}{2^t} \le \dfrac{t}{1 + (\ln 2)t + \dfrac{(\ln 2)^2}{2}t^2}$ 이므로 조임 정리에 의해 $\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{t}{2^t} = 0$ 이다.

논제 1-4

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 13x - 7 - \sin x$라 두자. 함수 $f(x)$는 모든 실수에서 연속이고 미분가능하다. $f(0) = -7 < 0$, $f(1) = 1 - \sin 1 > 0\left(\because 0 < \sin 1 < \sin\dfrac{\pi}{3}\right)$이고 $f(0)f(1) < 0$이므로 중간값 정리에 의해서 $f(x) = 0$을 만족하는 x가 구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

한편, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 13 - \cos x = 3(x-2)^2 + 1 - \cos x > 0$으로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x) > 0$이므로 $f(x)$는 증가함수이다.

$f(x)$가 증가함수이므로 $f(x) = 0$을 만족하는 x가 $(0, 1)$에서 유일하게 존재한다.

그러므로 $x^3 - 6x^2 + 13x - 7 = \sin x$은 단 하나의 실근을 갖으며 그 실근은 0과 1사이에 있다.

논제 1-5

$f(x)=\sqrt{x}$ 에 대하여 $f(x)$는 닫힌구간 $[101, 119]$에서 연속이고 열린구간 $(101, 119)$에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의해 $\dfrac{\sqrt{119}-\sqrt{101}}{119-101}=f'(c)$인 실수 c가 열린구간 $(101, 119)$에 적어도 하나 존재한다.

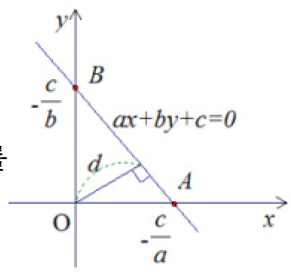
$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 이므로 $f(x)$는 $x>0$에서 감소함수이고 $c\in(101, 119)$이므로 $f'(121)<f'(c)<f'(100)$이다.

$f'(100)=\dfrac{1}{2\sqrt{100}}=\dfrac{1}{20}$, $f'(121)=\dfrac{1}{2\sqrt{121}}=\dfrac{1}{22}$ 이므로 $\dfrac{1}{22}<\dfrac{\sqrt{119}-\sqrt{101}}{119-101}<\dfrac{1}{20}$에서 $\dfrac{9}{11}<\sqrt{119}-\sqrt{101}<\dfrac{9}{10}$ 이다.

논제 2-1

(1) 원점에서 직선까지 거리

$ax+by+c=0$의 x절편은 $-\dfrac{c}{a}$, y절편은 $-\dfrac{c}{b}$이므로 원점과 x절편, y절편으로 이루어진 삼각형의 넓이는 오른쪽과 같다.



△OAB=S 라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\left|-\dfrac{c}{a}\right|\left|-\dfrac{c}{b}\right|=\dfrac{c^2}{2|ab|}$ ⋯⋯ ①이고 원점 O에서 직선까지의 거리를 d라고 하면

$S=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,d=\dfrac{1}{2}\sqrt{\left(-\dfrac{c}{a}\right)^2+\left(-\dfrac{c}{b}\right)^2}\,d=\dfrac{1}{2}\dfrac{|c|\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}d$ ⋯⋯ ②이다.

그런데 ①=②이므로 $S=\dfrac{1}{2}\dfrac{|c|\sqrt{a^2+b^2}}{|ab|}d=\dfrac{1}{2}\dfrac{c^2}{|ab|}$에서 $d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

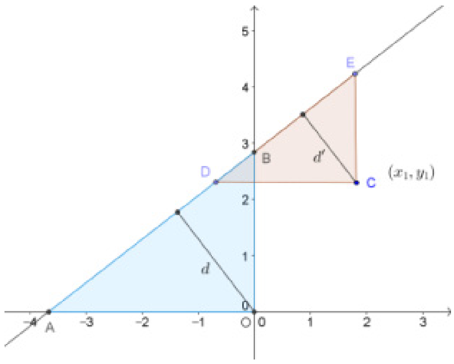
(2) 점 (x_1, y_1)에서 직선까지의 거리

점 (x_1, y_1)을 원점으로 옮기면 직선 $ax+by+c=0$는 $a(x+x_1)+b(y+y_1)+c=0$으로 변하므로 직선의 식은 $ax+by+ax_1+by_1+c=0$이 된다. 따라서 점 (x_1, y_1)에서 직선 $ax+by+c=0$까지의 거리 d는 원점과 직선 $ax+by+ax_1+by_1+c=0$사이의 거리와 같다.

이제 위의 식을 적용하면 $d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$가 된다.

((2)의 다른 풀이)

점 (x_1, y_1)에서 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리를 d'이라 하자.



$ax+by+c=0$위의 점 $\mathrm{D}\left(\dfrac{-by_1-c}{a}, y_1\right)$, $\mathrm{E}\left(x_1, \dfrac{-ax_1-c}{b}\right)$에 대하여 삼각형 OAB와 삼각형 CDE는 닮음이고, $\overline{\mathrm{OA}}:\overline{\mathrm{CD}}=d:d'$이다. 즉, $d:d'=\left|\dfrac{c}{a}\right|:\left|x_1-\dfrac{-by_1-c}{a}\right|$

(1)에서 $d=\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이므로 $d'=\left|\dfrac{a}{c}\right|\cdot\dfrac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{|a|}=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

이다. 따라서 점 (x_1, y_1)에서 직선 $ax+by+c=0$사이의 거리는 $d'=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$이다.

논제 2-2

A의 위치를 원점이라 하면 B의 상대적 위치는 시간 t에 대하여 $(-30+30t, 40t)$이다. $x=-30+30t$, $y=40t$이므로 $4x-3y+120=0$이다. 즉, A를 원점이라 하면 B의 위치 (x, y)는 $4x-3y+120=0$을 만족한다. 그러므로 A와 B사이의 거리의 최솟값은 $(0, 0)$과 $4x-3y+120=0$사이의 거리인 $\dfrac{|120|}{\sqrt{3^2+4^2}}=24$이다.

논제 2-3

제시문 [가]에 의해 평면에 좌표를 도입하여 주어진 삼각형의 각 꼭짓점의 좌표를 표현해보면 변 BC를 $n:1$로 내분하는 점이 D이므로 적당한 실수 k에 대하여 $\mathrm{A}(a, b)$, $\mathrm{B}(-nk, 0)$, $\mathrm{C}(k, 0)$, $\mathrm{D}(0, 0)$ 라 하자.

$$\overline{\mathrm{AB}}^2+n\overline{\mathrm{AC}}^2=\{(a+nk)^2+(b-0)^2\}+\{(a-k)^2+(b-0)^2\}$$

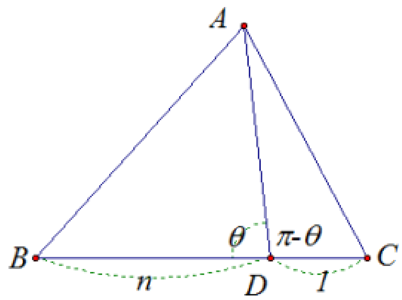
한편, $(n+1)(\overline{\mathrm{AD}}^2+n\overline{\mathrm{CD}}^2)=(n+1)\{(a^2+b^2)+nk^2\}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =(n+1)a^2+(n+1)b^2+n^2k^2+nk^2$

따라서 $\overline{\mathrm{AB}}^2+n\overline{\mathrm{AC}}^2=(n+1)(\overline{\mathrm{AD}}^2+n\overline{\mathrm{CD}}^2)$이 성립한다.

다 른 풀 이

$\overline{\mathrm{AB}}=c$, $\overline{\mathrm{AC}}=b$, $\overline{\mathrm{BC}}=a$, $\overline{\mathrm{AD}}=p$라고 하자.

러면 $\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{n}{n+1}a$, $\overline{\mathrm{DC}}=\dfrac{1}{n+1}a$가 된다.



이제 △ABD 에서 코사인 제2법칙을 적용하면

$$\cos\theta=\frac{p^2+\left(\frac{n}{n+1}a\right)^2-c^2}{2\left(\frac{n}{n+1}a\right)p}$$ …… ①가 성립한다.

또 △ADC 에서 코사인 제2법칙을 적용하면

$$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta=\frac{p^2+\left(\frac{n}{n+1}a\right)^2-b^2}{2\left(\frac{1}{n+1}a\right)p},\ \text{즉, }\cos\theta=-\frac{p^2+\left(\frac{1}{n+1}a\right)^2-b^2}{2\left(\frac{1}{n+1}a\right)p}\ \cdots\cdots ②$$

그런데 ①=②가 성립하므로

$$-p^2-\left(\frac{n}{n+1}a\right)^2+b^2=\frac{p^2+\left(\frac{n}{n+1}a\right)^2-c^2}{n}$$ 이 성립한다. 따라서

$$-np^2-n\left(\frac{1}{n+1}a\right)^2+nb^2=p^2+\left(\frac{n}{n+1}a\right)^2-c^2$$ 이다. 식을 정리하면

$$c^2+nb^2=(n+1)p^2+n^2\left(\frac{1}{n+1}a\right)^2+n\left(\frac{1}{n+1}a\right)^2=(n+1)\left\{p^2+n\left(\frac{1}{n+1}a\right)^2\right\}$$ 이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2+n\overline{\mathrm{AC}}^2=(n+1)\left(\overline{\mathrm{AD}}^2+n\overline{\mathrm{CD}}^2\right)$이다.

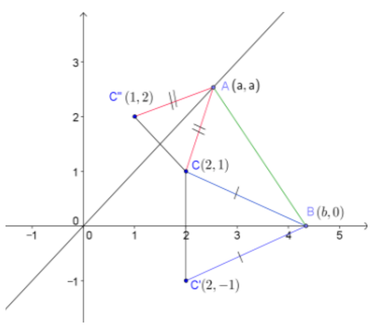
논제 2-4

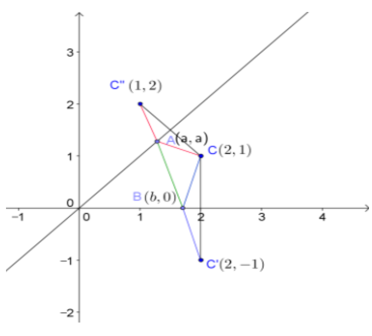
세 점 $\mathrm{A}(a,\ a)$, $\mathrm{B}(b,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ 1)$에 대하여 점 C를 x축에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{C}'(2,\ -1)$, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 점은 $\mathrm{C}''(1,\ 2)$이다.

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AC}''}$이고, $\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{BC}'}$이므로 삼각형 ABC의 둘레의 길이 $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}$는

$\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}=\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}'}+\overline{\mathrm{C}''\mathrm{A}}\geq\overline{\mathrm{C}'\mathrm{C}''}=\sqrt{10}$

이 성립한다. 따라서 삼각형 둘레의 최솟값은 $\sqrt{10}$이다.





10 서강대학교 수시(자연2)

제시문 1 **제시문을 읽고 물음에 답하여라.**[19]

[가] 어떤 규칙에 따라 차례로 나열된 수의 열을 수열이라고 한다. 무한수열은 자연수의 집합을 정의역으로 갖는 함수이다. 다시 말하면, N을 자연수 전체의 집합, R을 실수 전체의 집합이라 할 때, 함수 $f: \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{R}$은 수열이다. 이때, $a_n = f(n)$이라 하면 수열은 $\{a_n\}$으로 표현된다. 예를 들어 두 실수 a, b에 대하여 $\max(a, b)$를 a와 b중 작지 않은 실수라 할 때, d_1을 $-1 < d_1 < 0$인 실수라 하고, 모든 자연수 n에 대하여 d_{n+1}을

$$\max\left\{d_n, -\frac{1}{n+1}\right\} < d_{n+1} < 0$$

인 실수라 하면 $d_n < d_{n+1}$이므로 수열 $\{d_n\}$은 증가하는 수열이 된다.
수열의 몇 가지 성질을 살펴보자. 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < b_n < c_n$을 만족하는 수열 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$이면 n이 한없이 커질 때 a_n과 c_n은 실수 L에 가까워지며, a_n과 c_n사이의 수인 b_n도 L에 가까워진다. 그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$이다. 위의 수열 $\{d_n\}$에 대하여 $-\frac{1}{n} < d_n < 0$이므로 $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = 0$이다. 수열 $\{e_n\}$이 $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \beta$이고 모든 자연수 n에 대하여 $e_n < e_{n+1}$이면, $e_n < \beta$이다. $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \beta$이므로 실수 α가 $\alpha < \beta$이면 $e_l > \alpha$가 되는 자연수 l이 존재한다.

[나] x, y를 $x < y$인 실수라 하자. $0 \le x < y$인 경우를 생각하자. 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$이므로 n이 한없이 커질 때 $\frac{1}{n}$은 0에 가까워진다. 그런데 $y - x > 0$이므로 $\frac{1}{N} < y - x$인 자연수 N이 존재한다. 이러한 N을 고정시켰을 때, $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{m}{N} = \infty$이므로 m이 한없이 커짐에 따라 $\frac{m}{N}$은 한없이 커지고, 따라서 $y < \frac{M}{N}$이 되는 자연수 M이 존재한다. y는 집합

---

19) 서강대학교 입학처

$$\left(0, \frac{M}{N}\right] = \left(\frac{0}{N}, \frac{1}{N}\right] \cup \left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right] \cup \cdots \cup \left(\frac{M-1}{N}, \frac{M}{N}\right]$$

에 속하므로, $\frac{K-1}{N} < y \leq \frac{K}{N}$ 를 만족하는 M보다 같거나 작은 자연수 K가 존재한다. $\frac{K-1}{N} < y \leq \frac{K}{N}$ 이고 $\frac{1}{N} < y-x$ 이므로 ①$0 \leq x < y$ 인 두 실수 x와 y에 대하여 $x < r < y$ 인 유리수 r이 존재한다. $x < y \leq 0$ 인 경우를 생각하자. $0 \leq -y < -x$ 이므로 $-y < r < -x$ 인 유리수가 존재하며, $x < -r < y$ 이므로 $x < y \leq 0$ 을 만족하는 두 실수 x와 y 사이에는 유리수가 존재한다. $x < 0 < y$ 인 경우 0은 유리수이므로 x와 y 사이에는 유리수가 존재한다. 따라서 서로 다른 두 실수 사이에는 유리수가 항상 존재한다.

논제 1-1

①에서 유리수 $\frac{K-1}{N}$ 은 두 실수 x와 y 사이의 수임을 보여라.

논제 1-2

두 실수 사이에는 0이 아닌 유리수가 존재함을 보여라.

논제 1-3

제시문 [가]를 참조하여 실수 y와 모든 자연수 n에 대하여 $r_n < r_{n+1}$ 과 $y - \frac{1}{n} < r_n$ 을 만족하며, $\lim_{n\to\infty} r_n = y$ 를 만족하는 유리수로 이루어진 수열 $\{r_n\}$ 이 존재함을 보여라.

논제 1-4

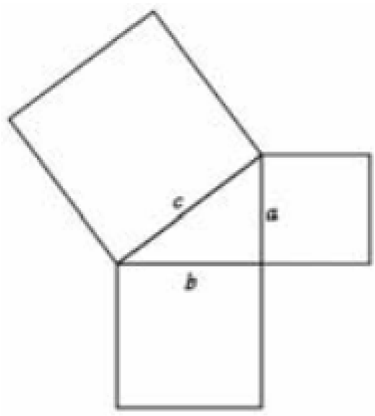
$x < y$ 인 두 실수 x, y 사이에는 무한히 많은 유리수가 존재함을 보여라.

논제 1-5

두 실수 사이에는 유리수가 있음을 이용하여, $x < y$ 인 두 실수 x, y 사이에는 무리수가 존재함을 보여라.

제시문 2 제시문을 읽고 물음에 답하여라

[가] 직각삼각형의 빗변을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 나머지 두 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 두 개의 넓이의 합과 같다는 정리인 피타고라스 정리는 고대 그리스의 철학자이자 수학자였던 피타고라스가 처음 발견, 증명한 것으로 일반적으로 알려져 있다. 직각삼각형의 빗변의 길이를 c, 다른 두 변의 길이를 각각 a, b 라고 하면 $a^2+b^2=c^2$ 이라는 식으로 쓸 수 있다. 피타고라스 정리의 증명은 수백 가지의 다양한 증명 방법이 알려져 있다.



[나] 피타고라스 수는 피타고라스 정리 $a^2+b^2=c^2$ 를 만족하는 세 자연수 쌍 (a, b, c) 를 말한다. 만일 (a, b, c) 가 피타고라스 수라면 모든 자연수 k 에 대하여 (ka, kb, kc) 역시 피타고라스 수가 된다. 어떤 피타고라스 수 (a, b, c) 가 a, b, c 중 어느 두 수도 서로 소일 때 이를 원시 피타고라스 수라고 한다. c 가 100 보다 작은 원시 피타고라스 수는 아래와 같이 모두 16 개가 있다.

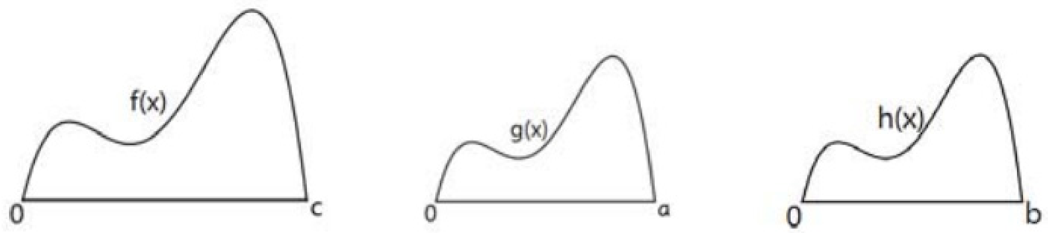
$(3,4,5)$, $(5,12,13)$, $(7,24,25)$, $(8,15,17)$, $(9,40,41)$, $(11,60,61)$, $(12,35,37)$, $(13,84,85)$, $(16,63,65)$, $(20,21,29)$, $(28,45,53)$, $(33,56,65)$, $(36,77,85)$, $(39,80,89)$, $(48,55,73)$, $(65,72,97)$

[다] 원점을 중심으로 닮음비가 k 인 닮음변환은 아래와 같은 일차변환이다.

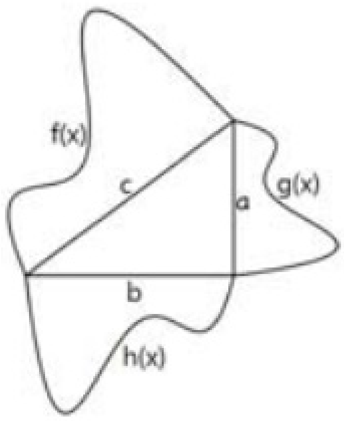
$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

예를 들어, 반지름이 1 인 원 $x^2+y^2=1$ 을 원점을 중심으로 닮음비가 2 인 닮음변환에 의하여 얻어지는 도형은 반지름이 2 인 원 $x^2+y^2=4$ 이다. (a, b, c) 를 피타고라스 수라 하자. $y=f(x)$ 를 구간 $[0, c]$ 에서 정의되고 양의 실수를 함숫값으로 갖는 연속함수라

하자. $y=f(x)$를 원점을 중심으로 닮음비가 $\dfrac{a}{c}$인 닮음변환에 의하여 얻어진 함수 $y=g(x)$는 구간 $[0,a]$에서 정의되고 양의 실수를 함숫값으로 갖는 연속함수가 된다. 마찬가지 방법으로 $y=f(x)$를 원점을 중심으로 닮음비가 $\dfrac{b}{c}$인 닮음변환에 의하여 얻어진 함수 $y=h(x)$는 구간 $[0,b]$에서 정의되고 양의 실수를 함숫값으로 갖는 연속함수가 된다.



연속함수 $f(x), g(x), h(x)$의 그래프를 아래와 같이 a,b,c를 세 변으로 갖는 직각삼각형에 그려보자.



논제 2-1

원시 피타고라스 수 (a,b,c)들 중에서 a,b,c가 등차수열을 이루는 것은 하나밖에 없음을 보여라.

논제 2-2

원시 피타고라스 수 (a,b,c)들 중에서 a,b,c가 등비수열을 이루는 것은 존재하지 않음을 보여라.

논제 2-3

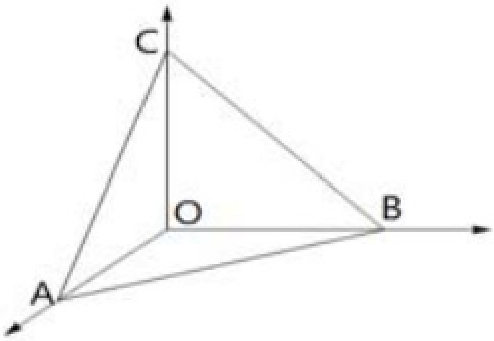
(a,b,c)를 피타고라스 수라 하자. 위의 제시문 [다]에서 주어진 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$에 대하여 다음과 같은 피타고라스 정리의 일반화 명제가 성립함을 보여라.

$$\int_0^c f(x)dx = \int_0^a g(x)dx + \int_0^b h(x)dx$$

논제 2-4

T를 3차원 공간에서 네 점 $\mathrm{O}(0,0,0)$, $\mathrm{A}(\alpha,0,0)$, $\mathrm{B}(0,\beta,0)$, $\mathrm{C}(0,0,\gamma)$를 꼭짓점으로 하는 사면체라고 하자. 이때 다음과 같은 피타고라스 정리의 일반화 명제가 성립함을 보여라.

『세 삼각형 OAB, OBC, OAC 의 면적의 제곱의 합은 삼각형 ABC 의 면적의 제곱과 같다.』



논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 2문항	시간	120분
연관 개념	실수의 성질, 수열의 극한, 피타고라스정리, 닮음변환, 정적분		

제 시 문 분 석

제시문 1

[가] 두 실수 사이에 증가하는 수열을 만드는 방법과 극한값을 구하는 방법을 소개하고 있다. 대학 수학에 나오는 극한값의 정의를 이용하는 내용으로 일반 고등학교 학생들이 이해하기는 매우 어려울 것이라고 생각한다.

[나] 극한값을 이용하여 두 실수 사이에는 항상 유리수가 존재함을 설명하고 있다.

제시문 2

[가], [나] 피타고라스 수에 대해 설명하고 있다.

[다] 닮음변환에 대해 설명하고 있다.

논 제 분 석

논제 1-1

$0 \le x < y$ 인 두 실수 x 와 y 사이에 존재하는 유리수가 $\dfrac{K-1}{N}$ 임을 증명하는 문제이다. 제시문 [나]에 나온 부등식 '$\dfrac{K-1}{N} < y \le \dfrac{K}{N}$ 이고 $\dfrac{1}{N} < y-x$' 를 이용하면 쉽게 풀 수 있다.

논제 1-2

임의의 두 실수 사이에 0이 아닌 유리수가 존재한다는 것을 증명하는 문제이다. 제시문에서 $0 \le x < y$ 의 경우와 $x < y \le 0$ 의 경우를 보였으므로 $x < 0 < y$ 일 경우만 증명하면 된다. 제시문에 나와 있는 $0 \le x < y$ 의 경우를 활용하면 된다.

논제 1-3

항상 증가하면서 극한값이 실수 y가 되는 수열을 만들어보라는 문제이다. 제시문[가]에 있는 $-1 < d_1 < 0$의 경우를 $y-1 < d_1 < y$로 바꾸어 수열을 만들면 된다.

논제 1-4

임의의 두 실수 사이에 무수히 많은 유리수가 존재함을 증명하는 문제로 증명은 [논제 1-3]과 같은 방법으로 한다.

논제 1-5

두 실수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있음을 증명하라는 문제이다. 두 실수 사이에 무수히 많은 유리수가 존재한다는 사실을 이용하여 적당한 무리수를 잡아야 한다. 학생들이 풀기에는 매우 어려운 문제이다.

논제 2-1

세 수를 $b-d, b, b+d$ 라 두고 등차중항을 이용한다.

논제 2-2

세 수를 a, ar, ar^2 라 두고 등비중항을 이용하여 정수해가 없음을 보인다.

논제 2-3

넓이를 이용한 피타고라스 정리의 일반화에 대해 묻고 있다. 닮음변환에 의해 확대된 일반적인 도형의 넓이에서도 성립함을 적분을 이용해 증명해야 한다. 닮음비가 k배일 때 넓이가 k^2배가 된다는 사실을 이용하면 쉽게 증명할 수 있다.

논제 2-4

피타고라스 정리를 공간으로 확대하여 사용할 수 있는가를 묻는 문제이다. 점과 평면 사이의 거리와 삼각뿔의 부피를 이용하면 증명할 수 있다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 치환적분

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

$g(x)=t$로 놓으면 $g'(x)dx = dt$이다. 따라서 $\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$ 이다.

2. 점과 평면 사이의 거리

$P(x_1,\ y_1,\ z_1)$과 평면 $ax+by+cz+d=0$ 사이의 거리는

$$\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

풀 어 보 기

문제 1 모든 자연수 n에 대하여 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값은? (2012년 전국연합)

(가) $3n^2+1<(2+4+6+\cdots+2n)a_n$
(나) $b_n<6-2a_n$
(다) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴한다.

① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

문제 2 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여을

$$a_n<a_{n+1}, \quad \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2=2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$$

만족시킬 때, $\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오. (2013학년도 평가원)

문제 3 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$가 모든 실수 t에 대하여 $\int_0^2 xf(tx)dx=4t^2$을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? (2011학년도 평가원)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

문제 4 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 있다. 모든 실수 x에 대하여 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이고, $f(a)=0$, $\int_{2a}^{4a}\frac{f(x)}{x}dx=k$ $(a>0,\ 0<k<1)$ 일 때, $\int_{a}^{2a}\frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx$의 값을 k로 나타낸 것은? (2011학년도 수능)

① $\frac{k^2}{4}$ ② $\frac{k^2}{2}$ ③ k^2 ④ k ⑤ $2k$

문제 5 좌표공간에서 직선 $\frac{x}{2}=y=z+3$과 평면 $\alpha: x+2y+2z=6$의 교점을 A라 하자. 중심이 점 $(1,\ -1,\ 5)$이고 점 A를 지나는 구가 평면 α와 만나서 생기는 도형의 넓이는 $k\pi$이다. k의 값을 구하시오. (2011학년도 수능)

읽 기 자 료

실수란 무엇인가? 20)

자연수는 개수를 세는 것에서부터, 유리수는 비율로부터 그 개념을 이해할 수 있다. 그런데 실수는 어떻게 이해해야 할까? 실수는 어떻게 발견된 것일까?

자연수에서 유리수까지

인간이 자연스럽게 인식할 수 있는 가장 낮은 수준의 수는 자연수라 할 수 있다. 누구나 사물의 개수를 하나, 둘, 셋 세면서 자연수의 개념을 터득하게 된다. 어떤 자연수를 가져와도 그 다음 자연수를 말할 수 있고, 이런 과정을 통해 수에는 끝이 없다는 사실도 깨닫게 된다. 어떤 의미에서는 수가 무한히 많다는 사실은 인간이 최초로 겪게 되는 놀라운 수학적 경험이라 할 수 있다.


라파엘로의 그림 [아테네 학당]에 등장한 피타고라스의 모습.

수의 범위를 자연수에서 정수로 넓히는 것은 0과 음의 정수만 고려하면 되므로 그리 어렵지 않다. 유일한 난점이라면 두 정수의 곱셈, 특히 음의 정수끼리 곱하는 것을 어떻게 생각하느냐라 할 수 있다. 양의 정수는 자연수와 같으므로 '개수' 라는 관점에서 곱을 생각하는 것이 자연스럽지만, '개수' 로는 설명하기 힘든 음의 정수에 대해서는 곱을 생각하기가 자연스럽지 않기 때문이다. 이와 관해서는 오늘의 과학 [음수곱하기음수] 편을 참조하라.

일단 정수의 개념이 확립되고 나면, 유리수는 비교적 자연스럽게 정의된다. 유리수는 두 정수의 비로 생각할 수 있기 때문이다. 그 다음 단계라 할 수 있는 실수는 어떻게 정의해야 될까? 실수의 모델이 되는 것은 길이를 들 수 있다. 그런데 이 길이를 나타내는 수가 유리수와 달라야 할 이유가 있을까? 실제로 고대 그리스의 피타고라스는 길이를 나타내는 모든 수는 유리수라고 생각하였다.

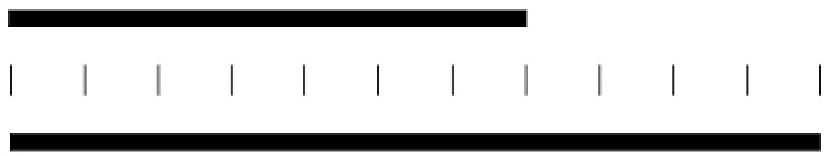
지금이야 유리수가 아닌 실수가 있다는 사실을 배워서 알고 있으므로, 누구나 "유리수가 아닌 실수가 존재한다" 라고 자신있게 말할 수 있지만, 피타고라스 시대에 살고 있다고 상상해 보면, 유리수가 아닌 실수, 즉 무리수의 존재를 생각해낸다는 것이 결코 쉽지 않음을 알 수 있다. 사실 고대 그리스를 제외한 다른 문명권의 수학은 무리수와 유리수

20) http://navercast.naver.com/contents.nhn?rid=22&contents_id=3332&leafId=22

를 구별할 생각을 전혀 하지 않았다는 사실만 보아도 이런 분류가 결코 자명하지 않음을 알 수 있다.

통약가능성

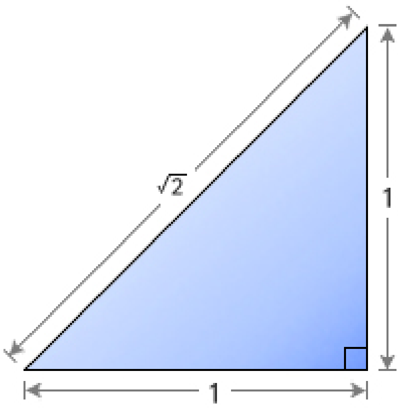
피타고라스가 무리수를 발견한 것은 유리수보다 더 큰 범위의 수를 만들려는 적극적인 시도에서 나온 것도 아니고, 기존에 알고 있던 수를 분류하려는 소극적인 시도에서 나온 것도 아니었다. 피타고라스가 생각하였던 것은 어찌 보면 지극히 당연해 보이는 착상이었다. 길이가 다른 두 개의 막대가 주어졌다고 생각하자. 피타고라스는 두 막대를 적당히 등분하면, 두 막대 모두 어떤 단위 길이의 정수배가 되게 할 수 있다고 생각했다. 우리가 자를 가지고 길이를 재는 행위를 생각해 보면, 이것은 꽤 당연한 생각이라 할 수 있다. 이처럼 두 막대의 길이가 모두 어떤 길이의 정수배가 될 때, 두 막대의 길이는 통약가능(commensurable)이라고 한다. 피타고라스는 막대의 길이가 모두 어떤 길이 단위의 유리수 배가 된다고 하는 대신에, 두 막대 사이의 관계에만 집중하였다. 직접 유리수를 다루는 것은 다소 모호하지만, 이처럼 통약가능성을 가지고 수를 다루는 것은 매우 간명하면서도 구체적이다.



위의 두 막대의 길이의 비는 7:11로 통약가능하다.

만약 두 막대의 길이 a와 b가 통약가능하다면, 적당한 길이 u가 있어서 a와 b 모두 u의 배수가 되게 할 수 있다. 따라서 적당한 두 정수 m과 n에 대해 $a=mu$이고 $b=nu$라면, $a:b=m:n$이 된다. 즉, 두 수 a와 b가 어떤 종류의 수인지에 상관없이 두 수의 비 $a:b$를 항상 정수의 비 $m:n$으로 바꾸어 나타낼 수 있다. 식을 조금 변형하면, $a=\frac{m}{n}\times b$가 되어 한 쪽 길이가 다른 쪽 길이의 $\frac{m}{n}$배가 되게 할 수 있다. 따라서 피타고라스의 생각대로 모든 수가 서로 통약가능하다면 길이를 나타내는 어떤 두 수를 골라도 한 수가 다른 수의 유리수 배가 되어야 한다. 모든 수가 유리수라는 생각은 무작정 유리수를 정의하자는 데서 나온 것이 아니라, 이런 추론 과정을 거쳐 얻은 것이었다.

물론 피타고라스의 이런 순진한(?) 생각은 전혀 옳지 않다는 것이 자기 자신(또는 제자)에 의해 밝혀졌다. 대표적인 무리수의 예인 $\sqrt{2}$의 발견이 바로 그것이다. $\sqrt{2}$는 정수의 비로 표현될 수 없으므로 유리수가 아님을 알 수 있지만, 이 사실을 통약가능성 관점에서 보면 정사각형의 한 변의 길이와 대각선의 길이는 통약불가능하게 된다.



정사각형의 한 변의 길이와 대각선의 길이는 정수의 비로 표현할 수 없다.

무리수가 발견되면서 수학자들에게는 실수를 다루는 것이 쉽지 않은 일이 되었다. 유리수는 자연수에서 출발하여 비율로 이해할 수 있으므로 유한한 단계의 구성적인 방식으로 설명이 되지만, 무리수는 근본적으로 유한한 단계로는 설명할 수 없는 수이기 때문이다. 따라서 수학자들은 직접 실수와 관련된 개념은 물론, 기하학적인 내용까지도 증명을 하기가 대단히 어려워졌다.

이를 해결하기 위해 주어진 실수에 대한 명제를 직접 증명하는 대신 그 실수보다 작은 수와 큰 수에 대한 부등식을 이용하여 주어진 실수에 대한 명제를 증명하는 기법이 개발되었다. 착출법(窄出法, method of exhaustion)으로 불리는 이 기법은 원시적인 형태의 극한 개념이라 할 수 있으며, 이는 17 세기에 이르러 적분 이론으로 발전하게 된다.

무한소수

아마도 무리수를 직관적으로 이해하는 가장 쉬운 방법은 무한소수를 이용하는 것이 아닐까 싶다. 유리수를 소수로 나타내어 보면 유한소수가 되거나 순환소수가 되므로, 거꾸로 순환하지 않는 무한소수는 무엇일지 생각하는 것은 지극히 자연스럽다. 왜 고대 수학자들은 이런 방식으로 무리수를 발견하지 못했을까? 그 이유는 소수 표기 자체가 늦게 발견되었기 때문이다. 소수 계산에 익숙한 현대인에게야 유리수를 소수로 고치는 것이 그저 단순한 나눗셈을 반복하는 것뿐이지만 소수 표기가 없던 시절에는 유리수를 소수로 고친다는 착상이 쉽지 않았다. 사실 고대 문명권에서 소수 표기가 아예 없던 것은 아니었다. 특히 15세기까지 세계 최고의 수학 실력을 갖추고 있던 중국의 경우, 원주율을 소수 표기와 비슷한 방식으로 3.1415926까지 나타내기도 하였다.

그렇다면 왜 중국 수학자들은 무리수를 생각하지 못했을까? 아마도 역설적으로 중국의 수학이 너무 발전하였던 것이 원인이 아닐까 싶다. 어떤 수든 얼마든지 원하는 정밀도로 계산해낼 수 있는 상황에서 그 수가 유리수인지 무리수인지 따지는 것은 중요하지 않게 생각되었다. 예를 들어 $\sqrt{2}$ 가 얼마인지 알고 싶다면 소수점 아래 부분을 얼마든지 계산해서 보여줄 수 있기 때문에, 이 계산이 유한한 단계에 끝나든 끝나지 않든 별 상관이 없었다. 이런 계산이 엄청나게 복잡하거나 오차가 전혀 없는 결과가 필요하다면 유한한 단계에 계산이 끝나는지가 중요하지만 고대 중국의 수학자들은 계산을 아주 효율적으로 했을 뿐 아니라 오차는 원하는 만큼 줄이면 충분하다고 생각했다.

실수를 구성하는 방법

데데킨트 (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831~1916) 데데킨트 절단(Dedekind cut)이라는 개념으로 해석학의 기반을 닦은 수학자

17세기에 창안되어 급격히 발전한 수학의 분야로 미적분학을 들 수 있다. 이 분야는 극한 개념을 기초로 이루어진 것으로, 극한 개념을 제대로 다루려면 실수의 성질을 완벽하게 이해할 필요가 있다. 물론 초창기의 미적분학은 다분히 직관적인 방식으로 다루어졌다. 실수라는 것도 이미 인간이 어느 정도 알고 있는 것으로 치부되었다. 그러나 미적분학의 수준이 점점 높아지면서, 유리수와는 다른 실수의 성질 때문에 직관과는 다른 결과들이 발견되기 시작하였다. 이런 상황에서 미적분학을 엄밀히 다루려면 실수가 무엇인지 제대로 설명할 수 있어야 하였다. 여기에 성공한 두 위대한 인물이 독일의 수학자 데데킨트(Richard Dedekind)와 칸토어(Georg Cantor)였다.

그들은 유리수를 이용하여 실수를 구성하는 독창적인 방법을 제시하였다. 데데킨트는 유리수를 두 집합으로 나누는 '절단(cut, 독일어로 Schnitt)이라는 개념을 이용하였고, 칸토어는 유리수로 이루어진 무한수열을 이용하였는데, 나중에 수학자들은 이 두 방법이 사실상 같은 결과를 나타낸다는 것을 증명할 수 있었다. 여기서 두 수학자의 방식을 엄밀하게 설명하기는 어려우니, 고대 수학자들이 실수를 다룬 방식과 관련지어 설명하겠다.

먼저 데데킨트의 방식은 다루려는 실수보다 작은 유리수와 큰 유리수의 두 집합으로 나누어 집합 자체를 수처럼 다루는 방식이다. 즉, 실수 하나가 유리수 집합을 둘로 절단한다. 이것은 실수의 모델인 수직선에서 착안한 것으로, 수직선 위를 빼곡히 채우고 있는 유리수를 이용하여 유리수로 채우지 못하는 빈틈인 무리수를 설명하려는 것이다.

한편 칸토어의 방식은 무한소수를 이용한 것이다. 무한소수가 실수를 나타내므로, 무한소수를 직접 다룰 수는 없다. 따라서 유한소수를 무한히 늘어놓는 수열을 생각하고, 이 수열 자체를 하나의 수처럼 다루는 방식이다. 데데킨트의 방식처럼 집합을 수처럼 다루거나 칸토어의 방식처럼 수열을 수처럼 다루는 것은 처음에는 무척 어색하게 보이지만, 여기에는 현대 수학의 철학이 잘 반영되어 있다고 할 수 있다.

실수와 유리수가 다른 점

이렇게 만들어진 실수는 유리수와는 다른 특징이 많다. 실수와 유리수 모두 무한히 많지만, 집합론의 관점에서는 무한한 정도가 다르다. 이를 농도라고 한다. 자연수, 정수,

유리수의 농도는 모두 같으나, 실수는 더 큰 농도를 갖는다. 이와 관련해서는 오늘의 과학 [자연수 vs. 실수]편을 참조하라. 또, 유리수로 이루어진 수열이 어떤 값에 무한히 가까워진다고 해서 그 값 자체가 유리수라고는 할 수 없지만, 실수로 이루어진 수열이 어떤 값에 무한히 가까워진다면 그 값은 반드시 실수가 된다. 이것은 실수의 모델인 수직선이 빈틈없이 연결되어 있다는 점을 생각하면 당연해 보이기도 한다. 이와 같은 성질을 완비성(completeness)이라 한다. 이것은 유리수와 실수를 구분하는 가장 큰 특징이기도 하며, 이 때문에 실수를 이해하기 위해서는 극한의 개념이 반드시 필요하다.

엄밀한 사고가 더 큰 아이디어를 창출한다

생각해 보면, 그토록 수학이 발전했던 중국보다 유럽이 왜 미적분학을 먼저 발명할 수 있었는지 의아스럽다. 아마도 여기에는 고대 그리스 수학에 바탕을 둔 유럽의 수학이 계산 자체보다는 수의 성질에 더 관심을 가졌기 때문일 것이다. 어떤 수가 유리수인지 무리수인지를 따지는 것 자체는 별로 중요하지 않아 보이지만, 이로부터 실수란 무엇인지, 실수를 다루기 위해서는 어떻게 접근해야 하는지를 고민하게 되고, 이런 생각이 극한 개념을 거쳐 미적분학까지 이어지게 된다. 사소해 보이더라도 논리적으로 분류하고 엄밀하게 사고하는 것이 더 큰 아이디어를 창출해낸다는 사실이 여기서도 드러난다. 수학을 공부하는 이유 가운데 하나도 바로 이런 것이고.

글 박부성 / 경남대학교 수학교육과 교수

서울대 수학교육과를 졸업하고, 서울대 수학과에서 석사, 박사 학위를 받았다. 고등과학원 연구원을 거쳐 현재 경남대학교 수학교육과 교수로 재직 중이다. 저서로는 [재미있는 영재들의 수학퍼즐 1,2]와 [천재들의 수학노트]가 있다.

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 ①

(가)에서 $\dfrac{3n^2+1}{n(n+1)}<a_n$이고 (나)에서 $a_n<3-\dfrac{1}{2}b_n$이므로 $\dfrac{3n^2+1}{n(n+1)}<a_n<3-\dfrac{b_n}{2}$이다. 한편, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{n(n+1)} \le \lim_{n\to\infty}a_n \le \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{b_n}{2}\right)$이고 (다)에서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로 $3\le\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n\le 3$이다. 따라서 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=3$이다.

문제 2 정답 12

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2=2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$에서

$$(a_{n+1}-a_n)^2=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2-\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2$$

$$=2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right)=\frac{16}{9^n}(n\ge 2)$$

이때, $n=1$이면 $(a_2-a_1)^2=2(1-\dfrac{1}{9})=\dfrac{16}{9}$이므로 $(a_{n+1}-a_n)^2=\dfrac{16}{9^n}$ $(n\ge 1)$

한편, $a_{n+1}>a_n$이므로

$$a_{n+1}-a_n=\frac{4}{3^n}.\ \therefore\ a_{n+1}=a_n+\frac{4}{3^n}$$

이때, $a_1=10$이므로

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3^k}=10+\frac{\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=10+2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}(n\ge 2)$$

따라서, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=12$

문제 3 ④

$tx=a$로 치환하면, x가 $0\to2$일때 a는 $0\to2t$ 이고 $t\,dx=da$이므로

$$\int_0^2 xf(tx)dx = \int_0^{2t} \frac{a}{t^2} f(a)da = 4t^2$$

$\int_0^{2t} af(a)da = 4t^4$, 양변을 t에 대하여 미분하면 $4tf(2t) = 16t^3$, $t=1$을 대입하면

$$4f(2) = 16,\ f(2) = 4$$

문제 4 정답 ④

조건에서 $f(a)=0$이고 $f(2x)=2f(x)f'(x)$이므로 $f(2a)=2f(a)f'(a)=0$ 또한 $f(4a)=2f(2a)f'(2a)=0$이다.

$$\int_a^{2a} \frac{\{f(x)\}^2}{x^2}dx = \int_a^{2a} x^{-2}\{f(x)\}^2 dx$$

$$= [-x^{-1}\{f(x)\}^2]_a^{2a} - \int_a^{2a} -x^{-1} \cdot 2f(x)f'(x)dx \ (\because \text{부분적분법})$$

$$= 0 + \int_a^{2a} x^{-1} \cdot 2f(x)f'(x)dx = \int_a^{2a} \frac{2f(x)f'(x)}{x}dx = \int_a^{2a} \frac{f(2x)}{x}dx$$

여기서 $2x=t$로 치환하면 $2dx = dt \Leftrightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

$\begin{cases} x=a \rightarrow t=2a \\ x=20 \rightarrow t=4a \end{cases}$로 변환되므로

$$\int_a^{2a} \frac{f(2x)}{x}dx = \int_{2a}^{4a} \frac{1}{2} \frac{f(t)}{\frac{1}{2}t}dt = \int_{2a}^{4a} \frac{f(t)}{t}dt = k$$

문제 5 정답 53

$\frac{x}{2} = y = z+3 = t$ 라 하면 $A = (2t,\ t,\ t-3)$ 이고 점 A가 평면 α 위의 점이므로

$$2t+2t+2(t-3)=6\ ,\ 6t=12\ ,\ \therefore\ t=2\ \ \therefore\ A(4,\ 2,\ -1)$$

$$\overline{AC} = \sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2+(-1-5)^2} = \sqrt{54}$$

한편 중심에서 $(1,\ -1,\ 5)$ 에서 평면까지의 거리를 d라 하면

$$d = \frac{|1-2+10-6|}{\sqrt{1+4+4}} = 1$$

따라서 구와 평면이 만나서 생기는 원의 반지름 r는

$$r = \sqrt{\overline{AC}^2 - d^2} = \sqrt{54-1} = \sqrt{53}$$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면 $S = 53\pi\ \ \therefore k = 53$

논제 1-1

$\frac{K-1}{N} < y \le \frac{K}{N}$ 과 $\frac{1}{N} < y-x$ 에서 $x < y-\frac{1}{N} \le \frac{K}{N}-\frac{1}{N} = \frac{K-1}{N}$ 이다. 따라서

$x < \frac{K-1}{N} < y$ 이므로 유리수 $\frac{K-1}{N}$ 은 두 실수 x 와 y 사이의 수이다.

논제 1-2

제시문 [나]에 의해 $x < 0 < y$ 인 경우만 두 실수 x 와 y 사이에 0이 아닌 유리수가 존재함을 보이면 충분하겠다.

제시문 [나]에 의해 $0 < \frac{y}{2} < y$ 인 경우 두 실수 $\frac{y}{2}$ 와 y 사이에 유리수 r 이 존재하므로 $x < 0 < y$ 인 두 실수 x 와 y 사이에 0이 아닌 유리수 r 이 존재한다.

논제 1-3

d_1 을 $y-1 < d_1 < y$ 인 실수라 하고, 모든 자연수 n 에 대하여 d_{n+1} 을

$$\max\left\{d_n, y-\frac{1}{n+1}\right\} < d_{n+1} < y$$

인 실수라 하면 $d_n < d_{n+1}$ 이고 $\lim_{n\to\infty} d_n = y$ 이다. [1-2]에 의해 두 실수 d_n 과 d_{n+1} 사이에 유리수 r_n 이 존재한다. 수열 $\{d_n\}$ 의 정의에 의해 수열 $\{r_n\}$ 은 실수 y 와 모든 자연수 n 에 대하여 $r_n < r_{n+1}$ 과 $y-\frac{1}{n} < r_n$ 을 만족하며, $\lim_{n\to\infty} r_n = y$ 이다.

논제 1-4

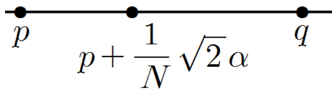
[1-2]에 의해 자명하다고 할 수 있지만 [1-3]에 의해 다음과 같이 생각해볼 수 있다. d_1 을 $x < d_1 < y$ 인 실수라 하고, 모든 자연수 n 에 대하여 d_{n+1} 을

$$\max\left\{d_n, y-\frac{y-x}{n+1}\right\} < d_{n+1} < y$$

인 실수라 하면 $d_n < d_{n+1}$ 이고 $\lim_{n\to\infty} d_n = y$ 이다. [1-2]에 의해 두 실수 d_n 과 d_{n+1} 사이에 유리수 $r_n\ (n=1, 2, \cdots)$ 이 존재하므로 $x < y$ 인 두 실수 x, y 사이에는 무한히 많은 유리수가 존재한다.

논제 1-5

$x < y$인 두 실수 x, y 사이에 서로 다른 두 유리수 p, q가 있어서 $x < p < q < y$라 하자. $q-p=\alpha$라 하면 $\sqrt{2}\alpha > \alpha$인데 제시문[나]에 의해 $\frac{1}{N}\sqrt{2}\alpha < \alpha$를 만족하는 적당한 자연수 N이 존재한다. 그러면 $I = p + \frac{1}{N}\sqrt{2}\alpha$라 하면 I는 무리수이고 그림과 같이 $x < p < I < q < y$를 만족한다. 따라서 $x < y$인 두 실수 x, y 사이에는 무리수가 존재한다.



논제 2-1

$a,\ b,\ c$가 등차수열을 이룬다면 $b-d,\ b,\ b+d$라 할 수 있다. 피타고라스정리에 의해 $(b+d)^2 = b^2 + (b-d)^2$에서 $4d = b$이다. 세 수 $a,\ b,\ c$는 $3d,\ 4d,\ 5d$가 되고 원시 피타고라스 수 이므로 $d=1$이다. 따라서 $(3,\ 4,\ 5)$ 하나밖에 없다.

논제 2-2

$a,\ b,\ c$가 등비수열을 이룬다면 $a,\ ar,\ ar^2$라 할 수 있다. 피타고라스정리에 의해 $(ar^2)^2 = a^2 + (ar)^2$에서 $r^4 - r^2 - 1 = 0$이다. 이것은 정수해를 갖지 않으므로 등비수열을 이루는 것은 존재하지 않는다.

다른풀이

Eisenstein 정리에 의해 $r^4 - r^2 - 1 = 0$을 만족하는 유리수 r은 존재하지 않는다. 따라서 원시 피타고라스 수 (a, b, c)들 중에서 a, b, c가 등비수열을 이루는 것은 존재하지 않는다.

Eisenstein 정리

n차 다항식 $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$의 유리수 근 $\frac{q}{p}$가 존재하면 $q|a_0,\ p|a_n$이다.

다른풀이

$a,\ b,\ c$가 이 순서로 등비수열을 이룬다고 하면, $b^2 = ac$이다. 피타고라스 정리에 의해 $a^2 + b^2 = c^2$이므로 $a^2 + ac - c^2 = 0$이 되고, 따라서,

$$a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}c$$

이다. 이때, a와 c는 동시에 자연수가 될 수 없으므로 원시 피타고라스 수 (a,b,c)들 중에서 a,b,c가 등비수열을 이루는 것은 존재하지 않는다.

논제 2-3

$\int_0^c f(x)dx=S$ 라 하면 닮음변환에 의해

$$\int_0^a g(x)\,dx=\frac{a^2}{c^2}S,\ \int_0^b h(x)\,dx=\frac{b^2}{c^2}S$$

이므로

$$\frac{a^2}{c^2}S+\frac{b^2}{c^2}S=\frac{a^2+b^2}{c^2}S=S$$

가 성립한다. 따라서 주어진 명제 $\int_0^c f(x)dx=\int_0^a g(x)\,dx+\int_0^b h(x)\,dx$가 성립한다.

다 른 풀 이

$g(x)$, $h(x)$의 정의에 의해 $g(x)=\frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right)$, $h(x)=\frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right)\cdots(*)$ 이다.

$\int_0^a g(x)dx=\int_0^a\frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right)dx$ 에서 $\frac{c}{a}x=t$ 라 두고 치환하면

$$\int_0^a g(x)dx=\int_0^a\frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right)dx=\int_0^c\frac{a^2}{c^2}f(t)dt=\frac{a^2}{c^2}\int_0^c f(x)dx$$

이다. 마찬가지로 $\int_0^b h(x)dx$를 정리하면

$$\int_0^b h(x)dx=\int_0^b\frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right)dx=\int_0^c\frac{b^2}{c^2}f(t)dt=\frac{b^2}{c^2}\int_0^c f(x)dx$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\int_0^a g(x)\,dx+\int_0^b h(x)\,dx&=\frac{a^2}{c^2}\int_0^c f(x)\,dx+\frac{b^2}{c^2}\int_0^c f(x)\,dx\\&=\frac{a^2+b^2}{c^2}\int_0^c f(x)\,dx=\int_0^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

이다.

(*) $y=f(x)$를 원점을 중심으로 $k(k\neq 0)$배 닮음변환하면 $x'=kx$, $y'=ky$이므로

$\dfrac{y'}{k}=f\left(\dfrac{x'}{k}\right)$이고, $y'=kf\left(\dfrac{x'}{k}\right)$이다.

논제 2-4

세 점 A, B, C를 지나는 평면의 방정식은 $\dfrac{x}{\alpha}+\dfrac{y}{\beta}+\dfrac{z}{\gamma}=1\,(\alpha, \beta, \gamma>0)$이고 원점에서 평면까지의 거리를 d라 두면 $d=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}+\dfrac{1}{\gamma^2}}}=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}}$이다.

삼각뿔 OABC의 부피를 구하는 과정에서 삼각형 ABC의 넓이를 구할 수 있다.

$$\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\times d=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\times\overline{\mathrm{OC}}$$

이므로, $\triangle\mathrm{ABC}\times\dfrac{\alpha\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}}=\dfrac{1}{2}\alpha\beta\gamma$ 이다. 식을 정리하면

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{\sqrt{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}}{2}$$

을 얻을 수 있다. 따라서

$$(\triangle\mathrm{ABC})^2=\frac{\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2}{4}=\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)^2+\left(\frac{\beta\gamma}{2}\right)^2+\left(\frac{\gamma\alpha}{2}\right)^2$$

$$=(\triangle\mathrm{OAB})^2+(\triangle\mathrm{OBC})^2+(\triangle\mathrm{OAC})^2$$

이다.

11 서울시립대학교 모의

제시문 1 **제시문을 읽고 물음에 답하여라.**[21)]

이차곡선 $y=x^2$의 1사분면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$에서의 접선을 l이라고 하자. 점 P를 지나고 l과 수직으로 만나는 법선 m이 $y=x^2$과 만나는 또 다른 점을 Q라고 하자. 다음 물음에 답하여라.

논제 1-1

두 직선 l, m의 방정식과 점 Q의 좌표를 구하여라.

논제 1-2

선분 PQ의 길이의 최솟값을 구하여라.

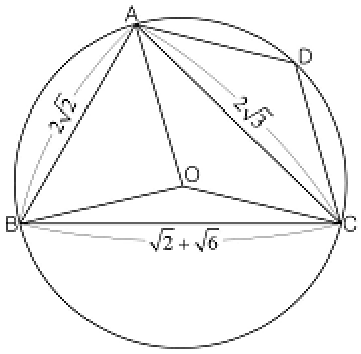
논제 1-3

직선 l과 x축이 만나는 각을 θ라고 하자. 선분 PQ의 길이가 최소가 될 때, $\sin 4\theta$의 값을 구하여라.

21) 서울시립대학교 입학처

제시문 2 제시문을 읽고 물음에 답하여라

세 변의 길이가 $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{2}+\sqrt{6}$, $\overline{CA}=2\sqrt{3}$이고 외접원의 중심이 O인 삼각형 ABC가 있다. 다음 물음에 답하여라.



논제 2-1

외접원의 반지름의 길이를 구하여라.

논제 2-2

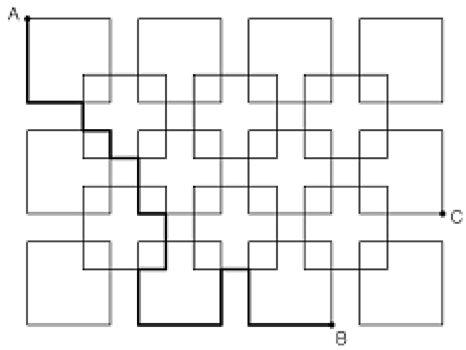
세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이의 비를 구하여라.

논제 2-3

점 D가 그림과 같이 부채꼴 OCA의 호 CA에서 움직일 때(단, 호의 양 끝점 제외), 삼각형 ACD의 무게중심의 자취의 길이를 구하여라.

제시문 3 제시문을 읽고 물음에 답하여라.

한 변의 길이가 3인 정사각형 18개가 아래 그림과 같이 겹쳐 놓여 있다. 같은 행과 열에서 이웃한 두 정사각형 사이의 간격은 1이다. 또한 두 정사각형이 겹쳐서 생기는 작은 정사각형의 한 변의 길이는 1이다.



그림과 같이 점 A에서 사각형들의 변을 따라 점 B나 C로 이동하는 경로들을 생각하자. 다음 물음에 답하여라.

논제 3-1

점 B에 도달하는 최단 경로의 수를 구하여라.

논제 3-2

점 C에 도달하는 최단 경로의 수를 구하여라.

논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 3문항	시간	120분
연관 개념	논술1. 도함수를 이용한 접선의 방정식과 함수의 최솟값, 두 점 사이의 거리, 삼각함수의 성질 논술2. 삼각함수의 성질, 자취의 방정식 논술3. 경우의 수		

제 시 문 분 석

논제 해결에 필요한 조건들만을 제시하여 별도의 제시문이 존재하지 않는다.

제시문 1

함수 위의 한 점에서 접선과 그 접선에 수직인 법선, 그리고 그들의 관계에 대해 설명하고 있다.

제시문 2

세 변의 길이가 주어진 삼각형과 그 삼각형의 외접원에 대해 설명하고 있다.

제시문 3

한 변의 길이가 주어진 정사각형 18개와 이들 정사각형이 놓여진 상황에 대해 설명하고 있다.

논 제 분 석

고교 과정의 기본 개념과 원리를 충실히 익혔으면 쉽게 해결할 수 있는 문제들이다. 또한 평소 학교시험에서 많이 다루어 봤을 해결 과정을 얻기 위한 단계형, 서술형 문제 유형과 유사한 문제이다. 기본적인 문제 해결 중심으로 점의 좌표를 구하고, 자취의 방정식을 구하고, 경우의 수를 구하는 등 비교적 쉽게 출제되었다.

논제 1-1

도함수를 이용하여 함수 위의 한 점에서의 접선의 방정식과 법선의 방정식을 구하고, 제시된 함수와의 교점을 찾는 비교적 간단한 문제이다.

논제 1-2

논제 1-1의 점 Q를 구한 뒤 두 점 사이의 거리를 구하고 도함수를 통해 최솟값을 구하는 문제로써, 제시문의 1사분면 위의 점이라는 사실을 상기하여 최솟값 구함에 유의하여야 한다.

논제 1-3

논제 1-2의 선분 PQ의 길이가 최소가 될 때의 값을 구해야만 해결되는 문제로, 삼각함수의 성질을 이용할 수 있는가를 묻고 있다.

논제 2-1

제2 코사인법칙과 사인법칙에 대해 묻고 있다.

논제 2-2

원주각과 중심각의 관계와 삼각함수의 성질을 이용한 삼각형의 넓이를 구하는 문제로서, 주로 삼각형의 변과 각이 주어졌을 때 삼각함수의 성질을 잘 이용할 수 있는가를 묻고 있다.

논제 2-3

주어진 조건을 만족하는 점의 자취를 찾고 그 길이를 구하는 문제이다. 논제 2-1과 2-2에서 구한 삼각형의 한 각을 이용하고, 제시된 상황을 수학적 식으로 재구성할 수 있는지와 재구성된 식을 조건에 맞게 풀 수 있는지를 묻고 있다.

논제 3-1

최단 경로의 수를 구할 수 있는지를 묻고 있다. 제시된 그림의 특성을 잘 파악하고 직접 몇 번 최단경로를 그어보면서 반드시 지나가야 하는 점을 찾는데 주력하여야 한다.

논제 3-2

논제 3-1과 비슷하나 점 C에 도달하기 위해서는 반드시 한 번 이상은 올라가야 한다는 사실을 찾아내는 것이 중요하다. 따라서 최단경로의 길이는 24라는 사실을 이용하여 최단경로의 수를 찾아야 한다.

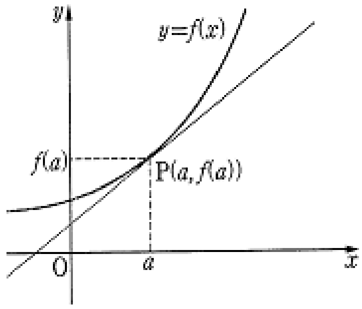
배 경 지 식 쌓 기

1. 도함수를 이용한 접선과 법선의 방정식

(1) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선의 방정식

① 접선의 기울기: $f'(a)$

② 접선의 방정식: $y-b=f'(a)(x-a)$



(2) 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 법선의 방정식

① 법선의 기울기: $-\dfrac{1}{f'(a)}$

② 법선의 방정식: $y-b=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

2. 두 점 사이의 거리, 도함수를 이용한 함수의 최솟값

(1) 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리는

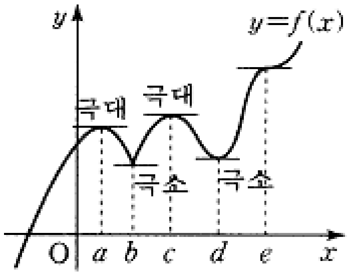
$\overline{\mathrm{PQ}}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

(2) 극값(극댓값, 극솟값)의 정의

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 x가 증가하면서 $x=a$를 지날 때, 함수값 $f(x)$가

① 증가 상태에서 감소 상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극대, $f(a)$를 극댓값이라 한다.

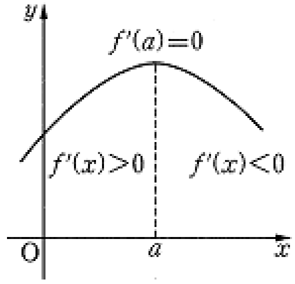
② 감소 상태에서 증가 상태로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극소, $f(a)$를 극솟값이라 한다.



(3) 미분가능한 함수의 극대, 극소의 판정 방법

① $f'(a)=0$인 a의 값을 모두 구한 후 a의 값의 좌우에서 $f'(x)$의 부호를 조사한다.

② $f'(x)$의 부호가 $+$에서 $-$로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값을 갖고, $-$에서 $+$로 변하면 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값을 갖는다.

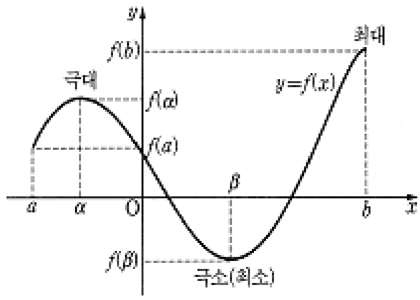


(4) 닫힌구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 최댓값과 최솟값

① 구간 $[a,\ b]$에서 극댓값과 극솟값을 구한다.

② 구간 $[a,\ b]$의 양끝에서의 함수 값 $f(a)$, $f(b)$를 구한다.

③ 위의 ①, ②에서 구한 값들 중 가장 큰 값이 최댓값, 가장 작은 값이 최솟값이다.



3. 삼각함수의 성질

(1) 배각의 공식

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha,$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

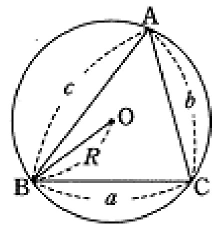
(2) 제2 코사인법칙

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ 또는 } \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

(3) 사인법칙

삼각형 ABC에서 각 A, B, C의 대변의 길이를 각각 a, b, c라 하고, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면, 다음 법칙이 성립한다.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$



4. 경우의 수에서의 곱의 법칙

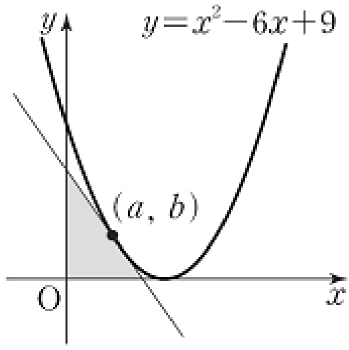
사건 A가 일어나는 경우의 수가 m가지이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n가지일 때, 두 사건 A, B가 동시에 일어나는 경우의 수

$$m \times n \text{ (가지)}$$

풀 어 보 기

문제 1

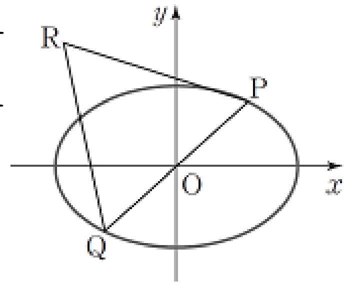
그림과 같이 곡선 $y=x^2-6x+9$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 최대가 되도록 하는 실수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값을 구하여라. (단, $0<a<3$)(EBS 2012 수능완성)



문제 2

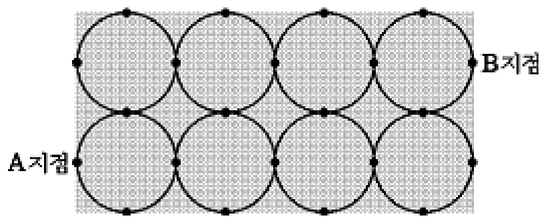
타원 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$에 대하여 두 점 P, Q는 원점에 대하여 대칭인 타원 위의 점이다. 두 점 P, Q가 타원 위를 움직일 때, 선분 PQ를 한 변으로 하는 정삼각형 PQR의 꼭짓점 R가 그리는 도형도 타원이 된다.

이 타원의 방정식을 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$이라 할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.(EBS 2012 수능특강)



문제 3

직사각형 모양의 잔디밭에 산책로가 만들어져 있다. 이 산책로는 그림과 같이 반지름의 길이가 같은 원 8개가 서로 외접하고 있는 형태이다.



A지점에서 출발하여 산책로를 따라 최단 거리로 B지점에 도착하는 경우의 수를 구하여라.(단, 원 위에 표시된 점은 원과 직사각형 또는 원과 이 원의 접점을 나타낸다.)(2009학년도 대수능)

읽 어 보 기

헤론의 공식 22)

1. 헤론

그리스의 기계학자 · 물리학자 · 수학자. 62～150년경에 알렉산드리아에서 활약하였다. 이론보다 수학 · 역학의 응용면에서 능력을 발휘하였으며, 조준의로 토지를 측량하거나 월식(月蝕)을 이용하여 로마에서 알렉산드리아까지의 거리를 측정하였다. 또 일종의 증기터빈인 '헤론의 기력구(汽力球)'와 수력(水力) 오르간, 주화(鑄貨)를 넣으면 물이 나오는 '성수함(聖水函)' 등 기타 여러 가지 자동장치를 발명하였다. 그 일부는 선배들의 발명을 모방 · 개량한 것이라 한다.

수학에서는 꼭지부분을 잘라낸 피라미드(사각뿔대)의 부피나 제곱근 · 세제곱근의 근삿값을 구했으나, 유명한 '헤론의 공식(삼각형의 세 변의 길이에서 그 넓이를 구하는 방법)'은 헤론 자신의 발견은 아닌 듯하다. 아마 아르키메데스가 알아낸 공식이거나, 혹은 그 이전부터 알고 있었을 지도 모른다고 생각되고 있다. 그러나 그 많은 유용한 고안이 당시의 사회제도(노예제도)에서는 놀이감으로 밖에 쓰이지 않았던 것 같다.

그의 저술은 지금도 많이 남아 있으며 주요한 것으로는 《측량술》, 《조준의(照準儀)에 대하여》, 《기체장치(氣體裝置)》, 《자동장치의 제작법에 대하여》, 《발사무기의 제작술》, 《구적법(求積法)》, 《입체기하학》 등이다.

2. 헤론의 공식과 그 증명

※ 헤론의 공식(Heron's formula)

삼각형 세 변의 길이를 각각 a, b, c라 하고 삼각형의 넓이를 S 라고 하면

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}$$

(증명)

$$S=\frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}=\frac{1}{2}bc\sqrt{1-\cos^2\mathrm{A}}\ (\because \sin\mathrm{A}>0)$$

$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{(1+\cos\mathrm{A})(1-\cos\mathrm{A})}$$

22) 네이버 백과사전

$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}bc\sqrt{\frac{(2bc+b^2+c^2-a^2)(2bc-b^2-c^2+a^2)}{(2bc)^2}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\{(b+c)^2-a^2\}\{a^2-(b-c)^2\}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

여기서 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$로 놓으면 $S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$이다.

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1

$y=x^2-6x+9$ 이므로 $y'=2x-6$

점 $(a,\ b)$는 곡선 $y=x^2-6x+9$ 위의 점이므로

점 $(a,\ a^2-6a+9)$에서의 접선의 방정식은

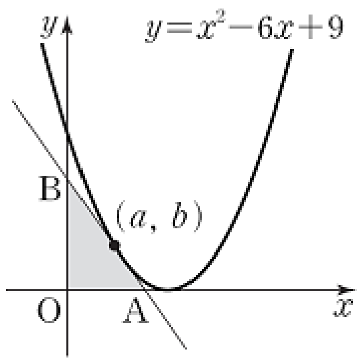
$y-(a^2-6a+9)=2(a-3)(x-a)$

$\therefore\ y=2(a-3)x-a^2+9$

그림과 같이 이 직선과 x축, y축과의 교점을

각각 A, B라 하면

$\overline{\mathrm{OA}}=\dfrac{a+3}{2}$, $\overline{\mathrm{OB}}=-a^2+9$



$\triangle\mathrm{OAB}$의 넓이를 $S(a)$라 하면 $S(a)=\dfrac{1}{4}(a+3)(-a^2+9)$ 이므로

$S'(a)=\dfrac{1}{4}(-3a^2-6a+9)=-\dfrac{3}{4}(a+3)(a-1)$

$S'(a)=0$ 에서 $a=-3$ 또는 $a=1$

$0<a<3$ 에서 함수 $S(a)$의 증감표를 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	(3)
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗	극대	↘	

따라서 $S(a)$는 $a=1$에서 극대이자 최대이다.

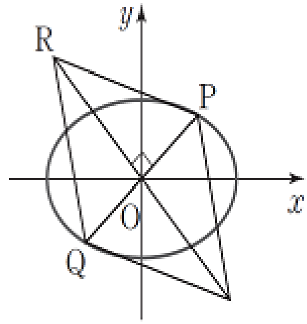
$$\therefore\ a=1,\ b=1-6+9=4$$

$$\therefore\ a+b=1+4=5$$

문제 2

$\mathrm{P}(\alpha, \beta)$, $\mathrm{Q}(-\alpha, -\beta)$라 하면 두 점 P, Q는 타원 위의 점이므로

$$\frac{\alpha^2}{9}+\frac{\beta^2}{4}=1 \cdots\cdots ㉠$$



$\triangle$PRQ는 정삼각형이고 점 O는 선분 PQ의 중점이므로

$$\angle \mathrm{PQR}=\frac{\pi}{3},\ \overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{3}\cdot\overline{\mathrm{OP}}$$

따라서 $\mathrm{R}(x, y)$라 하면

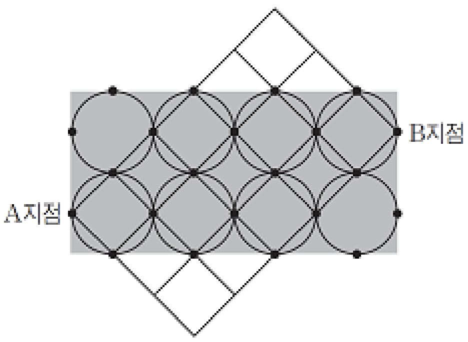
$x=\pm\sqrt{3}\beta$, $y=\mp\sqrt{3}\alpha$를 ㉠에 대입하면

$$\frac{1}{9}\left(\mp\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\pm\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2=1$$

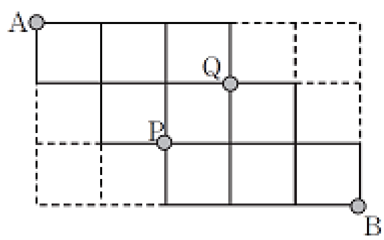
그러므로 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{27}=1$ 이므로

$$a^2+b^2=12+27=39$$

문제 3



[그림 1]



[그림 2]

[그림 1]에서 A지점을 출발하여 산책로를 따라 최단거리로 B지점에 도착하는 경우의 수는 [그림 2]에서 A지점을 출발하여 실선을 따라 최단거리로 B지점에 도착하는 경우의 수와 같다.

(i) $\mathrm{A}\to\mathrm{P}\to\mathrm{B}$의 경우

$$\left(\frac{4!}{2!\,2!}-1\right)\times\frac{4!}{3!}=5\times4=20$$

(i) $A \to Q \to B$의 경우

$$\frac{4!}{3!} \times \left(\frac{4!}{2!\,2!} - 1\right) = 4 \times 5 = 20$$

따라서 구하는 경우의 수는

$$20 + 20 = 40$$

논제 1-1

직선 l의 방정식을 미분을 이용하여 구하면 다음과 같다.

$$l : y - a^2 = 2a(x-a) \Leftrightarrow y = 2ax - a^2$$

그리고 직선 m의 방정식은 $m : y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x-a) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$ 이다.

이제 점 Q를 구하기 위해 $y = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$ 과 $y = x^2$의 두 방정식을 연립하여 풀면 다음과 같다.

$$x^2 + \frac{1}{2a}x - a^2 - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow (x-a)\left(x + a + \frac{1}{2a}\right) = 0$$

따라서 점 Q의 좌표는 $\left(-a - \frac{1}{2a}, \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2\right)$ 이다.

논제 1-2

선분 PQ의 길이를 구하면 다음과 같다.

$$\overline{PQ} = \sqrt{\left(a + a + \frac{1}{2a}\right)^2 + \left(a^2 - \left(a + \frac{1}{2a}\right)^2\right)^2} = \sqrt{4a^2 + \frac{3}{4a^2} + \frac{1}{16a^4} + 3}$$

여기서 $\overline{PQ} = f(a)$라고 하면 $f(a)$와 $\{f(a)\}^2$은 같은 a에서 최솟값을 가진다. 따라서 $\{f(a)\}^2$의 최솟값을 구하여 $f(a)$의 최솟값을 구하자.

그리고 $\{f(a)\}^2 = g(a)$ 라고 놓고, 최솟값을 구하기 위해 $g'(a)$를 계산하면

$g'(a) = 8a - \frac{3}{2a^3} - \frac{1}{4a^5} = \frac{32a^6 - 6a^2 - 1}{4a^5} = \frac{(2a^2-1)(4a^2+1)^2}{4a^5}$ 이다.

$a = \frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $g'(a) = 0$ 이 되고, $g''(a) = 8 + \frac{9}{2a^4} + \frac{5}{4a^6} > 0$ 이다.

따라서 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$에서 최솟값을 가진다. 그리고 그때의 $f(a)$의 최솟값은 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$이다.

논제 1-3

직선 l의 기울기는 $\tan\theta$와 같다. $\tan\theta = 2a = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$이다.

그리고 삼각함수의 성질에 의해 $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$이고, $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이다.

여기서 $\sin(4\theta) = 2\sin2\theta\cos2\theta$이고, $\sin2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$, $\cos2\theta = 1-2\sin^2\theta$이다.

$\sin2\theta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos2\theta = -\dfrac{1}{3}$이므로 $\sin(4\theta) = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$이다.

논제 2-1

코사인 제2법칙에 의해

$$\cos B = \frac{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}+\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{3})^2}{2\times2\sqrt{2}\times(\sqrt{2}+\sqrt{6})} = \frac{1}{2}$$

그러므로 $B = \dfrac{\pi}{3}$이다.

그리고 외접원의 반지름의 길이를 R이라고 할 때, 사인법칙에 의해

$$2R = \frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{2\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 4$$

이므로 $R = 2$이다.

논제 2-2

사인법칙에 의해서 $\sin C = \dfrac{2\sqrt{2}}{2R} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로, $C = \dfrac{\pi}{4}$이다.

이때, $A = \pi - B - C = \pi - \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{5\pi}{12}$ 이고, 중심각은 원주각의 2배이므로 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이는 각각 $\dfrac{1}{2}R^2\sin(2C)$, $\dfrac{1}{2}R^2\sin(2A)$, $\dfrac{1}{2}R^2\sin(2B)$ 이다.

따라서 세 삼각형 OAB, OBC, OCA의 넓이의 비는

$\dfrac{1}{2}R^2\sin(2C) : \dfrac{1}{2}R^2\sin(2A) : \dfrac{1}{2}R^2\sin(2B) = \sin\dfrac{\pi}{2} : \sin\dfrac{5\pi}{6} : \sin\dfrac{2\pi}{3} = 2 : 1 : \sqrt{3}$ 이다.

다 른 풀 이

삼각형 세 변의 길이를 모두 알고 있으므로 헤론의 공식(Heron’ s formula)을 사용하여 세 삼각형의 넓이를 구할 수 있다.

※ 헤론의 공식

삼각형 세 변의 길이를 각각 a, b, c라 하고 삼각형의 넓이를 S 라고 하면

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{단, } s=\frac{a+b+c}{2}$$

논제 2-3

삼각형 AOC는 $\angle \mathrm{AOC}=\frac{2\pi}{3}$이고, $\overline{\mathrm{AO}}=\overline{\mathrm{OC}}=2$ 인 이등변삼각형이다. 그러므로 다음과 같은 좌표를 도입할 수 있다. $\mathrm{O}(0, 0)$, $\mathrm{C}(2, 0)$, $\mathrm{A}(-1, \sqrt{3})$

여기서 점 D는 중심이 $(0, 0)$이고, 반지름이 2인 원 위에 있으므로, 점 D의 좌표를 (x, y)라 하면

$$x^2+y^2=4 \quad \text{-------} \text{ ㉠}$$

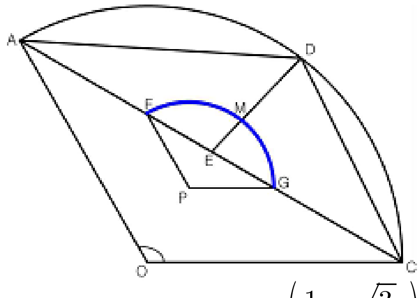
이다. 그리고 삼각형ACD의 무게중심을 $\mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$라고 하면,

$(\mathrm{X}, \mathrm{Y})=\left(\frac{-1+2+x}{3}, \frac{\sqrt{3}+0+y}{3}\right)=\left(\frac{x+1}{3}, \frac{y+\sqrt{3}}{3}\right)$ 이다.

그러므로 $x=3\mathrm{X}-1=3\left(\mathrm{X}-\frac{1}{3}\right)$, $y=3\mathrm{Y}-\sqrt{3}=3\left(\mathrm{Y}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$이고, 이를 식 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\left(\mathrm{X}-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\mathrm{Y}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{-------} \text{ ㉡}$$

이 된다.



또한, 삼각형 ACD의 무게중심은 변AC의 중점 $\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$과 점 D를 1:2로 내분하는 점

이므로, 점 D가 점 A로 접근하면 점 M은 $F\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$로 접근하고, 점 D가 점 C로 접근하면 점 M은 $G\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$로 접근하게 된다. 그러므로 구하고자 하는 자취는 현 FG에 의해서 잘린 원 ㉡의 호가 된다. (단, 경계는 제외)

이때, 선분 FG의 길이는 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$이다. 원 ㉡의 중심을 P라 하면,

$\cos(\angle FPG) = \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}} = -\frac{1}{2}$ 이므로 각 $FPG = \frac{2\pi}{3}$이다. 그러므로 구하는 자취의 길이는 $2\pi\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{4\pi}{9}$이다.

다른풀이

삼각형 AOC는 $\angle AOC = \frac{2\pi}{3}$이고, $\overline{AO} = \overline{OC} = 2$ 인 이등변삼각형이다. 그러므로 다음과 같은 좌표를 도입할 수 있다. $O(0, 0)$, $C(2, 0)$, $A(-1, \sqrt{3})$
여기서 점 D는 중심이 $(0, 0)$이고, 반지름이 2인 원 위에 있으므로, 점 D의 좌표를 (x, y)라 하면

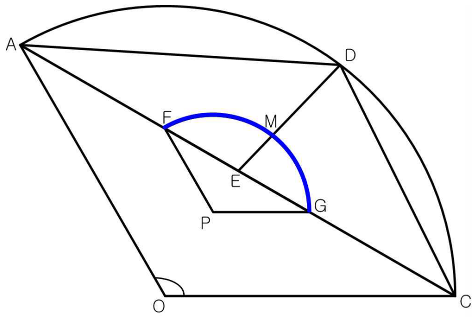
$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{-------} \ ㉠$$

이다.
그리고 삼각형ACD의 무게중심을 $M(X, Y)$라고 하면,
$(X, Y) = \left(\frac{-1+2+x}{3}, \frac{\sqrt{3}+0+y}{3}\right) = \left(\frac{x+1}{3}, \frac{y+\sqrt{3}}{3}\right)$ 이다.

그러므로 $x = 3X - 1 = 3\left(X - \frac{1}{3}\right)$, $y = 3Y - \sqrt{3} = 3\left(Y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$이고, 이를 식 ㉠에 대입하여 정리하면

$$\left(X - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(Y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad \text{-------} \ ㉡$$

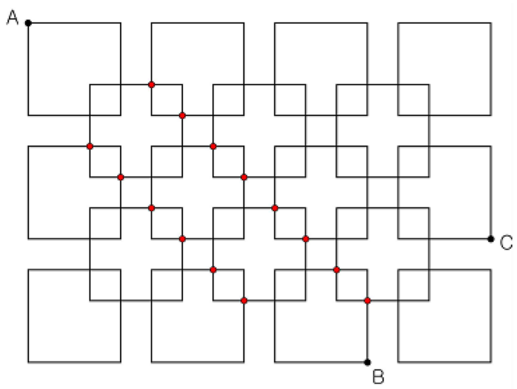
이 된다.



또한, 삼각형 ACD의 무게중심은 변AC의 중점 $\mathrm{E}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$과 점 D를 1:2로 내분하는 점이므로, 점 D가 점 A로 접근하면 점 M 역시 선분 EA를 1:2로 내분하는 점 $\mathrm{F}\left(0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$로 접근하고, 점 D가 점 C로 접근하면 점 M 역시 선분 EC를 1:2로 내분하는 점 $\mathrm{G}\left(1, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$로 접근하게 된다. 그리고 원 ㉡의 중심인 점 P 역시 선분 EO를 1:2로 내분하는 점이므로 선분 AO와 FP, 선분 OC와 PG는 평행이다. 따라서 각 FPG와 각 AOC는 같고, 각 FPG$=\frac{2\pi}{3}$이다. 그러므로 구하는 자취의 길이는 $2\pi\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{4\pi}{9}$이다.

논제 3-1

점 A에서 점 B로 가는 최단 경로가 되기 위해서는 내려갔다가 다시 올라가거나, 오른쪽으로 갔다가 다시 왼쪽으로 가는 것이 없거나 최소가 되어야 한다. 따라서 이를 만족하는 경우는 아래 그림에서 위에 있는 점 8개를 차례로 지나가거나 아래에 줄지어 있는 점 6개를 차례로 지나가는 두 가지의 경우이다.



여기서 위의 점 8개를 차례로 지나가는 최단경로의 수는

$1\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times1=128$ 개이고,

아래의 점 6개를 차례로 지나가는 최단경로의 수는

$1\times2\times2\times2\times2\times2\times1=32$ 개다.

따라서 전체 최단경로의 수는 160 개다.

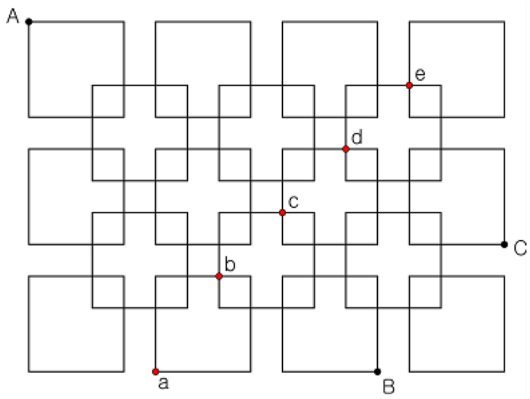
논제 1-2

점 A에서 점 C로 가는 최단 경로가 되기 위해서는 내려갔다가 다시 올라가거나, 오른쪽으로 갔다가 다시 왼쪽으로 가는 것이 없거나 최소가 되어야 한다. 여기서 점 A에서 점 C로 가는 길 중 위의 내려갔다가 다시 올라가거나, 오른쪽으로 갔다가 다시 왼쪽으로 가는 것이 없는 경우의 길의 길이는 22이고, 점 A에서 점 C로 가는 길은 아래의 점 5개 중 하나를 잡으면 공통되는 경우가 없고 반드시 이 중 하나를 지나가야 한다. 이 점들을 아래로부터 차례대로 a, b, c, d, e 라고 하자.

이 5개의 점을 지나는 경로의 길이를 세어보면 점 c와 점 d 를 경유하는 경우가 24로서 가장 짧다. 따라서, 점 A에서 점 C로 가는 최단경로는 점 c 또는 점 d 를 지나야 한다.

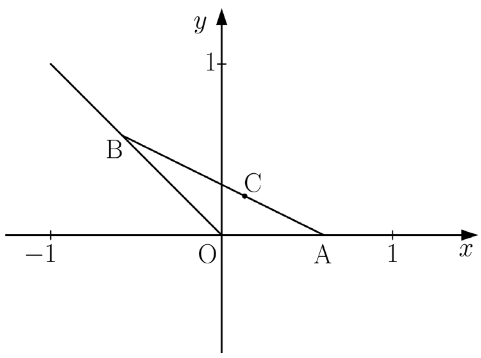
위의 논제 3-1에서와 같은 방법으로 하면 점 A에서 점 c로 가는 최단경로의 수가 16개이며, 점 c 에서 점 C 로 가는 최단경로의 수가 8개이므로, 점 c를 경유하는 최단경로의 수는 128개다.

마찬가지로 점 A에서 점 d 로 가는 최단경로의 수가 32개, 점 d 에서 점 C 로 가는 최단경로의 수가 8개이므로, 점 d 를 경유하는 최단경로의 수는 256개다.
따라서, 점 A 에서 점 C 로 가는 최단경로의 수는 모두 384개다.



12 서울시립대학교 수시(자연A)

문제 1 [23)]



그림과 같이 좌표평면에 움직이는 점 A가 있다. 시각 $t\left(0<t<\frac{\pi}{4}\right)$에서 점 A의 좌표는 $(2\sin t,\ 0)$이다. 제 2사분면 위의 점 B는 직선 $y=-x$ 위에 있고, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{2}$이다. 선분 AB를 $r:1-r$로 내분하는 점을 C라 하자. 다음 물음에 답하여라.

(a) 시각 t에서 점 B의 좌표를 구하여라.

(b) 시각 t에서 점 C의 속력을 구하여라.

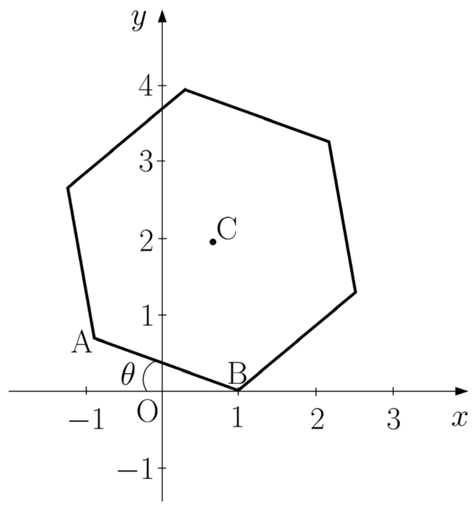
(c) 시각 t에서 점 C의 속력이 최소가 되는 r를 구하여라.

(d) 삼각형 OAB의 넓이가 최대가 되는 시각 t를 구하여라.

23) 서울시립대학교 입학처

문제 2

그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 2인 정육각형이 놓여 있다. 점 C는 정육각형의 외접원의 중심이다. 이 정육각형을 점 B$(1, 0)$ 을 중심으로 시계방향으로 회전시킬 때, 변 AB와 x축이 이루는 각의 크기를 θ라고 하자. 다음 물음에 답하여라.



(a) θ가 0에서 $\dfrac{\pi}{3}$까지 변할 때, 점 C가 이루는 곡선 C_1을 매개변수 θ를 이용하여 나타내어라.

(b) θ가 0에서 $\dfrac{\pi}{3}$까지 변할 때, 점 C의 x좌표를 x_1이라고 하고, 정육각형과 직선 $y=k$가 만나게 되는 k의 값 중에서 최댓값을 y_1이라 할 때, 점 (x_1, y_1)이 이루는 곡선 C_2를 매개변수 θ를 이용하여 나타내어라.

(c) 위에서 구한 두 곡선 C_1, C_2와 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하여라.

문제 3

어떤 농구 선수가 자유투를 성공할 확률은 $\frac{2}{3}$라고 한다. 이 농구 선수가 n번의 자유투를 던질 때, 사건 A, B, C를 다음과 같이 정의한다.

A : n번 중 한 번도 연달아 성공하지 않는 사건
B : n번 중 한 번도 연달아 실패하지 않는 사건
C : n번 중 k번 성공한 사건

다음 물음에 답하여라. (단, 자유투는 독립시행이다.)

(a) 사건 A가 일어날 확률을 p_n이라 하자. 이때, p_n에 관한 점화식을 구하고, 다음 식이 그 점화식을 만족시킴을 보여라.

$$p_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \ (n = 1, 2, \cdots)$$

(b) 조건부 확률 $\mathrm{P}(B|A)$를 구하여라.

(c) 사건 $A \cap C$가 일어나는 경우의 수를 구하여라.

(d) 확률 $\mathrm{P}(A \cap C)$를 구하여라.

논술유형분석

문항 수	수학 3문항	시간	120분
연관 개념	좌표, 함수, 미분, 도형, 삼각함수, 적분, 확률, 점화식, 조합		

제시문분석

문제 1에서는 좌표평면에서 움직이는 점의 좌표를 삼각함수를 이용하여 제시하였고, 두 점 사이의 거리, 선분의 내분 등을 이용하여 새로운 점을 도입하고 있다.

문제 2에서는 한 변의 길이가 2이 정육각형이 한 꼭짓점을 중심으로 시계방향으로 회전하는 상황을 제시하고 있다.

문제 3에서는 자유투를 성공할 확률이 $\frac{2}{3}$인 농구선수가 n번의 자유투를 던질 때 일어날 수 있는 여러 가지 사건을 제시하고 있다.

논제분석

문제 1

좌표평면에 대한 이해도, 함수의 성질에 대한 이해도, 미분에 대한 이해도 등을 측정하고자 하는 문제이다. 삼각함수로 좌표가 주어진 점에 대하여 점과 직선 사이의 거리, 내분점을 이용하여 새로운 점의 좌표를 구하고, 미분을 이용하여 속력 및 속력이 최소가 되는 경우, 삼각형의 넓이가 최대가 되는 경우 등을 구하도록 요구하고 있다. 문제에 이용된 개념들은 모두 고등학교 교육과정에서 다루는 내용들이나 계산 과정이 다소 복잡한 경향이 있으므로 침착하게 식을 세우고 해결하는 자세가 필요하다.

문제 2

도형에 대한 이해, 삼각함수의 응용 능력, 적분의 응용 능력 등을 측정하고자 하는 문제이다. 정육각형이 한 꼭짓점을 중심으로 회전하는 상황에서 외접원의 중심과 다른 한 꼭짓점이 어떻게 움직이는지를 매개변수 함수로 나타내고 이를 이용하여 적분을 통해 넓이를 구하도록 요구하고 있다. 타원의 방정식을 매개변수로 나타내기, 다소 복잡한 삼각치환 등에 대한 이해가 필요하다.

문제 3

주어진 사건들의 곱사건 및 조건부 확률에 대한 이해도, 점화식의 응용능력, 조합에 대한 이해도 및 응용능력 등을 측정하고자 하는 문제이다. 문제에서 주어진 사건에 대한 이해를 바탕으로 점화식으로 표현하고, 점화식에서 얻어지는 수열의 일반항을 수학적 귀납법을 이용하여 증명하도록 요구하고 있으며, 조건부 확률 및 곱사건의 확률을 구하도록 요구하고 있다. 수학적 귀납법, 조건부 확률, 곱사건의 확률 모두 고등학교 교육과정 내에 있는 개념이긴 하나 난이도가 매우 높고 계산과정이 복잡한 어려운 문제이다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 평면 위의 점에서의 속도와 속력

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 x좌표와 y좌표가 각각 $x=f(t)$, $y=g(t)$일 때, 점 P의 x축 방향의 속도 v_x와 y축 방향의 속도 v_y 및 속력 v는 다음과 같다.

$$v_x=\frac{dx}{dt},\ v_y=\frac{dy}{dt}$$

$$v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}$$

2. 타원의 매개변수 방정식

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 매개변수 방정식으로 나타내면 다음과 같다.

$$x=a\cos\theta,\ y=b\sin\theta$$

3. 조건부 확률

확률이 0이 아닌 사건 A에 대하여 사건 A가 일어났다고 가정할 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

와 같이 나타낸다. 조건부확률의 정의에서

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이므로 우변의 분모, 분자를 표본공간의 근원사건의 수 $n(S)$로 나누면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

풀 어 보 기

문제 1 좌표평면 위를 움직이는 점 $\mathrm{P}(x, y)$의 시각 t에서의 위치가 $x=\sin t-\cos t$, $y=2\cos t$로 나타내어질 때, 점 P의 속력의 최댓값을 구하시오.

문제 2 어느 자동차 보험 회사에서는 가입자를 고위험군, 중위험군, 저위험군의 세 그룹으로 나누고 있다. 고위험군, 중위험군, 저위험군에 속한 가입자가 보험금을 청구할 확률은 각각 0.6, 0.3, 0.02이고, 이 보험 회사의 각 그룹의 가입자 수의 비율은 차례로 10 %, 40 %, 50 %라고 한다. 어느 가입자가 보험금을 청구하였을 때, 이 가입자가 고위험군에 속한 사람일 확률을 구하시오.

읽 기 자 료

도박에서 출발한 확률 연구

17세기 중반 상류층 귀족인 드메레(de Mere ; 1607~1684)는 주사위 한 개를 네 번 던질 때 6의 눈이 적어도 한 번 나온다는데 돈을 걸었다. 다른 사람들이 그와 내기를 하는 것이 현명하지 않다는 것을 깨달을 때까지, 그는 이 내기로부터 상당한 이익을 얻었다. 그는 경험을 통해 진 경우보다 이긴 경우가 더 많다는 사실을 알고 있었다. 그렇지만 주사위 한 개를 네 번 던질 때 6의 눈이 적어도 한 번 나올 확률이 $1-\left(\frac{5}{6}\right)^4$, 즉 약 51.8 % 라는 사실은 알지 못했다.

충동적인 도박꾼이었던 드메레는 또 다른 내깃거리를 찾아냈다. 주사위 두 개를 동시에 24번 던질 때, 나온 두 눈의 수의 합이 12가 되는 경우가 24번 중 적어도 한 번 있다는 데 돈을 걸기 시작한 것이다. 이 내기가 처음에는 그에게 유리해 보였지만, 그는 점점 돈을 잃기 시작했다. 이에 절친한 친구인 수학자 파스칼(Pascal, B. ; 1623~1662)에게 이 내기를 분석해 달라고 부탁했다. 이렇게 해서 확률론이 탄생하게 되었다.

두 개의 주사위를 던질 경우에 모두 36가지가 나오는데, 파스칼은 드메레의 문제를 거꾸로 생각해서 주사위 두 개를 던져서 나온 눈의 합이 12가 되지 않을 확률을 계산했다. 그 값은 $\left(\frac{35}{36}\right)^{24}$, 즉 약 50.9 %이다. 이에 따라 드메레는 돈을 잃게 될 확률이 약 51 %임을 알게 되었다.

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1

$\frac{dx}{dt}=\cos t+\sin t$, $\frac{dy}{dt}=-2\sin t$이므로 점 P의 시각 t에서의 속력은

$$\sqrt{(\cos t+\sin t)^2+4\sin^2 t}$$

이다.

$$\begin{aligned}(\cos t+\sin t)^2+4\sin^2 t &= 5\sin^2 t+2\sin t\cos t+\cos^2 t\\ &=3+\sin 2t-2\cos 2t\\ &=\sqrt{5}\sin(2t+\alpha)+3\end{aligned}$$

이므로 속력의 최댓값은 $\sqrt{3+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}+\sqrt{2}}{2}$이다.

문제 2

$$\frac{0.1\times 0.6}{0.1\times 0.6+0.4\times 0.3+0.5\times 0.02}=\frac{6}{19}$$

문제 1 **(대학 예시 답안)**

(a) (총 20점)

점 B의 좌표를 $(b,-b)$라 하자$(-1<b<0)$. 선분 AB의 길이가 $\sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}}^2=(2\sin t-b)^2+(-b)^2=2b^2-4(\sin t)b+4(\sin t)^2=2$이다. (10점)

이차방정식 $b^2-2(\sin t)b+2\sin^2 t-1=0$으로부터

$b=\sin t\pm\sqrt{\sin^2 t-(2\sin^2 t-1)}=\sin t\pm\cos t$ 를 얻는다.

b의 범위가 $-1<b<0$이므로 위의 둘 중에서 $b=\sin t-\cos t$가 실제 해이다.

따라서 B의 좌표는 $(\sin t-\cos t, -\sin t+\cos t)$이다. (10점)

(b) (총 30점)

점 C의 좌표를 (x, y)라 하자. 점 C가 선분 AB의 내분점임을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\begin{cases} x = r(\sin t - \cos t) + (1-r)(2\sin t) = (2-r)\sin t - r\cos t \\ y = r(-\sin t + \cos t) + (1-r)\times 0 = -r\sin t + r\cos t \end{cases} \qquad (10점)$$

이를 시간에 대해 미분해서 점 C의 속도의 x, y성분을 얻는다.

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = (2-r)\cos t + r\sin t \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = -r\cos t - r\sin t \end{cases} \qquad (10점)$$

따라서 속력의 제곱은

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = \left((2-r)^2 + r^2\right)\cos^2 t + 2\left(r(2-r) + r^2\right)\sin t\cos t + \left(r^2 + r^2\right)\sin^2 t$$

이다. 이를 간단히 정리하면

$$\begin{aligned} v^2 &= \left(4 - 4r + 2r^2\right)\cos^2 t + 2r^2\sin^2 t + 4r\sin t\cos t \\ &= 2r^2 + 4\cos t(\sin t - \cos t)r + 4\cos^2 t \end{aligned}$$

따라서 $v = \sqrt{2r^2 + 4\cos t(\sin t - \cos t)r + 4\cos^2 t}$ 이다. (10점)

(c) (총 20점)

속력 v는 음이 아니므로, v^2이 최소일 때 v 역시 최소가 된다.

앞의 문항에서 구한 v^2은 r의 이차함수이다. 따라서 이차함수가 나타내는 포물선의 꼭짓점에서 v^2은 최소가 된다. (10점)

이차함수의 꼭짓점의 위치 r는 $\dfrac{dv^2}{dr} = 4r + 4\cos t(\sin t - \cos t) = 0$을 풀어서 얻을 수 있다.

$$r = \cos t(\cos t - \sin t) \qquad (10점)$$

(d) (총 30점)

삼각형 OAB의 밑변의 길이는 $2\sin t$이고 높이는 $-b = \cos t - \sin t$이다.

따라서 삼각형의 넓이는 $S = \dfrac{1}{2}\times(2\sin t)\times(\cos t - \sin t) = \sin t(\cos t - \sin t)$ 이다. (10점)

넓이가 최대가 되는 시각을 구하기 위하여 $\dfrac{dS}{dt} = 0$을 만족하는 시각 t를 구하자.

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \cos t(\cos t - \sin t) + \sin t(-\sin t - \cos t) \\ &= \cos^2 t - \sin^2 t - 2\sin t\cos t = \cos 2t - \sin 2t \end{aligned} \qquad (10점)$$

코사인 함수와 사인 함수의 값이 같은 각도는 $n\pi + \dfrac{\pi}{4}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$이다.

따라서 $2t = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$이어야 하고, $0 < t < \dfrac{\pi}{4}$ 구간의 시각은 $t = \dfrac{\pi}{8}$이다.

이 시각에서 최대인지 혹은 최소인지를 확인하기 위하여 이계도함수를 계산한다.

$$\left.\frac{d^2S}{dt^2}\right|_{t=\pi/8} = -2(\sin 2t + \cos 2t)\Big|_{t=\pi/8} = -2\sqrt{2} < 0$$

그러므로 삼각형의 면적은 $t = \frac{\pi}{8}$에서 최대가 된다. (10점)

(별해: 삼각함수의 성질을 사용하면 넓이가

$$S(t) = \sin t\cos t - \sin^2 t = \frac{1}{2}(\sin 2t + \cos 2t - 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(2t + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}$$

임을 보일 수 있다. 이 경우 미분을 사용하지 않고 삼각함수의 성질을 이용하여 시각을 구할 수 있다.)

문제 2 (대학 예시 답안)

(a) (총 20점)

삼각형 ABC는 한 변의 길이가 2인 정삼각형이 되므로 $\overline{\mathrm{BC}} = 2$이고 $\angle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{3}$이다.

이때, 선분 BC와 x축의 음의 방향이 이루는 각은 $\theta + \frac{\pi}{3}$이다. (10점)

정육각형의 중심 C의 좌표를 (x, y)라 하면, 사인, 코사인의 정의에 의해

$$x = 1 - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right), \quad y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

그러므로 C_1은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x = 1 - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right),\ y = 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\ \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}\right)$$ (10점)

(b) (총 30점)

위 (a)에서 $x_1 = 1 - 2\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$이다.

선분 BC의 연장선과 정육각형이 만나는 점을 D라 하면, $\overline{\mathrm{BD}} = 4$이다. 그러므로 x축과 나란한 직선 $y = k$가 정육각형과 만나는 경우의 k의 최댓값은 점 D의 y좌표와 같다.

(20점)

사인의 정의에 의해 $y_1 = 4\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)$.

그러므로 곡선 C_2는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$x_1 = 1-2\cos(\theta+\frac{\pi}{3}),\ y_1 = 4\sin(\theta+\frac{\pi}{3})\ (0 \le \theta \le \frac{\pi}{3})$$ (10점)

(c) (총 50점)

(a)에서 $\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1-x}{2}$, $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{2}$이다. 한편

$$1 = \cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

이때, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$이므로 $0 \le x \le 2$, $\sqrt{3} \le y \le 2$을 만족한다. 그러므로 곡선 C_1은 영역 $0 \le x \le 2$ $\sqrt{3} \le y \le 2$ 안에 있는 원 $(x-1)^2 + y^2 = 4$의 부분이다. 즉,
$y = \sqrt{4-(x-1)^2}$ $(0 \le x \le 2)$이다. (10점)

(b)에서 점 (x_1, y_1)은 $1 = \cos^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{1-x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{4}\right)^2$을 만족한다. 또한, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3}$이므로 $0 \le x_1 \le 2$, $2\sqrt{3} \le y_1 \le 4$를 만족한다. 그러므로 곡선 C_2는 타원 $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^2 = 1$ 중 영역 $0 \le x \le 2$, $2\sqrt{3} \le y \le 4$에 속하는 부분이다. 즉,
$y = 2\sqrt{4-(x-1)^2}$ $(0 \le x \le 2)$이다. (10점)
그러므로 주어진 영역의 넓이 S는 영역 $0 \le x \le 2$ 중에서 타원의 일부인 C_2와 원의 일부인 C_1사이의 넓이가 된다. 즉,

$$S = \int_0^2 \left(2\sqrt{4-(x-1)^2} - \sqrt{4-(x-1)^2}\right)dx = \int_0^2 \sqrt{4-(x-1)^2}\,dx$$ (10점)

여기서 $x-1 = 2\sin\omega$ $(-\frac{\pi}{6} \le \omega \le \frac{\pi}{6})$로 치환하면,

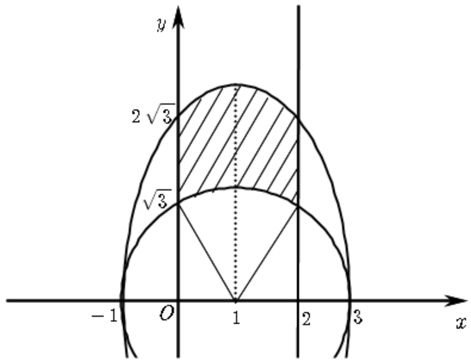
$$S = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sqrt{4-4\sin^2\omega}\ 2\cos\omega\, dw = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4\cos^2\omega\, dw = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} 4\left(\frac{1+\cos 2\omega}{2}\right) dw$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos 2\omega)\, dw = 2\left[w + \frac{\sin 2w}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$$

그러므로 구하는 영역의 넓이는 $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}$이다. (20점)

다 른 풀 이

곡선 C_1은 영역 $0 \le x \le 2$ $\sqrt{3} \le y \le 2$ 안에 있는 원 $(x-1)^2+y^2=4$의 부분이다. 즉, $y=\sqrt{4-(x-1)^2}$ $(0 \le x \le 2)$이고 곡선 C_2는 타원 $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$ 중 영역 $0 \le x \le 2$, $2\sqrt{3} \le y \le 4$에 속하는 부분이다. 즉, $y=2\sqrt{4-(x-1)^2}$ $(0 \le x \le 2)$이다. 따라서 옆의 그림의 빗금친 영역의 넓이가 구하고자 하는 넓이이다. 한편, 타원 $\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{4}\right)^2=1$은 원 $(x-1)^2+y^2=4$를 y축 방향으로 2배 늘인 것이다. 따라서



(빗금친 영역의 넓이)

=(곡선 C_1, x축과 두 직선 $x=0$, $x=2$로 둘러싸인 영역의 넓이)

$$=4\pi\times\frac{1}{6}+2\left(\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\right)=\frac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$$

문제 3 (대학 예시 답안)

(a) (총 30점)

자유투를 한번 던진다면, 연달아 성공할 수 없으므로,

$$p_1=1$$

자유투를 두 번 던질 때, 연달아 성공할 확률은 $\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$이므로, 연달아 성공하지 못할 확률은

$$p_2=1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$$

자유투를 세 번 이상 던지는 경우, 즉 $n \ge 3$인 경우에, p_n에 관한 점화식을 구해보자. 첫 번째 시도에서 실패하는 경우와 성공하는 경우로 나누어 생각해 보자. 첫 번째 시도에서 실패한다면, 나머지, $n-1$번의 시도에서 연달아 성공하지 않는 경우에 전체의 n번의 시도에서 연달아 성공하지 않게 된다. 만약, 첫 번째 시도에서 성공한다면, 두 번째 시도에서 실패하고, 나머지, $n-2$번의 시도에서 연달아 성공하지 않는 경우에 전체 n번의 시도에서 연달아 성공하지 않게 된다. 따라서 다음과 같은 p_n에 관한 점화식을 얻는다.

$$p_n = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2},\ n=3,4,5,\ldots$$ (20점)

문제에 주어진 p_n이 초기조건 $p_1=1,\ p_2=\frac{5}{9}$를 만족하고, 위 점화식을 만족함을 보이자.

문제에 주어진 p_n에 $n=1,2$를 대입해보자.

$$p_1 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} = 1$$

$$p_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27} + \frac{16}{27} = \frac{5}{9}$$

문제에 주어진 p_n이 초기 조건을 만족함을 확인할 수 있다.

이제, 문제에 주어진 $p_n(n=1,2,\cdots)$이 위의 점화식을 만족하는지 확인해 보자. 위의 점화식의 우변에 문제에 주어진 p_{n-1}과 p_{n-2}를 대입하면,

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{2}{9}p_{n-2} &= \frac{1}{3}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^n + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + \frac{2}{9}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9}\right] + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{9}\right] \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} + 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

따라서 문제에 주어진 p_n는 위의 점화식을 만족한다. (10점)

(b) (총 30점)

조건부 확률 $\mathrm{P}(B|A)$는 다음의 식을 만족한다.

$$\mathrm{P}(B|A) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

$\mathrm{P}(A)$는 문제 (a)에 주어져 있으므로, 이 문제를 풀기 위해서는 $\mathrm{P}(A\cap B)$를 구하면 된다. 사건 $A\cap B$는 n번의 시도에서 연달아 성공하지도 연달아 실패하지도 않아야 하므로, 성공과 실패가 번갈아 가며 일어나야 한다. 이러한 경우는 첫 번째 시도에서 성공한 경우와 실패한 경우로 나누어 생각할 수 있다. n이 짝수라면, 전자와 후자의 사건이 발생할 확률은 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}$로 서로 같다. n이 홀수라면, 전자와 후자의 사건의 발생할 확률은 각각 $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}$, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}$이다. 따라서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\begin{cases} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}, & (n\text{은 짝수}) \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}, & (n\text{은 홀수}) \end{cases} \qquad (20\text{점})$$

위 식으로부터, 다음을 얻는다.

$$\mathrm{P}(B|A)=\begin{cases} \dfrac{2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{2}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}+2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}, & (n\text{은 짝수}) \\ \dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}+2\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}, & (n\text{은 홀수}) \end{cases} \qquad (10\text{점})$$

(c) (총 30점)

사건 $A\cap C$는 n번의 시도 중 k번 성공하였으나, 한 번도 연달아 성공하지 못한 사건이다. 이러한 사건이 일어나는 경우의 수는 연속한 성공이 없도록 각각의 k번의 성공 사이에 실패한 횟수를 정하는 방법의 수와 같다. 이 방법의 수를 얻기 위해, 다음처럼, $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$을 정의하자. 첫 번째 성공 이전에 일어난 실패의 횟수를 x_1이라 놓고, 첫 번째 성공 이후 두 번째 실패 이전에 발생한 실패의 횟수를 x_2, 같은 방법으로, $i=3, 4, \cdots, k$에 대해, $i-1$번째 성공 이후 i번째 성공 이전에 발생한 실패의 횟수를 x_i라 하자. 또한, k번째 성공 이후에 발생한 실패의 횟수를 x_{k+1}이라 하자. 총 실패한 횟수는 $n-k$이므로 x_i들은 다음의 식을 만족한다.

$$x_1+x_2+\ldots+x_{k+1}=n-k \qquad (10\text{점})$$

위 식에서, $x_1\geq 0$, $x_{k+1}\geq 0$이며, $i=2, 3, \cdots, k$에 대해, 연달은 성공이 없다는 조건으로부터 $x_i\geq 1$이다. 위 식의 해의 개수가 사건 $A\cap C$가 발생하는 경우의 수이다. 위 식의 해의 개수를 얻기 위해 x_i들을 다음처럼 치환하자.

$$y_i=x_i, \qquad i=1, k+1$$

$$y_i=x_i-1, \quad i=2, 3, \ldots, k.$$

위 치환을 통해 다음의 식을 얻는다.

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{k+1} = n - 2k + 1, \qquad \text{(10점)}$$

$$y_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, k+1.$$

위 식의 해의 개수는 $k+1$개의 원소로 이루어진 집합에서 중복을 허락하여 $n-2k+1$개를 뽑는 조합의 수와 같다. 따라서 위 식의 해의 개수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}_{k+1}H_{n-2k+1} &= {}_{n-k+1}C_{n-2k+1} \\ &= {}_{n-k+1}C_k \end{aligned}$$

따라서 사건 $A \cap C$가 발생하는 경우의 수는 ${}_{n-k+1}C_k$이다. (10점)

다 른 풀 이

사건 $A \cap C$는 n번의 시도 중 k번 성공하였으나, 한 번도 연달아 성공하지 못한 사건이다. 그러므로 성공을 ○로 실패를 ×로 표시하면 구하는 경우의 수는, $n-k$개의 ×를 배열한 후 아래와 같이 표시된 $n-k+1$개의 √ 중에서 k개의 √를 선택하여 그 자리에 ○를 배치하는 방법의 수와 같다. 따라서 구하는 경우의 수는 ${}_{n-k+1}C_k$이다.

$$\checkmark \times \checkmark \times \checkmark \times \checkmark \times \checkmark \times \checkmark \cdots \checkmark \times \checkmark \times \checkmark \times$$

(d) (총 10점)

문제 (c)의 풀이에서 사건 $A \cap C$가 발생하는 경우의 수는 ${}_{n-k+1}C_k$임을 보였다.

각 경우에 해당하는 사건은 n번의 시도 중 k번 성공하고 $n-k$번 실패해야 하므로, 각 경우에 해당하는 사건이 발생할 확률은 $\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$이다. 사건 $A \cap C$는 이러한 사건들의 합으로 이루어져 있으므로,

$$\mathrm{P}(A \cap B) = {}_{n-k+1}C_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} \qquad \text{(10점)}$$

13 서울시립대학교 수시(자연B)

※ 풀이과정을 반드시 기술할 것. 기술의 형식과 내용은 평가의 중요한 요소임.

문제 1 [24)]

자연수 n을 자연수 m으로 나누었을 때 몫이 q이고 나머지가 r인 경우 $n=mq+r$ $(0 \le r \le m-1)$로 나타낼 수 있다. 다음 물음에 답하여라.

(a) $4^{2000}-1$이 5^4의 배수임을 보여라.

(b) $503^{2000}-1$이 5^4의 배수임을 보여라.

(c) 2012^{2000}을 5^4으로 나눈 나머지를 구하여라.

(d) 2012^{2002}을 10^4으로 나눈 나머지를 구하여라.

문제 2

두 무한수열 $\{a_n\}$과 $\{b_n\}$에 대하여 새로운 수열 $\{c_n\}$을 다음과 같이 정의한다.

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k\, b_{n+1-k} \ (n \ge 1)$$

$$(\text{즉, } c_1 = a_1 b_1,\ c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1,\ c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1,\ \cdots)$$

이 때, $\{c_n\}$ = $\{a_n\} \diamond \{b_n\}$이라고 하자.

수열 $\{a_n\}$을 $\{a_n\}=(a_1, a_2, a_3, \cdots)$로 나타낼 때, 다음은 연산 $\diamond$을 적용한 예제이다.

$$(0, 1, 2, 0, 0, 0, 0, \cdots) \diamond (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, \cdots) = (0, 1, 3, 3, 2, 0, 0, \cdots)$$
$$(1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, \cdots) \diamond (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \cdots) = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \cdots)$$

모든 무한수열들의 집합을 S라고 하면, 연산 $\diamond$는 S에서 정의된 연산이다. 임의의 세 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$에 대하여

$$\{a_n\} \diamond (\{b_n\} \diamond \{c_n\}) = (\{a_n\} \diamond \{b_n\}) \diamond \{c_n\}$$

이 성립한다.

다음을 만족하는 수열을 $\{e_n\}$이라고 하자.

임의의 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\{a_n\} \diamond \{e_n\} = \{a_n\}$이다.

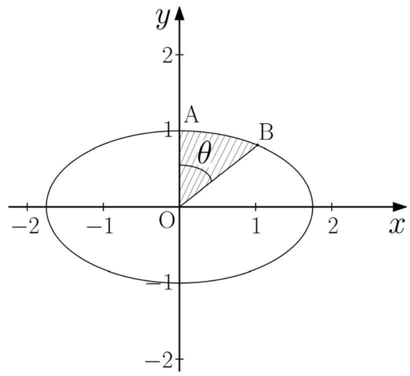
다음 물음에 답하여라.

(a) 수열 $\{e_n\}$을 구하여라.

(b) 임의의 자연수 m에 대하여 수열 $\{a_n\} = (1, 1, 0, 0, 0, \cdots)$을 m번 반복 연산하여 얻은 수열 $\underbrace{\{a_n\} \diamond \cdots \diamond \{a_n\}}_{m}$($m=2$인 경우, $\{a_n\} \diamond \{a_n\}$을 의미함)의 일반항을 구하여라. (단, 증명할 필요 없음)

(c) 수열 $\{3^{n-1}\} = (1, 3, 9, 27, 81, \cdots)$에 대하여 $\{3^{n-1}\} \diamond \{b_n\} = \{e_n\}$을 만족하는 수열 $\{b_n\}$을 구하여라. 또한 수열 $\{n \cdot 3^{n-1}\} = (1, 6, 27, 108, \cdots)$에 대하여 $\{n \cdot 3^{n-1}\} \diamond \{c_n\} = \{e_n\}$을 만족하는 $\{c_n\}$을 $\{b_n\}$을 이용하여 나타내어라.

문제 3



그림과 같이 좌표평면에 장축의 길이가 $2\sqrt{3}$이고 단축의 길이가 2인 타원이 있다. 타원 위의 점 B가 점 A(0,1)에서 출발하여 시계 방향으로 돌고 있다. 이 때, $\angle \mathrm{AOB} = \theta$라 하자. 다음 물음에 답하여라.

(a) 선분 OB의 길이를 θ를 이용하여 나타내어라.

(b) 시각 $t(0 \le t \le 1)$에서 $\theta = 2\pi t^2$이다. $\theta = \frac{\pi}{4}$인 순간에 점 B의 속력을 구하여라.

(c) 두 선분 OA, OB와 타원으로 둘러싸인 빗금 친 영역을 x축 둘레로 회전시켜서 생긴 회전체의 부피 $V(\theta)$를 구하고, $V(\theta)$의 θ에 대한 변화율이 최대가 되는 θ를 구하여라. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$이다.)

24) 서울시립대학교 입학처

논술유형분석

문항 수	수학 3문항	시간	120분
연관 개념	약수와 배수, 이항정리, 수열, 이항연산, 삼각함수, 미적분		

논 제 분 석

문제 1

제시문 없이 약수와 배수의 관계를 이항정리를 이용하여 밝히게 하고 있다. 이항정리를 익숙하게 사용할 수 있도록 연습이 필요하고 몫과 나머지에 대한 이해가 요구된다. 특히, (c)에서 $2012=4\times503$ 임을 생각해내지 못하면 곤란해질 수 있다.

문제 2

수열과 수열 사이의 연산을 정의하고, 결합법칙이 성립함을 보이고 있다. 실제로 교환법칙도 성립함을 알 수 있다. 주어진 연산에 있어서의 항등원과 역원을 찾게 하고 있는 문제로 수열 및 연산에 대한 깊은 이해가 필요하다.

문제 3

타원 위의 동점의 좌표를 삼각함수를 이용하여 나타내고 특정한 순간의 속력을 구하게 하고 있다. 또한, 적분을 이용하여 회전체의 부피와 부피의 변화율이 얼마인지 묻고 있다. 이때, θ를 t에 관한 함수로 표현함으로써 합성함수의 미분법을 알아야 제대로 답을 구할 수 있도록 하고 있다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 이항정리

자연수 n에 대하여 $(a+b)^n$의 전개식은

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0\, a^n + {}_n\mathrm{C}_1\, a^{n-1}b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}b^r + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n\, b^n$$
$$= \sum_{r=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}b^r$$

이다. 이와 같이 정리하는 것을 이항정리라고 한다. 이때, 각 항의 계수 ${}_n\mathrm{C}_0$, ${}_n\mathrm{C}_1$, ${}_n\mathrm{C}_2$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_r$, $\cdots$, ${}_n\mathrm{C}_n$을 이항계수, ${}_n\mathrm{C}_r\, a^{n-r}b^r$을 일반항이라고 한다.

2. 항등원과 역원

연산 $\circ$가 공집합의 아닌 집합 S에서 정의되어 있을 때,

① S의 임의의 원소 a에 대하여 $a \circ e = e \circ a = a$를 만족하는 S의 원소 e를 연산 $\circ$에 대한 항등원이라 한다.

② 연산 $\circ$에 대한 항등원이 e일 때, $a \circ x = x \circ a = e$를 만족하는 S의 원소 x를 연산 $\circ$에 대한 a의 역원이라 한다.

3. 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(z)$, $z=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=(f\circ g)(x)=f(g(x))$의 도함수는 $y'=\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{dz}\cdot\dfrac{dz}{dx}=f'(g(x))g'(x)$이다.

4. 삼각함수의 도함수

(1) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\tan x)' = \sec^2 x$

(2) $(\cot x)' = -\mathrm{cosec}^2 x$, $(\sec x)' = \sec x \tan x$, $(\mathrm{cosec}\, x)' = -\mathrm{cosec}\, x \cot x$

5. 속도와 가속도(평면 위의 운동)

좌표평면 위를 움직이는 점 P의 좌표 (x, y)는 시각 t의 함수이므로

$$x=f(t),\ y=g(t)$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이때, 점 P에서 x축 및 y축에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하면 점 Q는 x축 위에서 $x=f(t)$로 나타내어지는 직선운동을 하고, 점 R는 y축 위에서 $y=g(t)$로 나타내어지는 직선 운동을 한다.

시각 t에서 두 점 Q, R의 속도를 각각 v_x, v_y 라 하면

$$v_x = \frac{dx}{dt} = f'(t),\ v_y = \frac{dy}{dt} = g'(t)$$

이고 시각 t에서 두 점 Q, R의 가속도를 각각 a_x, a_y 라 하면

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = f''(t),\ \ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = g''(t)$$

이다.

따라서 평면 위의 운동에서 속도와 속력, 가속도와 가속도의 크기는 다음과 같다.

(1) 시각 t에서의 점 P의 속도와 속력

① 속도 : $\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right) = (f'(t),\ g'(t))$

② 속력 : $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$

(2) 시각 t에서의 점 P의 가속도와 가속도의 크기

① 가속도 : $\left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (f''(t),\ g''(t))$

② 가속도의 크기 : $\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} = \sqrt{\{f''(t)\}^2 + \{g''(t)\}^2}$

6. 회전체의 부피

구간 $[a, b]$에서 연속인 곡선 $y = f(x)$와 x축 및 두 직선 $x = a$, $x = b$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킬 때 생기는 회전체의 부피 V_x는

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2 dx$$

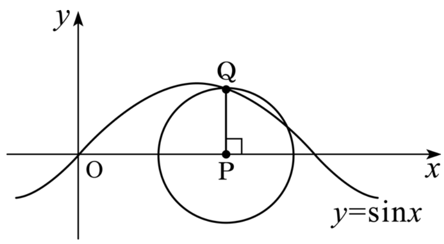
이다.

풀 어 보 기

문제 1 11^{22} 을 1000 으로 나누었을 때의 나머지는? (수능특강 미적분과 통계기본, EBS, 2012)

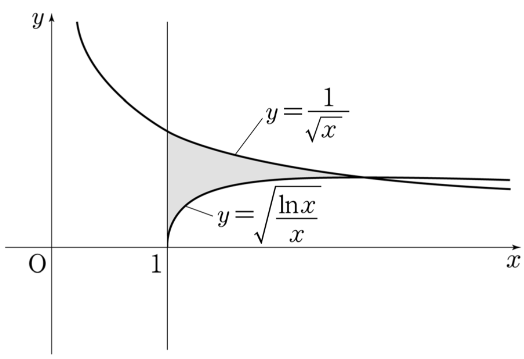
① 301 ② 311 ③ 321 ④ 331 ⑤ 341

문제 2 좌표평면에서 x축 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(0<t<\pi)$에서의 좌표는 $\left(\dfrac{t^2}{\pi},\ 0\right)$이다. 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\sin x$와 만나는 점을 Q라 할 때, 점 P를 중심으로 하고 선분 PQ를 반지름으로 하는 원의 넓이를 S라 하자. $t=\dfrac{\pi}{2}$인 순간, 넓이 S의 t에 대한 변화율은? (2007년 전국연합)



① $-\pi$ ② $-\dfrac{\pi}{2}$ ③ 0 ④ $\dfrac{\pi}{2}$ ⑤ π

문제 3 두 곡선 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $y=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$ 와 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시킨 회전체의 부피는 V이다. $\dfrac{100V}{\pi}$의 값을 구하시오.



읽 기 자 료

무한급수와 일반적인 이항정리[25)]

1664~1665년 겨울은 뉴턴이 처음으로 중요한 수학적 발견을 한 때였다. 1656년 영국 수학자 월리스(John Wallis)는 양의 정수 n에 대해 $y=(1-x^2)^n$ 꼴의 곡선의 $x=0$부터 $x=1$까지 아랫부분 면적을 구하는 새로운 방법을 발표했다. 뉴턴은 이 과정을 확장하여 $x=0$부터 임의의 x값까지의 면적에 적용시킴으로써, 그 결과로 만들어진 다항식의 계수들이 프랑스 수학자 파스칼에 의해 연구된 산술삼각형 행들의 각각의 값이라는 것을 알아냈다. 그리고 이러한 이항계수들을 임의의 유리수 n과 양의 정수 k에 대해 다음과 같이 정의했다.

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)(k-2)\cdots 1} \quad \text{(여기서, } \binom{n}{k}\text{는 } {}_n\mathrm{C}_k\text{를 나타낸다.)}$$

이와 같은 일반화는 임의의 유리수 n에 대하여 곡선 $y=(1-x^2)^n$ 아래의 면적을,

$$x-\binom{n}{1}\frac{x^3}{3}+\binom{n}{2}\frac{x^5}{5}-\binom{n}{3}\frac{x^7}{7}+\cdots$$

과 같이 무한합의 형태로 나타내는 것을 가능하게 했다.

오늘날 멱급수라 불리는 무한합은 다른 여러 가지 수학적 개념의 발전에 필수적인 기초가 되었다. 뉴턴은 삼각함수 $\sin(x)$와 $\cos(x)$, 그것들의 역함수인 $\arcsin(x)$와 $\arccos(x)$, 제곱근을 사용한 함수 $\sqrt{1-x}$ 그리고 자연로그 함수 $\ln(1+x)$에 대한 멱급수도 만들었다. 특히 자연로그 함수의 멱급수를 사용해서 임의의 수의 로그값을 소수 50째 자리 이상까지 정확하게 계산해냈다. 또한 다음과 같은 일반적인 이항정리를 유도했다.

$$(a+b)^n=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\cdots$$

n이 양의 정수인 경우, 그 합은 $n+1$개의 항을 가지며 이것은 그 당시 잘 알려진 공식과도 일치한다. 그리고 n이 유리수나 음수인 경우의 그 합은 무한급수의 형태가 되는데, 그는 이를 이용하여 π의 소수 16째 자리까지의 값과 수들의 제곱근과 세제곱근의 값을 원하는 자리까지 정확하게 계산해냈다. 또한 1669년에 쓴 'De analysi per aequationes numero terminorum infinitas(무한 개의 항으로 된 방정식의 분석)'에서 무한급수와 이항정리를 자세히 설명했다. 배로우는 뉴턴의 원고를 여러 다른 수학자들에게 보냈고 그들은 뉴턴의 혁신적인 생각에 강한 인상을 받았으나, 실제로 그 논문의 완성본은 1711년까지 출간되지 않은 상태로 남아 있었다.

25) 마이클 J. 브래들리, 달콤한 수학사, 일출봉, 2010

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 [정답] ③

$11^{22}=(1+10)^{22}$ 이므로 이항정리를 이용하면

$$(1+10)^{22}={}_{22}C_0+{}_{22}C_1\cdot 10+{}_{22}C_2\cdot 10^2+{}_{22}C_3\cdot 10^3+\cdots+{}_{22}C_{22}\cdot 10^{22}$$

이때, 11^{22} 을 1000 으로 나눈 나머지는 ${}_{22}C_0+{}_{22}C_1\cdot 10+{}_{22}C_2\cdot 10^2$ 을 1000 으로 나눈 나머지와 같다.

$${}_{22}C_0+{}_{22}C_1\cdot 10+{}_{22}C_2\cdot 10^2=1+220+23100=23321$$

이므로 11^{22} 을 1000 으로 나눈 나머지는 321 이다.

문제 2 [정답] ③

$S=\pi(\sin x)^2$ 에서 $\dfrac{dS}{dt}=2\pi\sin x\cos x\dfrac{dx}{dt}$

$x=\dfrac{t^2}{\pi}$ 로 놓으면 $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2t}{\pi}$ 이고 $t=\dfrac{\pi}{2}$ 일 때 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 이다.

$$\therefore\ \left[\frac{dS}{dt}\right]_{t=\frac{\pi}{2}}=2\pi\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times 1=\pi$$

문제 3 [정답] 50

$\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\sqrt{\dfrac{\ln x}{x}}$ 에서 $\sqrt{\ln x}=1$ 이므로 $\ln x=1$ 이다. 따라서 $x=e$ 이고 부피는

$$V=\pi\int_1^e\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{\ln x}{x}}\right)^2\right\}dx=\pi\int_1^e\left(\frac{1-\ln x}{x}\right)dx$$

와 같이 나타낼 수 있다. 이때, $1-\ln x=t$ 라 하면 $-\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ 이고 $x=1$ 일 때 $t=1$, $x=e$ 일 때 $t=0$ 이므로

$$V=\pi\int_1^0 t(-dt)=\pi\int_0^1 t\,dt=\pi\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^1=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \frac{100V}{\pi}=50$$

문제 2

(a) $4^{2000}-1=(5-1)^{2000}-1=\sum_{k=0}^{2000} {}_{2000}\mathrm{C}_k\, 5^k(-1)^{2000-k}-1$

$$=\sum_{k=1}^{2000} {}_{2000}\mathrm{C}_k 5^k(-1)^{2000-k}$$

이고 $k\ge 1$에 대하여 ${}_{2000}\mathrm{C}_k\, 5^k$이 5^4의 배수이므로 $4^{2000}-1$은 5^4의 배수이다.

(b) $503^{2000}=(500+3)^{2000}=\sum_{k=1}^{2000} {}_{2000}\mathrm{C}_k\cdot 500^k\cdot 3^{2000-k}+3^{2000}$

이고 $k\ge 1$에 대하여 ${}_{2000}\mathrm{C}_k 500^k$이 5^4의 배수이므로 503^{2000}과 3^{2000}을 5^4로 나눈 나머지는 서로 같다. 따라서 $3^{2000}-1$이 5^4의 배수임을 보이면 된다. 또

$$3^{2000}=9^{1000}=(10-1)^{1000}=\sum_{k=1}^{1000} {}_{1000}\mathrm{C}_k 10^k\cdot(-1)^{1000-k}+1$$

이고 $k\ge 1$에 대하여 ${}_{1000}\mathrm{C}_k 10^k$이 5^4의 배수이므로 $3^{2000}-1$은 5^4의 배수이다. 따라서 $503^{2000}-1$도 5^4의 배수이다.

(c) (a)와 (b)에 의해 503^{2000}, 4^{2000}을 각각 5^4로 나눈 나머지가 모두 1이므로 적당한 자연수 k, m에 대하여 $4^{2000}=5^4k+1$, $503^{2000}=5^4m+1$꼴이다.
따라서

$$2012^{2000}=(4\cdot 503)^{2000}=4^{2000}\cdot 503^{2000}=(5^4k+1)(5^4m+1)=5^4(5^4km+k+m)+1$$

이므로 2012^{2000}을 5^4로 나눈 나머지는 1이다.

(d) (c)에 의해 적당한 자연수 k에 대하여 $2012^{2000}=5^4k+1$꼴이고

$$2012^2=2^4\cdot 253009=4048144$$

이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}2012^{2002}&=2012^{2000}\cdot 2012^2=\left(5^4k+1\right)\cdot 2^4\cdot 253009\\&=10^4\cdot k\cdot 253009+2^4\cdot 253009\\&=10^4\cdot k\cdot 253009+4048144\end{aligned}$$

따라서 2012^{2002}을 $10^4=5^4\cdot 2^4$으로 나눈 나머지는 8144이다.

문제 2

(a) 임의의 수열 $\{a_n\}=(a_1, a_2, a_3, \cdots)$에 대하여 $\{a_n\}\diamond\{e_n\}=\{a_n\}$을 만족하는 수열 $\{e_n\}$

을 $(e_1, e_2, e_3, \cdots)$라 하면,

$$(a_1e_1,\ a_1e_2+a_2e_1,\ a_1e_3+a_2e_2+a_3e_1,\ \cdots) = (a_1, a_2, a_3, \cdots)$$

이 된다. 이를 정리하면

$$a_1e_1 = a_1,\ a_1e_2+a_2e_1 = a_2,\ a_1e_3+a_2e_2+a_3e_1 = a_3,\ \cdots$$

이다. 여기서 모든 a_1은 임의의 수이므로 $e_1 = 1$이 된다. 또한 두 번째 식에서 $e_1 = 1$을 대입하면 $a_1e_2 + a_2 = a_2$이고, 임의의 수 a_1에 대해 만족하려면 $e_2 = 0$이 된다. 같은 방법으로 $i \geq 3$에 대하여 e_i를 계산하면 모두 0이 된다.

따라서 $\{e_n\} = (1, 0, 0, 0, \cdots)$이 된다.

(b) 정의를 이용하여 $\{a_n\} = (1, 1, 0, 0, 0, \cdots)$에 대해 $\{a_n\} \diamond \{a_n\}$을 계산하면 다음과 같다.

$$\{a_n\} \diamond \{a_n\} = (1, 1, 0, 0, 0, \cdots) \diamond (1, 1, 0, 0, 0, \cdots) = (1, 2, 1, 0, 0, 0, \cdots)$$

여기서 한 번 더 연산한 $\{a_n\} \diamond \{a_n\} \diamond \{a_n\}$를 계산하면 다음과 같다.

$$\{a_n\} \diamond \{a_n\} \diamond \{a_n\} = (1, 2, 1, 0, 0, 0, \cdots) \diamond (1, 1, 0, 0, 0, \cdots) = (1, 3, 3, 1, 0, 0, \cdots)$$

이를 반복해서 적용하면 $\underbrace{\{a_n\} \diamond\ \cdots\ \diamond \{a_n\}}_{m}$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\underbrace{\{a_n\} \diamond\ \cdots\ \diamond \{a_n\}}_{m} &= ({}_m\mathrm{C}_0, {}_m\mathrm{C}_1, {}_m\mathrm{C}_2, {}_m\mathrm{C}_3, \cdots, {}_m\mathrm{C}_{m-1}, {}_m\mathrm{C}_\mathrm{m}, 0, 0, 0, \cdots) \\ &= (1, m, {}_m\mathrm{C}_2, {}_m\mathrm{C}_3, \cdots, m, 1, 0, 0, 0, \cdots)\end{aligned}$$

(c) $\{b_n\} = (b_1, b_2, b_3, \cdots)$이라 두고 (a)에서 구한 $\{e_n\} = (1, 0, 0, 0, \cdots)$을 이용하면 다음 식이 성립한다.

$$(1, 3, 9, 27, 82, \cdots) \diamond (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \cdots) = (1, 0, 0, 0, \cdots)$$

따라서 $b_1 = 1$, $b_2 = -3$, $b_3 = 0$이 되고, 같은 방법으로 $i \geq 4$에 대해 b_i를 계산하면 모두 0이 된다. 따라서 $b_n = (1, -3, 0, 0, 0, \cdots)$이 된다.

한편, $\{n \cdot 3^{n-1}\} \diamond \{b_n\} = \{3^{n-1}\}$이고, $\{3^{n-1}\} \diamond \{b_n\} = \{e^n\}$ 이므로

$$\{n \cdot 3^{n-1}\} \diamond \{b_n\} \diamond \{b_n\} = \{3^{n-1}\} \diamond \{b_n\} = \{e_n\}$$

이다. 따라서 $\{n \cdot 3^{n-1}\} \diamond \{c_n\} = \{e_n\}$을 만족하는 $\{c_n\}$은 $\{b_n\} \diamond \{b_n\}$이다. 즉, 다음과 같다.

$$\{c_n\} = \{b_n\} \diamond \{b_n\} = (1, -3, 0, 0, 0, 1 \cdots) \diamond (1, -3, 0, 0, 0, \cdots) = (1, -6, 9, 0, 0, 0, \cdots)$$

문제 3

(a) 주어진 타원의 방정식은 $\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 이고, 선분 OB의 길이를 l 이라 하면, 점 B의 좌표는 $\left(l\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right),\ l\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=(l\sin\theta,\ l\cos\theta)$ 이므로, 다음 식이 성립한다.

$$\frac{(l\sin\theta)^2}{3}+(l\cos\theta)^2=1$$

따라서, $l^2=\dfrac{3}{\sin^2\theta+3\cos^2\theta}=\dfrac{3}{1+2\cos^2\theta}$ 이고, $l=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{1+2\cos^2\theta}}$ 이다.

(b) B의 좌표를 (a, b)라 할 때,

$$a=\overline{\mathrm{OB}}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{1+2\cos^2\theta}},\quad b=\overline{\mathrm{OB}}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}\cos\theta}{\sqrt{1+2\cos^2\theta}}$$

$\theta=2\pi t^2$이므로 $\dfrac{d\theta}{dt}=4\pi t$이고, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$일 때, $t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\ (0\le t\le 1)$이다.

합성함수의 미분법을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\frac{da}{dt}=\frac{da}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=\frac{3\sqrt{3}\cos\theta}{(1+2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot 4\pi t,\qquad \frac{db}{dt}=\frac{db}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{(1+2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\cdot 4\pi t$$

그러므로 위 식에 $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, $t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$을 대입하면 점 B의 속도벡터

$v=\left(\dfrac{3\sqrt{6}\pi}{4},\ -\dfrac{\sqrt{6}\pi}{4}\right)$를 얻는다.

이 때 점 B의 속력 $|v|$는 $\sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{6}\pi}{4}\right)^2+\left(-\dfrac{\sqrt{6}\pi}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{2}\pi$이다.

(c) 점 B의 좌표를 (a, b)라 하고, 점$(a, 0)$를 C라 하자. $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 이므로 $a>0,\ b>0,\ b^2=1-\dfrac{a^2}{3}$ 이다.

구하고자 하는 회전체의 부피 V는 영역 OCBA를 x축의 둘레로 회전시켜서 얻은 회전체의 부피에서 삼각형 OCB를 x축의 둘레로 회전시켜서 얻은 회전체(밑면의 반지름이 b인 원이고, 높이가 a인 원뿔)의 부피를 뺀 것과 같다. 그러므로

$$V=\pi\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{3}\right)dx-\frac{1}{3}\pi b^2 a$$

$$=\pi\left[x-\frac{x^3}{9}\right]_0^a-\frac{\pi}{3}a(1-\frac{a^2}{3})=\frac{2}{3}a\pi$$

이고 $a=\dfrac{\sqrt{3}\sin\theta}{\sqrt{1+2\cos^2\theta}}$ 이므로 $V=\dfrac{2\sqrt{3}\sin\theta}{3\sqrt{1+2\cos^2\theta}}\pi$ 이다. 따라서,

$$\frac{dV}{d\theta}=\frac{2\sqrt{3}\cos\theta}{(1+2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}\pi$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2}=\frac{2\sqrt{3}\sin\theta(4\cos^2\theta-1)}{(1+2\cos^2\theta)^{\frac{5}{2}}}\pi$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ 에서 $\dfrac{d^2V}{d\theta^2}=0$ 의 해를 구하면 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 이고, 이때 극댓값을 갖는다. 그러므로 $\dfrac{dV}{d\theta}$ 는 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 에서 최댓값 $\dfrac{2\sqrt{2}\pi}{3}$ 을 갖는다.

14 성균관대학교 모의

제시문 1 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.** [26]

〈제시문 1-1〉 M 이 R^2 의 부분집합이고 A 가 2×2 행렬일 때, $\mathrm{A(X)} = \{\mathrm{AX} : \mathrm{X} \in \mathrm{M}\}$ 이다.

〈제시문 1-2〉 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $\mathrm{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 이고 $\mathrm{Y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ 이다.

논제 1-1

$\mathrm{A(X+Y)} = \mathrm{A(X)} + \mathrm{A(Y)}$ 임을 보이시오.

논제 1-2

임의의 실수 c 에 대하여 $\mathrm{A}(c\mathrm{X}) = c\mathrm{A(X)}$ 임을 보이시오.

논제 1-3

L 이 두 점 X 와 Y 를 연결하는 선분일 때 A(L)에 대하여 논하시오.

26) 성균관대학교 입학처

제시문 2 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

〈제시문 2-1〉 아래의 〈그림 1〉과 같은 지름 AC 가 4㎞ 인 원형 호수가의 지점 A 에 성균이가 있다.

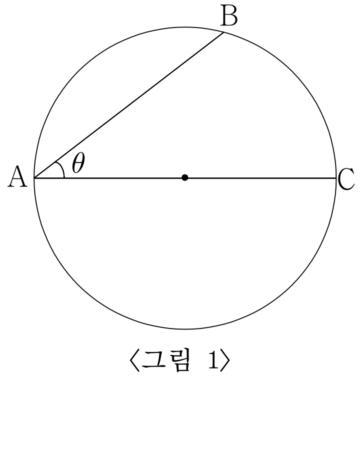
〈제시문 1-2〉 성균이는 AB 구간은 시속 5㎞ 의 속도로 보트를 타고 가며, BC 구간은 시속 10㎞ 로 뛰어간다.

논제 2-1

성균이가 A 에서 반대 지점 C 까지 가는데 걸리는 시간을 θ 의 함수로 나타내시오(여기서 θ 는 각BAC 이다).

논제 2-2

성균이가 A 에서 가능한 한 늦게 반대 지점 C 에 가고자 한다. 얼마의 각도(θ)로 보트를 타고 가야 하는가?



〈그림 1〉

논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 2문항, 과학3문항	시간	120분
연관 개념	행렬, 원주각과 중심각, 미분법		

제 시 문 분 석

제시문

〈제시문 1〉은 행렬식을 정의하고, 행렬 A, X, Y 를 주고 있다.

〈제시문 2〉는 성균이의 위치와 각 구간별 성균이의 속도를 제시하고 있다.

논 제 분 석

논제 1-1, 2

주어진 행렬식을 이용하여 행렬의 곱셈을 계산하는 문제이다.

논제 1-3

앞서 계산한 [논제 1-1], [논제 1-2]의 결과를 이용하여 R^2 상의 주어진 두 점을 연결하는 선분이 행렬 A 에 의하여 어떤 선분으로 옮겨진다는 사실을 보이는 문제이다. 주어진 두 점을 연결하는 선분의 방정식과 행렬의 성질을 알고 있어야 하는 것이 관건이다.

논제 2-1

원에서 삼각함수를 이용하여 선분의 길이를 구하고, 부채꼴의 중심각에 대한 호의 길이를 나타내는 문제이다. 또한 속력과 시간, 거리의 관계식을 이용하여 시간을 각에 대한 함수로 나타내어야 한다.

논제 2-2

함수의 최댓값을 삼각함수의 미분법을 이용하여 구하는 문제이다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 행렬의 곱셈에 대한 성질

합과 곱이 정의되는 세 행렬 A, B, C 에 대하여

1) $(\mathrm{AB})\mathrm{C} = \mathrm{A}(\mathrm{BC})$

2) $\mathrm{A}(\mathrm{B}+\mathrm{C}) = \mathrm{AB}+\mathrm{AC}$

3) $k(\mathrm{AB}) = (k\mathrm{A})\mathrm{B} = \mathrm{A}(k\mathrm{B})$ (단, k는 실수)

2. 점의 자취

$m+n=1$ 을 만족하는 두 실수 m, n 에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ 인 점 P의 자취를 구하면 다음과 같다.

1) $m>0,\ n>0$ 이면

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$$

점 P 는 선분 BA를 $m:n$ 으로 내분하는 점

2) $m>0, n<0$ 이면

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{m\overrightarrow{\mathrm{OA}} - (-n)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m-(-n)}$$

점 P 는 선분 BA를 $m:(-n)$ 으로 외분하는 점

3) $m<0, n>0$ 이면

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = m\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \frac{-(-m)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + n\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{-(-m)+n}$$

점 P 는 선분 BA를 $(-m):n$ 으로 외분하는 점

1), 2), 3)에 의하여 점 P의 자취는 두 점 A, B를 지나는 직선이다.

3. 함수의 최대 · 최소

함수 $y=f(x)$ 가 열린 구간 (a, b) 에서 미분가능하고, 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속일 때, 최댓값과 최솟값은 다음과 같은 순서로 구한다.

1) 주어진 구간에서의 $f(x)$ 의 극댓값과 극솟값을 구한다.

2) 주어진 구간의 양 끝값 $f(a), f(b)$ 를 구한다.

3) 위에서 구한 극댓값, 극솟값, $f(a), f(b)$ 중에서 가장 큰 값이 최댓값이고, 가장 작은 값이 최솟값이다.

풀 어 보 기

문제 1 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$이 나타내는 일차변환에 의하여 직선 $3x+y=1$이 직선 $ax+by=1$로 옮겨진다고 한다. 이 때, 두 수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오.
(2001년 전국연합)

문제 2 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$으로 나타내어지는 일차변환에 의하여 직선 $x+2y-2=0$ 위의 모든 점이 (a, b)로 옮겨진다. 이 때, 상수 a, b의 곱 ab의 값은? (2011년 전국연합)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ 14

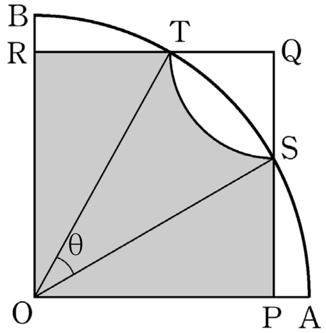
문제 3 평면 위에 삼각형 OAB가 있다. $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ $(s\geq 0, t\geq 0)$를 만족하는 점 P가 그리는 도형에 대한 옳은 설명을 〈보기〉에서 모두 고른 것은? (2005년 전국연합)

〈 보 기 〉

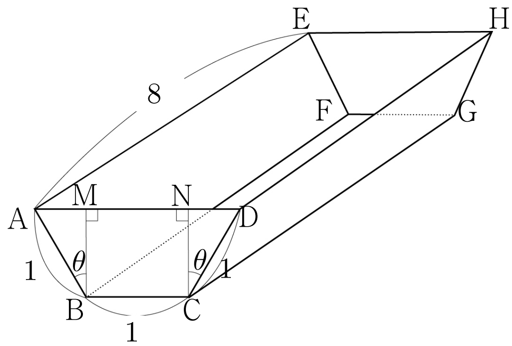
ㄱ. $s+t=1$일 때, 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다.
ㄴ. $s+2t=1$일 때, 점 P가 그리는 도형의 길이는 선분 AB의 길이보다 크다.
ㄷ. $s+2t\leq 1$일 때, 점 P가 그리는 영역은 삼각형 OAB를 포함한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

문제 4 그림과 같이 중심각의 크기가 $90°$이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 AOB와 선분 OA 위를 움직이는 점 P가 있다. 선분 OP를 한 변으로 하는 정사각형 OPQR가 호 AB와 서로 다른 두 점 S, T에서 만날 때, 정사각형 OPQR에서 점 Q를 중심으로 하고 반지름이 QS인 부채꼴 SQT를 제외한 어두운 부분의 넓이를 D라 하자. $\angle SOT=\theta$라 할 때, D가 최대가 되도록 하는 θ에 대하여 $10\pi\tan\theta$의 값을 구하시오. (2009학년도 평가원)



문제 5 그림과 같은 사각기둥의 물통에서 등변 사다리꼴 ABCD에 대하여, $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=1$, $\overline{AE}=8$이고, 꼭짓점 B, C에서 선분 AD에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 할 때, $\angle ABM=\angle DCN=\theta$이다. 물통의 부피의 최댓값이 V일 때, V^2의 값을 구하시오. (2007년 전국연합)



예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 -35

직선 $3x+y=1$ 위의 임의의 점 $(x,\ y)$가 일차변환에 의하여 $(x',\ y')$으로 변환되므로

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+3y \end{pmatrix}$$

$\therefore x'=x+2y,\ y'=2x+3y$ 이다.

이를 $ax'+by'=1$에 대입하면

$$a(x+2y)+b(2x+3y)=1$$

$$(a+2b)x+(2a+3b)y=1$$

이 직선이 $3x+y=1$과 일치하므로 $a+2b=3,\ 2a+3b=1$이다.

이를 연립하면 $a=-7,\ b=5$ 이고, 따라서 $ab=-35$이다.

문제 2 정답 ④

직선 $x+2y-2=0$ 위의 모든 점이 점 $(a,\ b)$로 옮겨지므로

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+2y \\ 3(x+2y) \end{pmatrix}$이고, $\therefore a=x+2y,\ b=3(x+2y)$

직선 $x+2y-2=0$ 위의 모든 점 $(x,\ y)$는 $x+2y=2$ 를 만족하므로

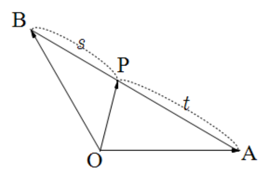
$a=x+2y=2,\ b=3(x+2y)=6$이고, 따라서 $ab=12$이다.

문제 3 정답 ①

ㄱ. $s+t=1$이므로

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ (단, $0\le t\le 1$)이다.

즉, 점 P가 그리는 도형은 선분 AB이다. (참)

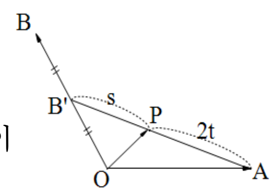


ㄴ. $s+2t=1$이므로

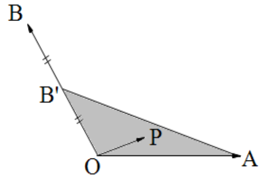
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2(1-s)\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$

(단, $0\le s\le 1$)이다.

즉, 점 P가 그리는 도형은 오른쪽 그림의 선분 AB'이고, 이 길이는 선분 AB의 길이보다 작다. (거짓)



ㄷ. $s \geq 0, t \geq 0$가 $s+2t \leq 1$을 만족하는 점 P가 그리는 영역은 삼각형 OAB'의 둘레와 내부 영역이다. 즉, 삼각형 OAB에 포함된다. (거짓)

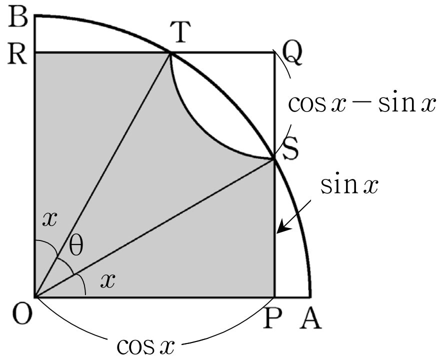


문제 4 정답 20

$\angle SOT = \theta$이므로 $\angle SOP = x\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$라 하면,

오른쪽 그림과 같이 $x = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$이고,

$\overline{OP} = \cos x$, $\overline{SP} = \sin x$ 이다.



$$D = \cos^2 x - (\cos x - \sin x)^2 \times \frac{\pi}{4}$$
$$= \cos^2 x - (1 - 2\sin x \cos x) \times \frac{\pi}{4}$$
$$= \cos^2 x - (1 - \sin 2x) \times \frac{\pi}{4}$$

$D' = -2\cos x \sin x + \frac{\pi}{2}\cos 2x = -\sin 2x + \frac{\pi}{2}\cos 2x = 0$ 이고

즉, $\tan 2x = \frac{\pi}{2}\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$일 때, D는 최댓값을 가진다.

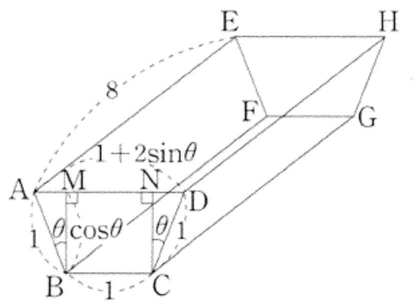
$$\tan 2x = \tan 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta = \frac{\pi}{2}$$

$\therefore \tan\theta = \frac{2}{\pi}$ 이므로 $10\pi\tan\theta = 10\pi \times \frac{2}{\pi} = 20$ 이 된다.

문제 5 정답 108

$\overline{AD} = 1 + 2\sin\theta$, $\overline{MB} = \cos\theta$이므로

사다리꼴의 넓이는 $\frac{1}{2} \times \{1 + (1 + 2\sin\theta)\} \times \cos\theta$



$$V(\theta) = \frac{1}{2} \times \{1 + (1 + 2\sin\theta)\} \times \cos\theta \times 8$$
$$V(\theta) = 8(\cos\theta + \sin\theta\cos\theta)$$
$$V'(\theta) = 8(1 - 2\sin^2\theta - \sin\theta) = 0$$
$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 1 = 0$$
$$(\sin\theta + 1)(2\sin\theta - 1) = 0$$

$\sin\theta = -1$ 또는 $\sin\theta = \frac{1}{2}$ 일 때, 극값을 가진다.

$\sin\theta = -1$이 될 수 없으므로 $\sin\theta = \frac{1}{2}$에서 $\theta = \frac{\pi}{6}$이다. $\left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$

따라서 $\theta = \frac{\pi}{6}$일 때 극댓값을 가지고 부피가 최대이다.

$$V\left(\frac{\pi}{6}\right) = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}\right) = 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 6\sqrt{3}$$

$$V^2 = 108$$

논제 1-1

$\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$이므로 $\mathrm{A}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$이다.

$\mathrm{A}(\mathrm{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix}$, $\mathrm{A}(\mathrm{Y}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}$이므로

$\mathrm{A}(\mathrm{X}) + \mathrm{A}(\mathrm{Y}) = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 15 \end{bmatrix}$ 이다.

따라서 $\mathrm{A}(\mathrm{X}+\mathrm{Y}) = \mathrm{A}(\mathrm{X}) + \mathrm{A}(\mathrm{Y})$가 성립한다.

논제 1-2

임의의 실수 c에 대하여 행렬의 곱셈에 대한 성질에 의해

$\mathrm{A}(c\mathrm{X}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ 2c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5c \\ 10c \end{bmatrix} = c\begin{bmatrix} 5 \\ 10 \end{bmatrix} = c\mathrm{A}(\mathrm{X})$ 이므로 $\mathrm{A}(c\mathrm{X}) = c\mathrm{A}(\mathrm{X})$ 이 성립한다.

논제 1-3

L이 두 점 X과 Y를 연결하는 선분이므로, $\mathrm{L} = t\mathrm{X} + (1-t)\mathrm{Y}$ $(0 \le t \le 1)$ 이다.

논제 1-2, **논제 1-3**의 결과에 의해

$\mathrm{A}(\mathrm{L}) = \mathrm{A}(t\mathrm{X} + (1-t)\mathrm{Y}) = \mathrm{A}(t\mathrm{X}) + \mathrm{A}((1-t)\mathrm{Y}) = t\mathrm{A}(\mathrm{X}) + (1-t)\mathrm{A}(\mathrm{Y})$ $(0 \le t \le 1)$ 이고,

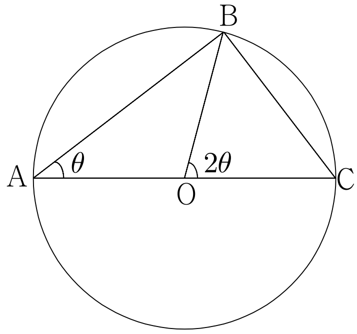
따라서 A(L)은 A(X)와 A(Y)를 연결하는 선분이 된다.

논제 2-1

주어진 그림에서 중심을 O라 하자.

점 B와 점 C를 연결해서 만들어진 $\overline{AC}$가 지름이므로, △ABC은 직각삼각형이다.

$\cos\theta = \dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{AB}}{4}$ 이므로, $\overline{AB} = 4\cos\theta(\mathrm{km})$이다.



∠BOC는 △AOB의 한 외각이고, △AOB가 이등변삼각형이므로 $\angle BAO = \angle ABO = \theta$ 이다. 따라서 $\angle BOC = 2\theta$이다. $\overset{\frown}{BC}$의 길이는 중심각이 2θ이고, 원의 반지름이 2(km)이므로 $\overset{\frown}{BC} = 4\theta(\mathrm{km})$이다.

구간 AB와 BC에서 속력이 각각 시속 5km 와 10km 이므로

A에서 C까지 가는데 걸리는 시간을 $f(\theta)$라 하면

$$f(\theta) = \frac{4\cos\theta}{5} + \frac{4\theta}{10} = \frac{4}{5}\cos\theta + \frac{2}{5}\theta \ \left(0 \le \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

이 된다.

논제 2-2

가능한 한 늦게 반대지점 C에 가고자 하는 것은 걸리는 시간이 최대가 될 때이므로 $f(\theta)$가 최대일 때를 구하면 된다.

$f'(\theta) = -\dfrac{4}{5}\sin\theta + \dfrac{2}{5} = 0 \ \left(0 \le \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$을 만족하는 θ의 값은 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$이다.

$f(\theta)$가 이계도함수를 가지고 $f''(\theta) = -\dfrac{4}{5}\cos\theta$이다.

$f''\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{5} < 0$이므로 $f(\theta)$는 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$에서 극댓값을 갖는다.

따라서 $f(\theta)$의 최댓값 역시 $\theta = \dfrac{\pi}{6}$ 에서 가지게 되므로, $\theta = \dfrac{\pi}{6} = 30^\circ$ 의 각도로 보트를 타고 갈 때, 가장 늦게 도착할 것이다.

15 성균관대학교 수시

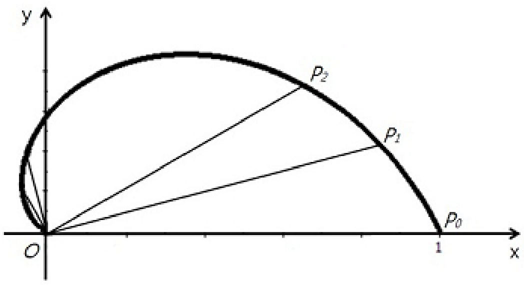
제시문 1 제시문을 읽고 물음에 답하여라[27)]

〈제시문 1-1〉 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$일 때, 수열 $\{c_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n \le c_n \le b_n$이고, $\alpha = \beta$이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$이다.

〈제시문 1-2〉 매개변수 θ로 나타낸 곡선 C가 다음과 같이 주어졌다.

$$C: \begin{cases} x = \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta \\ y = \left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta \end{cases} \quad (0 \le \theta \le \pi)$$

닫힌 구간 $[0, \pi]$를 $n(n \ge 2)$등분했을 때 각 분점을 $\theta_k\,(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$라 하고, θ_k에 대응하는 곡선 위의 점을 P_k라 하자. (단, $\theta_0 = 0$, $\theta_n = \pi$)



논제 1-1

삼각형 $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}$의 넓이 $A_k\,(k = 0, 1, 2, \cdots, n-2)$를 구하시오. (단, O는 원점)

논제 1-2

$0 \le k \le n-2$일 때 다음 부등식을 증명하시오.

$$\left(1 - \sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)^2 \le \left(1 - \sin\frac{k\pi}{2n}\right)\left(1 - \sin\frac{k+1}{2n}\pi\right) \le \left(1 - \sin\frac{k\pi}{2n}\right)^2$$

논제 1-3

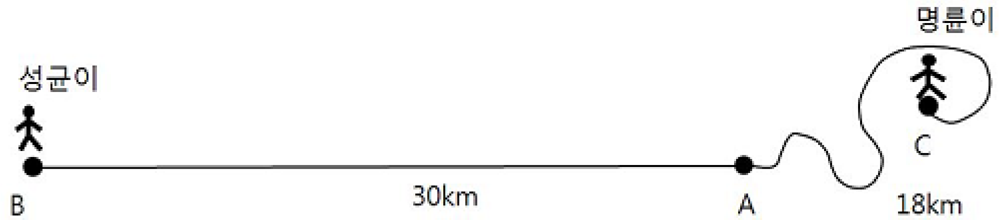
점 $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \cdots, \mathrm{P}_n$의 순서대로 연결한 선분들과 x축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n이라 할 때, [논제 1-1]과 [논제 1-2]의 결과를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} S_n$을 구하시오.

---

27) 성균관대학교 입학처

제시문 2 제시문을 읽고 물음에 답하여라

〈제시문 2-1〉 중간값 정리.
함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 일 때, $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f(c)=k$ 인 c 가 열린 구간 (a,b) 에 적어도 하나 존재한다.
〈제시문 2-2〉 함수 $f(x)$ 가 어떤 구간에서 미분가능하고, 이 구간의 모든 x 에 대하여
(1) $f'(x) > 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 증가한다.
(2) $f'(x) < 0$ 이면 $f(x)$ 는 이 구간에서 감소한다.
〈제시문 2-3〉 두 점 사이의 최단거리는 두 점을 연결하는 선분의 길이이다.
〈제시문 2-4〉 아래의 그림과 같이 지점 A 와 지점 B 는 30km의 곧은 도로로 연결되어 있고, 지점 A 와 지점 C 는 18km의 구부러진 도로로 연결되어 있다. (단, 도로는 평탄하다.)



〈제시문 2-5〉 성균이는 지점 B 를 출발하여 도로를 따라 시속 15km/h 의 속력으로 지점 A 로 달려가고, 명륜이는 성균이와 동시에 지점 C 를 출발하여 도로를 따라 시속 6km/h 의 속력으로 지점 A 로 걸어간다.

논제 2-1

지점 A 와 성균이 사이의 최단거리와 지점 A 와 명륜이 사이의 최단거리가 같아지는 순간이 출발 후 2시간 이내에 적어도 한번 존재함을 보이시오.

논제 2-2

지점 C 와 지점 A 를 연결하는 도로가 18km/h 의 곧은 도로라고 하면, 지점 A 와 성균이 사이의 최단거리와 지점 A 와 명륜이 사이의 최단거리가 같아지는 순간이 출발 후 2 시간 이내에 오직 한 번 존재함을 보이시오.

논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 2문항 과학3문항	시간	120분
연관개념	수열의 극한값의 대소관계, 매개변수 방정식, 삼각형의 넓이, 중간값정리, 미분가능한 함수의 증가와 감소		

제 시 문 분 석

제시문 1

수열의 극한값의 대소관계 중 하나인 조임정리를 소개하고, 매개변수 방정식을 제시하고 있다.

제시문 2

중간값 정리와 도함수를 이용한 함수의 증가, 감소를 제시하고 있다. 또한 두 점 사이의 최단거리를 정의하고 세 지점 사이의 문제 상황을 제시하고 있다.

논 제 분 석

논제 1-1

매개변수 방정식을 통해 나타내어진 곡선위의 점 P_k, P_{k+1}과 원점으로 만들어진 삼각형의 넓이를 구하도록 한다. 세 점의 좌표가 주어진 경우 삼각형의 넓이를 간단히 구할 수 있다.

논제 1-2

주어진 범위$\left(0 \le \dfrac{k\pi}{2n} \le \dfrac{\pi}{2}\right)$에서 $\sin$ 함수는 증가함수임을 이용하여 부등식의 대소관계를 증명할 수 있다.

논제 1-3

S_n이 [논제 1-1]을 통해 계산한 삼각형 A_k의 합이라는 것을 알 수 있다. 그리고 그 극한값은 [논제 1-2]의 부등식과 〈제시문 1-1〉에 주어진 수렴하는 수열의 대소관계를 이용하여 구할 수 있다.

논제 2-1

성균이와 명륜이의 시간에 따른 최단거리의 함수를 정의하여, 중간값 정리를 이용하여 두 지점 사이의 최단거리가 같아지는 순간이 존재함을 밝힐 수 있다.

논제 2-2

두 도로가 모두 곧은 도로라는 조건에서 시간에 따른 최단거리의 함수를 시간에 대한 일차식으로 표현할 수 있음을 알 수 있다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 삼각형의 넓이

좌표평면 위의 세 점 $\mathrm{A}(x_1, y_1), \mathrm{B}(x_2, y_2), \mathrm{C}(x_3, y_3)$ 가 주어졌을 때, 삼각형 ABC 의 넓이 S 는

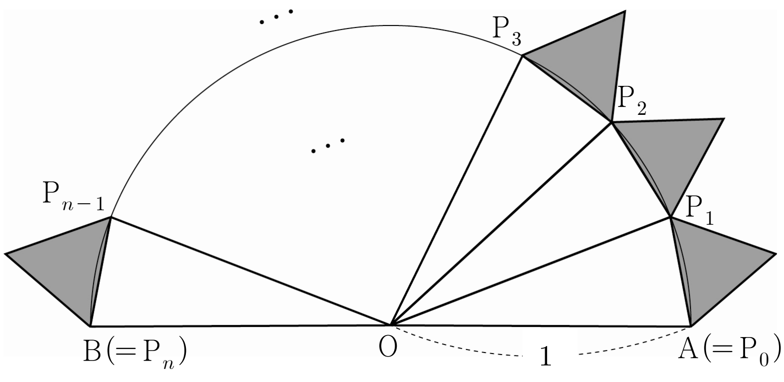
$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left|(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_1y_3)\right|$$

풀 어 보 기

문제 1 함수 $f(x)$ 가 $x>0$ 인 모든 실수 x 에 대하여 $3x < f(x) < 2x^2 + 3x$ 를 만족시킬 때, $\lim_{x \to +0} \frac{f(2x)}{3x}$ 의 값을 구하시오. (2013 EBS수능특강 수학2)

문제 2 그림과 같이 중심각의 크기가 π이고 반지름의 길이가 1인 부채꼴 OAB 에서 호 AB 를 n 등분한 각 점(양 끝점도 포함)을 차례로 $\mathrm{A}=\mathrm{P}_0$, P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{n-1}, $\mathrm{P}_n = \mathrm{B}$ 라 하자. $\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1}$, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}$, $\overline{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}$, $\cdots$, $\overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ 을 각각 밑변으로 하는 정삼각형 n 개의 넓이의 합을 $S(n)$ 이라 할 때, $\lim_{n \to \infty} n \cdot S(n)$ 의 값은?

(2011년 전국연합)



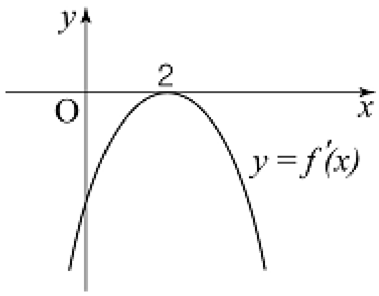
① $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi^2$　② $\frac{\sqrt{6}}{8}\pi^2$　③ $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$

④ $\frac{\sqrt{5}}{4}\pi^2$　⑤ $\frac{\sqrt{7}}{4}\pi^2$

문제 3 함수 $f(x)=x^3+6x^2+15|x-2a|+3$ 이 실수 전체의 집합에서 증가하도록 하는 실수 a 의 최댓값은? (2010년 전국연합)

① $-\frac{5}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{3}{2}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{2}$

문제 4 그림은 삼차함수 $f(x)$ 의 도함수 $f'(x)$ 의 그래프이다.



함수 $f(x)$ 에 대한 설명 중 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (2011년 전국연합)

〈 보 기 〉

ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 감소상태에 있다.
ㄴ. 함수 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 극댓값을 갖는다.
ㄷ. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 x 축과 오직 한 점에서 만난다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

읽 기 자 료

덜거덕거리는 책상 28)

책상이 덜거덕거려서 불편을 주는 경우를 우리는 일상생활에서 흔히 겪는다. 이러한 상태는 테이블 다리 4개의 길이는 모두 똑같지만 바닥이 고르지 않아, 다리 하나가 떠 있는 상태가 되어 흔들리기 때문이다. 떠 있는 책상다리 밑에 종이를 접어서 끼워 넣는 것도 한 방법이기는 하지만, 테이블을 회전시켜보면 된다. 테이블을 잡고, 오른쪽 방향이건 왼쪽 방향이건 마루 위를 미끄러지게 하면서 돌리면 90도 회전하는 사이에 반드시 네 다리가 모두 마루에 닿는 부분이 있어 테이블이 안정된 상태가 된다. 왜 테이블이 흔들리지 않는 것일까?

4개의 다리에 각각 A, B, C, D 의 표시를 붙였을 때, 다리 D 만이 마루에 닿지 않고 떠 있는 상태에 있다고 하자. (3개의 점을 포함하는 평면은 꼭 하나 존재한다. 따라서, 책상이나 의자의 다리가 3개뿐이면 반드시 하나의 평면 위에 서 있게 되고 흔들리지 않는다) 이때, D 의 대각선 위에 있는 B 가 뜨지 않도록 한 손으로 A 와 B 의 중간쯤의 테이블 위를 누르고, 다른 한 손으로 C 와 D 사이의 테이블 위를 누른다. 테이블을 4분의 1 회전시켰을 때, D 가 C 의 위치까지 움직이는 상태에 관해 생각해 보자. 다리 D 의 끝은 마루에서 떠 있는 상태로부터 출발하여, 다리 C 가 있었던 위치까지 이동하는 사이에 서서히 마루에 접근하고, $\frac{1}{4}$ 회전하는 사이에 반드시 마루에 닿는 부분이 있게 된다. 이 사실을 보장해주는 것이 미분학에 관한 중간값의 정리이다. 〈연속적인 곡선(끊기는 데가 없는 곡선)과 x 축 사이의 거리는 a 로부터 b 로 옮겨가는 동안에 A 와 B 사이의 모든 값을 적어도 한 번은 만난다.〉

· 중간값의 정리 : 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$ 이면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k 에 대하여 $f(c) = k$ 인 c 가 열린 구간 (a, b) 에 적어도 하나 존재한다.

이 정리에 의하면 $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 임의의 중간값을 취하는 점이 a 와 b 사이에 있게 되므로 이렇게 불린다. $f(a)$ 와 $f(b)$ 의 부호가 다르면, $f(x) = 0$ 으로 되는 점(근)이 구간 (a,b) 에 적어도 하나 존재하게 되어 근의 존재를 조사하는 데 이 정리가 쓰인다.

즉 테이블에서 D 의 곳이 가장 낮은 높이 즉 치역을 따져볼 때 가장 적은 수치이므로 높은 쪽인 B 나 C 에는 어느 점인가 최소한 하나 이상의 지점 D 보다 높은 지점이 존재한다는 것이다. 결국은 균형이 맞아서 안정된다.

---

28) [출처] 김용운, 김용국(1991). 재미있는 수학 여행. 기하의 세계. 김영사.

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 2

$3x < f(x) < 2x^2 + 3x$ 에서 $6x < f(2x) < 8x^2 + 6x$

$$\lim_{x \to +0} \frac{6x}{3x} \le \lim_{x \to +0} \frac{f(2x)}{3x} \le \lim_{x \to +0} \frac{8x^2 + 6x}{3x}$$

$$2 \le \lim_{x \to +0} \frac{f(2x)}{3x} \le 2$$

$$\therefore \lim_{x \to +0} \frac{f(2x)}{3x} = 2$$

문제 2 정답 ③

$\overline{\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1} = \overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2} = \cdots = \overline{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n} = 2\sin\frac{\pi}{2n}$ 이므로 각 정삼각형의 넓이는 $\sqrt{3}\sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

이다. 따라서 $\lim_{n \to \infty} n \cdot S(n) = \lim_{n \to \infty} \sqrt{3}\, n^2 \times \sin^2\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}\pi^2$

문제 3 정답 ①

(1) $x \ge 2a$ 일 때, $f'(x) = 3x^2 + 12x + 15 > 0$ 이므로 함수 $f(x)$ 는 증가한다.

(2) $x \le 2a$ 일 때, $f'(x) = 3(x+5)(x-1)$ 이므로 함수 $f(x)$ 가 증가하려면

$$2a \le -5\,,\ a \le -\frac{5}{2}$$

따라서 실수 a 의 최댓값은 $-\frac{5}{2}$ 이다.

문제 4 정답 ③

$f'(x) = a(x-2)^2 \quad (a < 0)$이므로

x	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

ㄱ. $f'(0) < 0$ 이므로 $x = 0$ 에서 감소상태 (참)

ㄴ. 극댓값은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. 모든 실수에 대하여 함수 $f(x)$ 는 감소함수이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는 x 축과 오직 한 점에서 만난다. (참)

논제 1-1

$$A_k=\frac{1}{2}\left|\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)\left(\sin\frac{k+1}{n}\pi\cos\frac{k}{n}\pi-\cos\frac{k+1}{n}\pi\sin\frac{k}{n}\pi\right)\right|$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)\sin\left(\frac{k+1}{n}-\frac{k}{n}\right)\pi$$
$$=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\pi\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)$$

다 른 풀 이

$A_k=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OP}_k}\cdot\overline{\mathrm{OP}_{k+1}}\cdot\sin\frac{1}{n}\pi$ 에서

$\overline{\mathrm{OP}_k}=\sqrt{(1-\sin\frac{k}{2n}\pi)^2\cos^2\frac{k}{n}\pi+(1-\sin\frac{k}{2n}\pi)^2\sin^2\frac{k}{n}\pi}=1-\sin\frac{k}{2n}\pi$ 이므로

$$A_k=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\pi\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)$$

논제 1-2

$0\le k\le n-2$ 에서 $0\le\frac{k}{2n}\pi<\frac{\pi}{2}$ 이고

이 구간에서 sin 은 증가함수이므로 $\sin\frac{k}{2n}\pi\le\sin\frac{k+1}{2n}\pi$ 이다.

따라서 $1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\le1-\sin\frac{k}{2n}\pi$ 이므로

$$\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)^2\le\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)\le\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)^2$$

이다.

논제 1-3

[논제 1-1]의 결과에 의하여 $A_k=\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\pi\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)$ 이므로

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-2}A_k=\sum_{k=0}^{n-2}\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\pi\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)$$

이다.

또, [논제 1-2]의 결과에 의하여

$$\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\pi\sum_{k=0}^{n-2}\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)^2\le\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\pi\sum_{k=0}^{n-2}\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)$$

$$\le \frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\pi\sum_{k=0}^{n-2}\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)^2$$

이고

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\pi\sum_{k=0}^{n-2}\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\pi\sum_{k=0}^{n-2}\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2n}\frac{\sin\frac{1}{n}\pi}{\frac{1}{n}\pi}\sum_{k=0}^{n-2}\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1\left(1-\sin\frac{\pi}{2}x\right)^2dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{4}{\pi}\right)=\frac{3}{4}\pi-2$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}\pi\sum_{k=0}^{n-2}\left(1-\sin\frac{k}{2n}\pi\right)\left(1-\sin\frac{k+1}{2n}\pi\right)=\frac{3}{4}\pi-2$$

이다.

논제 2-1

출발 후 t 시간에서의 성균이와 지점 A 사이의 최단거리를 $f(t)$, 명륜이와 지점 A 사이의 최단거리를 $g(t)$ 라 하면 $f(t)$ 와 $g(t)$ 는 모두 연속함수이므로 $f(t)-g(t)$ 도 연속함수이고,

$$0 \le f(t) \le 30, \quad 0 \le g(t) \le 18$$

이다.

$h(t)=f(t)-g(t)$ 라 하면 함수 $h(t)$ 는 닫힌 구간 $[0, 2]$ 에서 연속이고

$$h(0)=30-g(0)>0, \quad h(2)=0-g(2)<0$$

이므로 중간값 정리에 의해 $h(t)=0$ 인 t 가 열린 구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재한다.
즉, 출발 후 2시간 이내에 $f(t)$ 와 $g(t)$ 가 같아지는 순간이 적어도 한 번 존재한다.

논제 2-2

두 도로가 모두 곧은 도로이면 $f(t)=30-15t$, $g(t)=18-6t$ 이므로

$$h(t)=f(t)-g(t)=12-9t$$

이다.

따라서 $f(t)=g(t)$, 즉 $h(t)=0$ 인 순간은 $t=\frac{4}{3}$ 일 때 한 번뿐이다.

다른풀이

(제시문의 증가, 감소를 이용한 설명)

[논제 2-1]에 의하여 $h(t)=12-9t=0$ 인 t 가 열린 구간 $(0, 2)$ 에 적어도 하나 존재하는데, $h'(t)=-9<0$ 이므로 $h(t)$ 는 감소함수이다. 따라서 $h(t)=0$ 인 t 는 하나뿐이다.

16 숙명여자대학교 수시

제시문 1 **제시문을 읽고 물음에 답하여라.[29] (자연공통)**

〈가〉 무릇 문서 제도에 한 자(尺)라고 나타낸 것이 있으면 곧 모든 물건에도 모두 같은 한 자이며, 한 말(斗)이라고 나타낸 것이 있으면 곧 모든 물건에도 같은 한 말이며, 한 냥(兩)이라고 나타낸 것이 있으면 곧 모든 물건에도 모두 같은 한 냥이어야 합니다. 함경도 온성(穩城) 사람이 제주도에 물건을 부치면서 한 말이라고 나타낸 것은 제주도에서도 또한 한 말이 될 것이니, 이렇게 물화(物貨)의 귀하고 천함이 쉽게 밝혀져 거짓과 속이는 버릇을 다시는 부리지 못할 것입니다. 그런 다음에 감사(監司)가 여러 고을을 순찰하면서 언제나 한 고을에 이를 적마다 그 고을의 도량형(度量衡)을 모아 검사해서 질이 나쁜 것이 있으면 그 고을의 수령을 죄 주고, 어사(御使)가 암행하여 언제나 시장과 마을에 이를 때마다 또한 자세히 살펴서 농간을 적발한다면 1년이 지나지 않아 제도가 시행되어 다시는 문란해지지 않을 것입니다.

그 성수(成數)의 명칭 또한 바르게 개정해서 한결같이 10과 100의 제도를 따라 도량형 세 가지에 모두 다섯 개의 성수를 둔다면 분별하기 쉽고 혼란이 없어서 백성들이 반드시 편하게 여길 것입니다. 자에 있어서는 10리(釐)가 1푼(分)이 되고 10푼이 1촌(寸)이 되고 10촌이 1척(尺)이 되고 10척이 1장(丈)이 되니, 본래 고칠 필요가 없습니다. 그러나 양(量)에 있어서는 15두(斗)가 1곡(斛)이 되고, 저울에 있어서는 16냥이 1근(斤)이 되니, 이는 혼란이 생기는 원인이 됩니다. ㉠ 15두를 1곡이라고 하는 것은 우리나라 풍속이며, ㉡ 16냥을 1근이라고 한 것은 옛날의 사상(四象)과 팔괘(八卦)의 가배법(加倍法: 본래의 것보다 배를 더하는 측정법)이 수학(數學)의 근본이 되었던 때문입니다. 그러므로 8을 2배하여 1근을 삼고 8을 3배하여 1균을 삼았으니, 모두 8이라는 수를 성수로 삼았던 것입니다. 그러나 이미 10의 수를 성수로 쓰고 있으니, 무엇 때문에 유독 저울에만 8을 쓸 것이 있겠습니까. 마땅히 드러내어 규칙을 만들어서 양에 있어서는 10작(勺)을 1홉(合)으로 삼고 10홉은 1승(升)으로 삼고 10승을 1두(斗)로 삼고 10두를 1석(石: 석은 원래 무게의 명칭인데 양의 명칭으로도 쓴다.)으로 삼으며, 저울에 있어서는 10푼(分)을 1전(錢)으로 삼고 10전을 1냥(兩)으로 삼고 10냥을 1근(斤)으로 삼고 10근을 1균(勻: 균은 본래 30근의 명칭이다.)으로 삼아 아무 해 아무 날로부터 모든 문서에 기록하는 것을

29) 숙명여자대학교 입학처

모두 이 십진법에 따르게 하면 10년이 지나지 않아서 문서의 혼란이 없어질 것입니다.

〈나〉 수는 본래 양(量)을 나타낸다. 무(無)보다 큰 양은 수로 나타낼 수 있다. 그리하여 무보다 큰 $\sqrt{2}$와 같은 무리수는 비록 양의 정수와 양의 정수의 비로 나타낼 수 없고 또 순환마디 없이 무한하게 전개되는 무한 소수이지만, 두 변의 길이가 1인 직각이등변 삼각형의 빗변의 길이에 해당되므로 존재한다. 반면에 무보다 작은 양은 애초에 없다. 따라서 음수는 존재하지 않으며 수가 아니다. 그러므로 자신보다 큰 수로부터 뺀다는 것은 괜찮지만, 자신보다 작은 수로부터 빼려고 시도하는 것은 우스운 일이다. 일찍이 파스칼은 그의 저서『팡세』에서 다음과 같이 말했다. “나는 0에서 4를 빼면 0이 남는다는 것을 이해 못하는 사람들을 알고 있다.”

음수는 수가 아니다. 그렇다면 음수를 수라고 간주하면 어떻게 될까? 한 수의 제곱, 즉 그 수를 자신과 곱해서 얻어진 곱은 그 수가 양이든 음이든 항상 양수이다. 한편 데카르트는 $\sqrt{-1}$과 같은 수를 ‘허수(imaginary number)’ 라고 불렀다. 허수라고 불리는 수는 발견되거나 받아들여지거나 결정될 수 있으며, 또 양수와 음수에 관한 모든 규칙에 따라 연산되는데, 마치 그 규칙들을 따르는 것처럼 보인다. 그런데 허수의 제곱은 음수이므로, 허수가 나타낸다고 생각되는 양은 무보다 크지도 않고, 무보다 작지도 않으며, 무와 같지도 않다. 따라서 음수의 제곱근은 불가능한 수이고, ‘허수’ 라는 말이 암시하듯이 단지 상상 속에서만 존재하는 수이며, 결국 수가 아닌 것이다. 그리하여 19세기 위대한 수학자 드 모르강은 다음과 같이 말했다. “$\sqrt{-a}$는 의미가 없고, 자기모순적이며, 불합리하다.” 허수와 같은 것을 바탕으로 하여 성립되는 과학이란 생각하기 어렵다. 이는 $a+b\sqrt{-1}$과 같은 형태의 복소수에 대해서도 마찬가지이다.

〈다〉 한 개념이 미래에 어떻게 사용될 것이냐 하는 것, 또 그렇게 해서 확장된 의미가 마치 태아와 같은 상태에서 개념들 안에 존재하는 것은 아니다. 개념을 정밀하게 검토하고 반성하고 분석한다고 해서, 새로운 상황에서 개념을 어떻게 옳고 그르게 사용할 수 있는지는 알 수 없다. 어떤 규칙도 재해석될 수 있고, 어떤 아이디어도 새로운 방식으로 사용될 수 있다. 그리고 한 개념을 새로운 상황에서 어떻게 사용할 것인지를 결정하는 것은 넓게는 사람들의 규약과 실천, 좁게는 유사성과 차이에 대한 일관성 있는 규정과 그 중요성에 대한 인식, 그리고 그러한 선택의 유용성이다. 단순한 예를 들어보자. 어린 아이가 ‘모자’ 라는 말을 배우고 몇 개의 모자를 인식하는 법을 배웠다. 그러고 나서 아이는 주전자 뚜껑을 모자라고 불렀다. 이 아이의 개념의 확장은 새로운 특정한 경우를 이전의 특수한 사례에다 연결시키는 데 기초한 것이다. 그 확장은 개념의 의미라 불리는 추상적인 실체에 의해 매개된 것이 아니다. 그 관계는 새로운 대상과 앞선 경우 간의 유사성과 차이를 느끼는 것을 통해서 성립한다. 부모의 권위가 곧 개념에 대한 아이의 자연적인 확장을 방해하고, 부모는 그 대상이 모자가 아니라 주전자 뚜껑이

라고 말한다. 심리적인 성향의 흐름 중에 사회적으로 유지된 경계가 그어진다. 아이는 그리하여 주전자 뚜껑을 알게 된다. 뚜껑인가 모자인가? 아주 분명하고 자생적이며 비반성적으로 보이는 이 선택은 다양한 반응경향이 하나로 수렴되는 과정의 결과물이 될 것이다. '모자' 라는 말의 의미가 이미 확정적으로 존재하는 것은 아니다. '모자' 의 의미는 새로운 상황에서 재해석될 수 있다. 그러한 과정에서 '모자' 와 '뚜껑' 의 유사성이 규정되고 강조되며, 더 나아가 '뚜껑' 을 '모자' 라고 간주하는 것이 일관성 있고 유용하다는 점이 판명되면, 그 아이의 후대들은 '뚜껑' 을 '모자' 라고 부르고 기존의 '모자' 와 차이를 두기 위해 '주전자 모자' 라고 부르게 될 것이다.

논제 1

정책 입안자의 관점에서 볼 때 다음의 〈사례〉가 ㉠, ㉡과 어떤 점에서 다른지 〈표 2〉를 분석하여 설명하고, 〈다〉의 관점에서 〈나〉를 비판하시오.

〈사례〉 1973년 미국 버클리 대학의 대학원 신입생의 자료를 수집한 한 여성단체가 〈표 1〉을 제시하면서 입학 허가 절차에서 남녀차별이 있었다고 주장하였다. (한 교육정책 입안자는 〈표 1〉을 상세하게 설명한 〈표 2〉를 검토한 후 그 주장이 옳은지 판단하려고 한다.)

〈표 1〉 1973년 버클리 대학 대학원 신입생 남녀 합격률

	지원자	불합격	합격	합격률
남 자	2,691	1,291	1,400	52.0%
여 자	1,835	1,063	772	42.1%

〈표 2〉 1973년 버클리 대학 대학원 신입생 전공별 남녀 지원자(명) 및 합격률

전 공	A	B	C	D	E	F	합계
남 지원자	825	560	325	417	191	373	2,691
남 합격자	512	353	120	138	53	224	1,400
남 합격률	62.1%	63.0%	36.9%	33.1%	27.7%	60.1%	
여 지원자	108	25	593	375	393	341	1,835
여 합격자	89	17	202	131	94	239	772
여 합격률	82.4%	68.0%	34.1%	34.9%	23.9%	70.1%	
전공별 합격률	64.4%	63.2%	35.1%	34.0%	25.2%	64.8%	

제시문 2 제시문을 읽고 물음에 답하여라. (논술우수자전형)

〈가〉 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 둘레를 n등분하는 점들의 좌표가

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_n, y_n)$$

이면

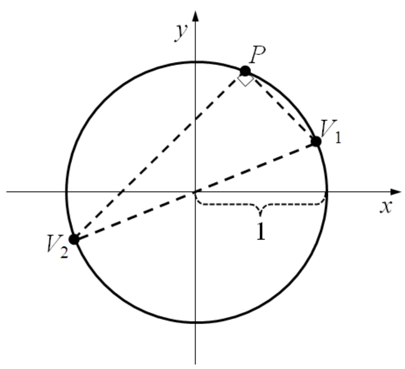
$$(1)\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i = 0$$

이다.

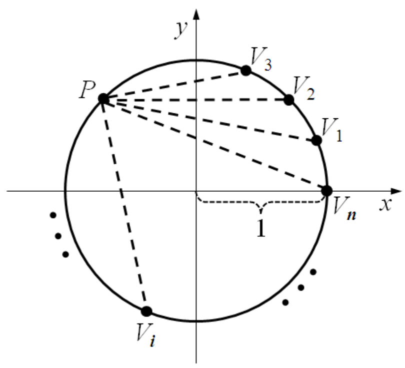
중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 이등분하는 두 점을 V_1, V_2라 했을 때, 그 원 위의 임의의 한 점 P로부터 V_1, V_2까지의 거리의 제곱들의 합은 $\triangle V_1PV_2$가 직각삼각형이므로

$$S_2 = \overline{PV_1}^2 + \overline{PV_2}^2 = 4$$

이다(〈그림 1〉 참조).



<그림 1>



<그림 2>

중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 n등분하는 점들을

$$V_1(a_1, b_1),\ V_2(a_2, b_2),\ \cdots,\ V_n(a_n, b_n)$$

이라고 했을 때, 그 원 위의 임의의 한 점 $P(x, y)$로부터 $V_1, V_2, \cdots, V_n$까지 거리의 제곱들의 합은 다음과 같이 계산할 수 있다(〈그림 2〉 참조).

$$\begin{aligned} S_n &= \overline{PV_1}^2 + \overline{PV_2}^2 + \cdots + \overline{PV_n}^2 \\ &= [(x-a_1)^2 + (y-b_1)^2] + [(x-a_2)^2 + (y-b_2)^2] + \cdots + [(x-a_n)^2 + (y-b_n)^2] \\ &= [(x^2 - 2xa_1 + a_1^2) + (y^2 - 2yb_1 + b_1^2)] + [(x^2 - 2xa_2 + a_2^2) + (y^2 - 2yb_2 + b_2^2)] + \cdots + \\ &\quad [(x^2 - 2xa_n + a_n^2) + (y^2 - 2yb_n + b_n^2)] \\ &= n(x^2 + y^2) - (2x)\sum_{i=1}^{n} a_i - (2y)\sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} (a_i^2 + b_i^2) \end{aligned}$$

여기서 점들 $P, V_1, V_2, \cdots, V_n$이 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원 위에 있으므로

$$x^2+y^2=1, \quad a_i^2+b_i^2=1 \ (1 \le i \le n)$$

이다. 따라서 (1)에 의해

$$S_n = n+n = 2n$$

이다. 한편, 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 한 점으로부터 그 원의 둘레를 n등분하는 점들까지의 거리의 제곱들의 합은 위와 같은 방법으로 $2nr^2$임을 계산할 수 있다.

〈나〉 우리가 어떤 유형의 물리적 체계를 연구하다가, 그 물리적 체계가 지니고 있는 어떤 양적 특성 v가 그 물리적 체계가 지니고 있는 다른 양적 특성 u의 함수이고 그래서 v가 u에 의해서 결정된다는 암시를 받았다고 가정해보자. 그래서 우리는 이 함수 관계를 엄밀하게 수학적 형식으로 진술함으로써 가설을 구성하려고 한다. 우리는 u가 순차적으로 $0, 1, 2, 3$의 값을 갖는 많은 실례들을 조사할 수 있었는데, u에 대응하는 v의 값이 u의 값 각각에 대하여 $2, 3, 4, 5$임이 언제나 발견되었다고 하자. 이때 우리는 다음과 같은 가설 H를 제시할 수 있다.

$$\mathrm{H}: \ v = u^4 - 6u^3 + 11u^2 - 5u + 2$$

이렇게 H를 제시하게 되면 우리는 u와 v의 실측값에서 출발하여 그 이외의 값들에 대한 u와 v 사이의 함수 관계에 대한 주장까지 하게 되는 상황으로 나아가게 된다. 즉, 우리가 가설을 만들면, u가 $0, 1, 2, 3$일 때의 v의 값 $2, 3, 4, 5$만이 아니라 u가 가질 모든 값과 그에 대응하는 모든 v의 값을 얻게 해준다. 우리의 사고를 활용하여 가설을 만드는 일은, 우리가 알고 있는 u와 v의 관계에 대한 규정만이 아니라 우리가 알고 있는 것을 넘어서는 u와 v 값에 대해서도 주장하는 상황을 맞이하게 되는 것이다.

〈다〉 한 시대에 어떤 현상에 대한 가설이 과학적 법칙으로 인정받으려면 그 시대에 살고 있는 많은 사람들이 인정할 수 있는 경험적 입증이 필요하다. 즉, 과학적 법칙이란 다양한 개념들과 도구들을 바탕으로 경험적으로 확인된 포괄적 견해들을 말한다. 한 예를 들면 다음과 같다.

"태양계 안에 존재하는 행성 또는 혜성과 같은 물체는 타원 궤도로 태양 주위를 공전한다."

위에서 말한 가설은 왜 그런지에 대한 과학적 입증이 필요하다. 즉, 한 시대의 대부분 사람들이 믿을 수 있게 하려면 경험적 입증이 필요하다. 좋은 과학적 법칙이란 보편적이어야 하고 유사한 상황에서 앞으로 벌어질 상황에 대하여 정확하게 예측할 수 있어야 한다.

아래 제시된 사례들은 우리가 받아들인 과거 및 현재의 과학적 서술이다.

1.

과거) 지구는 평평하다.

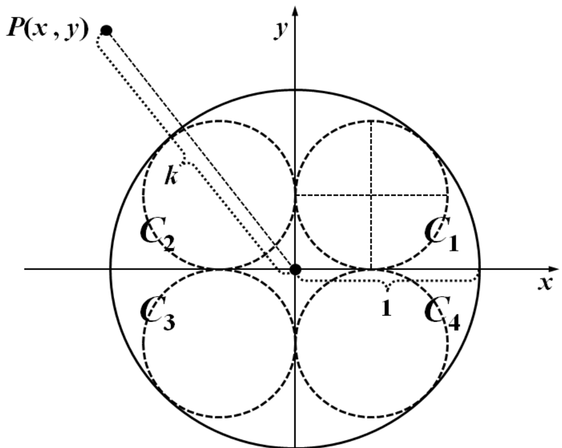
현재) 지구는 둥글다.
2.
과거) 돌턴의 원자설에 따르면, 같은 원소의 원자들은 크기, 질량 및 성질이 같다.
현재) 동위 원소 존재의 확인으로 인해 같은 원소인 경우에도 질량이 다를 수 있다.
3.
과거) 과학자 라부아지에는 화학 반응 전후에 질량이 항상 보존된다는 법칙을 제시하였다.
현재) 핵 반응에 의한 질량 감소(변화)가 실험적으로 확인되었다.

논제 2-1

중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 r인 원의 둘레를 n등분하는 점들을 $V_1(a_1,b_1)$, $V_2(a_2,b_2)$, $\cdots$ $V_n(a_n,b_n)$이라고 했을 때, 좌표 평면 위의 임의의 한 점 $P(x,y)$로부터 V_1, V_2, $\cdots$, V_n까지의 거리의 제곱들의 합을 구하시오. (단, 점 $P(x,y)$로부터 원점까지의 거리를 k라 하자.)

논제 2-2

중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원에 아래의 그림과 같이 내접하는 같은 반지름을 갖는 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4를 생각하자. 좌표 평면 위의 임의의 한 점 $P(x,y)$로부터 C_1, C_2, C_3, C_4 각각의 원의 둘레를 n등분하는 점들까지의 거리의 제곱들의 합을 각각 $S_{n1}, S_{n2}, S_{n3}, S_{n4}$라 했을 때, $S_{n1}+S_{n2}+S_{n3}+S_{n4}$를 구하시오. (단, 점 $P(x,y)$로부터 원점까지의 거리를 k라 하자.)



논제 2-3

제시문 〈가〉와 〈나〉의 핵심 내용을 연관시켜 서술하고, 이를 바탕으로 〈다〉의 논지를 활용하여 가설의 제기와 경험적 입증 사이의 관계를 설명하시오.

논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 2문항 (공통1, 계열1)	시간	120분
연관 개념	수 개념의 변화, 확률, 일반화		

제 시 문 분 석

제시문 1

제시문 〈가〉는 다산 정약용이 임금에게 올린 상소이다. 도량형이 십진법으로 통일되지 않아서 여러 혼란이 야기되고 있기 때문에 십진법으로 통일할 것을 임금에게 상소하고 있다.

제시문 〈나〉는 음수와 허수가 불합리한 것이며 수가 아니라는 것을 주장한 모리스 클라인의 『수학의 확실성』에서 내용을 발췌하여 재구성한 것이다.

제시문 〈다〉는 사회학적 관점에서 수학을 바라보는 데이비드 블루어의 『지식과 사회의 상』에서 내용을 발췌하여 재구성한 것이다. 데이비드 블루어에 따르면 한 용어의 개념은 이미 확정적으로 존재하는 것은 아니며, 사회적 실천에 따라 유동적으로 변화하는 것이다.

제시문 2

제시문 〈가〉는 수학적 일반화를 다루고 있다.

제시문 〈나〉는 제한된 실험값을 근거로 가설 제기를 통해 이루어지는 일반화를 다루고 있다.

제시문 〈다〉는 과거와 현재의 각 시점에 활용 가능한 개념과 도구의 제약 속에서 이루어지는 과학 법칙 정립과 관련된 일반화를 다루고 있다.

논 제 분 석

논제 1

〈논제〉에서는 먼저 〈표 2〉를 분석함으로써 왜 정책 입안자의 입장에서 볼 때 〈사례〉에서의 여성단체의 주장이 오류이지만 ㉠과 ㉡은 오류가 아님을 설명할 것을 요구하고 있으며, 그 다음에 〈다〉의 관점에서 〈나〉의 주장을 비판할 것을 요구하고 있다.

논제 2-1

중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 r인 경우에서 그 원 위의 임의의 한 점 P를 좌표 평면 위의 임의의 한 점으로 일반화시켰을 때, 점 P로부터 그 원의 둘레를 n등분하는 n개의 점까지의 거리의 제곱들의 합을 구하는 문제이다.

논제 2-2

그 원에 내접하는 같은 반지름을 갖는 네 개의 원을 생각하여 좌표 평면 위의 임의의 한 점으로부터 그 네 개의 원 각각의 원의 둘레를 n등분하는 점들까지의 거리의 제곱들인 네 합의 합을 구하는 문제이다.

논제 2-3

제시문 〈가〉, 제시문 〈나〉의 유사성과 차이를 파악해 내고, 그러한 파악을 기초로 가설의 제기와 경험적 입증 사이의 관계를 설명하는 문제이다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 복소수

(1) 허수 단위를 $i=\sqrt{-1}$로 정의하고 복소수 전체의 집합을 $\mathrm{C}=\{a+bi|a,b\in\mathrm{R}\}$라 하면 C는 실수 전체의 집합 R을 포함하고 체의 공리를 만족한다.

즉, 두 복소수 $a+bi$와 $c+di$에 대하여 $a+bi=c+di \Leftrightarrow a=c,\ b=d$로 정의하고 임의의 실수 a,b,c,d에 대하여 복소수의 사칙연산을

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$
$$(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$$
$$\frac{(a+bi)}{(c+di)}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\ (c+di\neq 0)$$

로 정의하면 복소수 전체의 집합 C는 체를 이루고, 이것을 복소수체라고 한다.

(2) 해밀턴은 복소수 $a+bi$를 두 실수의 순서쌍으로 정의하였는데, 해밀턴 이전까지는 복소수를 $a+bi$꼴의 수로만 취급하였다. 해밀턴은 두 복소수 $(a,b),(c,d)$의 상등 관계를 다음과 같이 정의하였다.

$$(a,b)=(c,d)\Leftrightarrow a=c,\ b=d$$

또, 합과 곱의 연산을

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),\ (a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

로 정의하였다.

해밀턴의 정의에 의해서 실수 r에 대하여 복소수 $(r,0)$을 대응시키면

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0),\ (a,0)(b,0)=(ab,0)$$

이 되어 $(r,0)$의 꼴 전체의 복소수와 실수 전체는 대수적으로 동형이 된다. 따라서 $(r,0)$을 실수 r와 같은 수로 볼 수 있으므로 $(r,0)=r$로 나타낼 수 있다. 또, 해밀턴의 복소수를 다음과 같이 나타낼 수 있다. 즉, $i=(0,1)$로 나타내기로 하면

$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$가 된다.

풀 어 보 기

문제 1 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

(가) 세 점 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$의 좌표는 각각 $(-1,0)$, $(1,0)$, $(-1,2)$이다.
(나) 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 중점과 선분 $\mathrm{P}_{n+2}\mathrm{P}_{n+3}$의 중점은 같다.

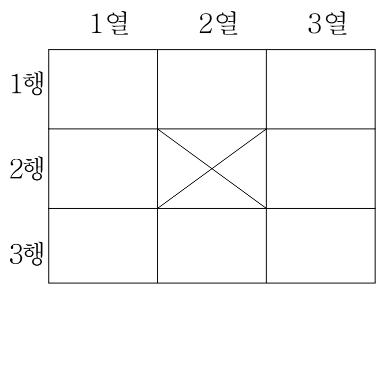
예를 들어, 점 P_4의 좌표는 $(1,-2)$이다. 점 P_{25}의 좌표가 (a,b)일 때, $a+b$의 값을 구하시오.(2013학년도 수능)

문제 2 첫째항이 10인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_n < a_{n+1}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$을 만족시킬 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$의 값을 구하시오.

(2013학년도 9월 평가원)

문제 3 다음 좌석표에서 2행 2열 좌석을 제외한 8개의 좌석에 여학생 4명과 남학생 4명을 1명씩 임의로 배정할 때, 적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하게 배정될 확률은 p이다. $70p$의 값을 구하시오.(단, 2명이 같은 행의 바로 옆이나 같은 열의 바로 앞뒤에 있을 때 이웃한 것으로 본다.) (2013학년도 수능)



읽 기 자 료

패러독스와 확률[30)]

Freudenthal(1973)은 확률이 수학적 개념으로 만들어지고 받아들여지는 순간순간마다 많은 논쟁을 일으켰음을 확인하였다. 처음부터 단일한 방법으로 해결된 문제보다는 여러 가지 다른 방법이 동시에 제시되었으며, 잘못 판단한 사람들 중에는 당대의 유명한 수학자들도 상당수 포함되어 있음을 지적하였다. 그러므로 확률 교육에서 패러독스는 확률 개념의 역사 발생을 경험하게 하는 자료로 활용될 수 있다. Simpson의 패러독스라고 불리는 다음 문제 상황이 한 예이다.

1973년 캘리포니아 대학에 지원한 학생의 성별에 따른 입학률을 조사하였다. 여학생의 입학률은 35%였고, 남학생의 입학률은 44%였다. 그런데 대부분의 학과에서는 남녀의 입학률이 비슷하였고, 일부 학과에서는 오히려 여학생의 입학률이 남학생의 입학률보다 높았다고 한다. 어떻게 된 일일까?

각 학과에서 여학생이 남학생보다 높은 입학률을 보였다면, 당연히 전체에서도 여학생이 남학생보다 높은 입학률을 보일 것으로 기대하게 된다. 그러나 확률에서는 이러한 논리를 적용하기 어렵다는 것을 이 패러독스는 보여준다.

〈표〉와 같이 2개의 학과만 있다고 단순화하여 생각할 수 있다. 여기서 대학 전체의 입학률을 비교하면 여학생의 입학률이 $\frac{5}{9}$로 남학생의 입학률 $\frac{6}{10}$보다 낮다.

그러나 학과 1과 학과 2에서는 여학생의 입학률과 남학생의 입학률이 각각 $\frac{2}{5}>\frac{1}{3}$, $\frac{3}{4}>\frac{5}{7}$이므로 남학생보다 높은 입학률을 보인다.

	여학생		남학생	
	합격	불합격	합격	불합격
학과1	2	3	1	2
학과2	3	1	5	2
대학 전체	5	4	6	4

대부분의 문제 상황에서는 부분에 대한 논의를 종합하여 전체에 대한 결론을 얻는 것이 합리적이고 타당하다. 그러나 위의 문제에서는 부분적으로 여학생의 입학률이 높아도 전체적으로는 남학생의 입학률이 높을 수 있음을 확인할 수 있다. 이와 같이 부분으로 분해하여 논의한 후 종합하는 전략을 확률 문제에 적용할 때에는 주의해야 함을 알 수 있다.

30) 이경화외 5인, 수학교육과정과 교재연구, 경문사, 2006

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 23

주어진 규칙에 따라 점 P_n의 좌표를 나열해 보면

$P_1(-1,0), P_2(1,0), P_3(-1,2), P_4(1,-2), P_5(-1,4), P_6(1,-4), P_7(-1,6), P_8(1,-6)\cdots$

이므로 자연수 k에 대하여 $P_{2k-1}(-1,2(k-1)), P_{2k}(1,2(1-k))$이고 따라서, 점 P_{25}의 좌표는 $P_{25}(-1,24)$이므로 $a+b=23$

문제 2 정답 12

$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)$에서

$$(a_{n+1}-a_n)^2 = \sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)^2 - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9^n}\right)-2\left(1-\frac{1}{9^{n-1}}\right) = \frac{16}{9^n}\ (n \geq 2)$$

이때, $n=1$이면 $(a_2-a_1)^2 = 2\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{16}{9}$이므로 $(a_{n+1}-a_n)^2 = \frac{16}{9^n}\ (n \geq 1)$

한편, $a_{n+1} > a_n$이므로 $a_{n+1}-a_n = \frac{4}{3^n}$ $\quad \therefore a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3^n}$

이때, $a_1 = 10$이므로

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{4}{3^k} = 10 + \frac{\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{3}} = 10+2\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}(n \geq 2)$$

따라서, $\lim_{n\to\infty} a_n = 12$

문제 3 정답 68

적어도 2명의 남학생이 서로 이웃하는 사건의 여사건은 어느 남학생도 이웃하지 않는 경우이다.

남	여	남
여	╳	여
남	여	남

여	남	여
남	╳	남
여	남	여

즉, 그림과 같이 남학생 4명을 $(1,1),(1,3),(3,1),(3,3)$ 또는 $(1,2),(2,1),(2,3),(3,2)$에 배정하고 나머지 자리에 여학생 4명을 배정하면 된다.

$$\therefore p = 1 - \frac{4! \times 4!}{8!} \times 2 = \frac{34}{35}$$
$$\therefore 70p = 68$$

[논제 해설][31)]

논제 1

먼저 정책 입안자의 관점에서 볼 때 〈사례〉가 ㉠, ㉡과 어떤 점에서 다른지 〈표 2〉를 분석하여 설명해 보면 〈사례〉의 주장은 해석상의 오류이지만 〈가〉의 ㉠과 ㉡은 오류가 아니다.

〈사례〉에서 여성단체는 〈표 1〉에 의거하여 입학 허가 절차에서 남녀차별이 있었다고 주장하고 있지만, 실제로 〈표 2〉를 자세히 살펴보면 이는 해석상의 오류였다는 것을 알 수 있다. 왜냐하면 〈표 2〉를 보면, 전체 합격률이 높은(60% 이상인) 전공 A, B에는 여자 지원자가 남자 지원자보다 훨씬 적은 수가 지원했고, 합격률이 낮은 C, D, E 전공에는 훨씬 많은 수가 지원했기 때문이다. 지원을 하는 행위는 전적으로 자발적인 것이므로, 어떤 남녀차별이 있었다고 말할 수 없다.

이에 반해 〈가〉의 ㉠과 ㉡은 오류가 아니다. 〈가〉에서 지적하듯이, 15두를 1곡이라고 하는 것은 우리나라의 풍속이고, 16냥을 1근이라고 하는 것은 가배법에 따른 것이다. 즉 어떤 단위 양이나 무게를 얼마로 정할 것이냐 하는 점은 관행이나 풍속, 또는 관련된 이론에 의해 결정될 수 있으며, 이는 설령 나중에 정책 입안자의 결정에 따라 바뀐다 할지라도 오류가 아니다. 도량형을 개정했을 때 변한 것은 '두' 와 '곡' , 그리고 '냥' 과 '근' 과 같은 용어들의 정의나 의미이기 때문이다. 요컨대 〈가〉의 ㉠과 ㉡은 주장이 아니라 규약이나 정의에 해당되므로 오류가 아니다.

〈다〉의 관점에 따라 〈나〉의 주장을 비판해 보자. 〈다〉의 관점에 따르면, 한 개념의 의미는 확정적으로 존재하지 않고 사람들의 합의와 규약에 따라, 그리고 유사성과 차이에 대한 규정과 선택의 유용성에 따라 변할 수 있다. '모자' 라는 말의 의미가 이미 확정적으로 존재하는 것이 아닌 것과 마찬가지로, '수' 의 의미도 확정적이지 않다. '수' 의 개념은 재해석될 수 있다. 실제로 양수가 자산이나 미래의 시간을 나타낼 수 있는 것과 마찬가지로 음수는 부채나 과거의 시간에 유용하게 적용되는 것으로 재해석될 수 있으며, 양수들과 마찬가지로 음수들 간의 크기 비교가 가능하게끔 재해석될 수 있다. 또한 허수와 복소수는 사칙연산이 가능하고 사칙연산에 대해 닫혀있다는 점에서 실수와 유사하다. 더 나아가 음수와 허수는 미적분학에서 유용하게 사용되며, 특히 허수는 전자기학과 파동함수 등에서 유용하게 사용된다. 반면에 음수는 양수보다 작다는 점에서 양수와 다르고, 허수와 복소수는 크기를 비교할 수 없다는 점에서 실수와 다르다. 이와 같이 수가 아닌 것으로 간주되었던 것이 수라고 간주되었던 것과 유사성이 규정되고 강조되면, 이제 수가 아닌 것으로 간주되었던 것도 '수' 라고 불릴 수 있게 되는 것이다.

31) 숙명여자대학교 예시답안 참조

논제 2-1

제시문 (가)의 S_n을 구하는 계산에 의하여

$$S_n = \overline{PV_1}^2 + \overline{PV_2}^2 + \cdots + \overline{PV_n}^2$$
$$= n(x^2+y^2) - (2x)\sum_{i=1}^{n} a_i - (2y)\sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n}(a_i^2+b_i^2)$$

이다. 점 $P(x,y)$에서 원점까지의 거리를 k라고 하면, $x^2+y^2=k^2$이고, 점들 $V_1(a_1,b_1),\ V_2(a_2,b_2),\ \cdots,\ V_n(a_n,b_n)$이 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 r인 원 위에 있으므로 $a_i^2+b_i^2=r^2 \ \ (1 \le i \le n)$이다. 또한 제시문 (가)의 (1)에 의하여 $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = 0$이다. 따라서 $S_n = n(k^2+r^2)$이다.

논제 2-2

원 C_1의 반지름을 r_1이라 하면, 원점에서 원 C_1의 중심까지의 거리가 $\sqrt{2}\,r_1$이므로 $r_1 + \sqrt{2}\,r_1 = 1$(〈그림 A〉 참조), 즉

$$r_1 = \frac{1}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$$

이다. 네 개의 원 C_1, C_2, C_3, C_4는 같은 반지름을 가지므로, 각 원의 반지름은 $\sqrt{2}-1$이다. 점 $P(x,y)$에서 원 C_i의 중심까지의 거리를 k_i라 하자. 원 C_i의 중심을 원점으로 이동시킨 후 [논제 2-1]의 결과를 적용하면, $P(x,y)$에서 C_i의 둘레를 n등분하는 점들까지의 거리의 제곱들의 합은

$$S_{ni} = n\left(k_i^2 + (\sqrt{2}-1)^2\right)$$

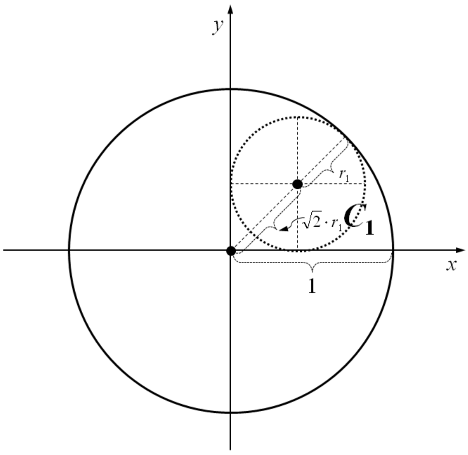
이다(〈그림 B〉 참조). 한편,

$$k_1^2 = \left(x-(\sqrt{2}-1)\right)^2 + \left(y-(\sqrt{2}-1)\right)^2 = k^2 - 2(\sqrt{2}-1)(x+y) + 2(\sqrt{2}-1)^2,$$
$$k_2^2 = \left(x+(\sqrt{2}-1)\right)^2 + \left(y-(\sqrt{2}-1)\right)^2 = k^2 - 2(\sqrt{2}-1)(-x+y) + 2(\sqrt{2}-1)^2,$$
$$k_3^2 = \left(x-(\sqrt{2}-1)\right)^2 + \left(y+(\sqrt{2}-1)\right)^2 = k^2 - 2(\sqrt{2}-1)(x-y) + 2(\sqrt{2}-1)^2,$$
$$k_4^2 = \left(x+(\sqrt{2}-1)\right)^2 + \left(y+(\sqrt{2}-1)\right)^2 = k^2 - 2(\sqrt{2}-1)(-x-y) + 2(\sqrt{2}-1)^2$$

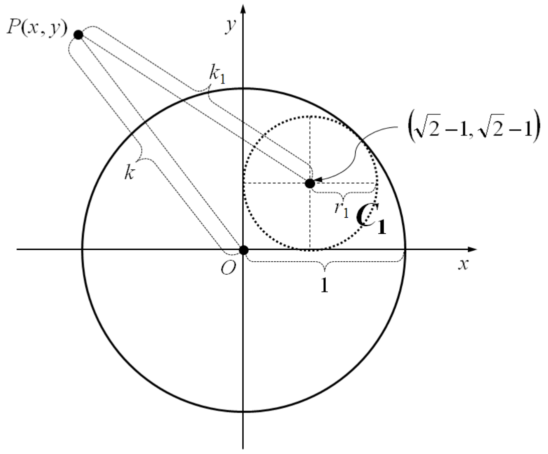
이고 $k_1^2+k_2^2+k_3^2+k_4^2 = 4\left(k^2+2(\sqrt{2}-1)^2\right)$이므로 답은

$$S_{n1}+S_{n2}+S_{n3}+S_{n4} = 4n\left(k^2+3(\sqrt{2}-1)^2\right) = 4n(k^2+9-6\sqrt{2})$$

이다.



<그림 A>



<그림 B>

논제 2-3

〈가〉는 수학적 일반화를 다루고 있다. 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 1인 원의 둘레를 이등분하는 두 점을 V_1, V_2라 했을 때, 그 원 위의 임의의 한 점 P로부터 V_1, V_2까지의 거리의 제곱들의 합을 제시하고 있다. 이어서 중심이 $(0,0)$이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 한 점으로부터 그 원의 둘레를 n등분하는 점들까지의 거리의 제곱들의 합은 위와 같은 방법으로 $2nr^2$임을 보여주고 있다.

〈나〉는 제한된 실험값을 근거로 가설 제기가 이루어질 때 발생하는 일반화를 다루고 있다. 가설을 만들면 그 가설을 만드는 데 기초가 된 실험값에 대해서만 그 가설이 어떤 함수 관계를 주장하는 것이 아니라, 얻지 않은 잠재적 실험값에 대해서도 그 가설이 함수 관계를 주장하게 된다는 내용을 담고 있다.

〈다〉는 현재에 이루어지는 과학적 일반화가 과거에 이루어진 과학적 일반화와 무조건 단절된다기보다는 일부 측면에서 확대, 발전시키는 의미를 지니고 있음을 지적한다. 한 시점에서의 과학적 일반화는 당시의 과학적 상황에서 논리적이며 당대의 사람들이 인정할 수 있는 내용이라면 그것 자체로 큰 의미가 있고 이후의 과학 발전에도 큰 도움이 되는 것이다. 즉 과거의 과학적 일반화와 현재의 과학적 일반화를 단절되고 상반되는 상황으로 보는 것이 아니라 과학 발전의 연속성 측면에서 볼 수도 있다. 또한 이것은 미래의 과학적 일반화를 예측하고 발전시켜 나갈 수 있는 중요한 정보로 쓰일 수 있다.

17 연세대학교 수시

제시문 **다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.** [32)]

(가) 양의 정수 n에 대하여 정의역과 공역을 $\{0, 1, \cdots, 2n\}$로 하는 일대일 대응을 모두 모은 집합을 S라 하고 그 원소를 중복 없이 나열하여 $S = \{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$이라 하자. 이때, 1부터 N까지의 자연수 j에 대하여 집합 A_j와 B_j를

$$A_j = \{i \mid f_j(i) < f_j(0),\ 1 \le i \le n\}, \quad B_j = \{i \mid f_j(i) < f_j(0),\ n+1 \le i \le 2n\}$$

라 하고 a_j와 b_j를 각각 집합 A_j와 B_j의 원소의 개수라 하자. 또한, D_k와 E_k를

$$D_k = \{f_j \mid f_j \in S,\ a_j = k\}, \quad E_k = \{f_j \mid f_j \in S,\ b_j = k\}$$

라 하자.

(나) $2n$명의 사람 중에서 k명을 뽑았다고 하자. 이때, $2n$명의 사람이 n쌍의 부부로 이루어졌다고 가정하면, $2n$명 중 뽑힌 사람 수 k는 부부가 모두 뽑힌 쌍의 수의 2배와 부부 중 한 명만이 뽑힌 쌍의 수의 총합으로 생각할 수 있다.

논제 1 **아래의 논제에 답하시오.** [10점]

(1) 집합 S의 원소의 개수 N을 구하는 방법을 설명하시오.

(2) 표본공간 S의 각 원소 f_j에 값 a_j를 대응시키는 확률변수 X를 생각하자. $n=3$일 때, 확률 $P(X=1)$을 구하는 방법을 설명하시오.

논제 2 **$n=3$이라 할 때, 아래의 논제에 답하시오.** [20점]

(1) 집합 $D_1 \cap E_1$과 $D_1 \cap E_3$의 원소의 개수를 구하는 방법을 설명하시오.

(2) 위에서 구한 두 집합의 원소의 개수가 같은지 다른지 판단하고 그 이유를 논하시오.

(3) 집합 D_k, E_k를 표본공간 S의 사건으로 생각할 때, 두 사건 D_1과 E_1이 서로 독립인지 판단하고 그 이유를 설명하시오.

32) 연세대대학교 입학처

논제 3

다음 등식

$$ {}_{2n}C_k = \sum_{i=0}^{(\text{가})} \left({}_nC_i \times {}_{n-i}C_{(\text{나})} \times 2^{(\text{다})} \right) $$

이 성립하도록 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 구하고 그 이유를 설명하시오.[15점]

논제 4

다항함수 $g(x) = \sum_{j=1}^{N} (1-x)^{a_j}(1+x)^{b_j}$를 생각하자. 닫힌 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $g(x)$의 최댓값을 구하고, 그 값이 최대인 이유를 설명하시오. [15점]

논술유형분석

문항 수	수학 1문항(60점), 과학 1문항(40점)	시간	150분
연관 개념	집합, 함수, 순열과 조합, 확률		

제 시 문 분 석

제시문 (가)는 집합 S, A_j, B_j, D_k, E_k와 원소의 개수 a_j, b_j의 정의를 소개하였다. 제시문 (나)는 $2n$명 중 뽑힌 사람 수 k는, n쌍의 부부 중 부부가 모두 뽑힌 쌍의 수의 2배와 부부 중 한 명만이 뽑힌 쌍의 수의 총합임을 소개하였다.

논 제 분 석

논제 1, 논제 2

제시문에서 주어진 집합의 정의를 정확히 이해하고 이를 순열, 조합 등의 방법을 이용하여 주어진 조건하에서 문제를 해결하는 능력, 즉 논리적 사고력과 응용능력을 동시에 평가하는 문제이다. 또한 확률적인 개념과 결합하여 문제를 재해석하는 능력을 평가하는 문제이다.

논제 3

문장으로 표현된 제시문의 추상적 내용을 경우의 수, 순열, 조합 등의 개념을 이용하여 구체적인 수식으로 표현하고 그 의미를 해석할 수 있는지를 평가하는 문제이다.

논제 4

주어진 다항함수의 특성을 파악하여 **[논제 3]**에서 완성한 등식 및 이항정리 등을 함께 사용하여 문제에서 요구하는 결론을 얻기까지의 과정을 체계적 논리로 설명할 수 있는지를 묻는 문제이다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 조건부 확률

확률이 0이 아닌 사건 A에 대하여 사건 A가 일어났다고 가정할 때, 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라 하고, 기호로

$$\mathrm{P}(B|A)$$

와 같이 나타낸다. 조건부확률의 정의에서

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{n(A\cap B)}{n(A)}$$

이므로 우변의 분모, 분자를 표본공간의 근원사건의 수 $n(S)$로 나누면

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

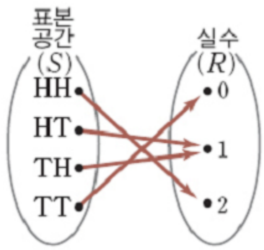
이다.

2. 확률변수

두 개의 동전을 던지는 시행에서 앞면을 H, 뒷면을 T로 나타내면, 나올 수 있는 모든 경우의 집합인 표본공간 S는

$$S=\{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TH},\mathrm{TT}\}$$

이다. 이 시행에서 앞면이 나오는 횟수를 X로 나타내면 X가 취할 수 있는 값은 $0, 1, 2$이다. 따라서 $X=1$에 대응하는 사건은 $\{\mathrm{HT},\mathrm{TH}\}$이다.



이와 같이, 어떤 시행의 표본공간 S의 각 원소를 실수의 집합 R의 한 원소에 대응시키는 함수

$$X : S \to R$$

를 확률변수라고 하고, 사건 $\{X=x\}$의 확률을 간단히

$$\mathrm{P}(X=x)$$

와 같이 나타낸다.

풀 어 보 기

문제 1 정의역과 공역을 $X=\{0,1,2,3,4\}$로 하는 일대일 대응을 모두 모은 집합을 S라 하고 그 원소를 중복 없이 나열하여 $S=\{f_1, f_2, \cdots, f_N\}$이라 하자. 이때, 1부터 N까지의 자연수 j에 대하여 집합 A_j와 B_j를

$$A_j=\{i \mid f_j(i)<f_j(0),\ 1\le i\le 2\},\quad B_j=\{i \mid f_j(i)<f_j(0),\ 3\le i\le 4\}$$

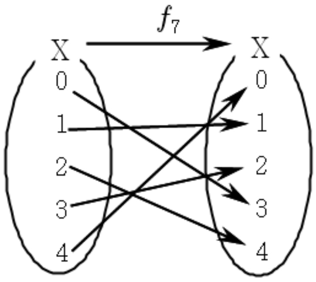
라 하고 a_j와 b_j를 각각 집합 A_j와 B_j의 원소의 개수라 하자. 또한, D_k와 E_k를

$$D_k=\{f_j \mid f_j\in S,\ a_j=k\},\quad E_k=\{f_j \mid f_j\in S,\ b_j=k\}$$

라 하자.

(1) 집합 S의 원소의 개수 N을 구하시오.

(2) 집합 S의 원소 f_7이 아래의 그림과 같을 때, a_7과 b_7을 구하시오.



(3) 집합 $D_1\cap E_1$과 $D_1\cap E_2$의 원소의 개수를 구하시오.

(4) 집합 S의 부분집합 T를 $T=\{f_j \mid f_j(0)=2,\ f_j\in S\}$라 하고, 각 T의 원소 f_j에 대해서 다항함수 $h_j(x)=(1-x)^{a_j}(1+x)^{b_j}$를 생각하자. 이러한 모든 다항함수 $h_j(x)$의 합은

$$2!\,2!\sum_{i=0}^{(\text{가})} {}_2C_i\ {}_{2-i}C_{(\text{나})}\ \{(1-x)(1+x)\}^i\{(1-x)+(1+x)\}^{(\text{다})}$$

이라고 한다. 이때, (가), (나), (다)에 알맞은 것을 구하시오.

문제 2 제시문(나)를 이용하여 다음 등식

$${}_{10}C_6=\sum_{i=0}^{(\text{가})}\left({}_5C_i\times{}_{5-i}C_{(\text{나})}\times 2^{(\text{다})}\right)$$

이 성립하도록 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 구하고 이때 등식이 성립함을 확인하시오. (단, $r>n$일 때 ${}_nC_r=0$으로 정의한다.)

읽 기 자 료

가. 제시문(나)를 이용한 조합론적 방법에 의한 증명

$$\sum_{i=0}^{k} {}_nC_i\, {}_nC_{k-i}(1-x)^i(1+x)^{k-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_nC_i\, {}_{n-i}C_{k-2i}\,\{(1-x)(1+x)\}^i\{(1-x)+(1+x)\}^{k-2i}$$

(좌변)은 $i=0,1,2,\cdots,k$일 때, 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ n\}$에서 i개를 선택하고 $\{n+1,\ n+2,\ \cdots,\ 2n-1,\ 2n\}$에서 $k-i$개를 선택하는 방법의 수와 $(1-x)^i(1+x)^{k-i}$의 곱으로 이루어진 식들의 총합이다.

이제, 이것을 [제시문 나]를 활용하여 구해보자.

(1) 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2n-2,\ 2n-1,\ 2n\}$을 n개의 집합군 $\{1,\ n+1\}$, $\{2,\ n+2\}$, $\cdots$, $\{n-1,\ 2n-1\}$, $\{n,\ 2n\}$으로 나누자.

(2) n개의 집합군에서 두 원소 모두를 선택할 $i\left(0\le i\le\left[\frac{k}{2}\right]\right)$개의 집합을 선택하자. 그 방법의 수는 ${}_nC_i$가지이다.

(3) $n-i$개의 집합군에서 한 원소만 선택할 $k-2i$개의 집합군을 선택하여 각각의 집합에서 한 원소만을 선택하자. 한 원소만 선택할 $k-2i$개의 집합에서 한 원소만을 선택하는 것은 다시 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$에서 몇 개($j$개)가 선택되어지는가에 따라 분류하여 생각하자.

(1), (2), (3)에 의하여 만들어진 식들의 총합은

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_nC_i\,\{(1-x)(1+x)\}^i\,{}_{n-i}C_{k-2i}\sum_{j=0}^{k-2i} {}_{k-2i}C_j(1-x)^j(1+x)^{k-2i-j}$$

$$=\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_nC_i\, {}_{n-i}C_{k-2i}\,\{(1-x)(1+x)\}^i\{(1-x)+(1+x)\}^{k-2i}$$

따라서

$$\sum_{i=0}^{k} {}_nC_i\, {}_nC_{k-i}(1-x)^i(1+x)^{k-i}=\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_nC_i\, {}_{n-i}C_{k-2i}\,\{(1-x)(1+x)\}^i\{(1-x)+(1+x)\}^{k-2i}$$

나. 다항식의 계수 비교에 의한 증명

$$\sum_{i=0}^{k} {}_nC_i\,{}_nC_{k-i}(1-x)^i(1+x)^{k-i} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_nC_i\,{}_{n-i}C_{k-2i}\,\{(1-x)(1+x)\}^i\{(1-x)+(1+x)\}^{k-2i}$$

ⅰ) $(1-x+y)^n(1+x+y)^n$에서 x를 상수 취급하여 y^{2n-k}의 계수를 구해보자.

$(1-x+y)^n$에서 y^{n-i}의 계수는 ${}_nC_i(1-x)^i$이고 $(1+x+y)^n$에서 y^{n-k+i}의 계수는 ${}_nC_{k-i}(1+x)^{k-i}$이므로 $(1-x+y)^n(1+x+y)^n$에서 y^{2n-k}의 계수는

$$\sum_{i=0}^{k} {}_nC_i\,{}_nC_{k-i}(1-x)^i(1+x)^{k-i}$$

ⅱ) 한편, $(y^2+2y+1-x^2)^n$에서 x를 상수 취급하여 y^{2n-k}의 계수를 구해보자.

$(y^2+2y+1-x^2)^n$의 일반항 $\dfrac{n!}{p!q!r!}(y^2)^p(2y)^q(1-x^2)^r = {}_nC_r\,{}_{n-r}C_q 2^q(1-x^2)^r y^{2p+q}$에서

$p+q+r=n,\ 2p+q=2n-k$. 그러므로 $q=k-2r$, $r=\dfrac{k}{2}-\dfrac{q}{2}$. 여기서 가능한 r의 값은 $r=0, 1, 2, \cdots, [\dfrac{k}{2}]$. 따라서 $(y^2+2y+1-x^2)^n$에서 y^{2n-k}의 계수는

$$\sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_nC_r\,{}_{n-r}C_q 2^q(1-x^2)^r = \sum_{r=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_nC_r\,{}_{n-r}C_{k-2r}\,2^{k-2r}(1-x^2)^r$$

$$= \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_nC_i\,{}_{n-i}C_{k-2i}\,\{(1-x)(1+x)\}^i\{(1-x)+(1+x)\}^{k-2i}$$

그런데, $(1-x+y)^n(1+x+y)^n=(y^2+2y+1-x^2)^n$이므로 $(1-x+y)^n(1+x+y)^n$에서 y^{2n-k}의 계수와 $(y^2+2y+1-x^2)^n$에서 y^{2n-k}의 계수는 서로 같다. 따라서 ⅰ), ⅱ)에 의해서

$$\sum_{i=0}^{k} {}_nC_i\,{}_nC_{k-i}(1-x)^i(1+x)^{k-i} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} {}_nC_i\,{}_{n-i}C_{k-2i}\,\{(1-x)(1+x)\}^i\{(1-x)+(1+x)\}^{k-2i}$$

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1

(1) 정의역과 공역을 $X=\{0,1,2,3,4\}$로 하는 일대일 대응의 개수는 $0,1,2,3,4$를 한 줄로 배열하는 순열의 수와 같으므로, 집합 S의 원소의 개수 N은 $5!=120$이다.

(2) $A_7=\{1\}$, $B_7=\{3,4\}$이므로 $a_7=1$, $b_7=2$이다.

(3)

① $D_1 \cap E_1$

$f_j(0)$	함수의 형태	함수의 개수
2	1, 2중의 한 개만, 3, 4중 한 개만 0과 1로 대응되는 일대일대응	${}_2C_1 \times {}_2C_1 \times 2! \times 2!$

② $D_1 \cap E_2$

$f_j(0)$	함수의 형태	함수의 개수
3	1, 2중의 한 개만, 3, 4모두 0, 1, 2로 대응되는 일대일대응	${}_2C_1 \times {}_2C_2 \times 3! \times 1!$

따라서 $n(D_1 \cap E_1)=16$, $n(D_1 \cap E_2)=12$이다.

(4)

T의 원소들의 세분화	$(1-x)^{a_j}(1+x)^{b_j}$	T의 원소들의 개수
$\{f_j(1), f_j(2)\}=\{0,1\}$	$(1+x)^2$	$2! \times 2!$
$\{f_j(1), f_j(3)\}=\{0,1\}$	$(1-x)(1+x)$	$2! \times 2!$
$\{f_j(1), f_j(4)\}=\{0,1\}$	$(1-x)(1+x)$	$2! \times 2!$
$\{f_j(2), f_j(3)\}=\{0,1\}$	$(1-x)(1+x)$	$2! \times 2!$
$\{f_j(2), f_j(4)\}=\{0,1\}$	$(1-x)(1+x)$	$2! \times 2!$
$\{f_j(3), f_j(4)\}=\{0,1\}$	$(1-x)^2$	$2! \times 2!$

모든 다항함수 $h_j(x)=(1-x)^{a_j}(1+x)^{b_j}$의 합은

$$2!\,2!\{(1-x)+(1+x)\}^2+2!\,2!\{2(1-x)(1+x)\}$$

$$=2!\,2!\sum_{i=0}^{1}{}_2C_i\,{}_{2-i}C_{2-2i}\,\{(1-x)(1+x)\}^i\{(1-x)+(1+x)\}^{2-2i}$$

따라서 (가), (나), (다)는 순서대로 1, $2-2i$, $2-2i$이다.

다 른 풀 이

1과 3, 2와 4를 한 쌍(부부)으로 생각하자. 그러면, 4개의 공역의 원소 $1, 2, 3, 4$에서 $0, 1$에 대응시킬 숫자 2개를 선택하는 방법의 수는 부부가 모두 선택되는 $i\,(i=0, 1)$쌍을 결정하고 부부 중 한 명만이 뽑힌 쌍 $2-2i$를 선택하는 방법의 수와 같다. 그 방법의 수는 ${}_2C_i \times {}_{2-i}C_{2-2i}$이다. 이 중에서 부부가 모두 선택된 쌍은 없고 부부 중 한 명만이 뽑힌 쌍이 1과 3, 2와 4 이렇게 2쌍인 S의 원소들만을 생각해 보자.

ⅰ) $1, 2$중에서 0개 선택된 S의 원소 f_j에 대해서

$$(1-x)^{a_j}(1+x)^{b_j}=(1+x)^2$$

여기서 $1, 2$중에서 0개 선택하는 방법의 수는 ${}_2C_0$

ⅱ) $1, 2$중에서 1개 선택된 S의 원소 f_j에 대해서

$$(1-x)^{a_j}(1+x)^{b_j}=(1-x)(1+x)$$

여기서 $1, 2$중에서 1개 선택하는 방법의 수는 ${}_2C_1$

ⅲ) $1, 2$중에서 2개 선택된 S의 원소 f_j에 대해서

$$(1-x)^{a_j}(1+x)^{b_j}=(1-x)^2$$

여기서 $1, 2$중에서 2개 선택하는 방법의 수는 ${}_2C_2$

이것들의 합은

$$\sum_{r=0}^{2} {}_2C_r\,(1-x)^r\,(1+x)^{2-r}=\{(1-x)+(1+x)\}^2$$

여기에 원소들을 대응시키는 방법의 수 $2!\,(4-2)!$를 곱하면

$$2!\,2!\{(1-x)+(1+x)\}^2$$

여기에 부부가 모두 선택되는 0쌍을 결정하고 부부 중 한 명만이 뽑힌 2쌍을 선택하는 방법의 수 ${}_2C_0 \times {}_2C_2$를 곱하면

$$2!\,2!\,{}_2C_0\,{}_2C_2\{(1-x)+(1+x)\}^2$$

여기에 부부가 모두 선택되는 쌍을 $i=0, 1$로 변화시키면

$$2!\,2!\sum_{i=0}^{1} {}_2C_i\,{}_{2-i}C_{2-2i}\,\{(1-x)(1+x)\}^i\{(1-x)+(1+x)\}^{2-2i}$$

따라서 (가), (나), (다)는 순서대로 1, $2-2i$, $2-2i$이다.

문제 2 10명의 사람이 5쌍의 부부로 이루어졌다고 가정하면, 10명 중 6명을 뽑는 방법은 부부가 모두 뽑힌 $i\,(i=0, 1, 2, 3)$쌍을 선택하고 부부 중 한 명만이 뽑힌 $6-2i$쌍을 선택한다. 이때, 부부 중 한 명만이 뽑힌 $6-2i$쌍에서 각각 한 명씩을 뽑는 방법의 수는 2^{6-2i}이다. 그러므로

$$ {}_{10}C_6 = \sum_{i=0}^{3} \left({}_5C_i \times {}_{5-i}C_{6-2i} \times 2^{6-2i} \right) $$

따라서 (가), (나), (다)는 순서대로 3, $6-2i$, $6-2i$ 이다.
한편, ${}_{10}C_6 = {}_{10}C_4 = 210$이고

$$ \sum_{i=0}^{3} \left({}_5C_i \times {}_{5-i}C_{6-2i} \times 2^{6-2i} \right) = {}_5C_0 \times {}_5C_6 \times 2^6 + {}_5C_1 \times {}_4C_4 \times 2^4 + {}_5C_2 \times {}_3C_2 \times 2^2 + {}_5C_3 \times {}_2C_0 \times 2^0 $$
$$ = 0 + 80 + 120 + 10 = 210 $$

따라서 ${}_{10}C_6 = \sum_{i=0}^{3} \left({}_5C_i \times {}_{5-i}C_{6-2i} \times 2^{6-2i} \right)$임이 확인된다.

논제 1-1

(1) 정의역과 공역을 $\{0, 1, \cdots, 2n\}$로 하는 일대일 대응의 개수는 $0, 1, \cdots, 2n$을 한 줄로 배열하는 순열의 수와 같으므로, 집합 S의 원소의 개수 N은 $(2n+1)!$이다.

(2) $n=3$일 때, $a_j = 1$인 f_j를 만드는 방법은 다음과 같다.
7개의 공역의 원소 $0, 1, 2, \cdots, 6$에서 $0, 1, 2, 3$을 대응시킬 숫자 4개를 선택한 후 두 번째로 작은 숫자에 0을 대응시키고 나머지 세 숫자에 $1, 2, 3$을 일대일 대응시킨다. 그리고 $4, 5, 6$을 나머지 원소들에 일대일 대응시킨다.
따라서

$$ P(X=1) = \frac{{}_7C_4 \times 3! \times 3!}{7!} = \frac{1}{4} $$

다 른 풀 이

확률변수 X와 집합 D_k의 정의에 의해 확률 $P(X=1)$은 $P(X=1) = \frac{n(D_1)}{7!}$이다. 집합 D_1의 원소의 개수는 $f_j(0)$ 의 값에 따라 아래의 표와 같다.

$f_j(0)$	함수의 형태	함수의 개수
1	1, 2, 3중의 한 개만 0으로 대응되는 일대일대응	${}_3C_1 \times {}_3C_0 \times 1! \times 5!$
2	1, 2, 3중의 한 개만, 4, 5, 6중 한 개만 0과 1로 대응되는 일대일대응	${}_3C_1 \times {}_3C_1 \times 2! \times 4!$
3	1, 2, 3중의 한 개만, 4, 5, 6중 두 개만 0, 1, 2로 대응되는 일대일대응	${}_3C_1 \times {}_3C_2 \times 3! \times 3!$
4	1, 2, 3중의 한 개만, 4, 5, 6중 세 개만 0, 1, 2, 3로 대응되는 일대일대응	${}_3C_1 \times {}_3C_3 \times 4! \times 2!$

따라서 구하는 확률 $P(X=1)$은 $\frac{1}{4}$ 이다.

논제 1-2

(1) [1-1]의 (2), (다른 풀이)에서 사용한 표를 이용하여 구하면 다음과 같다.

① $D_1 \cap E_1$

$f_j(0)$	함수의 형태	함수의 개수
2	1, 2, 3중의 한 개만, 4, 5, 6중 한 개만 0과 1로 대응되는 일대일대응	${}_3C_1 \times {}_3C_1 \times 2! \times 4!$

② $D_1 \cap E_3$

$f_j(0)$	함수의 형태	함수의 개수
4	1, 2, 3중의 한 개만, 4, 5, 6 세 개 모두 0, 1, 2, 3으로 대응되는 일대일대응	${}_3C_1 \times {}_3C_3 \times 4! \times 2!$

따라서 $n(D_1 \cap E_1) = 432$, $n(D_1 \cap E_3) = 144$이다.

(2) (1)에서 구한 답은 다르다. 왜냐하면 각각의 조건을 만족하는 함수의 형태가 다르기 때문이다. 즉, 집합 $D_1 \cap E_1$의 원소는 [1, 2, 3중의 한 개만, 4, 5, 6중 한 개만 0과 1로 대응되는 일대일대응]인 형태이고 집합 $D_1 \cap E_3$의 원소는 [1, 2, 3중의 한 개만, 4, 5, 6 세 개 모두 0, 1, 2, 3으로 대응되는 일대일대응]의 형태이기 때문이다.

(3) [1-1](2)의 풀이에서 $P(D_1) = \dfrac{1}{4}$. 또한, $S = \{f_1, f_2, \cdots, f_{7!}\}$의 원소 $f_j(j = 1, 2, \cdots, 7!)$에 대해서 $f_j(1)$, $f_j(2)$, $f_j(3)$을 각각 $f_j(4)$, $f_j(5)$, $f_j(6)$과 서로 바꾼 함수 $f_{j'}$을 생각하면, 집합 D_1의 원소의 개수는 집합 E_1의 원소의 개수와 같음을 알 수 있다. 그러므로 $P(E_1) = \dfrac{1}{4}$. 한편, $P(D_1 \cap E_1) = \dfrac{432}{7!} = \dfrac{3}{35}$이므로 $P(D_1 \cap E_1) \neq P(D_1)P(E_1)$. 따라서 두 사건 D_1과 E_1은 서로 독립이 아니다.

논제 1-3

$2n$명의 사람이 n쌍의 부부로 이루어졌다고 가정하면, $2n$명 중 k명을 뽑는 방법은 부부가 모두 뽑힌 $i\left(i = 0, 1, 2, \cdots, [\frac{k}{2}]\right)$쌍을 선택하고 부부 중 한 명만이 뽑힌 $k-2i$쌍을 선택한다. 이때, 부부 중 한 명만이 뽑힌 $k-2i$쌍에서 각각 한 명씩을 뽑는 방법의 수는 2^{k-2i}이다. 그러므로

$$ {}_{2n}C_k = \sum_{i=0}^{[\frac{k}{2}]} \left({}_nC_i \times {}_{n-i}C_{k-2i} \times 2^{k-2i} \right) $$

여기서, $[x]$는 x를 넘지 않는 정수이고 $r>n$일 때 ${}_nC_r=0$으로 정의한다. 따라서 (가), (나), (다)는 순서대로 $\left[\frac{k}{2}\right]$, $k-2i$, $k-2i$이다.

다 른 풀 이

[제시문 나]를 해석하면 $k=3$인 경우의 수를 다음 표와 같이 구할 수 있다.

부부 모두가 뽑히는 쌍의 개수	부부 중 한 명만이 뽑히는 쌍의 개수	3명을 뽑는 경우의 수
0	3	${}_nC_0\times{}_nC_3\times2^3$
1	1	${}_nC_1\times{}_{n-1}C_1\times2^1$

$k=4$인 경우

부부 모두가 뽑히는 쌍의 개수	부부 중 한 명만이 뽑히는 쌍의 개수	4명을 뽑는 경우의 수
0	4	${}_nC_0\times{}_nC_4\times2^4$
1	2	${}_nC_1\times{}_{n-1}C_2\times2^2$
2	0	${}_nC_2\times{}_{n-2}C_0\times2^0$

이를 일반화하면 다음과 같다.

k인 경우

부부 모두가 뽑히는 쌍의 개수	부부 중 한 명만이 뽑히는 쌍의 개수	k명을 뽑는 경우의 수
0	k	${}_nC_0\times{}_{n-0}C_{k-2\times0}\times2^{k-2\times0}$
1	$k-2$	${}_nC_1\times{}_{n-1}C_{k-2\times1}\times2^{k-2\times1}$
2	$k-4$	${}_nC_2\times{}_{n-2}C_{k-2\times2}\times2^{k-2\times2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$k-2i$	${}_nC_i\times{}_{n-i}C_{k-2\times i}\times2^{k-2\times i}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\left[\frac{k}{2}\right]$	$k-2\left[\frac{2}{k}\right]$	${}_nC_{\left[\frac{k}{2}\right]}\times{}_{n-\left[\frac{k}{2}\right]}C_{k-2\left[\frac{k}{2}\right]}\times2^{k-2\left[\frac{k}{2}\right]}$

그러므로 ${}_{2n}C_k=\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}\left\{{}_nC_k\times{}_{n-i}C_{k-2i}\times2^{k-2i}\right\}$이다. 따라서 (가), (나), (다)는 순서대로 $\left[\frac{k}{2}\right]$, $k-2i$, $k-2i$이다.

논제 1-4

$j=1,2,\cdots,n$에 대해서 j와 $j+n$을 한 쌍(부부)으로 생각하자. 그리고 $a_j+b_j=k$ $(k=0,1,2,\cdots,2n)$에 대해서 [1-3] 풀이 방식을 적용하면 다음의 등식들을 얻는다.

$$g(x)=\sum_{j=1}^{N}(1-x)^{a_j}(1+x)^{b_j}=\sum_{k=0}^{2n}k!(2n-k)!\sum_{i=0}^{k}{}_nC_{i\,n}C_{k-i}(1-x)^i(1+x)^{k-i}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}k!(2n-k)!\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}{}_nC_{i\,n-i}C_{k-2i}\{(1-x)(1+x)\}^i\{(1-x)+(1+x)\}^{k-2i}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}k!(2n-k)!\sum_{i=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]}2^{k-2i}{}_nC_{i\,n-i}C_{k-2i}(1-x^2)^i$$

여기서, $[x]$는 x를 넘지 않는 정수이고 $r>n$일 때 ${}_nC_r=0$으로 정의한다.

한편, $y=1-x^2$은 $x=0$에서 최댓값을 가진다. 따라서 $g(x)$의 최댓값은

$$g(0)=\sum_{j=1}^{N}(1-0)^{a_j}(1+0)^{b_j}=(2n+1)!$$

18 이화여자대학교 모의

논제 1 [33]

정의역과 공역이 모두 자연수인 함수 f가 아래 두 조건을 만족한다고 할 때, 아래 물음에 답하시오.

(A) $f(n+1)>f(n)$
(B) $f(n+f(m))=f(n)+m+1$

(1) 모든 자연수 n에 대하여, $f(n)>n$이 성립함을 보이시오.

(2) 위 두 조건을 만족하는 $f(n)$을 모두 찾아 n에 대한 식으로 나타내고 그 근거를 제시하시오.

논제 2

우리가 표본조사를 하는 이유는 모집단에 대해서 알고 싶지만 전수 조사는 너무 많은 비용과 시간이 들기 때문이다. 잘 설계된 표본추출 방법을 이용하게 되면 적절한 크기의 표본만으로도 모집단에 대한 정확한 추정이 가능하다. 하지만 적절하지 못한 방법으로 표본을 추출하게 되면 표본의 크기와 상관없이 의외의 결과가 나오기도 한다.

(1) 다음 경우는 1936년 미국 대선에서 표본조사와 실제 결과가 다르게 나온 예이다.

33) 이화여자대학교 입학처

당시 공화당의 Landon 후보와 당시 대통령이었던 민주당의 Roosevelt 후보와의 대결이 뜨거웠다. 서로 자기의 우세를 장담하고 있었는데, American Literary Digest 잡지에서 2백만명 이상의 유권자들에게 우편 조사를 실시하였다. 조사 결과, 공화당의 Landon 후보가 큰 표 차이로 이기는 것으로 나왔는데 실제 결과는 정반대였다. 그 잡지에서 조사한 유권자들은 그 잡지의 독자들과 자동차 소유자들, 그리고 전화 소유자들로 이루어져 있었다. 참고로 1930년대에 미국에서는 100명에 20명 정도의 사람들이 자동차를 소유하고 있었고, 전체 가구의 35% 정도가 전화를 소유하고 있었다고 한다.

위 잡지사에서는 상당히 큰 표본을 사용하였는데도 반대의 선거결과가 나온 이유를 유추하여 설명해 보시오.

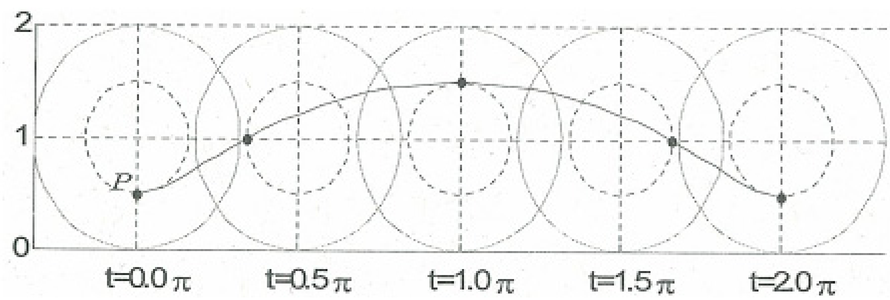
(2) 어떤 선거를 치르려고 할 때 유권자들의 투표율을 예측하기 위한 여론조사를 시행한다고 해보자. 모집단의 투표율에 대한 추정을 할 때에 추정오차의 한계는 $2\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$ 으로 근사할 수 있다. 여기서 p는 투표율 추정치이고, n은 표본의 크기이다. 만약 투표율 추정치 p가 0.3과 0.7사이에 있다는 것을 알고 있다고 할 때, 추정오차의 한계를 0.05 이하로 보장하기 위한 표본의 크기는 최소한 얼마가 되어야 하는지 구하시오.

(3) 각 TV 방송사에서는 투료일 이전에는 지지하는 후보를 묻는 ‘전화여론조사’를 투표 당일에는 투표를 마치고 나온 사람들을 대상으로 몇 명에 한 명씩 누구를 투표했는지를 묻는 ‘출구조사’를 시행한다. 실제로 출구조사가 전화여론조사보다 더 정확하게 투표 결과를 예측하는 것으로 알려져 있다.

어떤 선거에 대한 전화여론조사와 출구조사를 시행할 때, 두 조사의 표본 수가 같았고 사람들이 모두 솔직하게 응답했다고 가정하자. 또한 전화여론조사 당시 부동층(어떤 후보를 지지할지 아직 결정하지 않은 사람들)이 없었다고 가정하자. 위의 조건아래서도 출구조사가 전화여론조사보다 투표 결과를 더 정확하게 예측할 수 있는 이유가 무엇인지를 설명하시오.

논제 3

시간 $t=0$에서 $t=2\pi$까지, 반지름 1인 바퀴가 아래 그림과 같이 x축의 양의방향으로 속도 1을 유지하며 이동하고 있다. 바퀴의 중심에서 $a(0 \le a \le 1)$만큼 떨어진 점 P가 시간에 따라 움직이는 자취를 굴렁쇠선(Cycloid) $\begin{cases} x = t - a\sin t \\ y = 1 - a\cos t \end{cases}$ 으로 표시가능하다고 할 때, 아래 물음에 답하시오.



(1) 0과 1사이의 임의의 a에 대하여 $x=0$과 $x=2\pi$사이에서 굴렁쇠선의 길이는 $L_a = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$로 표시가능하다. 길이 L_0와 길이 L_1를 구하고

$L_a \le \int_0^{2\pi} \left\{(1-a) + 2a\sin\frac{t}{2}\right\} dt = 2\pi(1-a) + 8a$임을 보이시오.

(2) $x=0$와 $x=2\pi$사이에서 굴렁쇠선과 x축이 이루는 면적 S를 구하고자 한다. 구간 $[0,\ 2\pi]$를 균일한 n개의 구간으로 나누었을 때, 시간 $t_k = \frac{2k\pi}{n}$, $k=0,\ \cdots,\ n$에서의 점의 위치를 $\mathrm{P}_k = (x_k,\ y_k)$라 하자. 구분구적법에 따라 $\overline{x_k x_{k+1}}$를 밑변으로 하고 y_k를 높이로 하는 직사각형의 면적 S_k를 이용하여 면적 S를 정적분으로 표시하고, 정적분의 값 S를 계산하시오.

논술유형분석

문항 수	수학 3문항	시간	100분
연관 개념	논술1. 귀류법, 추론 논술2. 모비율 추정 논술3. 평균값 정리, 정적분의 정의		

논 제 분 석

논제 1

제시된 두 조건을 이용하여 함수의 성질을 증명하고 규칙성을 추론할 수 있는가를 평가하는 문항이다.

(1) 모든 자연수 n에 대하여 $f(n) > n$이 성립하기 위한 필요충분조건을 찾아 귀류법으로 증명하면 된다.

(2) $f(1)$의 값을 구하고 제시된 조건을 이용하여 $f(n)$을 구하면 된다.

논제 2

(1) 표본 추출과정에서 발행하는 오차에 대하여 묻는 문항이다. 표본이 모집단의 특성을 대표하고 있는지 생각해 보면 된다.

(2) 추정오차의 한계가 0.05 이하가 되기 위한 표본의 크기의 최솟값을 묻는 문항이다. $p(1-p)$의 범위를 구하여 n의 범위를 구하면 된다.

(3) 출구조사가 전화여론조사보다 오차가 적은 이유를 묻는 문항이다. 출구조사 표본의 특성과 전화여론조사 표본의 특성을 비교해 보면 된다.

논제 3

(1) 기본적인 정적분을 계산하고 정적분의 성질을 이용하여 주어진 부등식을 증명할 수 있는지를 묻는 문항이다. 부등식의 증명에서 적분 구간이 같으므로 피적분 함수끼리 비교하면 된다.

(2) 구분구적법을 이용하여 구하고자 하는 넓이를 정적분으로 나타내어 계산할 수 있는지를 묻는 문항이다. S_k를 구하는 과정에서 평균값 정리를 이용해야 한다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 표본비율의 분포와 모비율의 신뢰구간

(1) 표본비율 $\hat{p}$은 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 정규분포 $N\left(p,\ \frac{pq}{n}\right)$에 가까워지고

$Z=\dfrac{\hat{p}-p}{\sqrt{\dfrac{pq}{n}}}$은 표준정규분포 $N(0,\ 1)$에 가까워진다. (단, $q=1-p$)

(2) 표본비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, 표본의 크기 n이 충분히 크면 모비율 p의 신뢰구간은 (단, $\hat{q}=1-\hat{p}$)

① 신뢰도 95%일 때 : $\hat{p}-1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+1.96\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

② 신뢰도 99%일 때 : $\hat{p}-2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p}+2.58\sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$

2. 곡선의 길이

(1) 매개변수로 주어진 경우

$x=f(t),\ y=g(t)$ 일 때 $t=a$ 에서 $t=b$ 까지 점 $\mathrm{P}\,(x,\ y)$ 가 그리는 곡선의 길이 l 은

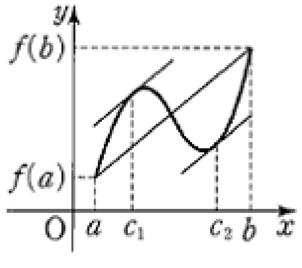
$$l=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

(2) $y=f(x)$ 로 주어진 경우

$t=a$ 에서 $t=b$ 까지 $y=f(x)$ 가 그리는 곡선의 길이 l 은

$$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

3. 평균값 정리

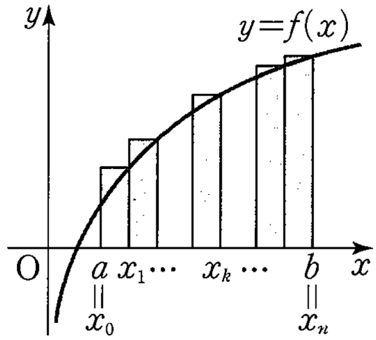


함수 $y=f(x)$가 닫힌 구간 $[a,\ b]$에서 연속이고 열린 구간 $(a,\ b)$에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

가 되는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

4. 정적분의 정의



함수 $f(x)$가 구간 $[a,\ b]$에서 연속일 때, 구간 $[a,\ b]$를 n등분하여 각 분점의 x좌표를 차례로 $x_0(=a)$, x_1, x_2, $\cdots$, $x_n(=b)$이라 하고, $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$ 이라 하자. 이때

무한급수 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x$ 를 함수 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라 하고,

기호로 $\int_a^b f(x)dx$ 와 같이 나타낸다. 즉,

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x\ \left(\Delta x=\frac{b-a}{n},\ x_k=a+k\Delta x\right)$$

풀 어 보 기

문제 1 우리나라 성인을 대상으로 특정 질병에 대한 항체 보유 비율을 조사하려고 한다. 모집단의 항체 보유 비율을 p, 모집단에서 임의로 추출한 n명을 대상으로 조사한 표본의 항체 보유 비율을 $\hat{p}$이라고 할 때, $|\hat{p}-p| \le 0.16\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}$일 확률이 0.9544이상이 되도록 하는 n의 최솟값을 구하시오. (단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $\mathrm{P}(0 \le Z \le 2) = 0.4772$ 이다.) (2011 대수능)

문제 2 모든 실수 x에 대하여 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 두 조건을 만족할 때, $a \le f(1) \le b$이다. 이때, $a+b$의 값은?

(가) $f(2)=5$
(나) 모든 실수 x에 대하여 $\lvert f'(x)\rvert \le 1$이다.

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

문제 3 폐구간 $[0, 1]$ 에서 정의된 연속함수 $f(x)$ 가 $f(0)=0$, $f(1)=1$ 이며, 개구간 $(0, 1)$ 에서 이계도함수를 갖고 $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ 일 때, $\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$ 의 값과 같은 것은? (2009 대수능)

① $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f(\frac{k}{n})\right\}\frac{1}{2n}$

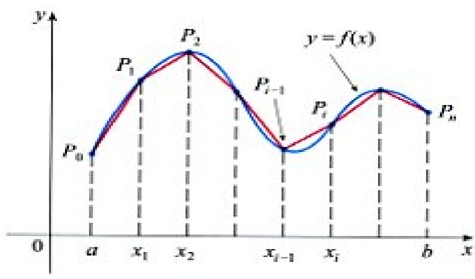
② $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f(\frac{k}{n})\right\}\frac{2}{n}$

③ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f(\frac{k}{n})\right\}\frac{1}{n}$

④ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{2n}-f(\frac{k}{n})\right\}\frac{1}{n}$

⑤ $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{2k}{n}-f(\frac{k}{n})\right\}\frac{1}{n}$

문제 4 열린구간 (a, b)에서 미분가능하고, 닫힌구간$[a, b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$가 그리는 곡선의 길이 L을 구하고자 한다. 닫힌구간 $[a, b]$를 균일한 n개의 구간으로 나누었을 때, $x_i=a+\frac{(b-a)i}{n}$, $(i=0, \cdots, n)$, $f(x_i)=y_i$, $P_i=(x_i, y_i)$라 하자. 구분구적법에 따라 선분 $L_i=\overline{P_{i-1}P_i}$를 이용하여 곡선의 길이 L을 정적분으로 나타내시오.



예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 157

n이 충분히 크면 $\hat{p}$는 근사적으로 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{p(1-p)}{n}\right)$를 따른다.

$\mathrm{P}\left(|\hat{p}-p| \le 2\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)=0.9544$ 이므로 $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \le 0.16$

$\sqrt{n} \ge \dfrac{2}{0.16}=\dfrac{25}{2} \qquad \therefore n \ge \dfrac{625}{4}=156.25$

따라서 n은 157 이상이어야 하므로 최솟값은 157 이다.

문제 2 정답 ④

함수 $f(x)$는 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로

함수 $f(x)$는 닫힌 구간 $[1,\ 2]$에서 연속이고, 열린 구간 $(1,\ 2)$에서 미분가능하다.

따라서 평균값의 정리에 의해

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f'(c) \ (\text{단, } 1<c<2)$$

를 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다.

그런데 조건 (나)에 의하여 $|f'(c)| \le 1$이므로

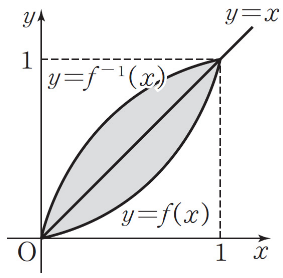
$$\left|\frac{f(2)-f(1)}{2-1}\right| \le 1$$

이다. $f(2)=5$이므로 $4 \le f(1) \le 6$

$\therefore\ a+b=4+6=10$

문제 3 정답 ②

$f'(x)>0,\ f''(x)>0$ 이므로 연속함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $[0,\ 1]$ 에서 아래로 볼록하게 증가한다. 또, 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 다음 그림과 같다.



이때 $\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx$ 의 값은 위의 그림에서 어두운 부분의 넓이와 같고, 이는 직선 $y=x$ 와 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이의 2 배와 같다.

직선 $y=x$ 와 곡선 $y=f(x)$ 로 둘러싸인 부분의 넓이는 정적분의 정의에 의하여

$\int_0^1 \{x-f(x)\}dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n}$ 이므로

$$\int_0^1 \{f^{-1}(x)-f(x)\}dx = 2\int_0^1 \{x-f(x)\}dx = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{k}{n}-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}\frac{2}{n}$$

문제 4

$L_i = \overline{P_{i-1}P_i} = \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+(y_i-y_{i-1})^2}$ 이다.

닫힌구간 $[x_i,\ x_{i-1}]$에서 f 에 평균값 정리를 적용하면

$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(x_i^*)(x_i-x_{i-1})$를 만족하는 x_i^*가 열린구간 $(x_i,\ x_{i-1})$에 존재한다.

그러므로

$$\begin{aligned} L_i = \overline{P_{i-1}P_i} &= \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2+\left\{f'\left(x_i^*\right)\left(x_i-x_{i-1}\right)\right\}^2} \\ &= \sqrt{(x_i-x_{i-1})^2\left[1+\left\{f'\left(x_i^*\right)\right\}^2\right]} \\ &= (x_i-x_{i-1})\sqrt{1+\left\{f'\left(x_i^*\right)\right\}^2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 곡선의 길이 L은

$L = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}L_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})\sqrt{1+\left\{f'(x_i^*)\right\}^2} = \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ 이다.

논제 1

(1) 함수 f가 증가이고 공역이 자연수이므로 조건(A)에 의해 $f(1)\neq 1$임을 보이면 충분하다. $f(1)=1$이라 가정하자. 조건 (B)에 $m=n=1$을 대입하면, $f(2)=3$을 얻는다. 또한 조건 (B)에 $n=1$, $m=2$를 대입하면, $f(4)=4$를 얻는다.

$f(2)=3<f(3)<f(4)=4$이고 $f(3)$은 자연수이므로 이는 모순이다. 따라서 $f(1)\neq 1$이다.

다 른 풀 이

함수 f가 증가이고 공역이 자연수이므로 조건(A)에 의해 $f(1) \neq 1$임을 보이면 충분하다. $f(1)=1$이라 가정하자. 조건 (B)에 $m=1$을 대입하면 $f(n+1)=f(n)+2,\, n \in \mathbb{N}$이므로 $f(n)=2n-1,\ n \in \mathbb{N}$이다. 조건 (B)에 $f(n)=2n-1$대입하여 좌변과 우변을 비교해보자.

$$(\text{좌변})=f(n+f(m))=f(n+2m-1)=2(n+2m-1)-1$$

$$(\text{우변})=f(n)+m+1=2n-1+m+1=2n+m$$

이고 (좌변)$\neq$(우변)이므로 모순이다. 따라서 $f(1) \neq 1$이다.

(2) $f(1)=k$라 하자. 조건 (B)에 $n=m=1$을 대입하면 $f(1+k)=k+2,\ k \in \mathbb{N}$이다. 함수 f가 증가이고 (1)에 의해 $1<k<3$이다. 따라서 $k=2$이다. 조건 (B)에 $m=1$을 대입하면 $f(n+2)=f(n)+2$이므로 $f(n)=n+1,\ n \in \mathbb{N}$이다.

논제 2

(1) 모집단의 특성을 대표할 수 있는 표본을 추출하지 못하였기 때문이다. 표본은 모집단의 성향을 대표할 수 있도록 설정되어야 한다. 그러나 위 조사에서 설정한 표본은 잡지의 독자와 자동차 및 전화 소유자들로만 구성되어 있는데 이는 투표자 전체의 일반적인 성향을 대표하기 힘들다. 그러므로 상당히 큰 표본을 사용하였지만 적절하지 못한 방법으로 표본을 추출하여 의외의 결과가 나오게 되었다.

(2) $y=p(1-p)$는 $p=0.5$에서 대칭이고 위로 볼록이다. 따라서 $0.3<p<0.7$에서 $0.21<p(1-p) \le 0.25$이다. 표본의 크기 n의 범위를 구하면

$$2\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le 2\sqrt{\frac{1}{4n}} \le 0.05=\frac{1}{20}$$

이다. $\dfrac{1}{4n} \le \dfrac{1}{1600}$이므로 $n \ge 400$

따라서 표본의 크기의 최솟값은 400이다.

(3) ① (1)번과 마찬가지로 전화여론조사는 전화를 소유한 사람에게만 실시할 수 있기 때문에 표본의 수가 같더라도 대표성에 차이가 있을 수 있다.

② 전화여론조사에 참여한 사람이 실제 투표를 하지 않았을 가능성이 있다.

③ 전화여론조사에서는 ‘지지하는 사람’ 을 물었고, 출구조사에서는 ‘투표한 사람’ 을 물었다. 지지하는 사람과 투표한 사람이 다를 가능성도 있을 수 있다.

논제 3

(1) $L_0=\int_0^{2\pi}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1)^2+(0)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}1dt=2\pi$

$L_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt=8$

$$L_a=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-a\cos t)^2+(a\sin t)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+1-2a\cos t}\,dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2+1-2a\left(1-2\sin^2\frac{t}{2}\right)}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-a)^2+4a\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

한편 $\left\{(1-a)+2a\sin\frac{t}{2}\right\}^2-\left\{(1-a)^2+4a\sin^2\frac{t}{2}\right\}=4a(1-a)\left(\sin\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}\right)\geq 0$

이므로 $(1-a)+2a\sin\frac{t}{2}\geq\sqrt{(1-a)^2+4a\sin^2\frac{t}{2}}$ 이다. 따라서 0과 1사이의 임의의 a에 대하여 굴렁쇠선의 길이 L_a은

$$L_a=\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-a)^2+4a\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\leq\int_0^{2\pi}\left\{(1-a)+2a\sin\frac{t}{2}\right\}dt=2\pi(1-a)+8a$$

이다.

(2) $\overline{x_kx_{k+1}}$를 밑변으로 하고 y_k를 높이로 하는 직사각형의 면적 S_k는

$$S_k=\overline{x_kx_{k+1}}\times y_k=\{(t_{k+1}-t_k)-a(\sin t_{k+1}-\sin t_k)\}(1-a\cos t_k)$$

이다. 닫힌구간 $[t_k,\ t_{k+1}]$에서 $\sin t$에 평균값 정리를 적용하면

$\sin t_{k+1}-\sin t_k=(t_{k+1}-t_k)\cos t_k^*$를 만족하는 t_k^*가 열린구간 $(t_k,\ t_{k+1})$에 존재한다. 그러므로

$$S_k=\{(t_{k+1}-t_k)-a(t_{k+1}-t_k)(\cos t_k^*)\}(1-a\cos t_k)=(t_{k+1}-t_k)(1-a\cos t_k^*)(1-a\cos t_k)$$

이다. 따라서 면적 S는

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}S_k=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\{(t_{k+1}-t_k)(1-a\cos t_k^*)(1-a\cos t_k)\}=\int_0^{2\pi}(1-a\cos t)^2dt$$
$$=\int_0^{2\pi}(1-2a\cos t+a^2\cos^2 t)dt=\int_0^{2\pi}\left\{1-2a\cos t+a^2\left(\frac{\cos 2t+1}{2}\right)\right\}dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\left\{1+\frac{a^2}{2}-2a\cos t+\frac{a^2}{2}\cos 2t\right\}dt$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{a^2}{2}\right)dt-2a\int_0^{2\pi}\cos t\,dt+\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos 2t\,dt$$
$$=(2+a^2)\pi$$

이다.

읽 기 자 료

표본조사에서 표본크기의 결정

표본조사에서는 표본을 통해 조사한 결과를 통하여 전체의 속성을 파악해야 하므로 표본은 전체를 잘 나타낼 수 있도록 선택해야 한다. 따라서 표본을 선택할 때에는 어느 한 쪽에 치우치지 않고, 대상 전체의 성질이 골고루 반영되도록 하는 것이 중요하다.

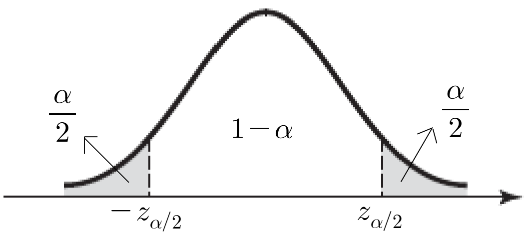
예를 들어 대통령 선거를 앞두고 어떤 후보가 대통령에 당선될 것인지 알아보기 위해 서울에 사는 20, 30대 직장인 100명을 대상으로 여론조사를 한다고 하자. 이 여론조사는 신뢰성에 문제가 있다고 말할 수 있다. 서울에 사는 사람들은 아무래도 농어촌 문제보다는 도시 정책에 관심이 더 많을 것이며, 20~30대는 40~50대의 연령층에 비해 진보적 성향이 강하다고 말할 수 있다. 또한 직장인들이 갖는 관심사와 가정주부, 자영업자들이 갖는 관심사는 같다고 보기 힘들며, 전체 유권자를 생각해 볼 때 100명이라는 표본의 크기는 전체를 대표하기에는 너무 작다고 볼 수 있다. 따라서 표본의 크기가 작고, 표본의 성질이 너무 한 쪽에 치우친 이러한 여론조사는 그 결과를 신뢰하기 힘들다.

실제로 표본조사를 하려는 경우 가장 먼저 해야 할 것은 표본의 크기를 결정하는 것이다. 표본의 크기가 크면 표본오차(sampling error)가 작아져서 비교적 정확한 결과를 얻을 수 있지만 표본의 크기가 커짐에 따른 자료수집의 시간이나 비용이 많아지기 때문에 표본추출의 의미가 없어진다. 반대로 표본의 크기가 작으면 시간과 비용은 적게 들지만 모집단과 오차가 커져서 정확한 정보를 제공하지 못한다. 이러한 이유에서 표본조사는 추정오차의 범위를 정해놓고 그것에 적당한 표본의 크기를 결정하여 조사하게 된다. 그러면 일정한 신뢰구간의 폭을 유지할 수 있는 적절한 표본의 크기를 정하는 방법에 대하여 알아보자.

우선 아래 그림과 같이 표준정규분포곡선의 양쪽 꼬리 부분의 곡선 아래의 넓이가 $\frac{\alpha}{2}$가 되는 경곗값을 각각 $-z_{\alpha/2}$, $z_{\alpha/2}$라 하자. 그러면

$$P\left(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

이다.



(1) 모집단의 평균을 추정하기 위한 표본크기의 결정

모분산 σ^2이 알려지거나 알려지지 않더라도 표본의 크기 n이 크면($n \geq 30$) 모분산 σ^2의 추정량인 표본분산 S^2을 이용하여 표준정규분포로부터 신뢰구간을 정의할 수 있다. 이때 신뢰수준 $100(1-\alpha)\%$에 대한 신뢰구간은

$$\left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)\ \text{또는}\ \left(\overline{X}-z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X}+z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. 여기서 반대로 표본오차를 d라고 할 때, 제시된 표본오차 d에 맞는 표본의 크기 n은 표본평균 $\overline{X}$를 기준으로 하여 구간을 이루는 $z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 또는 $z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}$에 달려 있다. 표본오차가 d이하인 표본의 크기는

$$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq d\ \text{또는}\ z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \leq d$$

에 의해 결정된다. 따라서 위 부등식을 만족하는 최소의 정수가 표본의 크기가 될 수 있다. 즉 표본의 크기는

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{d}\right)^2\ \text{또는}\ n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{S}{d}\right)^2$$

이다.

(2) 모집단의 비율을 추정하기 위한 표본크기의 결정

모비율의 추정량인 표본비율 p를 이용하여 표준정규분포로부터 신뢰구간을 정의할 수 있다. 이때 신뢰수준 $100(1-\alpha)\%$에 대한 신뢰구간은

$$\left(p-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\ p+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

이다. 여기서 반대로 표본오차를 d라고 할 때, 제시된 표본오차 d에 맞는 표본의 크기 n은 표본비율 p를 기준으로 하여 구간을 이루는 $z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$에 달려 있다. 표본오차가 d이하인 표본의 크기는

$$z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \leq d$$

에 의해 결정된다. 따라서 위 부등식을 만족하는 최소의 정수가 표본의 크기가 될 수 있다. 즉 표본의 크기는

$$n \geq p(1-p)\left(\frac{z_{\alpha/2}}{d}\right)^2$$

이다.

19 이화여자대학교 수시

논제 1 [34)]

우리나라에서 가장 인기 있는 로또는 1부터 45까지 숫자 중에서 서로 다른 6개를 맞추는 게임이다. 로또를 구매할 때, 자신이 직접 6개를 선택할 수도 있고 판매기계가 임의로 6개를 대신 선택하여 주기도 한다. 매주 토요일 밤에 시행되는 로또 추첨에서는 1부터 45까지의 서로 다른 숫자 6개를 당첨번호로 임의 추출하는데, 1등에 당첨되기 위해서는 선택한 숫자들이 당첨번호와 모두 일치해야 한다.

요즘 많은 로또 관련 사이트나 서적들은 로또 당첨확률을 높이는 기법들을 소개하고 있다. 예를 들어, 모두 홀수나 모두 짝수를 선택하는 것보다 홀짝을 적당히 섞는 것이 좋다, 또는 선택한 6개의 숫자의 총합이 100에서 180 정도가 되면 뽑힐 확률이 높다, 또는 토요일에 로또를 구입하면 다른 요일보다 1등할 확률이 높다 등등 여러 가지 요령을 소개하고 있다. 로또추첨에서 6개의 숫자를 고르는 것이 완전히 임의추출이고 매회 추첨이 서로 독립이라고 가정할 때 당첨확률에 관한 다음 물음에 답하시오.

(1) 1등 당첨번호가 모두 홀수 번호에서 나올 확률과 3개의 홀수 번호와 3개의 짝수 번호에서 나올 확률 중 어느 쪽이 더 높을 지를 설명하시오.

(2) 1등 당첨번호 6개의 총합이 23인 경우의 확률과 255인 경우의 확률 중 어느 쪽이 더 높을 지를 설명하시오.

(3) 로또를 2장 구입한 경우, 첫 번째 로또 숫자의 합은 23이었고 두 번째 로또 숫자의 합은 255이었다. 이 2장의 로또 중 어느 것이 당첨될 확률이 높을 지를 설명하시오.

(4) 이제까지의 당첨자들을 분석했더니 실제로 1등 당첨자 중에 토요일에 구입한 사람들이 가장 많았다. 이렇게 토요일 구매자 중에서 1등 당첨자가 많이 나오는 이유가 정말로 토요일에 로또를 구입하는 것이 다른 요일에 비해 당첨확률이 높기 때문인지, 그렇지 않다면 왜 이런 현상이 나타나는지를 설명하시오. (단, 논의를 단순화하기 위하여 모든 로또 구입자들의 번호선택은 임의(무작위)였다고 가정하자.)

34) 이화여자대학교 입학처

(5) 이제까지 1등 당첨번호를 분석한 결과, 22와 38이 다른 숫자에 비해서 1등 당첨번호에 속하는 경우가 꽤 적었다. 김이화는 “모든 숫자가 뽑힐 확률이 똑같아야 하므로, 이번에 사는 로또는 6개의 숫자 중에 22와 38을 꼭 포함하는 것이 1등에 당첨될 확률이 더 높아질 거야.”라고 생각했다. 김이화의 이런 전략은 정말로 1등에 당첨될 확률을 높일 수 있을지 설명하시오.

논제 2

정의역과 공역이 모두 양의 실수인 함수 $f(x)$가

$\dfrac{p}{r}=\dfrac{s}{q}$를 충족하는 모든 양수 p, q, r, s에 대하여, $\dfrac{(f(p))^2+(f(q))^2}{f(r^2)+f(s^2)}=\dfrac{2(p^2+q^2)}{r^2+s^2}$

를 만족한다. 이러한 조건을 만족하는 함수 $f(x)$와 함숫값 $f(1)$, $f(2)$를 모두 구하시오.

논제 3

우리나라 가구별 가정용 전기요금은 많이 사용할수록 단가가 증가하는 누진제를 채택하고 있다. 이에 관하여 다음 물음에 답하시오.

(1) 다음 표는 현재 가구별 월간 사용량에 따른 구간별 단가를 나타낸 것이다. 예를 들어 월 150(kWh)를 사용한 가구는, 1~100(kWh)까지는 60(원/kWh)의 단가를 적용받고 101~150까지 50(kWh)에 대하여는 120(원/kWh)의 단가를 적용받아 월 12,000(원)을 납부한다.

월간 사용량 구간 (kWh)	1~100	101~200	201~300	301~400	401~500	501~
구간별 단가 (원/kWh)	60	120	180	270	400	680

가구별 월간 사용량이 1.5배 증가할 때, 6단계 누진제의 사용량 구간과 구간별 단가가 고정되어 있으면 요금을 1.5배 이상 부담하게 된다. 6단계 누진체계를 유지하면서, 매월 현재보다 1.5배의 전력을 사용한 가구가 각각 1.5배의 요금을 납부하도록 하려면, 6개의 월간 사용량 구간과 각 구간별 단가를 얼마로 조정하여야 하는지 제시하시오. (단, 계산의 편의를 위하여 현재는 1(kWh)단위로, 사용량이 1.5배 증가한 시점에는 0.5(kWh)단위로 요금을 부과한다고 하자.)

(2) 500(kWh)를 초과하는 일부 예외적 가구를 제외하면, 전체 가구 중 월 사용량이 x(kWh)인 가구의 비율 $f(x)$는 근사적으로 $x(500-x)$에 비례한다. (단, $0 \le x \le 500$.) 이 근사식에 의해 전체 가구 중 월 사용량에 따라 차지하는 비율을 100(kWh) 단위로 구하고, 아래 2011년도 실제 자료와 비교하여 구간별 비율의 대소를 비교하시오.

월간 사용량 구간 (kWh)	0이상 100이하	100초과 200이하	200초과 300이하	300초과 400이하	400초과
월간 사용량 가구별 분표 (%)	15.2	22.0	29.6	24.7	8.5

(3) 현행 요금 체계에서 사용량 x(kWh)에 대한 단가는 근사적으로 $g(x)=\frac{4}{5}x$이고, 300(kWh)에 대한 단가는 100(kWh)에 대한 단가의 3배이다. 이때, 월 x(kWh)를 사용한 가구의 전기요금은 $G(x)=\frac{2}{5}x^2$이고, 전체 가구가 납부하는 전기요금 I를 (2)에서 구한 가구별 사용량 분포함수 $f(x)$를 이용하면 $I=\int_0^{500} G(x)f(x)dx$와 같이 구할 수 있다고 가정하자. 사용량 x(kWh)에 대한 단가를 $h(x)=a+bx$로 조정하여, 300(kWh)에 대한 단가가 100(kWh)에 대한 단가의 2배가 되도록 하면서 전체 가구가 납부한 전기요금을 동일하게 유지할 수 있게 하는 a, b를 구하고, 새 요금제에서 납부요금이 줄어드는 혜택을 받는 가구의 사용량 구간을 제시하시오.

논술유형분석

문항 수	수학 3문항	시간	100분
연관 개념	독립시행, 다항식의 연산, 인수분해, 지수법칙, 확률밀도함수, 정적분		

논 제 분 석

논제 1

무작위 추출과 독립시행에 대하여 이해하고 있는지를 로또의 예를 들어서 묻고 있다. 또한 로또 당첨 확률을 높일 수 있는 방법에 대해서 논리적이고 합리적인 사고를 할 수 있는지 묻고 있다.

논제 2

변수, 방정식과 함수 개념을 중심으로 논리적인 사고 과정을 통해 주어진 조건을 만족하는 모든 경우의 함수를 찾는 문제이다. 이 과정에서 다항식의 연산, 인수분해, 지수법칙 등 다양한 수학적 개념과 원리들을 적용해야 하여, 각각의 경우에 대해 풀이 과정을 정확히 표현할 수 있는지, 그리고 비정형문제에 대해 문제 이해, 계획 수립, 시행, 결과의 평가 및 반성과 같은 문제해결과정을 효과적으로 수행할 수 있는지를 묻고 있다.

논제 3

가정용 전기요금 누진제는 모든 이용자가 일정비율로 전력을 많이 사용하는 경우 요금부담은 사용량 증가비율 이상으로 과도하게 늘어나는 문제점을 가지고 있다. 이러한 문제점을 극복하여 모든 가구가 같은 비율로 전력 사용량을 늘린 경우 요금도 이에 비례하도록 하는 방법을 묻고 있다. 또한 전력사용량에 대한 근사 함수를 이용하여 전체 전기요금은 동일하게 유지하면서 과도한 누진제의 폐해를 줄일 수 있는 방법을 묻고 있다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 독립시행의 확률

(1) 동일한 시행을 n번 반복할 때, 매번 일어나는 사건들이 서로 영향을 받지 않는 독립사건일 경우 이러한 시행을 독립시행이라 한다.

(2) 한 번의 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p이고 그 여사건의 확률을 q라 할 때, n회의 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률 P_r는

$$\mathrm{P}_r = {}_n\mathrm{C}_r p^r q^{n-r} \ (\text{단, } p+q=1,\ r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

2. 연속확률변수와 확률밀도함수

(1) 연속확률변수 : 확률변수 X가 어떤 구간의 모든 실숫값을 취할 때, X를 연속확률변수라고 한다.

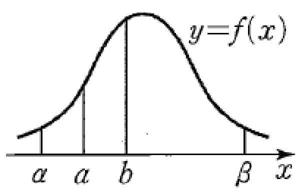
(2) 확률밀도함수

닫힌 구간 $[\alpha,\ \beta]$의 임의의 값을 취하는 연속확률변수 X에 대하여 $f(x)$가 다음과 같은 성질을 가질 때, 함수 $f(x)$를 연속확률변수 X의 확률밀도함수라고 한다.

① $f(x) \geq 0$

② $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)dx = 1$

③ $\mathrm{P}(a \leq X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ (단, $\alpha \leq a \leq b \leq \beta$)



풀 어 보 기

문제 1 상자 속에 생크림 도넛 5개, 초콜릿 도넛 2개, 호두 도넛 3개의 세 종류의 도넛 10개가 들어 있다. 이 상자에서 도넛 3개를 동시에 꺼낼 때, 이 도넛 3개가 두 가지 종류의 도넛으로만 나올 확률은?

① $\dfrac{79}{120}$ ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $\dfrac{27}{40}$ ④ $\dfrac{41}{60}$ ⑤ $\dfrac{83}{120}$

문제 2 어느 디자인 공모 대회에서 철수가 참가하였다. 참가자는 두 항목에서 점수를 받으며, 각 항목에서 받을 수 있는 점수는 표와 같이 3가지 중 하나이다. 철수가

각 항목에서 점수 A를 받을 확률은 $\frac{1}{2}$, 점수 B를 받을 확률은 $\frac{1}{3}$, 점수 C를 받을 확률은 $\frac{1}{6}$이다. 관람객 투표 점수를 받는 사건과 심사 위원점수를 받는 사건이 서로 독립일 때, 철수가 받는 두 점수의 합이 70일 확률은? (2006학년도 수능)

항목 \ 점수	점수 A	점수 B	점수 C
관람객 투표	40	30	20
심사 위원	50	40	30

① $\frac{1}{3}$　② $\frac{11}{36}$　③ $\frac{5}{18}$　④ $\frac{1}{4}$　⑤ $\frac{2}{9}$

문제 3 구간 $[0,\ 4]$ 사이의 임의의 값을 취하는 확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

> (가) $f(2-x)=f(2+x)$
> (나) $\int_{0}^{3} f(x)dx=\frac{3}{4}$

이때, $P(2 \leq X \leq 3)$ 의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{1}{3}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{5}$　⑤ $\frac{1}{6}$

문제 4 $-1 \leq x \leq 1$ 의 임의의 값을 갖는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)=k(x-1)(x+1)$ 일 때, $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$ 의 값은? (단, k는 상수)

① $\frac{11}{16}$　② $\frac{3}{4}$　③ $\frac{13}{16}$　④ $\frac{7}{8}$　⑤ $\frac{15}{16}$

읽 기 자 료

로또 당첨 확률이 벼락 맞을 확률보다 낮다?[35)]

방송에서 천둥 번개를 동반한 비바람이 몰아치는 날 벼락에 맞아 나무가 쓰러지고 건물이 무너지고 심지어 사람이 맞아 사고가 났다는 뉴스를 접할 수 있다. 사람이 벼락에 맞는 일은 매우 드문 일이다. 또 로또에서 1등에 당첨될 확률은 약 8백만분의 1이다. 어느 쪽의 확률이 더 클까?

로또의 당첨 확률

로또는 45개의 숫자 중에서 6개의 숫자를 선택하는 게임이다. 어마어마한 상금 때문에 '로또만 당첨된다면!' 하고 꿈을 꾸는 사람이 많다.

로또를 한 장 샀을 때 1등에 당첨될 확률을 계산해보자. $\frac{1}{{}_{45}\mathrm{C}_6}=\frac{1}{8145060}$ 이므로 로또를 몇 장 더 사면서 한 장 사는 것보다 확률이 조금 높아졌다는 상상을 하는 것은 수학적으로는 별 보탬이 되지 않는다. 814만 장을 사야 한 번 당첨될 수 있다면 이제 확률은 포기하고 운에 맡기는 것이 정신건강에 도움이 된다.

등위	당첨방법	계산 방법과 당첨 확률
1등	6개 번호 일치	$\frac{{}_6\mathrm{C}_6}{{}_{45}\mathrm{C}_6}=\frac{1}{8145060}$
2등	5개 번호 일치+보너스 번호 일치	$\frac{{}_6\mathrm{C}_5\times{}_{39}\mathrm{C}_1}{{}_{45}\mathrm{C}_6}\times\frac{1}{39}=\frac{1}{1357510}$
3등	5개 번호 일치	$\frac{{}_6\mathrm{C}_5\times{}_{39}\mathrm{C}_1}{{}_{45}\mathrm{C}_6}\times\frac{38}{39}=\frac{19}{678755}\fallingdotseq\frac{1}{35724}$
4등	4개 번호 일치	$\frac{{}_6\mathrm{C}_4\times{}_{39}\mathrm{C}_2}{{}_{45}\mathrm{C}_6}=\frac{741}{543004}\fallingdotseq\frac{1}{733}$
5등	3개 번호 일치	$\frac{{}_6\mathrm{C}_3\times{}_{39}\mathrm{C}_3}{{}_{45}\mathrm{C}_6}=\frac{9139}{407253}\fallingdotseq\frac{1}{45}$

벼락을 맞을 확률을 계산하는 방법

로또 바람이 불어 닥칠 때 사람들이 한 이야기 중 하나가 '로또 당첨 확률은 벼락 맞을 확률보다 낮다'는 이야기였다. 그러면 도대체 한 사람이 벼락 맞을 확률을 어떻게 계산해야 하는가? 과학자들이 생각한 계산법이란 것은 지구의 인구가 60억이라 가정하고

35) 이동훈 외 8명 지음, 수학선생님도 궁금한 101가지 수학질문사전, 북멘토, 2012

매년 벼락 맞아 죽는 사람이 1000명 정도이니 60억 나누기 1000하면 약 60만분의 1이라는 것이다.

그리고 814만분의 1과 60만분의 1이라는 두 수를 비교하면 로또 당첨보다는 벼락 맞아 죽기가 쉽다는 것이다.

그런데 이러한 비교가 정당한가?

우선 확률 계산법 자체가 동일하지 않다. 벼락 맞는 확률을 이렇게 계산한다면 로또 맞는 확률도 '당첨된 사람 수 나누기 로또를 산 모든 사람 수'로 해야 형평성에 맞다고 할 수 있다. 두 번째로 큰 모순은 '기간'이 서로 다르다는 것이다. 벼락의 확률은 1년을 기준으로 계산했지만 로또 확률은 1회로 생각한 것이다. 그렇게 보면 로또 확률 또한 1년을 52주로 생각하고 매주 한 장씩을 사는 것으로 해야 하며, 그럴 경우 당첨될 확률은 15만분의 1정도로 높아진다. 이러면 벼락 맞는 것보다는 로또 당첨 확률이 높다.

벼락 맞을 확률보다 로또 1등에 당첨될 확률이 높지만 814만 분의 1이든 15만분의 1이든 어차피 확률로 따지자면 거의 0에 가까운 '불가능한' 일들이므로 거기에 꿈과 희망을 걸기에는 무모한 일이다.

그러나 때로는 단순한 게 좋다며 내가 산 로또가 그 814만 주의 '바로 그 1장'이라는 확신이 일주일을 즐겁게 살아갈 수 있게 한다면, 그리고 당첨금으로 무엇을 할까 하는 즐거운 고민이 현실의 괴로움을 잠시라도 잊게 해 준다면 한 장 정도 사는 것도 나쁘지는 않다고 생각한다.

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 ①

10개의 도넛이 들어 있는 상자에서 동시에 3개를 꺼내는 시행에서 모든 경우의 수는 ${}_{10}\mathrm{C}_3 = 120$

도넛 3개가 두 가지 종류의 도넛으로만 되어 있을 사건 A의 여사건 A^C은 3개 모두 생크림 도넛일 사건, 3개 모두 호두 도넛일 사건, 생크림 도넛 1개-초콜릿 도넛 1개- 호두 도넛 1개일 사건이다.

(i) 3개 모두 생크림 도넛일 확률

생크림 도넛 5개에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$(가지)이므로

$$\mathrm{P}(A_1) = \frac{10}{120}$$

(ii) 3개 모두 호두 도넛일 확률

호두 도넛 3개에서 3개를 꺼내는 경우의 수는 1(가지)이므로

$$\mathrm{P}(A_2) = \frac{1}{120}$$

(iii) 생크림 도넛 1개-초콜릿 도넛 1개- 호두 도넛 1개일 확률

생크림 도넛 5개에서 1개, 초콜릿 도넛 2개에서 1개, 호두 도넛 3개에서 1개를 꺼내는 경우의 수는

${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1 = 30$(가지)이므로 $\mathrm{P}(A_3) = \frac{30}{120}$

사건 A_1, A_2, A_3는 서로 배반사건이므로

$$\mathrm{P}(A^C) = \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) + \mathrm{P}(A_3) = \frac{10}{120} + \frac{1}{120} + \frac{30}{120} = \frac{41}{120}$$

따라서 구하는 확률은 $1 - \frac{41}{120} = \frac{79}{120}$

문제 2 정답 ③

두 점수의 합이 70인 경우는 다음의 세 가지이다.

구　　분	(i)	(ii)	(iii)
관람객 투표	점수 A	점수 B	점수 C
심사위원	점수 C	점수 B	점수 A

관람객 투표 점수를 받는 사건과 심사 위원 점수를 받는 사건이 서로 독립이므로 각각의 확률은 다음과 같다.

(i)이 일어날 확률 : $\frac{1}{2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

(ii)이 일어날 확률 : $\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

(iii)이 일어날 확률 : $\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

따라서 (i), (ii), (iii)에서 구하는 확률은

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}=\frac{5}{18}$$

문제 3 정답 ③

$$P(2 \le X \le 3)=\int_2^3 f(x)\,dx$$

$$=\int_0^3 f(x)\,dx-\int_0^2 f(x)\,dx \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때, 조건 (가)에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프는 직선 $x=2$에 대하여 대칭이고 $\int_0^4 f(x)\,dx=1$ 이므로 $\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{1}{2}$

따라서 ㉠에서

$$P(2 \le X \le 3)=\int_0^3 f(x)\,dx-\int_0^2 f(x)\,dx=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

문제 4 정답 ①

$\int_{-1}^1 f(x)dx=1$ 이어야 하므로

$$\int_{-1}^1 k(x-1)(x+1)dx=k\int_{-1}^1(x^2-1)dx=2k\int_0^1(x^2-1)dx=2k\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_0^1=-\frac{4}{3}k=1$$

$$\therefore k=-\frac{3}{4}$$

$$\therefore \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2} \le X \le \frac{1}{2}\right) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left\{-\frac{3}{4}(x-1)(x+1)\right\} dx$$

$$= -\frac{3}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x^2-1)dx = -\frac{3}{2}\int_{0}^{\frac{1}{2}} (x^2-1)dx$$

$$= -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}x^3 - x\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{11}{16}$$

[대학예시 답안]

논제 1

(1) 모두 홀수번호를 선택하는 경우의 당첨확률은 $\frac{{}_{23}\mathrm{C}_6}{{}_{45}\mathrm{C}_6} = \frac{437}{35260} \fallingdotseq 0.012$이고, 홀수와 짝수가 각각 3개인 경우는 $\frac{{}_{23}\mathrm{C}_3 \times {}_{22}\mathrm{C}_3}{{}_{45}\mathrm{C}_6} = \frac{1771}{5289} \fallingdotseq 0.335$이다. 따라서 1등 당첨번호가 홀짝 반반인 경우에서 나올 확률이 더 높다.

(2) 경우의 수를 생각해보면 합이 23이 되는 경우는 (1, 2, 3, 4, 5, 8), (1, 2, 3, 4, 6, 7) 두 가지 경우가 있고, 합이 255가 되는 경우는 (40, 41, 42, 43, 44, 45) 한 가지 경우 밖에 없다. 그러므로 당첨번호의 합이 23이 되는 경우의 확률이 합이 255인 경우의 2배이므로 더 높다.

(3) 이미 복권을 구입하게 되면 6개의 숫자가 결정되게 되고, 임의의 6개의 숫자로 이루어진 조합이 뽑힐 확률은 각각 $\frac{1}{{}_{45}\mathrm{C}_6}$로 똑같다.

(4) 토요일의 당첨 확률이 특별히 높지는 않다. 이런 일이 일어나는 가장 합리적인 설명은 토요일에 팔린 로또의 수가 가장 많기 때문이다. (참고로 실제 토요일 로또 판매량은 약 42%로 한 주 중 가장 많다.)

(5) 이런 전략으로도 1등에 당첨될 확률을 높일 수는 없다. 매회 추첨이 서로 독립이라고 가정했으므로, 전회에서 어떤 번호가 뽑혔는지가 이번 회에 어떤 번호가 뽑히는지에 영향을 미칠 수 없다.

논제 2

$p=q=r=s=1$이라 하면 $\dfrac{(f(1))^2+(f(1))^2}{f(1^2)+f(1^2)}=\dfrac{2(1^2+1^2)}{1^2+1^2}$에서 $(f(1))^2=2f(1)$이 성립하고, $f(1)\neq 0$ (조건에서 공역이 양의 실수)이므로 $f(1)=2$이다.

이제 함수 $f(x)$를 구하기 위해 $p=x,\ q=1,\ r=s=\sqrt{x}$를 대입하자.

$\dfrac{(f(x))^2+(f(1))^2}{f(x)+f(x)}=\dfrac{2(x^2+1)}{x+x}$에서 $\dfrac{(f(x))^2+4}{2f(x)}=\dfrac{x^2+1}{x}$이고

$x(f(x))^2-2(x^2+1)f(x)+4x=0$이므로 $\{xf(x)-2\}\{f(x)-2x\}=0$이다. 따라서 모든 $x>0$에 대해서 $f(x)=2x$ 또는 $f(x)=\dfrac{2}{x}$이다.

함수 $f(x)=2x$ 또는 $f(x)=\dfrac{2}{x}$이 주어진 조건식을 만족하는지 확인해보자.

(i) $f(x)=2x$를 주어진 조건식에 대입하면

$\dfrac{(f(p))^2+(f(q))^2}{f(r^2)+f(s^2)}=\dfrac{(2p)^2+(2q)^2}{2r^2+2s^2}=\dfrac{2(p^2+q^2)}{r^2+s^2}$이므로 $f(x)=2x$는 주어진 조건식을 만족한다.

(ii) $f(x)=\dfrac{2}{x}$를 주어진 조건식에 대입하면

$\dfrac{(f(p))^2+(f(q))^2}{f(r^2)+f(s^2)}=\dfrac{(\frac{2}{p})^2+(\frac{2}{q})^2}{\frac{2}{r^2}+\frac{2}{s^2}}=\dfrac{\frac{4(q^2+p^2)}{p^2q^2}}{\frac{2(s^2+r^2)}{r^2s^2}}=\dfrac{2(p^2+q^2)}{r^2+s^2}$ $(\because pq=rs)$이므로 $f(x)=\dfrac{2}{x}$는 주어진 조건식을 만족한다.

따라서 $f(x)=2x$ 또는 $f(x)=\dfrac{2}{x}$이므로 $f(2)=1$ 또는 $f(2)=4$이다.

논제 3

(1) 아래 표와 같이 사용량 구간의 상한, 하한 값을 각각 1.5배로 하고 구간별 단가를 같게 유지하면, 누구나 1.5배 사용에 1.5배 요금이 부과된다.

월간 사용량 구간 (kWh)	0.5～150	150.5～300	300.5～450	450.5～600	600.5～750	750.5～
구간별 단가 (원/kWh)	60	120	180	270	400	680
구간별 단가 (원/0.5kWh)	30	60	90	135	200	340

(2) $f(x)$는 근사적으로 $x(500-x)$에 비례하므로 근사식을

$f(x)=kx(500-x)$ (k는상수)

로 둘 수 있다. 함수 $f(x)$의 정의에 의해 $\int_0^{500} f(x)dx=\int_0^{500} kx(500-x)dx=1$이므로

$k=\dfrac{6}{500^3}$ 이다.

전체 가구 중 월 사용량에 따라 차지하는 비율을 100(kWh) 단위로 구하면

$$\int_0^{100} f(x)dx=\int_0^{100} kx(500-x)dx=\frac{13}{6}\times 100^3\times\frac{6}{500^3}=\frac{104}{10^3}$$

$$\int_{100}^{200} f(x)dx=\int_{100}^{200} kx(500-x)dx=\frac{31}{6}\times 100^3\times\frac{6}{500^3}=\frac{248}{10^3}$$

$$\int_{200}^{300} f(x)dx=\int_{200}^{300} kx(500-x)dx=\frac{37}{6}\times 100^3\times\frac{6}{500^3}=\frac{296}{10^3}$$

$$\int_{300}^{400} f(x)dx=\int_{300}^{400} kx(500-x)dx=\frac{31}{6}\times 100^3\times\frac{6}{500^3}=\frac{248}{10^3}$$

$$\int_{400}^{500} f(x)dx=\int_{400}^{500} kx(500-x)dx=\frac{13}{6}\times 100^3\times\frac{6}{500^3}=\frac{104}{10^3}$$

이므로 월 사용량에 따라 차지하는 비율을 근사식에 의해 구하면 다음표와 같다.

월간 사용량 구간 (kWh)	0이상 100이하	100초과 200이하	200초과 300이하	300초과 400이하	400초과
월간 사용량 가구별 분표 (%)	10.4	24.8	29.6	24.8	10.4

2011년도 실제 자료와 비교하여 구간별 비율의 대소를 비교하면 다음과 같다.

월간 사용량 구간 (kWh)	0이상 100이하	100초과 200이하	200초과 300이하	300초과 400이하	400초과
월간 사용량 가구별 분표 (%) _근삿값	10.4	24.8	29.6	24.8	10.4
근삿값이	작다	크다	같다	크다	크다
월간 사용량 가구별 분표 (%) _2011년 실제 자료	15.2	22.0	29.6	24.7	8.5

(3) 100(kWh)에 대한 단가와 300(kWh)에 대한 단가가 2배가 되려면

$2(a+100b)=a+300b$, 즉 $a=100b$를 만족하여야 한다. 또한 전체 전기요금이 같기 위한 조건은

$$\int_0^{500}\left(\frac{2}{5}x^2\right)x(500-x)dx = \int_0^{500}\left(ax+\frac{b}{2}x^2\right)x(500-x)dx$$

이므로

$$\left[200\frac{x^4}{4}-\frac{2}{5}\frac{x^5}{5}\right]_0^{500} = \left[500a\frac{x^3}{3}+(500\frac{b}{2}-a)\frac{x^4}{4}-\frac{b}{2}\frac{x^5}{5}\right]_0^{500}$$

이다. $a=100b$를 대입하여 정리하면

$$500^4\left[50-\frac{2}{25}500\right]=500^4\left[\frac{100}{3}+(\frac{500}{2}-100)\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\frac{500}{5}\right]b$$

이므로 $a=48$, $b=\frac{12}{25}$이다.

따라서 새 요금제에서 납부요금이 저렴한 구간은 $\frac{2}{5}x^2>48x+\frac{6}{25}x^2$, 즉

$\frac{2}{25}x(2x-600)>0$이므로 월 사용량이 300(kWh)을 초과하는 가구가 혜택을 얻게 된다.

20 인하대학교 모의(수학과학우수)

제시문 1 **다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.** [36)]

(가) 자연수 n에 대한 명제 $P(n)$이 모든 자연수에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지를 보이면 된다.
(i) $n=1$일 때 명제 $P(n)$이 성립한다.
(ii) $n=k$일 때 명제 $P(n)$이 성립한다고 가정하면, $n=k+1$일 때에도 명제 $P(n)$이 성립한다.
이와 같은 증명법을 수학적 귀납법이라 한다.

(나) 수열 $\{a_n\}$에서 n이 한없이 커짐에 따라, 일반항 a_n의 값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 양의 무한대로 발산한다하고, 이것을 기호 $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$로 나타낸다. 또한 일반항 a_n의 값이 음수이면서 그 절댓값이 한없이 커지면 수열 $\{a_n\}$은 음의 무한대로 발산한다하고, 이것을 기호 $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$로 나타낸다.

다음과 같이 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다:

$$a_1 = 1,\ a_n = 1 + a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \quad (n \geq 2)$$

이때, $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$이라 하자.

논제 1

모든 자연수 n에 대하여 $S_n = 2 - \dfrac{1}{a_{n+1}-1}$임을 보여라.

논제 2

$\lim_{n\to\infty} S_n = 2$임을 보여라.

36) 인하대학교 입학처

제시문 2 **다음 제시문을 읽고 논제에 답하시오.**

삼각형 ABC에 대하여 $\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하고, $\angle BCA=\theta$라 할 때,

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta$$

이다. 이를 코사인법칙이라 한다.

논제 3

시계의 두 바늘의 길이가 각각 1과 2이고, 두 바늘의 끝을 각각 A, B라 할 때, $\overline{AB}$의 길이가 가장 빨리 증가하는 순간의 $\overline{AB}$의 길이를 구하시오. (20점)

논술유형분석

문항 수	총 3문항(5~7논제) 수학 3~4논제, 과학 2과목 각 1~2논제	시간	120분
연관 개념	논술1. 수학적 귀납법, 수열의 극한 논술2. 삼각함수, 미분		

제시문분석

제시문 1

수학적 귀납법을 소개하고, 수열의 양의 무한대와 음의 무한대로의 발산을 제시하고 있다.

제시문 2

세 변과 한 각이 주어진 삼각형에서 코사인법칙에 대하여 설명하고 있다.

논 제 분 석

논제 1

귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$의 각 항의 역수들의 합 $S_n=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하는 문제로, a_n과 a_{n+1}의 관계식을 이용하면 쉽게 풀 수 있다.

논제 2

주어진 S_n으로부터 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$임을 보이는 문제이다.

논제 3

두 바늘이 이루는 삼각형에서 두 바늘의 끝을 A, B라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이는 제시문 2에 주어진 코사인법칙을 이용하여 두 바늘이 이루는 각도 θ에 대한 함수로 표현할 수 있다. 이때 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 가장 빨리 증가하는 순간이란, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이의 순간변화율이 최대가 되는 순간임을 알아야 한다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 무한수열의 수렴과 발산

(1) 수렴 $\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ (단, α는 일정한 값)

(2) 발산

① 양의 무한대로 발산 : $n\to\infty$일 때 $a_n\to\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$

② 음의 무한대로 발산 : $n\to\infty$일 때 $a_n\to-\infty$ 또는 $\lim_{n\to\infty}a_n=-\infty$

③ 진동 : 수렴하지 않으면서 양의 무한대나 음의 무한대로 발산하지 않을 때, 수열 $\{a_n\}$은 진동한다고 한다.

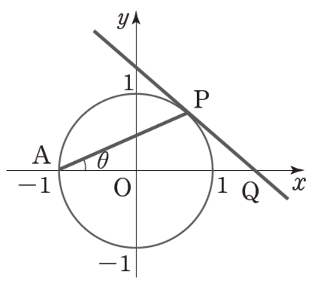
풀 어 보 기

문제 1 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식 $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다. 증명에서 (가),(나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\frac{f(2)}{g(4)}$의 값은?(EBS 2012 수능완성)

> (ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=2-\frac{1+2}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 식이 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=k$일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면
>
> $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k}$ ⋯ ㉠
>
> ㉠의 양변에 $\boxed{\text{(가)}}$ 을(를) 더하면
>
> $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\boxed{\text{(가)}}=2-\frac{k+2}{2^k}+\boxed{\text{(가)}}$
>
> $=2-\boxed{\text{(나)}}$
>
> 이므로 $n=k+1$일 때도 주어진 등식은 성립한다.
>
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식은 성립한다.

① $\frac{10}{7}$　② $\frac{12}{7}$　③ 2　④ $\frac{16}{7}$　⑤ $\frac{18}{7}$

문제 2 그림과 같이 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하자. 점 A$(-1,\ 0)$과 원점 O에 대하여 $\angle\mathrm{PAO}=\theta$라 할 때, $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}$의 값은?



(단, 점 P는 제 1사분면위의 점이다.) (2010년 대수능)

① 2　② $\sqrt{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ 1　⑤ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

문제 3 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan2x\sin(\sin x)}{1-\cos x}$의 값은?(EBS 2012 수능완성)

① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

읽 기 자 료

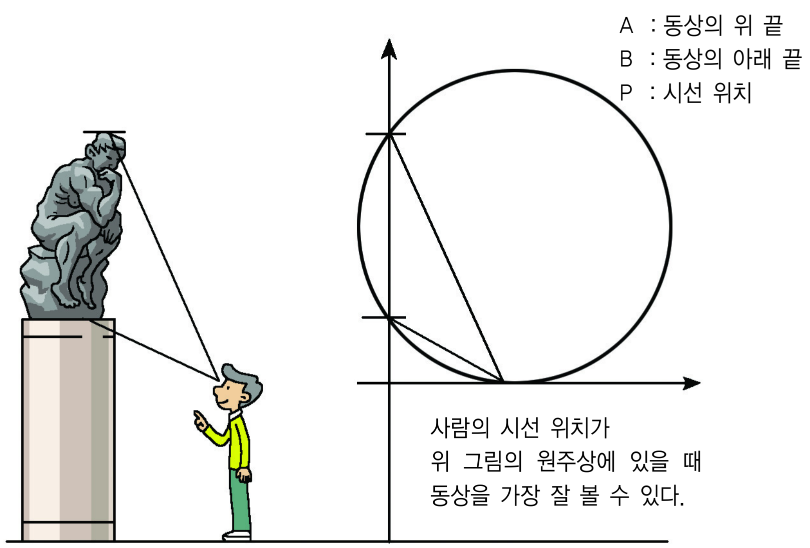
삼각법이 만들어지게 된 계기[37)]

삼각법은 삼각함수나 그 응용 등 삼각형의 변과 각 사이의 양적 관계에 입각하여 여러 가지 기하학적 도형을 연구하는 수학의 한 분야이다. 역사적으로는 측량에 사용하기 위한 목적으로 발달하였고, 일상생활에도 널리 이용되었다. 특히, 천문학·지구물·축지학·항해술 등에 널리 활용되고 있다.

삼각법을 이용하면 동상을 바라볼 때, 어떤 동상이든 가장 잘 보이는 위치가 있음을 알 수 있다. 이는 1471년 독일의 수학자 레기오몬타누스(Regiomontanus; 1436~1476)에 의해 제기되었고, 동상 앞에서 동상을 바라볼 때 그 거리를 구하는 과정에서 오늘날에 쓰이는 삼각법으로 발전하였다.

동상을 가장 잘 볼 수 있는 위치에 있는 사람의 시선과 동상의 위 끝과 아래 끝을 잇는 삼각형의 외접원의 원주 위의 모든 위치가 동상을 가장 잘 볼 수 있는 위치이다. 그러므로 지상에 서 있는 사람이 동상을 가장 잘 볼 수 있는 지점은 하나밖에 없다.

다음 그림에서 동상을 가장 잘 볼 수 있는 지점의 눈의 위치 P와 이 지점에서 동상을 바라볼 때의 시선과 동상의 위 끝과 아래 끝이 만나는 점을 각각 A, B라 할 때, 이를 좌표평면에 옮겨 놓으면 아래의 오른쪽과 같은 그래프를 얻을 수 있다.



37) 황우영. 미래앤 고등수학 p 327

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 ②

(i) $n=1$ 일 때, (좌변)$=\frac{1}{2}$, (우변)$=2-\frac{1+2}{2}=\frac{1}{2}$ 이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k$ 일 때, 주어진 등식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}=2-\frac{k+2}{2^k} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠ 의 양변에 $\frac{k+1}{2^{k+1}}$ 을 더하면

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots+\frac{k}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{k+2}{2^k}+\frac{k+1}{2^{k+1}}=2-\frac{2(k+2)-(k+1)}{2^{k+1}}=2-\frac{k+3}{2^{k+1}}$$

이므로 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식은 성립한다.
따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

따라서 $f(k)=\frac{k+1}{2^{k+1}}$, $g(k)=\frac{k+3}{2^{k+1}}$ 이므로 $\frac{f(2)}{g(4)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{32}}=\frac{12}{7}$

문제 2 정답 ④

$\angle \mathrm{PAO}=\theta$ 이므로 $\angle \mathrm{POQ}=2\theta$ 이다.

$\triangle \mathrm{POQ}$ 에서 $\tan 2\theta=\frac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1}=\overline{\mathrm{PQ}}$, $\cos 2\theta=\frac{1}{\overline{\mathrm{OQ}}}$ 에서 $\overline{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\cos 2\theta}$

따라서

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\tan 2\theta-\frac{1}{\cos 2\theta}}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\sin 2\theta-1}{\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)\cos 2\theta}$$

$\theta-\frac{\pi}{4}=t$ 라 하면

$\sin 2\theta=\sin 2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)=\cos 2t$, $\cos 2\theta=\cos 2\left(\frac{\pi}{4}+t\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2t\right)=-\sin 2t$

이므로

$$\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}-0}\frac{\overline{\mathrm{PQ}}-\overline{\mathrm{OQ}}}{\theta-\frac{\pi}{4}}=\lim_{t\to-0}\frac{\cos2t-1}{-t\sin2t}=\lim_{t\to-0}\frac{\cos^2 2t-1}{-t\sin2t(\cos2t+1)}$$

$$=\lim_{t\to-0}\frac{-\sin^2 2t}{-t\sin2t(\cos2t+1)}=\lim_{t\to-0}\frac{\sin2t}{2t\times\frac{1}{2}\times(\cos2t+1)}$$

$$=\lim_{t\to-0}\left(\frac{\sin2t}{2t}\cdot\frac{2}{\cos2t+1}\right)=1\cdot1=1$$

문제 3 정답 ⑤

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan2x\sin(\sin x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\tan2x\sin(\sin x)(1+\cos x)}{(1-\cos x)(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\tan2x\sin(\sin x)(1+\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan2x}{\sin x}\cdot\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot(1+\cos x)\right\}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan2x}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{\tan2x}{2x}\cdot2}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{2}{1}=2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}$ 에서 $\sin x=t$ 로 놓으면, $x\to0$ 일 때 $t\to0$ 이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$$\lim_{x\to0}(1+\cos x)=1+1=2 \qquad \cdots\cdots ㉢$$

따라서 ㉠, ㉡, ㉢에 의하여 구하는 값은

$$\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan2x}{\sin x}\cdot\frac{\sin(\sin x)}{\sin x}\cdot(1+\cos x)\right\}=2\cdot1\cdot2=4$$

논제 1 38)

(i) $n=1$ 일 때,

(좌변) $=S_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{a_2-1}$ $\quad(\because\ a_2=1+a_1)$

$=\frac{2(a_2-1)-1}{a_2-1}$ $\quad(\because\ a_2=2)$

$=2-\frac{1}{a_2-1}=$(우변)

38) 대학발표 예시답안 참조

이므로 주어진 등식이 성립한다.

(ii) $n=k\,(k \geq 1)$ 일 때, 주어진 식이 성립한다고 가정하면

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ \cdots\ +\frac{1}{a_k}=2-\frac{1}{a_{k+1}-1}\ \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $\dfrac{1}{a_{k+1}}$을 더하면

$$S_{k+1}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ \cdots\ +\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\ =\ 2-\ \frac{1}{a_{k+1}-1}+\frac{1}{a_{k+1}}$$

$$=2-\ \frac{a_{k+1}-a_{k+1}+1}{(a_{k+1}-1)a_{k+1}}=\ 2-\frac{1}{(a_{k+1}-1)a_{k+1}}$$

이 된다. 그리고 $a_{k+1}=1+\ a_1a_2\cdots a_k$ 에서 $a_{k+1}-1=\ a_1a_2\cdots a_k$ 이므로

$$S_{k+1}=\ 2-\frac{1}{(a_1a_2\cdots a_k)a_{k+1}}=\ 2-\frac{1}{a_{k+2}-1}$$

이다. 즉, $S_{k+1}=\ 2\ -\dfrac{1}{a_{k+2}-1}$ 이므로 $n=k+1$ 일 때도 주어진 등식은 성립한다.

따라서 (i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n 에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

논제 2

모든 자연수 n에 대하여 a_n은 자연수이고, $a_n=1+\ a_1a_2\cdots a_{n-1}$이므로 $a_n > a_{n-1}$이다. 즉, $a_n-a_{n-1}\geq 1$으로부터

$$a_2-a_1\geq 1$$
$$a_3-a_2\geq 1$$
$$\vdots$$
$$a_n-a_{n-1}\geq 1$$

이다. 위의 부등식을 변변 더하면 $a_n-a_1\geq n-1$을 얻고, $a_1=1$이므로, 모든 자연수 n에 대하여 $a_n\geq n$이다. 따라서 $\lim\limits_{n\to 0} a_n=\ \infty$이다.

$\lim\limits_{n\to 0} a_n=\ \infty$이므로 [논제1]에서 주어진 등식 $S_n=2-\dfrac{1}{a_{n+1}-1}$ 으로부터 $\lim\limits_{n\to 0} S_n=\ 2$이다.

논제 3

코사인법칙을 이용하여 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이를 θ 의 함수로 나타내면,

$f(\theta)=\sqrt{5-4\cos\theta}$ 이다. 따라서 $f'(\theta)=\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}$ 이 된다. $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이가 가장 빨리 증가하는 순간이란, $f'(\theta)$가 최댓값이 되는 순간이므로, 구간 $0\le\theta\le\pi$에서 $f'(\theta)$의 최댓값을 구해보자.

$$f''(\theta)=2\times\frac{\cos\theta\sqrt{5-4\cos\theta}-\sin\theta\dfrac{2\sin\theta}{\sqrt{5-4\cos\theta}}}{5-4\cos\theta}$$

$$=2\times\frac{\cos\theta(5-4\cos\theta)-2\sin^2\theta}{(5-4\cos\theta)^{3/2}}=2\times\frac{-(2\cos\theta-1)(\cos\theta-2)}{(5-4\cos\theta)^{3/2}}$$

이고 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$, 즉, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $f''(\theta)=0$이 된다. 또한, $0\le\theta<\dfrac{\pi}{3}$일 때, $f''(\theta)>0$이고, $\dfrac{\pi}{3}<\theta\le\pi$일 때, $f''(\theta)<0$이므로, $\theta=\dfrac{\pi}{3}$일 때, $f'(\theta)$가 최댓값을 갖는다. 따라서 두 시계 바늘의 회전 중심을 O 라 할 때, 삼각형 OAB 는 세 변의 길이가 각각 1, 2, $\sqrt{3}$인 직각 삼각형이 된다. 즉, $\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{3}$ 이다.

21 인하대학교 모의 일반우수자

제시문 1 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.** [39]

(가) 어떤 부등식의 영역 D에 속하는 점 (x, y)에 대하여 $f(x, y)$의 최댓값 또는 최솟값을 구할 때는 먼저 $f(x, y)=k$ (k는 상수)로 놓은 후, 이것의 그래프가 영역 D를 지나도록 하는 k값 중 최댓값 또는 최솟값을 구하면 된다.

(나) 주어진 도형이 일차변환에 의하여 옮겨지는 도형을 어떻게 구할까? 주어진 도형 위의 점 (x, y)가 일차변환에 의해 (x', y')으로 보내질 때, x'과 y'이 만족하는 방정식을 구하면 되는데, 그것은 일차변환을 나타내는 행렬과, x와 y가 만족하는 방정식으로부터 얻을 수 있다. x'과 y'이 만족하는 방정식은 일차변환을 나타내는 행렬의 역행렬을 이용하면 쉽게 구할 수 있다. 다음은 역행렬을 구하는 공식이다: 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여

(1) $ad-bc \neq 0$ 일 때, $A^{-1}=\dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

(2) $ad-bc=0$ 일 때, A의 역행렬은 존재하지 않는다.

논제 1

부등식 $x^2+y^2 \leq 1$을 만족하는 점 (x, y)에 대하여 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

논제 2

음이 아닌 정수 a, b에 대하여, 일차변환 $f:(x, y)\to(ax+y,\ x+by)$에 의해 원 $x^2+y^2=1$이 변환되는 도형의 방정식을 구하시오.

39) 인하대학교 입학처

제시문 2 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.**

(다) 구간 $[a, b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 미분가능한 함수 $x=g(t)$의 도함수 $g'(t)$가 구간 $[\alpha, \beta]$에서 연속이고, $a=g(\alpha)$, $b=g(\beta)$일 때,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt$$

가 성립한다. 이를 정적분의 치환적분법이라 한다.

논제 1

타원 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 위의 한 점 P에서의 접선의 x절편이 $x=2\sqrt{3}$이라 하자. 이때 타원과 접선 및 x축으로 둘러싸인 영역의 넓이를 구하시오.

논 술 유 형 분 석

문항 수	총 3문항(5~7논제) 수학 3~4논제, 과학 2과목 각 1~2논제	시간	120분
연관 개념	부등식의 영역에서 최댓(솟)값, 일차변환, 정적분의 치환적분법		

제 시 문 분 석

제시문 1

제시문 (가)는 부등식의 영역에서 최댓값, 최솟값을 구하는 방법에 대한 단순한 내용이고 제시문 (나)는 일차변환에 의한 변환된 도형을 구하는 방법을 소개하고 있다.

제시문 2

제시문 (다)는 정적분의 치환적분법을 소개하고 있다.

논 제 분 석

논제 1

'부등식의 영역의 활용' 에서 흔히 볼 수 있는 문제로, 부등식 $x^2+y^2 \leq 1$을 만족하는 점 (x, y)에 대하여 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 구하는 문제이다. 제시문 (가)를 이해한다면 직선 $x+y=k$가 단위원에 접할 때, k가 최대, 최소를 갖는다는 것을 알 수 있다.

논제 2

이차곡선(원)과 일차변환을 통합한 문제로, 단위원이 주어진 일차변환에 의해 변환된 도형을 구하는 문제이다. 제시문 (나)를 이해한다면 일차변환을 나타내는 행렬이 역행렬을 갖는 경우와 역행렬을 갖지 않는 경우로 나누어 변환된 도형을 구하는 것이다. 특히 역행렬을 갖지 않는 경우는 [논제 1]의 결과와 연관이 있다.

논제 3

이차곡선(타원)을 소재로 하여 미분과 적분을 통합한 문제로, 접선의 식을 구하고, 구하는 면적을 정적분으로 표현하고, 제시문 (다)의 힌트를 얻어 치환적분과 삼각함수 공식을 적용하는 문제이다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 부등식의 영역과 최대·최소

x, y에 대한 부등식으로 주어진 영역에서 그 경계가

(1) 다각형으로 되어 있는 경우는 일차식 $f(x, y)=k$가 다각형의 꼭짓점을 지날 때 최대 또는 최소가 된다.

(2) 다각형과 곡선으로 되어 있는 경우는 일차식 $f(x, y)=k$가 다각형의 꼭짓점을 지날 때와 곡선에 접할 때 중에서 최대 또는 최소가 된다.

2. 일차변환

좌표평면(R^2)위의 변환 $f:(x, y) \rightarrow (x', y')$에서

$$\begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{는 상수})$$

와 같이 x', y'이 각각 상수항이 없는 x, y에 대한 일차식으로 나타내어질 때, 이러한 변환 f를 일차변환이라고 한다.

3. 정적분에 대한 치환법칙

함수 g'이 구간 $[a, b]$에서 연속이고 함수 f가 $u = g(x)$의 치역에서 연속이면,

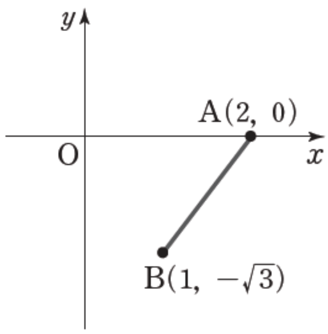
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

이다.

풀 어 보 기

문제 1 일차변환 f를 나타내는 행렬을 $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$라 하자.

아래 그림의 선분 AB를 f에 의하여 옮겨서 얻은 도형을 F라 할 때, 선분 AB와 도형 F 그리고 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? (2001 대수능 변형)



문제 2 행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$으로 나타내어지는 일차변환 f에 의하여 원 $x^2+y^2=4$가 옮겨지는 도형의 길이는 l이다. l^2의 값을 구하시오. (2012 EBS 수능완성)

문제 3 다음 정적분을 구하시오. (2012 EBS 수능특강)

(1) $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2 dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$ (3) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$

읽 기 자 료

삼각치환 40)

$\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{x^2+a^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}\,(a>0)$을 포함하는 무리함수를 적분하는 방법을 알아보자.

$x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면 $\sqrt{a^2-x^2}=a\sqrt{1-\sin^2\theta}=a\cos\theta$,

$x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sqrt{1+\tan^2\theta}=a\sec\theta$,

$x=a\sec\theta\left(0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면 $\sqrt{x^2-a^2}=a\sqrt{\sec^2\theta-1}=a\tan\theta$

이므로 $x=a\sin\theta$, $x=a\tan\theta$, $x=a\sec\theta$로 치환하여 근호를 없앨 수 있다. 이를 삼각치환이라고 한다.

예를 들어 $\int\sqrt{1-x^2}\,dx$를 구하기 위해 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$로 치환하면 $dx=\cos\theta\,d\theta$ 이므로

$$\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\int\cos\theta\cdot\cos\theta\,d\theta=\int\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int(1+\cos2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right)+C=\frac{1}{2}(\theta+\sin\theta\cos\theta)+C\ (\text{단, } C\text{는 상수})$$

그런데 $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$이면 $\cos\theta=\sqrt{1-x^2}$ 이므로 $\sin\theta\cos\theta=x\sqrt{1-x^2}$ 이다.

따라서 $\int\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\sin^{-1}x+x\sqrt{1-x^2}}{2}+C$ (단, C는 상수)이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

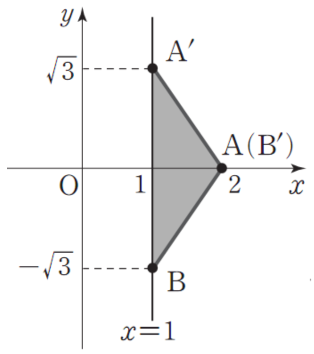
식	치환	치환 후 식
$\sqrt{a^2-x^2}$	$x=a\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{a^2-x^2}=a\cos\theta$
$\sqrt{a^2+x^2}$	$x=a\tan\theta\left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{x^2+a^2}=a\sec\theta$
$\sqrt{x^2-a^2}$	$x=a\sec\theta\left(0\le\theta<\frac{\pi}{2}\right)$	$\sqrt{x^2-a^2}=a\tan\theta$

40) 권오남외 3인, 고등학교 고급수학기본, 광주시교육청, 2011

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 일차변환에 의하여 두 점 A, B가 옮겨진 점을 각각 A′, B′이라 하면



$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$에서 A′$(1,\ \sqrt{3})$

$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$에서 B′$(2,\ 0)$

이다. 일차변환 f에 의하여 선분 AB는 선분 A′B′으로 옮겨지므로 세 도형으로 둘러싸인 부분은 삼각형이다. 따라서 구하는 넓이는 $\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 1=\sqrt{3}$ 이다.

문제 2 행렬 $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$으로 나타내어지는 일차변환 f에 의하여 좌표평면 위의 점 (x, y)가 점 (x', y')으로 옮겨진다고 하면 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -x+3y \\ -2x+6y \end{pmatrix}$

즉, $x'=-x+3y,\ y'=-2x+6y$ 이고 $y'=2x'$ 이 성립하므로 일차변환 f에 의하여 좌표평면 전체는 직선 $y=2x$로 옮겨진다.

한편, 등식 $x^2+y^2=4$를 만족시키는 실수 x, y에 대하여 $x'=-x+3y=k$ (k는 실수)로 놓으면 원 $x^2+y^2=4$의 중심 $(0, 0)$에서 직선 $-x+3y=k$에 이르는 거리가 반지름의 길이보다 작거나 같아야 하므로 $\frac{|k|}{\sqrt{1+9}}\le 2$,

$$\therefore -2\sqrt{10}\le k\le 2\sqrt{10}$$

따라서 일차변환 f에 의하여 $x^2+y^2=4$는 선분 $y=2x\ (-2\sqrt{10}\le x\le 2\sqrt{10})$로 옮겨진다.

이때, $l=\sqrt{(2\sqrt{10}+2\sqrt{10})^2+(4\sqrt{10}+4\sqrt{10})^2}=\sqrt{800}$ 이고 따라서 $l^2=800$ 이다.

문제 3 (1) $x^2=t$로 놓으면 $2x\frac{dx}{dt}=1$ 이고 $x=0$ 일 때, $t=0$, $x=\sqrt{\pi}$ 일 때

$t=\pi$ 이므로 $\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx$ 이다. 이때, $\cos x=t$ 라 놓으면 $-\sin x\frac{dx}{dt}=1$ 이고

$x=0$ 일 때 $t=1$, $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때, $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}dx=\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(-\frac{1}{t}\right)dt=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{t}dt=[\ln t]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}=0-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{2}\ln 2$$

이다.

(3) $x=\sin\theta\left(-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$ 로 놓으면 $\frac{dx}{d\theta}=\cos\theta$ 이고 $x=0$ 일 때 $\theta=0$, $x=1$ 일 때 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}\,d\theta$$

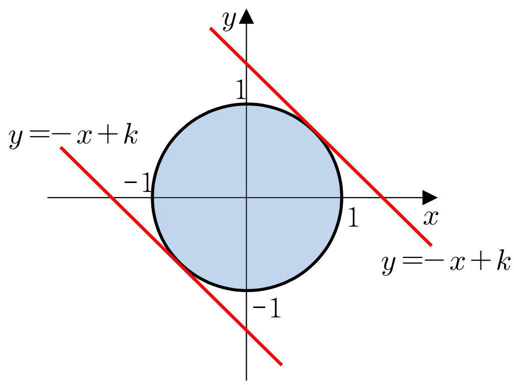
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta$$

$$=\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{4}+0\right)-(0+0)=\frac{\pi}{4}$$

이다.

논제 1

부등식 $x^2+y^2\le 1$의 영역은 오른쪽 그림의 색칠한 부분이다. $x+y=k$로 놓으면 $y=-x+k$이므로 k는 기울기가 -1인 직선의 y절편임을 알 수 있다. 따라서 k는 직선 $y=-x+k$가 원 $x^2+y^2=1$에 접할 때, 최댓값과 최솟값을 가진다. 따라서 $y=-x+k$를 $x^2+y^2=1$에 대입한 이차방정식 $2x^2-2kx+k^2-1=0$의 판별식 $D=-4k^2+8=0$으로부터 k의 최댓값은 $\sqrt{2}$이고 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다.



다른풀이 1

직선 $x+y-k=0$과 원점 $(0,0)$과의 거리가 원의 반지름 1과 같으므로 $1=\dfrac{|-k|}{\sqrt{2}}$로부터 k의 최댓값은 $\sqrt{2}$이고 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다.

다른풀이 2

중심이 $(0,0)$이고 반지름이 r인 원에 접하는 기울기가 m인 직선은 $y=mx\pm r\sqrt{1+m^2}$이므로, $m=-1,\ r=1$을 대입하면 $y=-x\pm\sqrt{2}$이다. 따라서 k의 최댓값은 $\sqrt{2}$이고 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다.

다른풀이 3

직선의 기울기가 -1이므로 제1사분면에서 원과 접점, 그리고 직선의 y축과 만나는 점으로 이루어진 삼각형은 직각이등변삼각형이므로 피타고라스 정리에 의해 k의 최댓값은 $\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$이다. 따라서 k의 최솟값은 $-\sqrt{2}$이다.

논제 2

주어진 일차변환 f를 나타내는 행렬은 $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$이다. $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$에서

(1) $ab\neq1$일 때, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\dfrac{1}{ab-1}\begin{pmatrix} b & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\dfrac{1}{ab-1}\begin{pmatrix} bx'-y' \\ -x'+ay' \end{pmatrix}$이다. 이것을 $x^2+y^2=1$에 대입하여 정리하면 변환된 도형의 방정식은

$$(b^2+1)x^2-2(a+b)xy+(a^2+1)y^2=(ab-1)^2 \quad (\text{단, } ab\neq1)$$

이 된다.

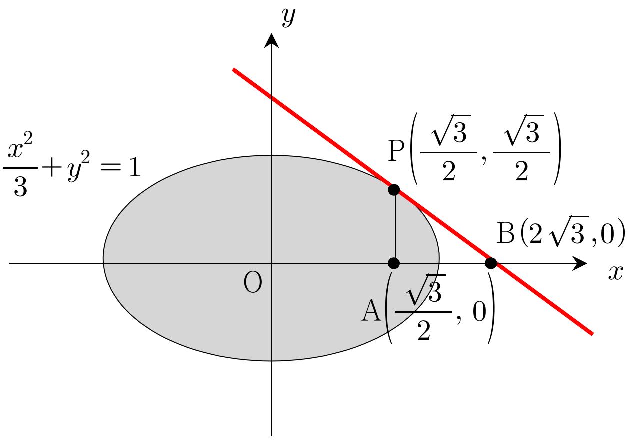
(2) $ab=1$일 때, a,b는 음이 아닌 정수이므로 $a=b=1$이다.

따라서 $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$으로부터 $x'=y'$이다. 그런데 $x^2+y^2=1$이면 [논제 1]의 결과로부터 $-\sqrt{2}\leq(x'=x+y)\leq\sqrt{2}$이다. 따라서 변환된 도형의 방정식은 $y=x\ (-\sqrt{2}\leq x\leq\sqrt{2})$이다.

논제 3

점 P 의 좌표를 P$(a,\, b)$ 라 두자 ($b>0$ 이라 가정할 수 있다). 미분하여 P 에서의 접선의 기울기를 구하면 $-\dfrac{a}{3b}$ 이다. 따라서 접선의 방정식은 $y-b=-\dfrac{a}{3b}(x-a)$ 가 된다. [또는, 점 P 의 좌표를 P$(a,\, b)$ 라 두면, 접선의 방정식은 $\dfrac{ax}{3}+by=1$ 이다.]

이 직선이 $(2\sqrt{3},\, 0)$ 을 지나므로 이 점을 접선의 식에 대입하고 $\dfrac{a^2}{3}+b^2=1$ 을 이용하면 $a=b=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 를 얻는다. 따라서 아래 [그림]을 참고하여 다음과 같이 풀 수 있다.



[그림]

점 A, B 를 각각 A$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\, 0\right)$, B$(2\sqrt{3}\,,\, 0)$ 이라 두면, 구하는 면적 S 는

$$S=(\triangle \mathrm{PAB}\text{의 넓이})-\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx$$

이다. 여기서 $\triangle$PAB의 넓이$=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{9}{8}$ 이 된다.

한편, 정적분은 $x=\sqrt{3}\sin t$ 로 치환하면

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\sqrt{3}}\sqrt{1-\frac{x^2}{3}}\,dx=\sqrt{3}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt=\frac{\sqrt{3}\pi}{6}-\frac{3}{8}$$

이 된다. 따라서 구하는 면적 S 는 $S=\dfrac{9}{8}-\left(\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}-\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}$ 이다.

22 한양대학교 모의

제시문 1 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오.** [41]

〈가〉 **(한 점에서 함수의 연속의 정의)** 함수 $f(x)$가 실수 a에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 연속이라고 한다.

(1) 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 정의되어 있다.

(2) 극한값 $\lim_{x \to a} f(x)$가 존재한다.

(3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(구간에서 함수의 연속의 정의) 함수 $f(x)$가 어떤 구간에 속하는 모든 점에서 연속일 때, 함수 $f(x)$는 그 구간에서 연속이라고 한다.

〈나〉 **(중간값의 정리)** 함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 실수 k에 대하여 $f(c)=k$를 만족하는 c가 a와 b 사이에 적어도 하나 존재한다.

〈다〉 **(미분계수의 정의)** 함수 $f(x)$가 a를 포함하는 어떤 열린 구간에서 정의되고 있고 극한값

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

이 존재하면 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다고 한다. 이 극한값을 $f(x)$의 a에서의 미분계수라 하고, 기호 $f'(a)$로 나타낸다.

(도함수의 정의) 함수 $f(x)$가 미분가능한 점 x들의 집합을 정의역으로 하고, 정의역에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)$의 x에서의 미분계수를 대응시키는 함수를 $f(x)$의 도함수라 하고, 기호 $f'(x)$로 나타낸다.

---

41) 한양대학교 입학처

함수 $f(x)$ 가 다음과 같이 실수 전체에서 정의되어 있다.

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

(1) 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속인지 여부에 대하여 논하시오.

(2) 함수 $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 미분가능한지 여부에 대하여 논하시오.

(3) 등식 $f'(x)=3$ 을 만족하는 x 가 얼마나 많이 있는가에 대하여 논하시오.

제시문 2 **다음 제시문을 읽고 문제에 답하시오.**

〈가〉 0 보다 크거나 같고 1 보다 작거나 같은 기약분수들 중에서 분모가 n 이하인 기약분수들을 크기 순으로 나열한 것을 F_n 이라 두자. 예를 들어,

$$F_1=\left(\frac{0}{1},\frac{1}{1}\right), F_2=\left(\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\right), F_3=\left(\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\right)$$

〈나〉 두 분수 $\dfrac{a}{b}$ 와 $\dfrac{c}{d}$ 가 다음 조건을 만족한다고 하자.

$$0 \le \frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \le 1,\ bc-ad=1$$

(1) 제시문 〈나〉 에 주어진 조건을 만족하는 두 분수 $\dfrac{a}{b}$ 와 $\dfrac{c}{d}$ 는 기약분수임을 설명하시오.

(2) 제시문 〈나〉 에 주어진 조건을 만족하는 두 분수 $\dfrac{a}{b}$ 와 $\dfrac{c}{d}$ 가 F_{b+d} 에서 연속한 위치에 놓여있지 않음을 설명하시오.

(3) 제시문 〈나〉 에 주어진 조건을 만족하는 두 분수 $\dfrac{a}{b}$ 와 $\dfrac{c}{d}$ 가 F_n 에 놓여있고, 또한 연속한 위치에 놓이기 위해 n 이 만족해야 할 필요충분조건을 구하시오.

논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 2문항	시간	120분
연관 개념	논술1. 연속, 미분계수, 중간값 정리 논술2. 유리수, 기약분수		

제 시 문 분 석

제시문 1

연속의 정의, 중간값 정리, 미분계수의 정의, 미분가능, 도함수 등 미분법에서 필요한 기본개념들을 설명하고 있다.

제시문 2

F_n을 만드는 방법에 대한 설명과 예시를 제시하고 있다.

논 제 분 석

제시문 1

미분법의 개념을 정확하게 알고 문제에서 제시된 함수를 정의를 이용하여 설명할 수 있는가를 평가하는 문항들이다.

(1) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 연속인지 여부를 묻고 있다. 제시문에 나온 '연속' 의 정의를 이용하여 서술한다.

(2) 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능한지 여부를 묻고 있다. 제시문에 나온 '미분 가능' 의 정의를 이용하여 서술한다.

(3) $f'(x)=3$를 만족하는 방정식의 해를 구하는 문제이다. 도함수의 정의를 사용하거나 곱의 미분을 이용하면 $f'(x)$를 구할 수 있다. 또한 중간값 정리를 사용하면 해의 개수가 무한히 많음을 증명할 수 있다.

제시문 2

(1) 제시문〈나〉의 조건을 만족하는 두 분수가 기약분수가 되는지를 묻고 있다. 귀류법을 이용하여 분모와 분자가 서로소임을 보여주거나 분모와 분자의 최대공약수가 1임을

보여준다.

(2) 제시문 〈나〉 에 주어진 조건을 만족하는 두 분수 $\frac{a}{b}$ 와 $\frac{c}{d}$ 사이에 다른 수가 들어가는지를 묻고 있다. F_{b+d} 에서는 분모가 $b+d$ 인 수가 처음 나타나므로 그 수가 제시문 〈나〉의 조건을 만족하면서 $\frac{a}{b}$ 와 $\frac{c}{d}$ 사이에 있는가를 확인한다.

(3) 두 분수 $\frac{a}{b}$ 와 $\frac{c}{d}$ 가 F_n 에 놓여있을 때 두 분수 사이에 제시문〈나〉의 조건을 만족하는 다른 분수가 언제 처음으로 나타나는가를 묻는 문항이다. (2)번에서 나온 분수가 처음으로 나타나는 수이며 그 이전에는 없음을 보여야 한다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 도함수의 정의

일반적으로 함수 $y=f(x)$ 가 정의역 X 에서 미분가능하면 정의역에 속하는 모든 x 에 대하여 미분계수 $f'(x)$ 를 대응시키는 새로운 함수

$$f':\ x \to f'(x)$$

즉, $f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ 가 존재한다. 이때, 함수 $f'(x)$ 를 $f(x)$ 의 도함수라 한다.

2. 삼각함수의 도함수와 합성함수의 미분법

(1) $y=\sin(f(x))$ ⇨ $y'=\cos(f(x))\cdot f'(x)$

$y=\cos(f(x))$ ⇨ $y'=-\sin(f(x))\cdot f'(x)$

(2) $y=\sin^n x$ ⇨ $y'=n\sin^{n-1}x\cdot\cos x$

$y=\cos^n x$ ⇨ $y'=n\cos^{n-1}x\cdot(-\sin x)$

3. 서로 소

a, b 를 적어도 둘 중 하나는 0이 아닌 정수라 하자. a, b 의 최대공약수는 $\gcd(a,b)$ 로 쓴다. 둘 중 하나는 0이 아닌 두 정수 a, b 에 대하여 $\gcd(a,b)=1$ 인 경우 **서로 소**(relatively prime)라 한다.

풀 어 보 기

문제 1

실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ (나) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=2$

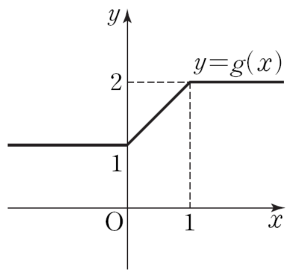
옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (EBS 2012 수능완성)

〈 보 기 〉

ㄱ. $\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$ ㄴ. $f'(1)=2$ ㄷ. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(f(x))}{x-1}=2$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 2



연속함수 $f(x)$ 에 대하여

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x-1} & (x\neq1)\\ 2 & (x=1)\end{cases}$$

로 정의된 연속함수 $g(x)$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (EBS 2012 수능완성)

〈 보 기 〉

ㄱ. $f(1)=0$ ㄴ. $f'(1)=2$ ㄷ. $f'(0)=1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 3

함수 $f(x)$에 대하여 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
(2007 평가원)

〈 보 기 〉

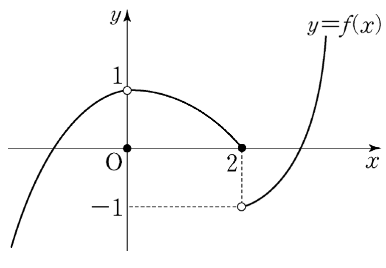
ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$ 이면 $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$ 이다.

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$ 이면 $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$ 이다.

ㄷ. $f(x)=|x-1|$ 일 때,
$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 4 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같고, 삼차함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1 이고, $g(0)=3$ 이다. 합성함수 $(g\circ f)(x)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(3)$ 의 값은? (2013 수능)



① 31 ② 30 ③ 29 ④ 28 ⑤ 27

읽 기 자 료

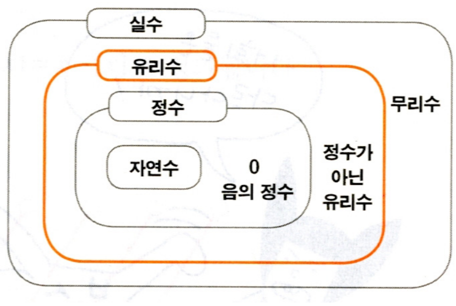
유리수와 분수는 다른건가요? 42)

결론부터 말하면 유리수와 분수는 다른 개념입니다. 수를 표현하는 방식에는 크게 소수와 분수로 구분할 수 있습니다. 소수는 소수점을 기준으로 수를 표현하는 방법이고, 분수는 분모와 분자를 통해 수를 표현하는 방법입니다.

그럼 지금부터 분수에 대해 좀 더 구체적으로 살펴봅시다. 예를 들어, 분수 $\frac{1}{4}$ 은 1을 4로 나누었을 때의 하나를 의미합니다. 즉, 사과 한 개를 네 조각으로 똑같이 나눴을 때, 그 중 한 조각의 크기를 뜻하는 것입니다. 많은 학생들이 분수를 단순히 나눗셈의 결과로 인식하고 계산에 급급한 나머지 그 의미를 제대로 이해하지 못하고 있는 경우를 종종 볼 수 있습니다. 또한, 분수 $\frac{1}{4}$ 은 소수점을 이용해서 소수로 다음과 같이 나타낼 수 있습니다.

$$\frac{1}{4} = 1 \div 4 = 0.25$$

이와 같이, 분수는 수를 나타내는 수의 표현방식입니다. 반면에 유리수는 수 체계의 한 영역으로 분모와 분자가 모두 정수인 분수로 표현할 수 있는 수로 정의됩니다. 여기서 분모는 0이 될 수 없다는 단서 또한 붙습니다. 이러한 유리수는 정수와 기약분수의 형태로 표현되는 정수가 아닌 유리수로 이루어 집니다. 오른쪽 그림은 실수까지의 수 체계를 나타낸 것입니다.



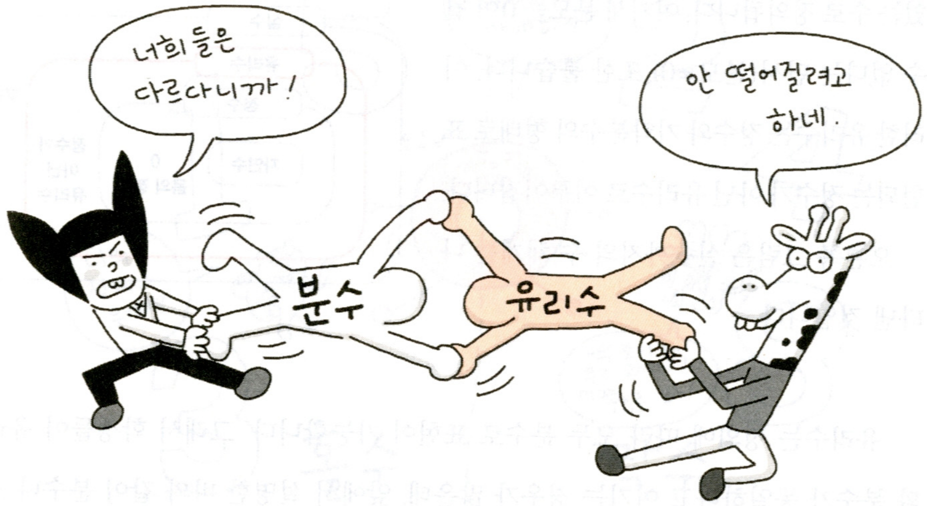
유리수는 정의에 따라 모두 분수로 표현이 가능합니다. 그래서 학생들이 유리수와 분수가 동일하다고 여기는 경우가 많은데, 앞에서 설명한 바와 같이 분수나 소수는 수의 표현방식이므로 모든 수는 분수나 소수로 표현할 수 있습니다.

예를 들어 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 의 경우, 분수이지만 유리수가 아닌 무리수이고, 무리수인 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 는 소수로 표현할 수도 있습니다.

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1.414\cdots}{2} = 0.707\cdots$$

42) 이동훈 외8명, 수학선생님도 궁금한 101가지 수학질문사전, 북멘토, 2012

따라서 분수라고 해서 항상 유리수인 것은 아니며, 또한 분수와 소수는 표현방식일 뿐이므로, 수 체계의 한 영역인 유리수를 분수와 같은 개념으로 판단하여 혼용해서는 안됩니다.



예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 ③

ㄱ. $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$ 에서 $x \to 1$ 일 때 (분모) $\to 0$ 이므로 (분자) $\to 0$ 이어야 한다.

$\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 0$ (참)

ㄴ. $f(x) = \begin{cases} x(x-1)(3x-1) & (x \neq 0 \text{ 또는 } x \neq 1) \\ 2 & (x=0) \\ 1 & (x=1) \end{cases}$ 로 정의된 함수 $f(x)$ 는 주어진 조건을 만족하지만 $x=1$ 에서 불연속이므로 미분불가능한 함수이다. 따라서 $f'(1)$ 은 존재하지 않는다. (거짓)

ㄷ. $x \to 1$ 일 때 $f(x) \to 0$ 이므로 $t = f(x)$ 라 하면

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(f(x))}{f(x)} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{f(f(x))}{x-1} = \lim_{x \to 1} \left\{ \frac{f(f(x))}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x-1} \right\} = \lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{t} \cdot \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2 \quad \text{(참)}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다

문제 2 정답 ③

ㄱ. $g(1) = 2$ 이고 $f(x)$ 가 연속함수이므로 $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} (x-1)g(x) = 0$ (참)

ㄴ. $f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{x \to 1} g(x) = g(1)$ ($g(x)$ 는 연속함수) $= 2$ (참)

ㄷ. $g(x) = \begin{cases} 1 & (x < 0) \\ x+1 & (0 \leq x < 1) \\ 2 & (x \geq 1) \end{cases}$ 이므로 $f(x) = \begin{cases} x-1 & (x < 0) \\ (x+1)(x-1) & (0 \leq x < 1) \\ 2(x-1) & (x \geq 1) \end{cases}$

$\lim_{x \to -0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to -0} \frac{x-1-(-1)}{x} = 1$ 이고

$\lim_{x \to +0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to +0} \frac{(x-1)(x+1)-(-1)}{x} = 0$ 이므로 $f(x)$ 는 $x=0$ 에서 미분불가능하다. (거짓)

문제 3 정답 ⑤

ㄱ. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$ 이므로 $f'(1)=0$ 이다. 함수 $f(x)$ 는 $x=1$ 에서 미분가능하므로 $x=1$ 에서 연속이다. $\therefore \lim_{x\to1}f(x)=f(1)$ (참)

ㄴ. $\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=0$ 이므로 $f'(1)=0$ 이다.

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1)-f(1-h)+f(1)}{2h}=\frac{1}{2}f'(1)+\frac{1}{2}f'(1)$

$=f'(1)=0$ (참)

ㄷ. $f(x)=|x-1|$ 일 때,

$\lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{|1+h-1|-|1-h-1|}{2h}=\lim_{h\to0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=0$

$\therefore \lim_{h\to0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$ (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

문제 4 정답 ⑤

$g(x)=x^3+ax^2+bx+3$ (a, b는 상수)라 하면 합성함수 $(g\circ f)(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $f(x)$의 불연속점 $x=0$, $x=-2$ 에서 연속이면 된다.

(i) $x=0$일 때

$(g\circ f)(0)=g(f(0))=g(0)=3$, $\lim_{x\to+0}g(f(x))=\lim_{x\to1-0}g(x)=g(1)$

($\because$ $g(x)$는 삼차함수이므로 연속함수이다.)

$\lim_{x\to+0}g(f(x))=(g\circ f)(0)$이므로 $g(1)=3$이다.

$1+a+b+3=3$에서 $a+b=-1$ …… ㉠

(ii) $x=2$ 일 때

$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(0)=3$, $\lim_{x\to2+0}g(f(x))=\lim_{x\to-1+0}g(x)=g(-1)$

$\lim_{x\to2+0}g(f(x))=(g\circ f)(2)$이므로 $g(-1)=3$이다.

$-1+a-b+3=3$에서 $a-b=1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하면 $a=0$, $b=-1$ $\therefore$ $g(x)=x^3-x+3$. 따라서 $g(3)=27-3+3=27$

다 른 풀 이

함수 $f(x)$는 $x \neq 0$, $x \neq 2$인 모든 실수 x에서 연속이고, 함수 $g(x)$는 모든 실수에서 연속이다. 따라서 $y=(g \circ f)(x)$는 $x \neq 0$, $x \neq 2$인 모든 실수에서 연속이다.
결국 $y=(g \circ f)(x)$가 $x \neq 0$, $x \neq 2$에서 연속인 조건을 구하면 된다.
$g(x)$가 다항함수이므로 $\lim_{x\to 0} g(f(x))=\lim_{t\to 1} g(t)=g(1)$,

$$g(f(0))=g(0)=3\text{에서 } g(1)=3 \cdots\cdots ㉠$$

$\lim_{x\to 2+0} g(f(x))=\lim_{t\to +0} g(t)=g(0)=3$, $\lim_{x\to 2-0} g(f(x))=\lim_{t\to -1+0} g(t)=g(-1)$

$$g(f(2))=g(0)=3, \qquad \therefore\ g(-1)=g(0)=3 \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $g(0)=g(1)=g(-1)=3$이고, 이는 $g(x)-3=0$이 서로 다른 세 실근 $x=-1,\ 0,\ 1$을 가진다는 의미이다.

$$\therefore\ g(x)=x(x-1)(x+1)+3$$

따라서 $g(3)=3\cdot 4\cdot 2+3=27$

제시문 1

(1) $-|x| \leq x\sin\frac{1}{x} \leq |x|$이고 $\lim_{x\to 0}(-|x|)=\lim_{x\to 0}|x|=0$이므로 샌드위치 정리에 의해 $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$이고, $f(0)=0$이므로 $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)$을 만족한다.
따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(2) $\lim_{h\to +0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{h\sin\frac{1}{h}}{h}=\lim_{h\to +0}\sin\frac{1}{h}$이고 $\frac{1}{h}\to\infty$ 이므로 $\lim_{h\to +0}\sin\frac{1}{h}$의 값은 진동한다. 마찬가지로 $\lim_{h\to -0}\sin\frac{1}{h}$의 값도 존재하지 않는다. 따라서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 미분가능하지 않다.

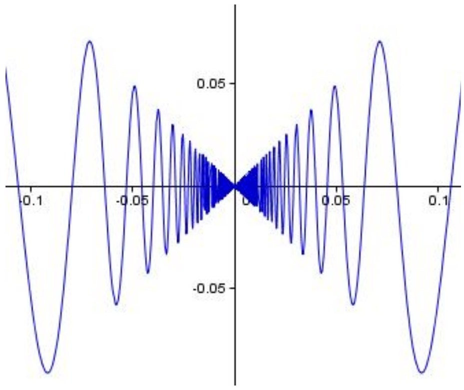
(3) $f(x)$는 $x \neq 0$인 모든 실수 x에 대하여 미분가능하므로 $f'(x)$는

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

이다. $f'(x)=3$에서 $\frac{1}{x}=\theta$라 두면 $g(\theta)=\theta\cos\theta-\sin\theta+3=0$을 만족하는 해를 조사하면 된다.

$$g(\pi)=-\pi+3<0,\ g(2\pi)=2\pi+3>0,\ g(3\pi)=-3\pi+3<0,\ g(4\pi)=4\pi+3>0,\ \cdots$$

이다. 따라서 중간값 정리에 의해 $g(\theta)=\theta\cos\theta-\sin\theta+3=0$ 를 만족하는 해는 무수히 많다. 즉, $f'(x)=3$ 을 만족하는 x 는 무수히 많다.



$y=f(x)$ 의 그래프

제시문 2

(1) a 와 b 가 서로소가 아니면 $a=ka', b=kb'\ (k>1)$ 인 k 가 존재하고, $k(b'c-a'd)=1$ 이 되어 k 가 1 의 약수가 되므로 모순이다. 따라서 a 와 b 는 기약분수이다. c 와 d 도 마찬가지로 증명하면 기약분수이다.

다른풀이

$k=\gcd(a,\ b)$ 이면 k 는 $bc-ad$ 의 약수이므로 $k=1$ 이다. 따라서 $a,\ b$ 는 서로소이다. 같은 방법으로 $c,\ d$ 도 서로소이다.

(2) $\dfrac{a}{b}\le\dfrac{k}{b+d}\le\dfrac{c}{d}$ 인 $\dfrac{k}{b+d}$ 에 대하여 $bk-a(b+d)=1$ 와 $(b+d)c-kd=1$ 을 만족시키는 k 가 존재함을 밝히면 된다. $bc-ad=1$ 이므로 $bk-ab-ad=bc-ad$ 이고 정리하면 $b(k-a-c)=0$ 이다. 따라서 $b\ne 0$ 이므로 $k=a+c$ 이다. $(b+d)c-kd=1$ 을 풀어도 같은 결과가 나온다. $\dfrac{a}{b}\le\dfrac{a+c}{b+d}\le\dfrac{c}{d}$, $b(a+c)-a(b+d)=1$, $(b+d)c-(a+c)d=1$ 를 만족하므로 (1) 에 의해 $\dfrac{a+c}{b+d}$ 는 기약분수이다. 따라서 두 분수 $\dfrac{a}{b}$ 와 $\dfrac{c}{d}$ 가 F_{b+d} 에서 연속한 위치에 놓여있지 않다.

다른풀이 1

$bc-ad=1$ 에서 $bc>ad$이므로 $c>\frac{ad}{b}$, $\frac{bc}{d}>a$ 이고

$\frac{a(b+d)}{b}=a+\frac{ad}{b}<a+c<\frac{bc}{d}+c=\frac{c(b+d)}{d}$이므로 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$이다.

또한 $b(a+c)-a(b+d)=1$, $(b+d)c-(a+c)d=1$ 이므로 $\frac{a+c}{b+d}$는 기약분수이다.

따라서 두 분수 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$가 F_{b+d}에서 연속한 위치에 놓여있지 않다.

다른풀이 2

$\frac{a+c}{b+d}$가 기약분수이고 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$을 만족함을 증명하자.

① $\frac{a+c}{b+d}$은 기약분수

$bc-ad=1$에서 $bc+ab-ad-ab=1$ 이고 $b(a+c)-a(b+d)=1$이므로 (1)의 (다른 풀이)와 같은 방법으로 $a+c$, $b+d$가 서로소임을 알 수 있다. 따라서 $\frac{a+c}{b+d}$은 기약분수이다.

② $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$

$\frac{a}{b}-\frac{a+c}{b+d}=\frac{a(b+d)-b(a+c)}{b(b+d)}=\frac{ad-bc}{b(b+d)}<0$이므로 $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}$이다.

$\frac{a+c}{b+d}-\frac{c}{d}=\frac{d(a+c)-c(b+d)}{d(b+d)}=\frac{ad-bc}{d(b+d)}<0$이므로 $\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$이다.

따라서 두 분수 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$가 F_{b+d}에서 연속한 위치에 놓여있지 않다.

(3) $n\geq \max(b,\ d)$임은 자명하다. 또한 문항 (2)의 결과에 의해 $n\leq b+d-1$이다.

이제 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$가 연속한 위치에 놓여있지 않은 최초의 경우가 두 수 사이에 분모가 $b+d$인 경우가 들어올 때임을 보인다.

$\frac{a}{b}<\frac{q}{p}<\frac{c}{d}$를 만족하는 p의 최솟값을 구해보자.(단, p, q는 서로 소)

$\frac{a}{b}<\frac{q}{p}$에서 $ap<bq$이고, $\frac{q}{p}<\frac{c}{d}$에서 $qd<pc$이므로

$bq-ap=x$, $cp-dq=y$라 두면 x, y는 자연수이다.

그러면 $\frac{q}{p}-\frac{a}{b}=\frac{x}{bp}$, $\frac{c}{d}-\frac{q}{p}=\frac{y}{dp}$이고, 두 식을 변변 더하면

$\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{x}{bp}+\frac{y}{dp}$ 이고 $bc-ad=1$에서 $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{1}{bd}$이므로

$$\frac{1}{bd}=\frac{x}{bp}+\frac{y}{dp}$$

양변에 bdp를 곱하면

$$p=xd+yb$$

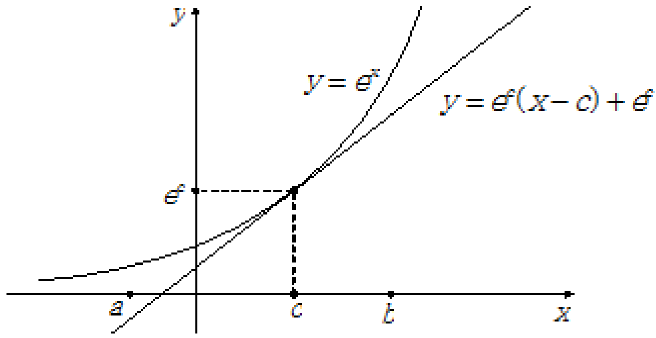
따라서 x, y는 자연수이므로 주어진 조건을 만족하는 p의 최솟값은 $b+d$이고, $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$는 F_{b+d}에서 처음으로 연속한 위치에 놓여있지 않게 된다. 그러므로 두 분수 $\frac{a}{b}$와 $\frac{c}{d}$가 F_n에 놓여있고, 또한 연속한 위치에 놓이기 위해 n이 만족해야 할 필요충분조건은 $\max(b,\ d)\le n\le b+d-1$이다.

참 고

한양대에서 발표한 예시답안에는 b, d가 모두 양의 정수일 경우와 음의 정수일 경우를 구분하였으며 $\max(|b|, |d|)\le n\le |b|+|d|-1$을 필요충분조건으로 제시하고 있다.

23 한양대학교 수시(오전)

제시문 1 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)**[43]



위 그림은 곡선 $y=e^x$와 이 곡선 위의 점 $(c,\ e^c)$에서의 접선을 나타낸다. 이 접선은 그림에서와 같이 곡선 $y=e^x$보다 아래에 있다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 부등식

$$e^c(x-c)+e^c \le e^x \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

이 성립하고 등호는 $x=c$인 경우에 성립한다. 예를 들면 $c=1$일 때 부등식 ①은 $ex \le e^x$ 또는

$$x \le e^{x-1}$$

이 되고 등호는 $x=1$인 경우에 성립한다.

한편 임의의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$의 산술평균은

$$M=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

이다. 부등식 $x \le e^{x-1}$에서 x 대신에 $\frac{a_k}{M}$를 대입하면 부등식

$$\frac{a_k}{M} \le e^{\frac{a_k}{M}-1} \quad (k=1,\ 2, \cdots, n) \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

이 되고 등호는 $a_k=M$인 경우에 성립한다.

43) 한양대학교 입학처

1-1

(1) 부등식 $1+x \le e^x$를 부등식 ①을 이용하여 설명하시오.

(2) $a<b$일 때 정적분을 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{e^b-e^a}{b-a}<\frac{e^a+e^b}{2}$$

(3) $a<b$일 때 부등식 $1+x \le e^x$와 $\sqrt{a_1 a_2} \le \frac{a_1+a_2}{2}$ (a_1, a_2는 양수)를 이용하여 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1+b)^{\frac{3}{2}}-(1+a)^{\frac{3}{2}}\right] \le \int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \le b-a+\frac{e^{2b}-e^{2a}}{4}$$

1-2

부등식 ②를 이용하여 임의의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대한 다음 부등식이 성립함을 보이시오.

$$(a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

1-3

임의의 예각삼각형에서 세 각을 A, B, C라 하자. 부등식

$$(a_1 a_2 a_3)^{\frac{1}{3}} \le \frac{a_1+a_2+a_3}{3} \quad (a_1, a_2, a_3\text{은 양수})$$

을 이용하여 $\tan A+\tan B+\tan C$의 최솟값을 구하시오.

제시문 2 다음 제시문 <가>~<마>를 읽고 물음에 답하시오. (50점)

〈가〉 일반적으로 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$를 식

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad (a, b, c, d \text{는 상수})$$

에 의하여 점 $\mathrm{P}'(x',\ y')$으로 옮기는 변환을 일차변환이라고 한다.

이 때 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$를 이 일차변환의 행렬이라고 한다.

〈나〉 원점을 닮음의 중심으로 하는 닮음비가 $k\,(k \neq 0)$인 닮음변환, 원점을 중심으로 각 θ만큼 회전하는 회전변환, 원점을 지나는 직선에 대한 대칭변환 등은 일차변환이다.

〈다〉 두 일차변환 f, g의 행렬을 각각 A, B라 하면 합성변환 $g \circ f$의 행렬은 BA이다.

〈라〉 곡선 $y = f(x)$의 $x = a$에서 $x = b$ 까지의 길이 l은

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

〈마〉 $\dfrac{d}{dx}(\ln(\tan x + \sec x)) = \sec x$

2-1 닮음변환과 대칭변환만을 합성하여 만든 일차변환 중 포물선 $2y = x^2$을 포물선 $8x = y^2$으로 옮기는 일차변환을 두 개 구하시오.

2-2 포물선 $2y = x^2$의 $-1 \leq x \leq 1$인 부분을 C라 하고, 위 1번의 일차변환에 의해 C가 옮겨진 곡선을 C'이라 할 때 C와 C'의 길이를 구하시오.

2-3 좌표평면 위에 원점을 지나지 않는 직선 l이 있다. f는 원점을 중심으로 각 $\dfrac{\pi}{6}$만큼 회전하는 회전변환이다.

직선 l 위의 점 중 f를 반복해서 적용하여 l 위의 다른 점으로 옮겨지는 것 모두의 집합을 S라 하자. 즉, S는 다음 조건을 만족하는 l 위의 모든 점 P의 집합이다.

조건: $f(P),\ f(f(P)),\ f(f(f(P))), \cdots$ 중 P가 아닌 l 위의 점이 있다.

S의 원소의 개수를 구하시오.

논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 2문항 (소문항6문항)	시간	120분
연관 개념	미분법, 적분법, 산술평균과 기하평균, 정적분의 상한과 하한, 일차변환, 닮음변환, 회전변환, 대칭변환		

제 시 문 분 석

제시문 1

지수함수 $y=e^x$와 접선에 대한 식을 제시하고 이를 이용하여 부등식으로 표현하고 있다. n개의 양수에 대한 산술평균을 제시하였고, 앞에서 제시한 부등식을 이용해 산술평균을 이용한 부등식을 제시하였다. 이를 이용해 (산술평균) $\geq$ (기하평균)이라는 사실을 증명할 수 있도록 요구하고 있다.

제시문 2

일차변환의 정의와 닮음변환, 회전변환, 대칭변환의 종류를 언급하고 있다. 또한 적분을 이용한 곡선의 길이 구하는 공식과 적분 계산과정 중에 필요한 식을 언급하고 있다.

논 제 분 석

1-1 (1) 주어진 곡선과 접선에 관한 부등식을 이용해 간단한 부등식의 증명을 요구하고 있다. $c=1$인 경우에 대해 접선의 방정식을 이용해 표현할 수 있는 지에 관한 평가 문항이다.

(2) 주어진 함수 $y=e^x$ 에 대한 정적분 값을 넓이로 이해하고 사다리꼴넓이보다 작다는 것을 표현할 수 있는 가를 물어보는 문항이다. 특히, 등호가 성립하는 경우에 대해 언급할 수 있도록 유의해야 한다.

(3) 주어진 부등식의 변형을 이용하고, 산술평균과 기하평균의 관계를 활용해 정적분 값의 상한과 하한을 구할 수 있는 가를 평가하기 위한 문항이다.

1-2 제시문에 주어진 부등식 $x \leq e^{x-1}$을 통해 (산술평균) $\geq$ (기하평균) 관계를 일반화 할 수 있는 가를 평가하기 위한 문항이다.

1-3 삼각함수의 이해와 산술평균, 기하평균을 통한 최솟값을 구하는 문항이다.

2-1 일차변환의 합성을 이해하여 주어진 이차곡선을 대칭변환과 닮음변환을 이용해 표현할 수 있는 가를 평가하는 문항이다.

2-2 주어진 공식을 활용하여 곡선의 길이를 구하게 함으로써 정적분의 기본적인 계산 기술을 측정하고, 나아가 닮음변환에 의해 곡선의 길이가 어떻게 변화하는 가를 물음으로써 닮음변환에 관한 기초 지식을 묻고 있다.

2-3 회전변환의 성질과 평면기하의 기본 성질을 활용하여 추론하는 문제로써 수학적 추론능력과 창의력을 평가하기 위한 문항이다.

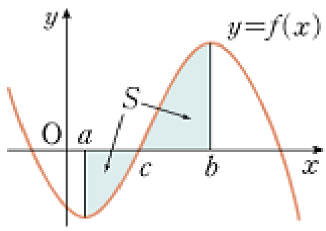
배 경 지 식 쌓 기

1. 정적분과 넓이

1) 곡선과 x축 사이의 넓이

구간 $[a,\ b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

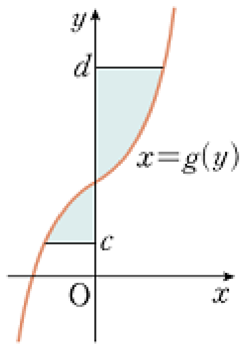
$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$



2) 곡선과 y축 사이의 넓이

구간 $[c,\ d]$에서 연속인 함수 $x=g(y)$의 그래프와 y축 및 두 직선 $y=c,\ y=d$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

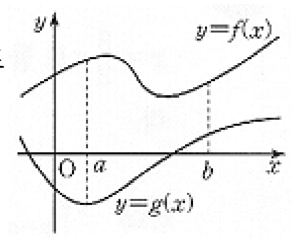
$$S=\int_c^d |g(y)|\,dy$$



3) 두 곡선 사이의 넓이

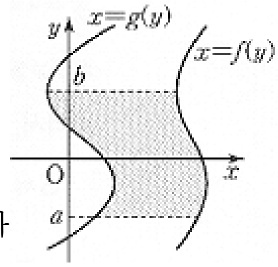
가) 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 두 직선 $x=a,\ x=b$로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



나) 구간 $[a,\ b]$에서 연속인 두 함수 $x=f(y)$, $x=g(y)$의 그래프와 두 직선, $y=a,\ y=b$ 로 둘러싸인 부분의 넓이 S는

$$S=\int_a^b |f(y)-g(y)|dy$$



2. 여러 가지 일차변환

1) 항등변환

좌표평면 위의 임의의 점$\mathrm{P}(x,\ y)$에 그 자신을 대응시키는 일차변환

$$f:(x,y)\rightarrow(x,y)$$

를 항등변환이라 한다. 이때의 변환 식은

$$\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases} \text{ 곧, } \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이므로 항등변환의 행렬은 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,즉 단위행렬이다.

2) 닮음변환

k가 0이 아닌 실수일 때, 좌표평면 위의 임의의 $\mathrm{P}(x,\ y)$에 점$\mathrm{P}'(kx,ky)$를 대응시키는 일차변환

$$f:(x,y)\rightarrow(kx,ky)$$

을 원점을 중심으로 하는 $|k|$배의 닮음변환이라 한다. 이때의 변환 식은

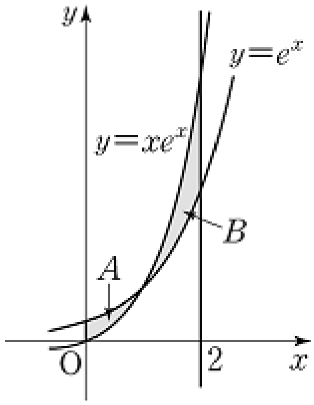
$$\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \text{ 곧,} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}(k\neq 0)$$

이므로 닮음변환의 행렬은 $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$ $(k\neq 0)$이다.

특히 닮음비가 $k=1$인 닮음변환을 항등변환이라고 한다.

풀 어 보 기

문제 1 그림에서 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 y축으로 둘러싸인 부분 A의 넓이를 a, 두 곡선 $y=e^x$, $y=xe^x$과 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분 B의 넓이를 b라 할 때, $b-a$의 값은? (2012학년도 수능)



① $\frac{3}{2}$ ② $e-1$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ e

문제 2 함수 $f(x)=e^x-1$에 대하여 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (2012년 4월 전국연합)

〈 보 기 〉

ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx=e-2$

ㄴ. $x>0$에서 $f(x)>x$이다.

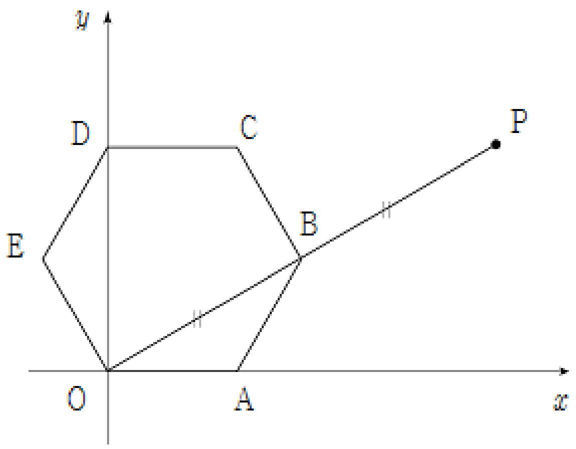
ㄷ. $\frac{5(e^5-1)}{2}<\int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx<\frac{(e^5-1)^2}{2}$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

문제 3 그림과 같이 정육각형 OABCDE에 대하여 O$(0,\ 0)$, A$(1,\ 0)$이고, 직선 OB 위의 점 P는 $\overline{\mathrm{OP}}=2\overline{\mathrm{OB}}$를 만족한다. 원점을 닮음의 중심으로 하는 닮음변환 f와 원점을 중심으로 θ만큼 회전시키는 회전변환 g의 합성변환 $g \circ f$에 의하여 점 A가 점 P로 옮겨질 때, 합성변환 $g \circ f$를 나타내는 행렬의 모든 성분의 합은?

$\left(\text{단, } 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ (2012년 7월 전국연합)



① 2　　② $2\sqrt{3}$　　③ 6　　④ $6\sqrt{3}$　　⑤ 18

읽 기 자 료

Euler Angle을 이용한 ZYX(Roll-Pitch-Yaw) Rotation과 Gimbal Lock [44)]

가. ZYX Rotation

1) 3D-rotation matrix for $\mathbb{R}^3$

가) 회전축을 x축으로 하는 회전행렬은 아래의 행렬과 같이 표현할 수 있다.

; $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

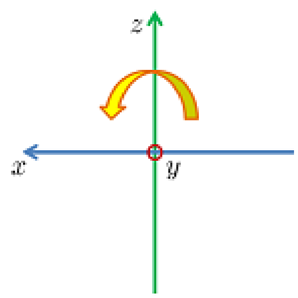
나) 회전축을 y축으로 하는 회전행렬은 아래의 행렬과 같이 표현할 수 있다.

; $\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$

다) 회전축을 z축으로 하는 회전행렬은 아래의 행렬과 같이 표현할 수 있다.

; $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

* y축을 회전축으로 하여 회전을 시킬 경우는 $-\theta$ 만큼 회전한 행렬의 표현으로 나타난다.

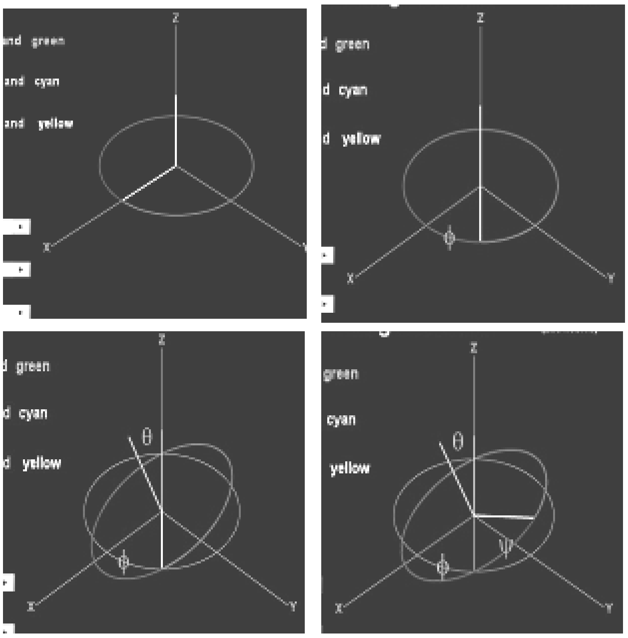


나. Euler Angle

3차원 공간에서 물체의 방위를 표시하기 위한 3개 각도의 조합이다. 오일러 각으로 물체의 회전할 때는 회전 순서에 유의하여야 한다. 회전 순서에 따라 물체의 회전된 최종 방위가 달라질 수 있다.

일반적으로 ZYX(Roll-Pitch-Yaw)회전과 XYZ회전이 주로 이용된다.

44) Dan Kalman, The Axis of a Rotation: Analysis, Algebra, Geometry, Mathematics Magazine, Vol.62, No.4 (Oct., 1989), pp. 248-252.



다. ZYX(Roll−Pitch−Yaw)회전

x축 중심으로 ϕ만큼 회전(Yaw) : $R_x(\phi)$

y축 중심으로 θ만큼 회전(Pitch) : $R_y(\theta)$

z축 중심으로 ψ만큼 회전(Roll) : $R_z(\psi)$

$$R_{zyx} = R_z(\psi)R_y(\theta)R_x(\phi)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

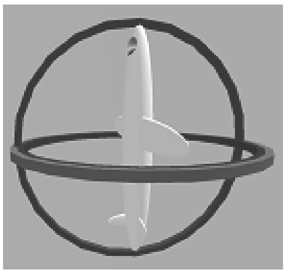
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\psi & \sin\phi\sin\theta\cos\psi - \cos\phi\sin\psi & \cos\phi\sin\theta\cos\psi + \sin\phi\sin\psi \\ \cos\theta\sin\psi & \sin\phi\sin\theta\sin\psi + \cos\phi\cos\psi & \cos\phi\sin\theta\sin\psi - \sin\phi\cos\psi \\ -\sin\theta & \sin\phi\cos\theta & \cos\phi\cos\theta \end{pmatrix}$$

오일러 각은 동역학에서 강체의 회전 운동 계산에 사용되며, 이 외에도 로봇의 제어, 3D 애니메이션과 컴퓨터 게임의 제작 등에 이용된다.

라. Gimbal Lock

Gimbal Lock은 3차원 공간좌표를 구성하고 있는 Euler Angle의 성분인 x(pitch), y(yaw), z(roll)로 표시되는 각을 이루는 X, Y, Z의 세 축이 연산에 의해 회전 하는 도중 특정 축이 특정 각으로 회전했을 경우 두 축이 겹쳐서 한 축이 소실되는 현상이다. Gimbal Lock은 연산으로서 정의된 각 축의 회전 순서에 따라 축이 독립적으로 연산되기 때문에 회전하는 과정에서 그 연산을 나타내는 행렬들의 곱의 순서가 정의되지 않아 전혀 다른 행렬이 되어 버리는 경우에 발생한다. Gimbal Lock 현상은 Euler Angle로 3차

원 공간좌표에서 점 또는 물체가 위치한 방향을 표시하는 한 근본적으로 해결할 수 없는 문제이지만, 몇 가지 Gimbal Lock현상을 회피하는 방법들은 존재한다. Euler Angle Rotation의 순서를 바꾸어서(Euler Angle을 나타내는 연산에서 행렬의 곱셈 순서를 바꾸는 것과 같다)해결할 수 있고, Axis(임의의 축 회전)을 사용하거나, 4원수(quaternion)을 사용하는 방법이 있다.



이 모형은 X축과 Y축이 회전도중 겹친 형태이다.

이러한 상황에서는 연산에 의해 회전할 수 있는 방향이 3가지 경우에서 2가지 경우로 줄었기 때문에 특정 방향으로의 원하는 회전이 나오지 않게 된다.

1) Euler Angle Rotation의 순서 바꾸기

회전 순서에 의한 Gimbal Lock 현상은 두 번째로 회전하는 축이 90도(또는 −90도)를 회전할 때 첫 번째와 세 번째 축이 겹치면서 발생한다. 그러므로 두 번째 회전축이 회전을 적게 할수록 90도를 회전할 확률이 낮아지게 된다. 이를 위해서는 가장 많이 회전하는 축을 먼저 회전시키고, 가장 적게 회전하는 축을 두 번째로 회전시킨 후, 마지막으로 남은 축을 회전시키는 방법을 생각해낼 수 있다.

2) Axis(임의의 축회전)을 사용하는 방법- 4원수(quaternion)를 사용하는 방법

사원수 α는 $i^2=j^2=k^2=-1$이 되는 세 수 i,j,k에 대하여 $\alpha=a+bi+cj+dk$ (단, a,b,c,d는 실수) 로 나타내고, 두 사원 수 $\alpha,\alpha'(=a'+b'i+c'j+d'k)$의 합은

$$\alpha+\alpha'=(a+a')+(b+b')i+(c+c')j+(d+d')k$$

로 정의하고, 두 사원수의 곱은

$$ij=-ji=k,\ jk=-kj=i,\ ki=-ik=j$$

에 의하여

$$\alpha\alpha'=aa'-bb'-cc'-dd'+(ab'+ba'+cd'-dc')i+(ac'+ca'+db'-bd')j+(ad'+da'+bc'-cb')k$$

로 정의한다.

사원수를 이용하여 회전하면 얼마나 회전하는지 알려주는 행렬을 표현하기 위한 4개의 값과 회전시키려는 방향을 구하기 위해 독립적으로서의 연산이 아닌. 동시에 세 개의 축을 연산하기 때문에 Gimbal Lock이 생기는 현상을 최대한 방지할 수 있다.

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 두 곡선의 교점의 x좌표를 구하면 $xe^x = e^x$에서 $xe^x - e^x = 0$

$$e^x(x-1)=0 \qquad \therefore\ x=1$$

$$a=\int_0^1 (e^x - xe^x)dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx$$

{여기에서 $f(x)=1-x$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=-1$, $g(x)=e^x$이므로}

$=\left[(1-x)e^x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x dx = -1 + \left[e^x\right]_0^1 = -1+(e-1) = e-2$

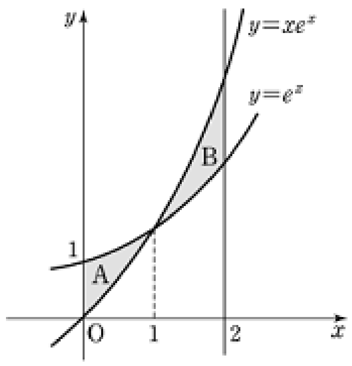
$b=\int_1^2 (xe^x - e^x)dx = \int_1^2 (x-1)e^x dx$

{여기에서 $f(x)=x-1$, $g'(x)=e^x$으로 놓으면 $f'(x)=1$, $g(x)=e^x$이므로}

$=\left[(x-1)e^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x dx$

$=e^2 - \left[e^x\right]_1^2 = e^2 - \left(e^2 - e\right) = e \quad \therefore\ b-a = e-(e-2)=2$

다 른 풀 이



두 부분의 넓이의 차 $b-a$는 $y=xe^x - x$의 정적분 결과와 같다.

$b-a=\int_0^2 (xe^x - e^x)dx = \int_0^2 (x-1)e^x dx$

$=\left[(x-1)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 e^x dx = e^2+1-(e^2-1)=2$

문제 2 ㄱ. $\int_0^1 f(x)dx = \left[e^x - x\right]_0^1 = e-2$ (참)

ㄴ. $g(x) = f(x) - x$라 하자.

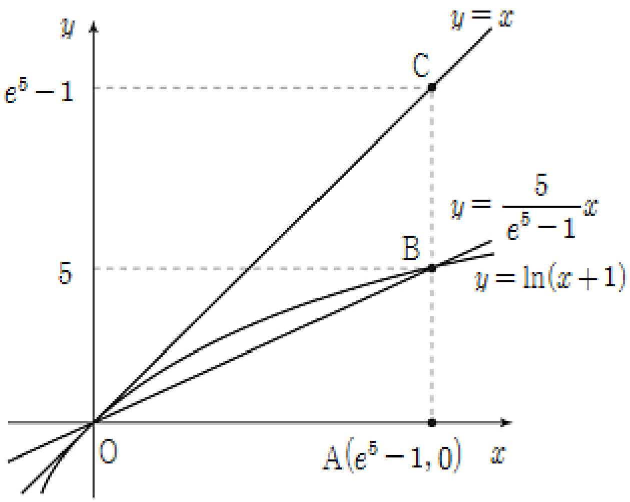
$x > 0$에서 $g'(x) = e^x - 1 > 0$이므로 함수 $g(x)$는 구간 $(0, \infty)$에서 증가한다.

따라서 $g(0) = 0$이므로 $x > 0$에서 $f(x) > x$이다. (참)

ㄷ. $f^{-1}(x) = \ln(x+1)$이므로

$\triangle \mathrm{OAB} = \dfrac{5(e^5-1)}{2} < \int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx$,

$\int_0^{e^5-1} f^{-1}(x)dx < \dfrac{(e^5-1)^2}{2} = \triangle \mathrm{OAC}$ (참)



따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ.

문제 3 닮음변환 f를 나타내는 행렬을 X, 회전변환 g를 나타내는 행렬을 Y라 할 때,

$\angle \mathrm{AOB} = \dfrac{\pi}{6}$, $\overline{\mathrm{OB}} = \sqrt{3}$ 이므로

$$X = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix},\quad Y = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

이다.

$g \circ f$를 나타내는 행렬은 $YX = \begin{pmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{pmatrix}$

$\therefore$모든 성분의 합은 6

논제 1-1 (1) (대학 예시답안)

$c=0$ 즉 점 $(0,1)$에서 접선의 방정식을 구하면

$$1+x \le e^x$$

또는 $e^{x-1} \ge x$에서 x대신에 $x+1$을 대입하면

$$1+x \le e^x$$

(2) (대학 예시답안)

$x=a$에서 $x=b$까지 $y=e^x$로 둘러싸인 도형의 넓이는 밑변 $(b-a)$와 점 (a, e^a), 점(b, e^b)를 잇는 직선으로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이보다 작다. 즉,

$$\int_a^b e^x\,dx = e^b - e^a < (b-a)\frac{e^a+e^b}{2}$$

$$\frac{e^b-e^a}{b-a} < \frac{e^a+e^b}{2}$$

(3) $1+x \le e^x$ 에서 $1+2x \le e^{2x}$ 이고 양변에 1을 더한 후 근호를 취하면 $\sqrt{2+2x} \le \sqrt{1+e^{2x}}$ 이 성립한다.

그러므로 $\int_a^b \sqrt{2+2x}\,dx \le \int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$ 이고 $\sqrt{2}\int_a^b \sqrt{1+x}\,dx \le \int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$ 이다.

좌변의 정적분 값을 계산하면 $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left[(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_a^b \le \int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx$ 이 성립한다.

산술·기하평균을 이용하면 $\sqrt{1 \cdot (1+e^{2x})} \le \frac{1+1+e^{2x}}{2}$ 이고 부등식의 양변에 정적분을 취하여 계산하면

$$\int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \le \int_a^b \frac{2+e^{2x}}{2}dx = (b-a) + \frac{e^{2b}-e^{2a}}{4}$$

이다.

따라서 $\frac{2\sqrt{2}}{3}[(1+b)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}}] \le \int_a^b \sqrt{1+e^{2x}}\,dx \le b-a+\frac{e^{2b}-e^{2a}}{4}$

논제 1-2 (대학 예시답안)

모든 $k=1,2,\cdots,n$에 대하여 $\frac{a_k}{M} \ne 1\,(a_k \ne M)$이면 $\frac{a_k}{M} < e^{\frac{a_k}{M}-1}$, $\frac{a_k}{M}=1$이면 $\frac{a_k}{M}=e^0=1$이므로

$\frac{a_k}{M} \le e^{\frac{a_k}{M}-1}$ 이 성립한다. 따라서 모든 $k=1,2,\cdots,n$에 대해 $a_k \ne M$라면

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n}{M^n} \le e^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{M}-n} = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (*)$$

(*)식에서 부등식(<)이 등호(=)가 성립하는 경우는 모든 $k=1,2,\cdots,n$에 대해 $a_k = M$일 때,(*)식으로부터 즉

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n}{M^n} \le e^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{M}-n} = 1$$

또는 $\dfrac{a_k}{M} \le e^{\frac{a_k}{M}-1}$ 을 $k=1,2,\cdots,n$에 대하여 n번 연속적으로 사용하고 그 부등식들을 각각 변변 곱하면 다음 부등식이 된다.

$$\frac{a_1a_2\cdots a_n}{M^n} \le e^{\frac{a_1}{M}-1} e^{\frac{a_2}{M}-1} \cdots e^{\frac{a_n}{M}-1} = e^0e^0\cdots e^0 = 1 \quad \cdots\cdots\cdots (**)$$

$$(a_1a_2\cdots a_n)^{\frac{1}{n}} \le \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

(**)식으로부터 등호는 모든 $k=1,2,\cdots,n$ 에 대해여 $a_k = M$ 즉, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$일 때 성립한다.

논제 1-3 **(대학 예시답안)**

$\tan C = \tan(\pi-(A+B)) = -\tan(A+B) = -\dfrac{\tan A + \tan B}{1-\tan A\tan B}$ 이므로 다음 식이 된다.

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A\tan B\tan C \cdots\cdots\cdots (\#)$$

A, B, C는 예각이므로 $\tan A, \tan B, \tan C$는 양수이다. $(a_1a_2a_3)^{\frac{1}{3}} \le \dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}$ 을 이용하면

$$\frac{\tan A + \tan B + \tan C}{3} = \frac{\tan A\tan B\tan C}{3} \ge (\tan A\tan B\tan C)^{\frac{1}{3}} \quad \cdots\cdots\cdots (\#\#)$$

따라서 $\tan A\tan B\tan C \ge \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$

(#)식으로부터 $\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$. 등호는

$$\tan A = \tan B = \tan C \left(A = B = C = \frac{\pi}{3}\text{일 때}\right)$$

즉, 정삼각형일 때 $\tan A + \tan B + \tan C$는 최솟값 $3\sqrt{3}$을 갖는다.

위의 식 (##)에서

$\dfrac{\tan A + \tan B + \tan C}{3} \ge (\tan A\tan B\tan C)^{\frac{1}{3}}$, 즉 $\tan A + \tan B + \tan C \ge 3\sqrt{3}$ 을 얻는다.

논제 2-1 (대학 예시답안)

포물선 $2y=x^2$을 직선 $y=x$에 대해 대칭이동하면 $2x=y^2$

닮음변환 $\begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases}$ 의 역변환은 $\begin{cases} x=\dfrac{1}{k}x' \\ y=\dfrac{1}{k}y' \end{cases}$

$2x=y^2$에서 $2kx'=y'^2$. 이것이 $8x=y^2$과 같은 곡선을 나타내려면 $k=4$. 따라서

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

이 구하는 행렬 중의 하나이다. 또한 포물선 $8x=4y^2$은 x축에 대칭이므로

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

도 조건을 만족한다.

다 른 풀 이

첫 번째, 직선 $y=x$ 에 대한 대칭변환과 4배 닮음변환을 합성하는 방법이 있다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

두 번째, 직선 $y=-x$에 대한 대칭변환, x축에 대한 대칭변환과 4배 닮음변환을 합성해도 역시 $8x=y^2$를 구할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

논제 2-2

(1) C의 길이는 $l=2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ 이다. 여기서 $x=\tan\theta$로 치환하면 $\dfrac{dx}{d\theta}=\sec^2 x$이므로

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\tan^2\theta}\,\sec^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta$$

이다. $\sec^3\theta=\sec^2\theta\cdot\sec\theta$ 이므로 부분적분법을 사용하면

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\,d\theta=\left[\sec\theta\cdot\tan\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\cdot\tan^2\theta\,d\theta=\sqrt{2}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^3\theta-\sec\theta)\,d\theta$$

따라서

$2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\, d\theta = \sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec\theta\, d\theta$ 이고, 제시문 〈마〉에 의해

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^3\theta\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + [\ln|\sec\theta + \tan\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1))$$

이다.

따라서 $l = 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx = 2 \times \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)) = \sqrt{2} + \ln(\sqrt{2}+1)$ 이다.

다 른 풀 이

C의 길이를 구하면

$l = 2\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx$ 가 되고, $f'(x) = 1, g(x) = \sqrt{x^2+1}$ 로 생각해서 부분적분법을 실행하면

$$l = 2\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\, dx = 2\left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - 2\int x \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

그런데 $\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{x^2+1-1}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ 이므로

$$2\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx = 2\int_0^1 \sqrt{x^2+1}\, dx - 2\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

따라서

$$l = \left[x\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

이다.

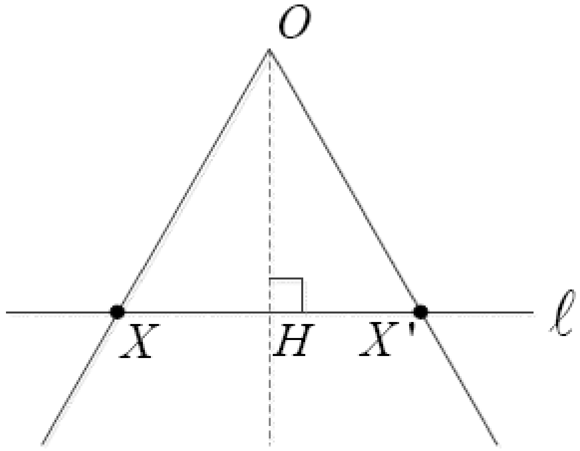
여기서 $x = \tan\theta$로 치환하면 $dx = \sec^2\theta d\theta$이고, x가 0일 때 $\theta = 0$, x가 1일 때 $\theta = \frac{\pi}{4}$이므로 $l = \sqrt{2} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta} d\theta$ 이다.

제시문 〈마〉에 의해 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta} d\theta = [\ln|\tan\theta + \sec\theta|]_0^{\frac{\pi}{4}} = \ln(1+\sqrt{2})$ 이다.

따라서 $l = \sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})$이다.

(2) C'의 길이는 C의 4배 이다. 따라서 C'의 길이는 $4\sqrt{2} + 4\ln(\sqrt{2}+1)$이다.

논제 2-3 (대학 예시답안)



l 위의 점 X에 f를 반복 적용하여 X가 l위의 다른 점 X'으로 옮겨졌다고 하자.

f가 O를 회전축으로 하는 회전변환이므로 $\overline{\mathrm{OX}}=\overline{\mathrm{OX}'}$이고 $\frac{\pi}{6}$만큼의 회전이므로

$$\angle \mathrm{XOX}'=\frac{\pi}{6}n,\ n=1,2,3,4,5$$

$\angle \mathrm{XOX}'=\frac{\pi}{6}n$ 이면 X에 f를 n번 혹은 $(12-n)$번 적용하면 X′으로 옮겨진다. X′도 마찬가지로 X로 옮겨진다. 따라서 10개다.

(대학 예시답안 별해1)

l위의 점 X에 f를 반복 적용하여 X가 l위의 다른 점 X'으로 옮겨졌다고 하자.

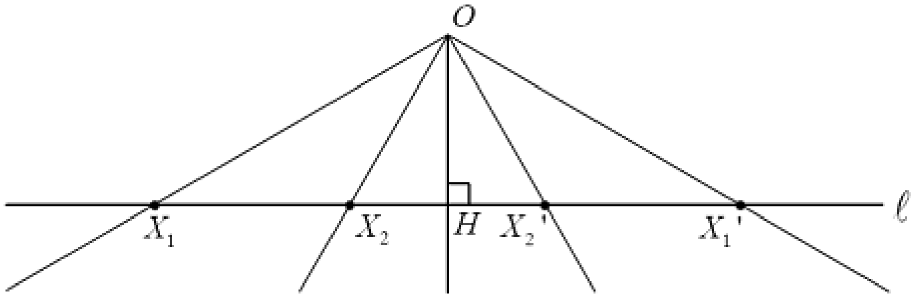
그런데 H를 O에서 l에 내린 수선의 발이라고 하면, $\overline{\mathrm{OX}} = \overline{\mathrm{OX}'}$으로부터 $\angle \mathrm{HOX} = \angle \mathrm{HOX}'$. 따라서 $\angle \mathrm{HOX} = \frac{\pi}{12}n,\ n = 1,2,3,4,5$

그러므로 X가 H의 왼쪽에 있는 경우, $\angle \mathrm{HOX} = \frac{\pi}{12}n, n = 1,2,3,4,5$의 다섯 가지가 있고 각각은 f를 1번, 2번, ⋯, 5번 적용하면 l위의 다른 점으로 옮겨진다.

X가 H의 오른쪽에 있으면서 $\angle \mathrm{HOX} = \frac{\pi}{12}n, n = 1,2,3,4,5$ 인 경우 각각은 f를 11번, 10번, ⋯, 7번 적용하면 l위의 다른 점으로 옮겨진다.

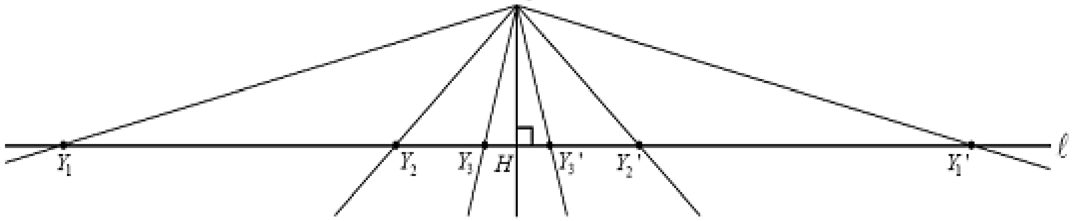
따라서 10개다.

(대학 예시답안 별해2)



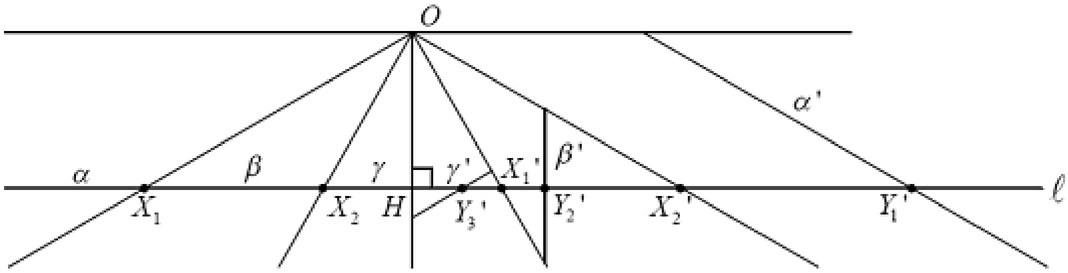
H를 O로부터 l에 내린 수선의 발이라 하자.

$\angle \mathrm{X_1OX_2} = \angle \mathrm{X_2OH} = \angle \mathrm{HOX_2}' = \angle \mathrm{X_2}'\mathrm{OX_1} = \frac{\pi}{6}$가 되도록 위의 그림과 같이 $\mathrm{X_1, X_2, X_1', X_2'}$ 등을 택한다. 그러면 문제에서 지시된 방법으로 $\mathrm{X_1 \to X_1', X_2 \to X_2', X_2' \to X_2, X_1' \to X_1}$으로 옮겨진다.



$\angle \mathrm{Y_3OH} = \angle \mathrm{HOY_3}' = \frac{\pi}{12}$이고 $\angle \mathrm{Y_1OY_2} = \cdots = \angle \mathrm{Y_2}'\mathrm{OY_1}' = \frac{\pi}{6}$가 되도록 Y_i, Y_i',

$i=1,2,3$을 택한다. 그러면 문제에서 제시된 방법으로 $\mathrm{Y}_i \rightarrow \mathrm{Y}_i{}'$, $\mathrm{Y}_i{}' \rightarrow \mathrm{Y}_i$.
따라서 문제의 조건을 만족하는 점이 적어도 10개 잇다. 이 외에는 없음을 다음과 같이 보인다.



그림에서 직선 l의 반직선 부분 α를 $\dfrac{\pi}{6}$씩 회전이동 했을 때, $\mathrm{X}_{i,}\,\mathrm{X}_i{}'$외의 l과의 교점이 생기는 경우는 α'으로 이동되었을 때뿐이고, 이 때 α'과 l과의 교점은 $\mathrm{Y}_1{}'$이다. 마찬가지로 선분 β의 경우에는 β'으로 이동했을 때 l과의 교점 $\mathrm{Y}_2{}'$, 선분 γ의 경우에는 γ'으로 이동했을 때 $\mathrm{Y}_3{}'$, 비슷하게 H의 반대쪽에 있는 직선의 부분에 대해서도 추론하면 문제의 조건을 만족하는 점은 10개 뿐이다.

24 한양대학교 수시(오후)

제시문 1 **다음 제시문 <가>~<다>를 읽고 물음에 답하시오. (50점)**[45]

〈가〉 계수가 실수인 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여

$$f(x)=q(x)g(x)+r(x)$$

인 계수가 실수인 다항식 $q(x)$, $r(x)$가 존재한다. 단, $r(x)=0$이거나 $r(x)$의 차수는 $g(x)$의 차수보다 낮다. 이때, $r(x)=0$이면 $g(x)$는 $f(x)$의 약수라고 부르고, $f(x)$는 $g(x)$의 배수라고 부른다.

〈나〉 계수가 실수인 다항식 $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$과 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$와 $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여, 행렬 $a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0E$ 를 $f(A)$라고 쓰자.

〈다〉 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$ 이 성립한다.
단, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1-1 제시문 〈다〉를 이용하여, 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하기 위한 필요충분조건은 $ad-bc\neq 0$임을 보이시오.

1-2 (1) 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$와 역행렬이 존재하는 행렬 P에 대하여 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$이 성립한다. $A^2+kA+lE=O$일 때, k와 l을 구하시오.

(2) 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & b \\ c & 2 \end{pmatrix}$에 대하여 $A^2+kA-6E=O$ 이 성립할 때, k를 구하시오.

1-3 O 이 아닌 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$와 계수가 실수인 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(A)=O$ 이 성립할 때, 다항식 $g(x)=x^2-(a+d)x+ad-bc$ 가 어떤 조건에서 $f(x)$의 약수가 되는지 설명하시오.

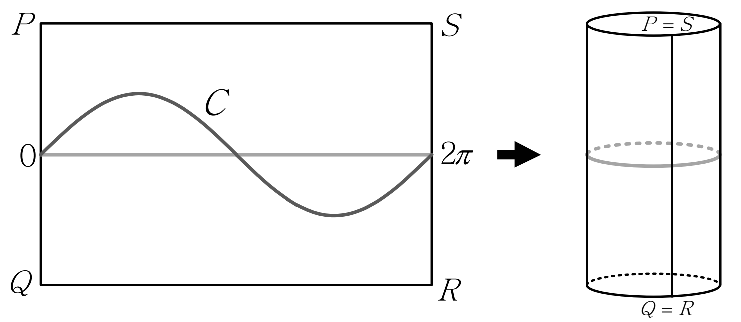
---

45) 한양대학교 입학처

제시문 2 **다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (50점)**

반지름이 r인 원의 둘레의 길이는 $2\pi r$이다. 정적분을 이용하면 다른 곡선의 길이도 구할 수 있다.

즉, 곡선 $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$의 길이는 정적분 $\int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$로 주어진다. 현주는 이를 이용해서 사인곡선 $y = \sin x$의 한 부분의 길이를 구하려고 했으나, 이 경우 정적분의 값을 계산하는 것이 쉽지 않음을 알았다. 그래서 현주는 정적분을 이용하지 않고 이 곡선의 길이를 구할 수 있는지 생각해 보았다. 다음은 현주가 생각한 방법을 요약한 것이다.



위의 그림과 같이 가로의 길이가 2π인 직사각형 $PQRS$ 위에 곡선 $y = \sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$를 그리고 이를 C라 하자. 이 직사각형의 두 변 PQ, SR를 이어 붙여 원기둥을 만들면, 곡선 C는 원기둥 위의 어떤 곡선 L이 된다.

(ㄱ) 곡선 L은 원기둥의 축과 각 $\frac{\pi}{4}$를 이루며 만나는 한 평면 위에 놓여 있다.

(ㄴ) 곡선 L의 '원기둥의 축과 수직인 평면' 위로의 정사영은 원기둥 위에 있는 한 원이다. 따라서 다음 관계가 성립한다.

(곡선 L의 길이) $\cdot$ $\cos\frac{\pi}{4} =$ (원기둥 위에 있는 한 원의 둘레의 길이).

곡선 C의 길이는 곡선 L의 길이와 같고, 이 원기둥 위에 있는 원의 반지름은 항상 1이다. 따라서 현주는 곡선 C의 길이가 $2\sqrt{2}\pi$라고 결론을 내렸다.

2-1 곡선 C 의 길이가 실제로는 $2\sqrt{2}\pi$보다 작음을 보이시오.

2-2 위 1번에 의해 현주의 방법에는 오류가 있음을 알 수 있다. 위 제시문의 내용 중 (ㄱ)과 (ㄴ)의 참, 거짓 여부를 판정하고 그 이유를 밝히시오.

2-3 평면이 원기둥의 축과 예각을 이루며 원기둥과 만나면 그 교선은 타원이 된다. 이 사실을 이용해서 곡선 $y=a\cos\dfrac{x}{c}+b\sin\dfrac{x}{c}$ (단 a, b, c는 양의 상수이고 $0\le x\le 2\pi c$)의 길이와 같은 둘레의 길이를 갖는 타원의 장축과 단축의 길이를 구하고 그 과정을 서술하시오.

논술유형분석

문항 수	수학 2문항(소문항 6문항)	시간	120분
연관 개념	행렬의 연산, 케일리-해밀턴 정리, 곡선의 길이, 정적분, 삼각함수		

제시문분석

제시문 1

〈가〉에서는 다항식에서 약수의 정의를 소개하고 있다. 〈나〉와 〈다〉에서는 이차정사각행렬에서 행렬다항식과 케일리-해밀턴 정리를 설명하고 있다.

제시문 2

곡선의 길이를 구하는 정적분의 식을 소개하고 있다. 또한 정적분을 이용하지 않고 곡선의 길이를 구하는 2가지 방법에 대해 설명하고 있다.

논 제 분 석

1-1

이차정사각행렬이 역행렬을 가질 필요충분조건이 $ad-bc\neq 0$임을 〈제시문1〉의 〈다〉를 이용하여 증명할 수 있는가를 묻고 있다. 필요충분조건을 구하는 것이므로 양방향으로 모두 성립함을 보여야 한다.

1-2

(1) 행렬의 조건이 주어져 있을 때 그 행렬이 만족하는 이차다항식을 구할 수 있는가를 묻고 있다. $A=P\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{pmatrix}P^{-1}$의 꼴로 고쳐 대입하면 쉽게 구할 수 있다.

(2) 행렬 A가 만족하는 이차다항식을 구하는 문제이다. 단위행렬의 실수배가 되는 경우와 아닌 경우를 구별하여야 한다.

1-3

$g(x)$가 어떤 조건에서 $f(x)$의 약수가 되는지를 설명하는 문제이다. 행렬 A가 단위행렬의 실수배가 되는 경우와 아닌 경우를 구별해서 설명하여야 한다.

2-1

주어진 곡선의 길이를 정적분을 이용하여 계산하고 그 결과가 $2\sqrt{2}\pi$보다 작음을 보이는 문제이다.

2-2

(ㄱ)과 (ㄴ)의 방법으로 정적분의 길이를 구하는 것이 올바른지 확인하는 문제이며, (ㄴ)의 방법에서 정사영 계산의 오류를 찾아야 한다. 두 평면이 이루는 각과 한 평면위의 선분들이 다른 평면과 이루는 각의 크기가 다를 수 있음을 이해해야 풀 수 있다.

2-3

평면과 원기둥이 만나는 교선의 타원의 방정식을 구하는 문제이다. 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값과 최솟값의 차를 구하고 피타고라스 정리를 사용하면 풀 수 있다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 케일리-해밀턴 정리

행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여

$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$$

[증명]

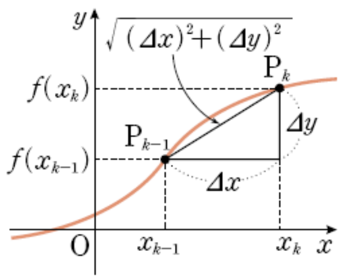
$$A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}=O$$

2. 곡선의 길이

구간 $[a,b]$에서 도함수가 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프의 길이는 다음과 같다.

$$\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

[증명]



구간 $[a, b]$를 n등분하여 양 끝점과 각 분점을 각각 $x_0(=a)$, x_1, x_2, $\cdots$, $x_n(=b)$ 이라 하고, 각 소구간의 길이를 Δx라고 하면 $\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$이다.

또, 각 분점 x_0, x_1, x_2, $\cdots$, x_n에 대응되는 곡선 위의 점을 P_0, P_1, $\cdots$, P_n이라 하고, $l_k=\overline{\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k}$라고 하자. 이때, 두 점 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ f(x_{k-1}))$, $\mathrm{P}_k(x_k,\ f(x_k))$ 에 대하여 $\Delta x=x_k-x_{k-1}$,

$\Delta y=f(x_k)-f(x_{k-1})$이므로 $l_k=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\sqrt{1+\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}\cdot\Delta x$

평균값의 정리로부터 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}=f'(c_k)$ 인 c_k가 x_{k-1}과 x_k 사이에 존재한다.

따라서 $l_k=\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\cdot\Delta x$이므로

$$l=\lim_{n\to\infty}(l_1+l_2+\cdots+l_n)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\cdot\Delta x$$

한편, $n\to\infty$이면 $\Delta x\to 0$이므로 $c_k\to x_k$이다. 따라서 정적분의 정의를 이용하면

$$l=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1+\{f'(c_k)\}^2}\cdot\Delta x=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

풀 어 보 기

문제 1 행렬 $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$에 대하여 등식 $A^n = A$를 만족시키는 두 자리의 자연수 n의 개수는?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

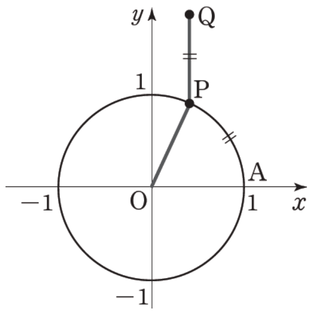
문제 2 행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$와 역행렬을 갖는 이차정사각행렬 P에 대하여 행렬 B가 등식 $A = PBP^{-1}$을 만족시킬 때, 행렬 B^4의 $(1,\ 1)$ 성분은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

문제 3 $1 \le x \le e$에서 곡선 $y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x^2 - \ln x\right)$의 길이는? (단, e는 자연로그의 밑이다.)

① $\frac{1}{4}(e^2+1)$ ② $\frac{1}{2}(e^2+1)$ ③ e^2+1
④ $2(e^2+1)$ ⑤ $4(e^2+1)$

문제 4 점 P가 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 원 위에 점 A(1, 0)을 출발하여 매초 1라디안의 속도로 원 위를 반시계방향으로 움직이고 있다. 점 P를 y축의 방향으로 호 AP의 길이만큼 평행이동한 점을 Q라 하자. 시각 t가 $t=0$에서 $t=\pi$까지 변할 때, 점 Q가 움직인 거리는?



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

읽 기 자 료

케일리-해밀턴(Cayley-Hamilton)정리[46]

1) 고윳값(eigenvalue), **고유벡터**(eigenvector)

n차 정사각행렬 $A=(a_{ij})$에 대하여, n차 열벡터 X가 주어져서 행렬 A에 관한 방정식 $AX=\lambda X$ $(X\neq O)$를 만족하는 실수 λ를 행렬 A의 고윳값이라 하고, 벡터 X를 고윳값 λ에 대한 행렬 A의 고유벡터라고 한다.

2) 특성방정식(characteristic equation)

방정식 $AX=\lambda X$ 즉, $(A-\lambda E)X=O$가 해 $X\neq O$ 인 해를 갖기 위한 필요충분조건은

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-\lambda} \end{vmatrix}=0$$

을 만족하는 것이다. 이를 행렬 A의 특성방정식(고유방정식)이라 하고 $p(\lambda)=|A-\lambda E|$를 A의 특성다항식이라 한다.

3) 케일리-해밀턴 정리

모든 n차 정사각행렬 A는 자신의 특성방정식 $|A-\lambda E|=0$을 만족시킨다.

이 정리를 이차정사각행렬에 적용시킨 것이 고교과정에서의 $C-H$정리이다.

즉 고교과정에서의 $C-H$정리는 이차 정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 에서 행렬식

$|A|=ad-bc$라 하면 행렬 A는 자신의 특성방정식

$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$ 을 만족한다.

즉, $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$를 만족한다.

◈ 정리 : 이차정사각행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$가 $A^2-pA+qE=O$을 만족한다고 해서 $p=a+d$, $q=ad-bc$ 인 것은 아니다.

46) KICE 교수-학습개발센터

〈증명〉

$A^2-pA+qE=O$을 만족하고 $C-H$정리에서 $A^2-(a+d)A+(ad-bc)E=O$

도 만족하므로 두 식을 빼면 $(a+d-p)A+(q-ad+bc)E=O$이다.

여기서 $a+d-p=0$이면 $(q-ad+bc)E=O$가 되어 $q-ad+bc=0$가 된다.

즉, $A\neq kE$이면 $p=a+d$, $q=ad-bc$ 이다.

그러나 $a+d-p\neq 0$이면 $A=\dfrac{ad-bc-q}{a+d-p}E=kE$ 가 된다. 이를 $A^2-pA+qE=O$에 대입하면 $(k^2-pk+q)E=O$ 즉, $k^2-pk+q=0$이 되어 $p^2-4q\geq 0$이면 이러한 실수 k는 존재하게 된다. 따라서 $p\neq a+d$, $q\neq ad-bc$ 일 때도 $A^2-pA+qE=O$을 만족하는 행렬 A가 존재하게 된다.

이상을 요약하면 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 가 $A^2-pA+qE=O$를 만족할 때,

$A\neq kE$ 이면 $p=a+d$, $q=ad-bc$ 이고

$A=kE$ 이면 반드시 $p=a+d$, $q=ad-bc$ 인 것은 아니다.

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 ④

$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -7 & 3\end{pmatrix}$에서 $A^2=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -7 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}$

$A^3=A^2A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -7 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -7 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=-E$

이므로 $A^6=(A^3)^2=(-E)^2=E$

이때, $A^{13}=(A^6)^2A=EA=A$, $A^{19}=(A^6)^3A=EA=A$, $\cdots$, $A^{97}=(A^6)^{16}A=EA=A$

와 같이 $n=6k+1$ (k는 자연수) 일 때, 등식 $A^n=A$가 성립한다.

이때, n은 두 자리의 자연수이므로

$10\le 6k+1\le 99,\ \ 9\le 6k\le 98,\ \ \dfrac{3}{2}\le k\le\dfrac{49}{3}$

$\therefore\ k=2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 16$

따라서 등식 $A^n=A$를 만족시키는 두 자리의 자연수 n의 개수는 15이다.

문제 2 정답 ④

$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -2\end{pmatrix}$에서 $A^2=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -3\end{pmatrix}=-3E$

$\therefore\ A^4=(A^2)^2=(-3E)^2=9E$

또, $A=PBP^{-1}$의 양변의 왼쪽에 P^{-1}을, 양변의 오른쪽에 P를 곱하면

$P^{-1}AP=B$

$\therefore\ B^2=(P^{-1}AP)^2=(P^{-1}AP)(P^{-1}AP)=P^{-1}A(PP^{-1})AP=P^{-1}A^2P$

$B^4=(P^{-1}AP)^4=P^{-1}A^4P=P^{-1}(9E)P=9E=\begin{pmatrix}9 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$

따라서 행렬 B^4의 $(1,\ 1)$ 성분은 9이다.

문제 3 정답 ①

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$이므로 구하는 곡선의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_{1}^{e}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^{2}}\,dx\ =\frac{1}{2}\int_{1}^{e}\left(x+\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^{2}+\ln x\right]_{1}^{e}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}e^{2}+1\right)-\left(\frac{1}{2}+0\right)\right\}=\frac{1}{4}(e^{2}+1)$$

문제 4 정답 ④

점 P가 매초 1라디안의 속도로 움직이므로 t초 후 점 P에 대하여 $\overset{\frown}{\mathrm{AP}}=t$

$$\therefore \angle \mathrm{POA}=t \qquad \therefore \mathrm{P}(\cos t,\ \sin t),\ \mathrm{Q}(\cos t,\ \sin t+t)$$

따라서 점 Q가 출발하여 π초 동안 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_{0}^{\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^{2}+\left(\frac{dy}{dt}\right)^{2}}\,dt=\int_{0}^{\pi}\sqrt{(-\sin t)^{2}+(\cos t+1)^{2}}\,dt$$

$$=\int_{0}^{\pi}\sqrt{\sin^{2}t+\cos^{2}t+2\cos t+1}\,dt=\int_{0}^{\pi}\sqrt{2(1+\cos t)}\,dt$$

$$=\int_{0}^{\pi}\sqrt{4\cos^{2}\frac{t}{2}}\,dt\ =\int_{0}^{\pi}2\left|\cos\frac{t}{2}\right|dt=\int_{0}^{\pi}2\cos\frac{t}{2}dt \quad \left(\because 0\le t\le \pi\text{일 때, } \cos\frac{t}{2}\ge 0\right)$$

$$=\left[4\sin\frac{t}{2}\right]_{0}^{\pi}=4-0=4$$

논제 1-1

i) 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재 $\Rightarrow$ $ad-bc\neq 0$ (귀류법 사용)

결론을 부정하여 $ad-bc=0$이라고 하자.

제시문 〈다〉를 이용하면 $A^{2}-(a+d)A=O$이다. 즉, $A^{2}=(a+d)A$가 된다.

A의 역행렬이 존재하므로 $A=(a+d)E$이다. 그러므로

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix},\ a=b=c=d=0$$

이것은 A가 역행렬을 갖는다는 것에 모순이므로 $ad-bc\neq 0$이다.

ii) $ad-bc\neq 0$ $\Rightarrow$ 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재

제시문 〈다〉 $A^{2}-(a+d)A+(ad-bc)E=O$에서

$E=-\dfrac{1}{ad-bc}A(A-(a+d)E)$가 성립하므로 $A^{-1}=-\dfrac{1}{ad-bc}(A-(a+d)E)$

따라서 A의 역행렬이 존재한다.

논제 1-2

(1)

$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}$에서 $A=P\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}P^{-1}$ 이므로 $A^2=P\begin{pmatrix}4&0\\0&9\end{pmatrix}P^{-1}$ 이다.

따라서, $O=A^2+kA+lE=P\begin{pmatrix}4&0\\0&9\end{pmatrix}P^{-1}+kP\begin{pmatrix}2&0\\0&3\end{pmatrix}P^{-1}+l\,P\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P^{-1}$

$=P\begin{pmatrix}4+2k+l&0\\0&9+3k+l\end{pmatrix}P^{-1}$

즉, $4+2k+l=0$, $9+3k+l=0$ 이므로 $k=-5, l=6$ 이다.

(2)

제시문 〈다〉에 의해 $A^2-4A+(4-bc)E=O$ 이고, 이 식을 주어진 조건 $A^2+kA-6E=O$과 연립하면, $(k+4)A+(-10+bc)E=O$ 이다.

i) $k=-4$ 이면 $bc=10$인 모든 행렬 A에 대해 성립한다.

ii) $k\neq-4$일 때에는 $A=\dfrac{10-bc}{k+4}E=\begin{pmatrix}2&b\\c&2\end{pmatrix}$이므로, $b=c=0$, $\dfrac{10}{k+4}=2$이고, $k=1$ 이 된다.

i), ii)에 의해서, $k=-4$ 또는 $k=1$ 이다.

논제 1-3

i) $A=kE$ (k는 실수)꼴이라면 $pA+qE=O$을 만족하는 실수 p, q가 존재하므로 $f(x)=px+q$ 꼴인 일차식이 된다. 이 경우에 이차식 $g(x)$는 $f(x)$의 약수가 아니다.

ii) $A\neq kE$ (k는 실수)꼴이라면 $f(A)=O$을 만족하는 일차식 $f(x)$는 존재하지 않는다. 따라서 가정을 만족하는 $f(x)$는 이차 이상의 식이다. 그리고 제시문 〈가〉에 의해 $f(x)=q(x)g(x)+r(x)$를 만족하는 계수가 실수인 다항식 $q(x), r(x)$가 존재한다. 만약, $r(x)\neq0$ 이라면 $r(x)$는 일차식이고, $r(A)=f(A)-q(A)g(A)=O$이다. 이것은 $f(A)=O$인 일차식 $f(x)$는 존재하지 않는다는 가정에 모순이므로, 따라서 $r(x)=0$ 이다. 즉, $g(x)$는 $f(x)$의 약수이다.

그러므로 행렬 $A\neq kE$(k는 실수)이면 $g(x)$는 $f(x)$의 약수이다.

논제 2-1

[대학 예시답안] 곡선 C의 길이 $<2\sqrt{2}\,\pi$임을 보이자.

단계 1 – 곡선 C의 길이를 정적분으로 표현한다.

제시문의 공식에 의해 곡선C의 길이는 $\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$이다.

(따라서 C의 길이는 $4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$이다. 이제 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx<\frac{\sqrt{2}\pi}{2}$임을 보이면 된다.)

단계 2 – 함수 $y=\sqrt{1+\cos^2 x}$가 구간 $0\le x\le\frac{\pi}{2}$에서 감소함수임을 설명한다.

함수 $f(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$를 생각하자. $0\le x\le\frac{\pi}{2}$일 때, $f'(x)=\frac{-\cos x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}\le 0$이므로 $f(x)$는 감소함수이다. (또는 $y=\cos x$가 감소함수이므로, 차례로 $y=\cos^2 x$, $y=1+\cos^2 x$, $y=\sqrt{1+\cos^2 x}$도 감소함수라고 설명해도 된다.)

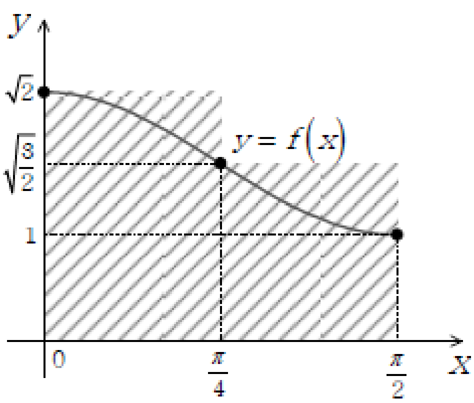
단계 3 – 넓이를 비교해서 부등식이 성립함을 보인다.

$f(0)=\sqrt{2}$, $f(\pi/4)=\sqrt{\frac{3}{2}}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$$

$$\le\sqrt{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\frac{\pi}{4}<\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\quad\text{이다.}$$

아래 그림을 참조(답안에 반드시 그림을 넣을 필요는 없다.)



다른풀이

곡선 C의 길이를 l이라 하면

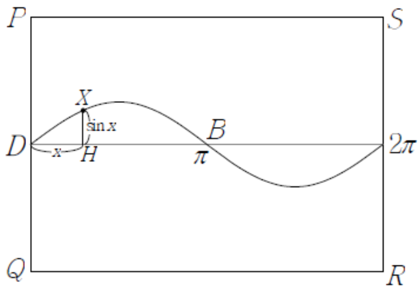
$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+(\sin x')^2}\,dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx<\int_0^{2\pi}\sqrt{1+1}\,dx=2\sqrt{2}\pi$$

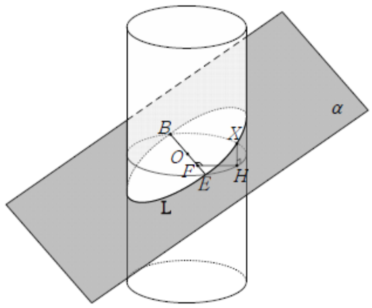
논제 2-2

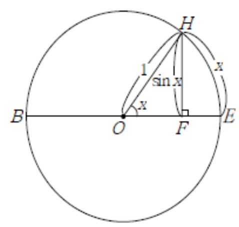
(ㄱ)은 참, (ㄴ)은 거짓
[대학 예시답안] (ㄱ)은 참이다.

단계 1 – 알맞은 평면α를 찾는다.
아래 그림과 같이 중심이 O이고, 원기둥과 반지름이 1인 원에서 만나는 원판을 생각하자. 이 원판과 선분 EB에서 만나고 각 $\frac{\pi}{4}$를 이루는 평면을 α라 하자. (그림만으로 평면 α를 설명해도 된다.)

단계 2 – 곡선 L위의 임의의 점이 평면 α에 포함됨을 보인다.
곡선 L위의 임의의 점을 X라 하고, X에서 원판에 내린 수선의 발을 H라 하면, 호 EH의 길이가 x일 때, 선분 XH의 길이는 $\sin x$이다. 한편 H에서 선분 EB에 내린 수선의 발을 F라 하면, 각 $\angle$FOH의 크기는 x이므로, 선분 HF의 길이는 $\sin x$, 따라서 (선분 XH의 길이)$=\sin x=$(선분 HF의 길이), 따라서 점 X는 평면 α 위에 놓여있다. 따라서 곡선 L은 평면 α위에 놓여 있다.







다른풀이

원기둥을 중심축이 z축이고 점 D(=E)가 $(1,0,0)$이 되도록 좌표공간에 놓으면, 곡선 C위의 임의의 점 $(x, \sin x)$는 원기둥 위의 점 $(\cos x, \sin x, \sin x)$로 옮겨진다.
이 점은 항상 $y=z$를 만족하므로, 곡선 L은 평면 $y=z$ 위에 놓여 있다.
(ㄴ)은 거짓이다.

단계 1 – 첫 번째 문장은 참임을 설명한다.

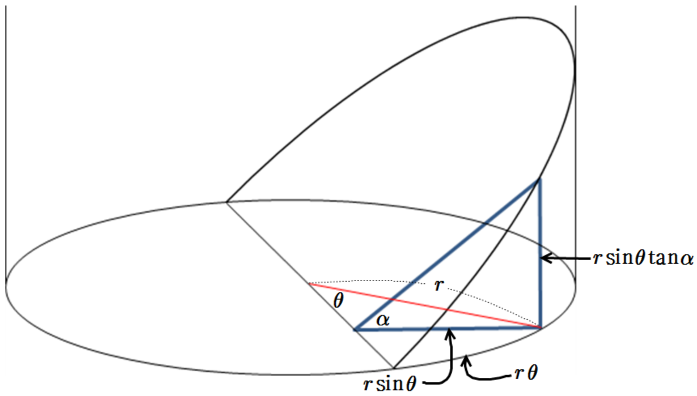
곡선 L 위의 임의의 점에서 '원기둥과 수직인 평면' 으로 내린 수선의 발은 항상 '원기둥과 수직인 평면' 과 원기둥의 교선인 원 위에 있다. 따라서 L의 '원기둥과 수직인 평면' 위로의 정사영은 원기둥 위에 있는 반지름 1인 원임은 분명하다.

단계 2 – 그러나 두 번째 문장은 참이 아님을 설명한다.

일반적으로 두 평면 S, S'이 만나고 그 교각이 θ일 때, S 위의 곡선 L의 S' 위로의 정사영을 L'라 하면 "L의 길이" 와 "L'의 길이 • $\cos\theta$" 는 다를 수 있다.
(참고: 그러나 "L로 둘러싸인 영역의 넓이" 와 "L'으로 둘러싸인 영역의 넓이 • $\cos\theta$" 는 항상 같다.)

다른풀이

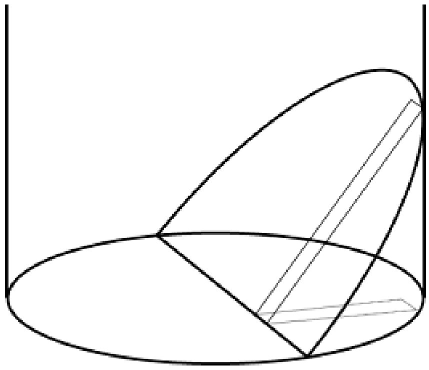
(ㄱ)은 참, (ㄴ)은 거짓

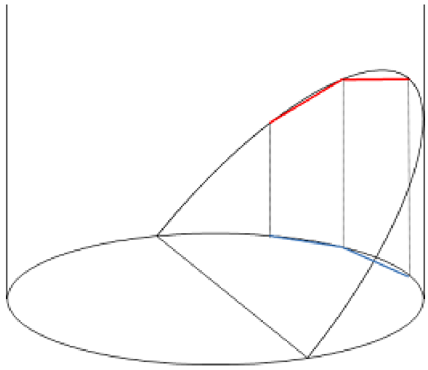


그림은 밑면의 반지름의 길이가 r인 원기둥에서 원기둥의 축과 만나서 생기는 각의 크기가 α인 평면으로 잘린 단면이다. 단면을 밑면을 따라 펼치면 그림과 같이 $y = r\tan\alpha\sin\theta$이다.

(ㄱ)은 위 그림에서 $r = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$이므로 곡선 L은 원기둥의 축과 각 $\frac{\pi}{4}$를 이루며 만나는 한 평면 위에 놓여 있다.

(ㄴ) (곡선 L의 길이) · $\cos\frac{\pi}{4}$ = (원기둥 위에 있는 한 원의 둘레의 길이)" 이 부분은 옳지 않다. 왜냐하면 이와 같은 정사영에서는 아래 왼쪽 그림과 같이 넓이비는 성립하지만 아래 그림과 같이 길이비는 성립하지 않기 때문이다.





위의 오른쪽 그림에서 곡선의 길이를 구하기 위해 사용하는 선분 각각을 정사영시키면 원 위의 선분들이 되지만 밑면과 이루는 각의 크기가 다르기 때문에 길이비는 성립하지 않는다.

논제 2-3

[대학 예시답안]

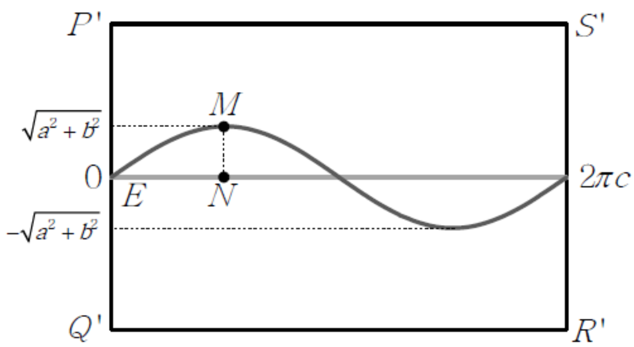
단계 1 – 곡선 C'의 방정식을 적당한 사인곡선으로 바꾼다.

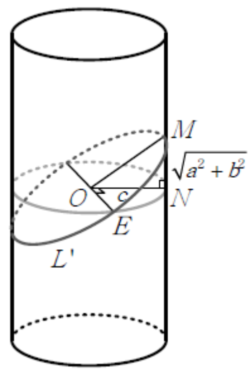
삼각함수의 합성에 의해, 곡선 $C': y=a\cos\frac{x}{c}+b\sin\frac{x}{c}=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\frac{x}{c}+\alpha\right)$이다.

단, α는 상수이고 $0\le x\le 2\pi c$. 따라서 평행이동에 의해 곡선 C'는 곡선 $C'': y=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\frac{x}{c}\right)$, $0\le x\le 2\pi c$와 같은 길이를 갖는다.

단계 2 – 곡선 C''과 같은 길이를 갖는 타원 L'을 찾는다.

제시문에 주어진 방법을 적용해서 가로의 길이가 $2\pi c$인 직사각형 $\mathrm{P'Q'R'S'}$위에 곡선 C''을 그리고, 이 직사각형의 두 변 $\mathrm{P'Q'}$, $\mathrm{R'S'}$를 이어 붙여 원기둥을 만들면, 곡선 C''는 반지름이 c인 원기둥 위의 곡선 L'이 되고, L'은 한 평면 위에 놓여있으므로 타원이다. 이 때, L'과 C''의 길이는 같다. 따라서 C'의 길이는 같다. 아래그림 참조





단계 3 – 타원 L'의 장축과 단축의 길이를 구한다.

위 그림에서 선분 MN, ON 의 길이는 각각 $\sqrt{a^2+b^2}$, c 이고, 따라서 타원 L'의

장축의 길이$=2\mathrm{OM}=2\sqrt{\mathrm{MN}^2+\mathrm{ON}^2}=2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

단축의 길이$=2\mathrm{OE}=2c$ 이다.

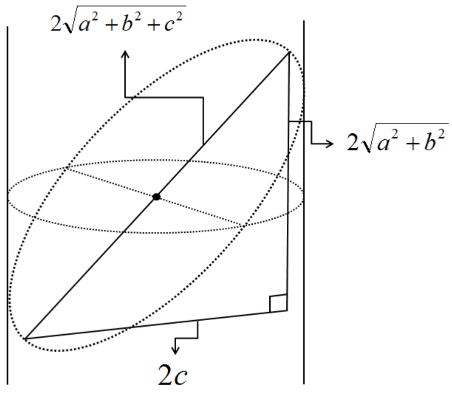
(참고) 타원 L'의 방정식을 $\dfrac{x^2}{A}+\dfrac{y^2}{B}=1$, 단 $A>B>0$의 형태로 쓰면

$\mathrm{A}=\mathrm{OM}^2=a^2+b^2+c^2$, $\mathrm{B}=\mathrm{OE}^2=c^2$이므로 방정식은 $\dfrac{x^2}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{y^2}{c^2}=1$ 이다.

다 른 풀 이

$y=a\cos\dfrac{x}{c}+b\sin\dfrac{x}{c}=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(\dfrac{x}{c}+\alpha\right)$ ($\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$)

위의 곡선을 원기둥과 관련해서 그림을 그리면 다음과 같이 생각할 수 있다.



위의 그림에서 가운데 원은 원기둥의 중간에 있는 원(밑면과 윗면의 원과 같은 원)이다. 직각삼각형의 밑변은 지름의 길이이고, 높이는 사인함수의 최댓값과 최솟값의 차이이다.

따라서 장축의 길이는 $2\sqrt{a^2+b^2+c^2}$이고 단축은 원기둥의 지름인 $2c$이다.

25 홍익대학교 수시

논제 1 [47)]

로그는 $3^x = 5$와 같은 지수 방정식을 풀 때도 사용되지만 동위원소의 반감기를 구하거나 산성도(pH), 지진의 규모(Richter, 리히터), 별의 밝기 등을 나타내는 데도 사용된다. 또한 측정한 자료가 광범위하게 변화하는 경우에도 로그를 사용하면 편리한 경우가 많다.

다음 표는 지구의 역사에서 중요한 사건이 발생한 시점을 나타낸 것이다. 홍익이네 반에서는 이 사건들을 수직선에 나타내려고 한다.

사건	기원전 (단위100만년)	사건	기원전 (단위100만년)
(1) 지구의 탄생	4450(44억 5천만)	(5) 공룡의 멸종	67
(2) 식물의 발생	2500	(6) 포유류의 발생	36
(3) 척추동물의 출현	570(5억7천만)	(7) 유인원의 출현	5
(4) 공룡의 출현	245	(8) 인류의 발생	1

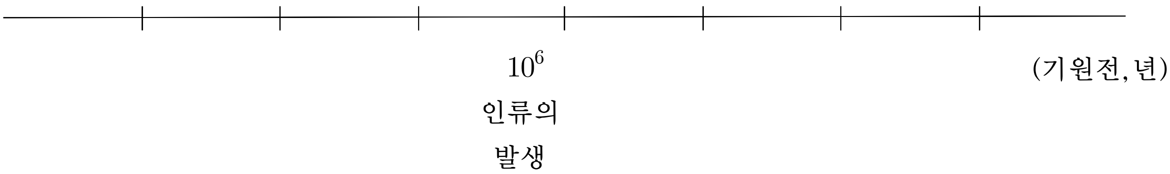
(예를 들어, “(5) 공룡의 멸종” 사건은 기원전 6700 만 년에 발생하였다.)

(가) 가로 30cm 크기의 종이에 가로 방향으로 그려진 직선이 있고, 여기에 1cm 간격으로 눈금을 표시하자. 1cm 간격은 100만년의 기간을 나타낸다. 이 수직선에 위의 8개의 사건을 표시하고자 한다면 어떤 문제점이 발생할지를 구체적으로 서술하시오. 그리고 만약 1cm 간격이 10억년의 기간을 나타내면 어떤 문제점이 발생하는지를 구체적으로 서술하시오.

(나) 이번에는 한 눈금의 값이 바로 왼쪽의 눈금 값의 $\frac{1}{10}$이 되도록 표시하는 방법을 선택하여 위의 사건들을 나타내고자 한다. 아래의 수직선 위에는 “인류의 발생” 사건이 정 중앙의 눈금에 표시되어 있다. 답안지에 아래와 동일한 수직선과 눈금을 그리고, “인류의 발생” 눈금의 왼쪽과 오른쪽에 있는 각각 세 개의 눈금들에 해당하는 값을 표시하시오.

47) 홍익대학교 입학처

이 수직선에 “(4) 공룡의 출현” 시점과 “(6) 포유류의 발생” 시점이 각각 어느 눈금 사이에 위치하는지 나타내려고 한다. 이때 각 위치는 두 눈금 사이의 중앙점을 기준으로 왼쪽, 오른쪽 중 어디에 나타나는지를 명확히 표시하고, 그 이유를 구체적으로 기술하시오.
우리나라 역사에서 고조선은 기원전 2300년에 성립되었다고 한다. 이 시점도 같은 수직선 위에 동일한 방법으로 나타내시오. (단, $\log 2 = 0.30$, $\log 3 = 0.47$로 하자.)



(다) LOG는 두 양의 관계를 나타내는 데 사용할 수 있다.
x와 y의 관계를 아래와 같이 정의하고, 이를 데시벨(decibel, 단위: dB)이라고 부르기로 한다.

$$10 \times \log\left(\frac{y}{x}\right)$$

예를 들면,

$\frac{y}{x} = 1$ 이면, 0(dB)

$\frac{y}{x} = 10$ 이면, 10(dB)

$\frac{y}{x} = 0.1$ 이면 -10(dB)이다.

위의 정의를 이용하여 다음의 문제를 생각해 보기로 하자.

서울에서 대전으로 초고속 인터넷망을 통해 광통신 신호를 보내려고 한다. 광통신에서 신호의 전송은 광자라고 불리는 빛 입자가 광섬유를 통해 전송됨으로써 이루어진다. 광섬유를 통해 전송될 때는 광자들의 손실이 발생한다. 광섬유의 길이가 1km이면, 보낸 광자수와 받은 광자수의 비율, $\frac{\text{받은 광자수}}{\text{보낸 광자수}}$는 위에서 정의한 데시벨 단위로 -0.2(dB) 이 된다고 하자.

서울과 대전 사이의 광섬유 길이가 150km이고, 이 광섬유를 통해 서울에서 10^{10}개의 광자를 보낸다면 대전에서 받은 광자의 개수는 몇 개인지 구하시오.

논제 2

0과 양의 실수를 10진법으로 표현하고 유효숫자 3개만 사용하여 덧셈과 곱셈을 하는 방법을 생각해 보려고 한다. 예를 들어, 유효숫자 3개만 사용하여 1224와 56.78의 덧셈을 해보자. 1224는 1220으로 56.78은 56.8로 간주하고, $1220+56.8=1276.8$에서 1280을 얻는 셈을 생각하려는 것이다. 다음 글은 이러한 생각을 보다 정교하게 구현한 것이다. 읽고 물음에 답하시오.

F^*는 순서쌍 (u,v)의 집합으로서, 여기서 u와 v는 정수이고 각각 조건 $0 \le u \le 9$과 $100 \le v \le 999$를 만족한다. $F=F^*-\{(9,999)\}$라 하자. 실수집합을 R, 0과 양의 실수들의 집합을 $R^+=\{r \in R \mid r \ge 0\}$이라 하자. 실수집합 R의 원소가 아닌 것을 도입하여 기호 ∞로 표기하고, $R^*=R^+ \cup \{\infty\}$라 하자. 이때 함수 $g: F^* \to R^*$를 다음과 같이 정의하자.

(1) $g(0,100)=0$,

(2) $g(9,999)=\infty$,

(3) $(u,v) \notin \{(0,100),(9,999)\}$이면, $g(u,v)=v \times 10^{u-7}$

예를 들어, $g(5,123)=123 \times 10^{-2}=1.23$이다.

(가) $R'=g(F)=\{g(u,v) \mid (u,v) \in F\}$이라 하자. R'의 원소 중 0이 아니면서 크기가 최소인 것은 0.0000101인데 이를 ϵ으로 표기하자. R'의 원소 중 크기가 최대인 것을 Ω으로 표기하면, Ω의 값은 무엇인가?

(나) 이제 함수 $f: R^+ \to F^*$를 다음과 같이 정의하자.

(4) $r=0$이면, $f(r)=(0,100)$이다.

(5) r이 ϵ보다 작으면 $f(r)=(0,100)$이다.

(6) r이 Ω보다 크면 $f(r)=(9,999)$이다.

(7) 위 (4), (5), (6)이 아닌 경우, $\epsilon \le r \le \Omega$이다. 이때, $r \times 10^a$을 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림한 값이 100 이상이고 998 이하가 되는 정수 a는 유일하게 존재한다. 그 반올림한 값을 b라 하고, $f(r)$은 $(7-a,b)$로 정의하자.

예를 들어, $r=5555$인 경우를 생각하자. $5555 \times 10^{-1}=555.5$이고 555.5를 소수점 아래 첫째 자리에서 반올림하면 556이다. $100 \le 556 \le 998$이므로 $f(5555)$는 $(7-(-1),556)=(8,556)$이다. 이때, $f(0.0012)$는 무엇인가?

(다) 이제 집합 F에 이항연산 $\oplus$와 $\otimes$을 다음과 같이 정의하자.

(8) $(u_1, v_1) \oplus (u_2, v_2)$는 $f(g(u_1, v_1) + g(u_2, v_2))$로 정의하자.

(9) $(u_1, v_1) \otimes (u_2, v_2)$는 $f(g(u_1, v_1) \times g(u_2, v_2))$로 정의하자.

이때, $(4, 123) \oplus (7, 456)$은 무엇인가?

(라) $f(\frac{1}{3}) \otimes f(3)$은 무엇인지를 쓰고, 그 값을 얻게 되는 과정을 기술하시오.

(마) 집합 F의 이항연산 $\oplus$과 $\otimes$에 대하여 교환법칙은 모두 성립한다. 그러나 결합법칙은 성립하지 않는다. 예를 들어 아래 조건을 만족하는 (u, v)가 존재한다.

$$((4, 300) \oplus (4, 300)) \oplus (u, v) \neq (4, 300) \oplus ((4, 300) \oplus (u, v))$$

이러한 (u, v)를 F에서 하나 찾고, 좌변과 우변의 값을 쓰시오.

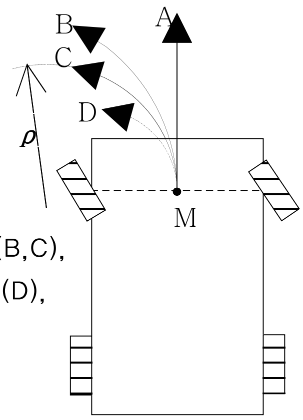
(바) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ 은 무한대로 발산한다. 다음의 점화식에 의해 정해지는 수열 a_n을 생각하자.

$$\begin{cases} a_1 = g(f(1)), \\ a_n = a_{n-1} + g(f(\frac{1}{n})), \ \ n \geq 2. \end{cases}$$

수열 a_n은 수렴함을 설명하시오.

논제 3

일반 승용차의 주행 방향은 운전대의 조작에 따라 바뀌는 앞바퀴의 조향각에 의해 결정된다. 운전대를 시계 방향 또는 반시계 방향으로 회전하면 그 각에 비례하여 앞바퀴의 조향각이 바뀌어 자동차가 회전하며 전진한다. 운전대를 회전하여 그 상태를 유지한 채 자동차를 움직이면, 그 이동 경로는 원의 일부가 되며, 이 원은 중심(회전 중심)의 위치와



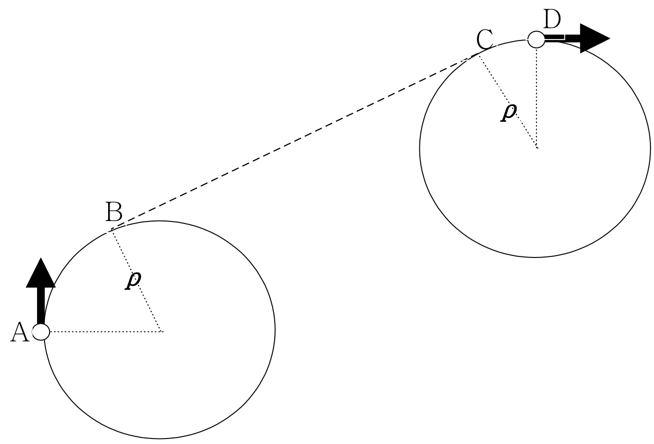
직진(A), 좌회전(B,C),
불가능한 좌회전(D),
회전반경 ρ

반지름(회전 반경) ρ 로 기술된다. 앞바퀴 조향장치의 설계구조에 따라 회전 반경의 최솟값이 결정된다. 즉, 운전대를 끝까지 돌렸을 때 가장 작은 원을 따라 회전하게 되며 이때의 회전 반경이 최소 회전 반경이다. 최소 회전 반경보다 더 작은 반지름의 원을 따라 회전하는 것은 불가능하다. 자동차의 위치는 두 앞바퀴의 사이의 중앙에 해당하는 점 M의 위치로 표시하고, 자동차의 경로도 점 M의 경로로 표시하자.

자동차가 회전하며 전진할 때는 자동차의 위치뿐 아니라 자동차의 방향도 변한다. 시작 위치와 시작 방향, 최종 위치와 최종 방향이 주어졌을 때, 자동차가 따라가는 길을 자동차의 운전경로라고 한다. 우리는 길이가 가장 짧은 운전경로를 찾아보려고 한다.

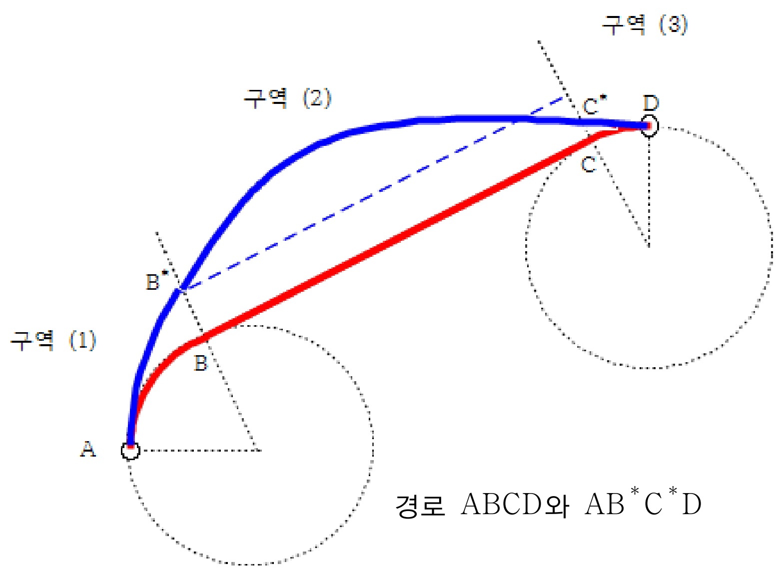
아래 그림과 같이 초기 위치 A와 최종 위치 D가 주어지고, 각각의 위치에서 주어진 방향이 화살표로 표시되고, 최소 회전 반경이 ρ일 때, A에서 화살표 방향으로 출발하여 D에 화살표 방향으로 도착하는 운전경로는 무수히 많다. 먼저 그림과 같이 점 A와 D에 접하는 반지름 ρ인 원을 그리고, 두 원의 공통 접선을 그리면, 원호 $\overset{\frown}{AB}$ ⇨ 직선 $\overline{BC}$ ⇨ 원호 $\overset{\frown}{CD}$로 이루어진 곡선이 운전경로이다.

(가) 아래에 제시한 사실 ①과 ②를 이용하여 운전경로 ABCD의 길이가 운전경로 AB^*C^*D의 길이보다 짧다는 것을 논리적으로 설명하시오.



원호, 직선, 원호로 이루어진
운전경로

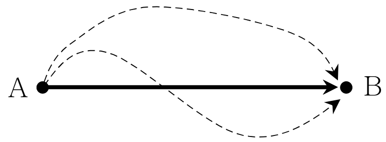
또한 아래 그림의 곡선AB^*C^*D를 따라 이동하는 것도 가능한 운전경로의 한 예이다. 이때 B^*는 원의 중심과 B점을 지나는 직선이 운전경로와 만나는 점이며 C^*점도 마찬가지이다.



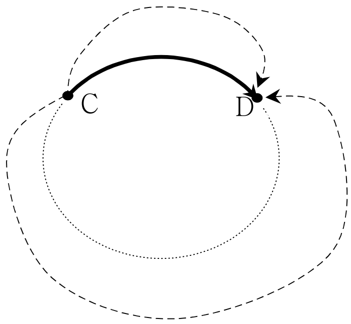
경로 ABCD와 AB^*C^*D

위 그림과 같은 경우 운전경로 ABCD의 길이와 운전경로 AB^*C^*D의 길이를 세 개의 구역 (1), (2), (3)으로 나누어 비교할 수 있다. 사실 일반적인 경우에도 모든 가능한 운전경로 가운데 길이가 가장 짧은 것은 원호 $\overset{\frown}{AB}$ ⇨ 직선 $\overline{BC}$ ⇨ 원호 $\overset{\frown}{CD}$ 꼴로 이루어진 경로이다. (이때 원호나 직선은 점일 수도 있다.)

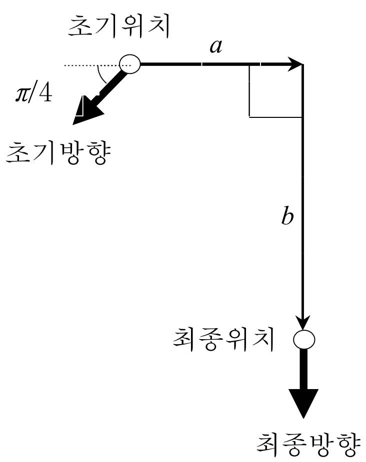
① 점 A에서 B까지 가는 경로 가운데 길이가 가장 짧은 것은 A와 B를 잇는 직선을 따른 것이다.



② 원 내부를 지나지 않으면서 원주상의 점 C에서 점 D까지 가는 경로들 중 길이가 가장 짧은 것은 원호 $\overset{\frown}{CD}$를 따른 것이다.



(나) 초기/최종 위치와 방향이 아래 그림과 같이 주어질 때 길이가 가장 짧은 운전경로를 그림으로 나타내고 그 길이를 계산하시오. 최소 회전 반경은 앞의 경우와 같이 ρ이며, $a \geq \rho + \rho\cos\frac{\pi}{4}$, $b \geq 2\rho + \rho\sin\frac{\pi}{4}$의 조건을 만족한다.



논 술 유 형 분 석

문항 수	수학 3문항	시간	150분
연관 개념	논제1. 지수와 로그의 관계를 이용한 로그의 계산 논제2. 집합, 함수, 수체계, 수열의 정의, 수열의 수렴성 논제3. 최단경로, 최단경로의 길이, 삼각함수		

논 제 분 석

논제 1

로그가 단지 대수적인 방정식의 풀이에만 필요한 것이 아니라 반감기, 산성도, 지진의 규모, 두 양의 관계 설명 등의 구체적인 실례를 들면서 로그의 필요성과 활용성에 대해 안내하고 있다. 이를 바탕으로 지수와 로그에 대한 정확한 개념과 관계를 알고 있는지, 또한 제시된 실생활 문제를 해결할 수 있는지 묻고 있다. 실제 계산에서 정확한 로그의 계산과 로그를 지수로 변환하는 과정이 필요하다.

논제 2

집합, 함수, 수체계, 수열 등의 기본 개념을 이용하여 어떤 새로운 체계를 설명하는 정의형 문제로서 이 설명을 바탕으로 지문에서 설명한 그 체계를 잘 이해하고 있는지 묻고 있다. 지문이 설명하는 체계를 잘 이해하면 질문들의 답은 어렵지 않게 구해낼 수 있다.

논제 3

제시된 지문의 이해를 바탕으로 최단경로에 대해 묻고 있다. 또한 상황에 맞는 구체적인 그림을 나타내라는 질문에서 기하학적인 문제파악능력과 해결력을 확인하고 있다. 호의 길이나 삼각형의 성질, 삼각함수 등을 이용한 정확한 계산능력이 필요하다.

배 경 지 식 쌓 기

1. 로그의 정의

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0$일 때, $a^x=b$를 만족하는 실수 x의 값은 오직 하나 존재하며, $x=\log_a b$로 나타내고, 이것을 a를 밑으로 하는 b의 로그라 한다.

a를 $\log_a b$의 밑, b를 $\log_a b$의 진수라 한다.

$a>0,\ a\neq 1,\ b>0$일 때
$a^x=b \Leftrightarrow x=\log_a b$

풀 어 보 기

문제 1 해수면에서의 기압을 P_0, 해수면으로부터의 높이가 hm인 곳의 기압을 P_h라 할 때, 기압과 해수면으로부터 높이 사이에는 $h=k\log\dfrac{P_0}{P_h}$ (단, $k$ms 상수)인 관계가 성립한다고 한다. 어떤 지역의 해수면에서의 기압은 1이고, 해수면으로부터 높이가 $100m$인 곳의 기압은 0.9이었을 때, 이 지역의 해수면으로부터의 높이가 $3000m$인 곳의 기압은? (단, $\log 3=0.447$, $\log 4.23=0.6260$으로 계산한다.)

(2012 EBS 수능특강 수학 I)

① 0.0423 ② 0.0626 ③ 0.3 ④ 0.423⑤ 0.626

문제 2 100이하의 자연수 전체의 집합을 S라 할 때, $n\in S$에 대하여 집합 $\{k|k\in S$이고 $\log_2 n-\log_2 k$는 정수$\}$의 원소의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, $f(10)=5$이고 $f(99)=1$이다. 이때, $f(n)=1$인 n의 개수를 구하여라. (2011년 6월 평가원)

문제 3 다음과 같이 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$이 있다.

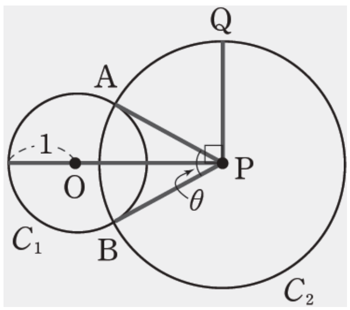
$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 라 할 때, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(\log|a_1-\alpha| + \log|a_2-\alpha| + \cdots + \log|a_n-\alpha|)$ 의 값은?

(2012 EBS 수능완성 수학Ⅰ)

① $-\log 3$ ② $-\frac{\log 3}{2}$ ③ $-\frac{\log 2}{3}$ ④ $\frac{\log 2}{3}$ ⑤ $\frac{\log 3}{2}$

문제 4 그림과 같이 중심이 O 이고 반지름의 길이가 1 인 원 C_1 밖의 한 점 P 에서 원 C_1 에 그은 두 접선의 접점을 각각 A, B 라 하고, $\angle APB = \theta$ 라고 할 때, $\tan\theta = \frac{4}{3}$ 이다. 점 P 를 중심으로 하고 점 A 를 지나는 원을 C_2 라 하고, 점 P 를 지나고 선분 OP 에 수직인 직선이 원 C_2 와 만나는 점을 Q 라고 하자. 점 Q 에서 원 C_1 에 그은 두 접선이 이루는 예각의 크기를 α 라고 할 때, $\tan\alpha$ 의 값은? (2012 EBS 수능특강 수학Ⅱ)



① $\frac{\sqrt{2}}{7}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{7}$ ③ $\frac{3\sqrt{2}}{7}$ ④ $\frac{4\sqrt{2}}{7}$ ⑤ $\frac{5\sqrt{2}}{7}$

읽 기 자 료

자동차 내부 소음은 표준음의 1억 배[48)]

언제부터인가 도심의 전광판에는 소음 공해의 심각성을 보여주기 위해서 80데시벨(dB) 또는 100dB과 같은 수치가 등장했다. 데시벨(dB)은 소리의 세기를 표준음의 세기와 비교해서 나타낸다. 표준음(진동수 1천Hz)은 정상적인 청각을 지닌 사람이 겨우 들을 수 있는 소리로 그 세기는 1㎡ 면적당 약 10-12W의 에너지를 나타낸다(10-12W/㎡). 표준음의 세기를 I_0라 하고 어떤 소리의 세기를 I라고 할 때, 이 소리의 세기를 데시벨로 환산한 수치 L은 상용로그를 이용해서 구한다.

$$L = 10\log\frac{I}{I_0}$$

일반적으로 대화를 나눌 경우가 60dB이고, 조용한 방은 30dB 정도가 된다. 자동차 내부에서 느끼는 소음의 정도인 80dB의 소리는 표준음의 세기의 1억배(10^8)이고, 전기톱 소리를 나타내는 100dB의 소리는 1백억 배를 의미한다. 이 소리들이 얼마나 큰 소음인지 짐작할 수 있다.

산성, 염기성 알려주는 수소이온농도, pH

대기 오염의 결과로 산성비가 내리고, 토양이 산성화되고 있다는 소식을 종종 듣는데 이 때 pH4.5 pH5.2와 같은 수치를 접하게 된다. 또 비누 선전에도 pH가 등장한다. 이런 수치는 용액 속의 수소이온농도를 측정해서 얻는다. 그런데 수소이온농도는 용액에 따라 대단히 큰 차이를 보이기 때문에, 이를 상용로그를 이용해서 수소이온 지수(pH)로 바꾸어 0부터 14까지의 수로 나타낸다. 1L의 용액 속에 있는 수소 이온의 그램 이온수를 나타내는 수소이온농도 [H+]를 pH로 바꾸는 공식은 pH=-log [H+]이다. 만약 수용액 중에 수소 이온이 1.0×10^{-7} g 있다면 이때의 pH는 7이다. pH가 7인 용액은 중성, 7보다 작으면 산성, 7보다 크면 염기성이다.

48) 허민, 과학동아9월호, 1999

예 시 답 안

풀 어 보 기

문제 1 정답 ①

$h=k\log\dfrac{P_0}{P_h}$ 에서 $P_0=1$이므로 $h=-k\log P_h$, $100=-k\log P_{100}$, $3000=-k\log P_{3000}$

$$\frac{3000}{100}=\frac{\log P_{3000}}{\log P_{100}}$$

따라서 $\log P_{3000}=30\log P_{100}=30\log 0.9=30\log\dfrac{9}{10}=30(2\log 3-1)$

$=30(2\cdot 0.4771-1)=-2+0.6260$ 이다.

$\log P_{3000}$의 지표는 -2, 가수는 0.6260이고 $\log 4.23=0.6260$이므로 $P_{3000}=0.0423$

따라서 해수면으로부터 높이가 $3000m$인 곳의 기압은 0.0423이다.

문제 2 정답 25

주어진 집합을 A_n이라 하자. $\log_2 n-\log_2 k=\log_2\dfrac{n}{k}$이므로 $k\in A_n$이려면

$\log_2\dfrac{n}{k}=m$ (m은 정수), 즉 $\dfrac{n}{k}=2^m$이어야 한다.

(i) $1\le n\le 50$일 때,

$k=n$이면 $\dfrac{n}{k}=1=2^0$이므로 $n\in A_n$이다. $k=2n$이면 $\dfrac{n}{k}=\dfrac{1}{2}=2^{-1}$이므로 $2n\in A_n$이다.

따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 2이상이다.

(ii) n이 50보다 큰 짝수일 때,

$k=n$이면 $\dfrac{n}{k}=1=2^0$이므로 $n\in A_n$이다. $k=\dfrac{n}{2}$이면 $\dfrac{n}{k}=2=2^1$이므로 $\dfrac{n}{2}\in A_n$이다.

따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 2이상이다.

(iii) n이 50보다 큰 홀수일 때,

$\dfrac{n}{k}=2^m$, 즉 $k=\dfrac{n}{2^m}$ (m은 정수)을 만족시키는 정수 m은 0 뿐이다.

따라서 집합 A_n의 원소의 개수는 1이다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 n은 51, 53, 55, ⋯, 99의 25개다.

문제 3 정답 ②

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{3}\right)^k = a_1 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{3}{2}$ 이다.

따라서 $\alpha = \frac{3}{2}$ 이다. 이때, $a_n - \alpha = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ 이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\log|a_1-\alpha| + \log|a_2-\alpha| + \cdots + \log|a_n-\alpha|)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[\log\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\right\} + \log\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\right\} + \cdots + \log\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\log\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{0+1+2+\cdots+(n-1)}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left\{-n\log 2 - \frac{n(n-1)}{2}\cdot\log 3\right\} = -\frac{\log 3}{2}$$

문제 4 정답 ④

$\tan\theta = \tan\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{4}{3}$ 이므로 $\tan\frac{\theta}{2} = t$ 로 놓으면 $6t = 4 - 4t^2$ 이고

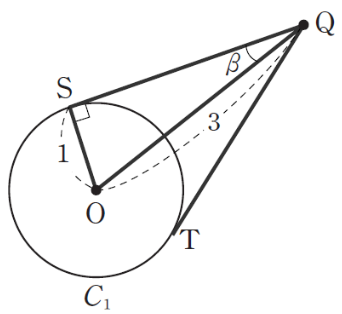
$t > 0$ 이므로 $t = \frac{1}{2}$, 즉 $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ 이다. $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{\overline{OA}}{\overline{AP}}$ 이므로 $\frac{1}{\overline{AP}} = \frac{1}{2}$ 에서 $\overline{AP} = 2$

직각삼각형 AOP 에서 $\overline{OP} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$

원 C_2 의 반지름의 길이는 2 이므로 $\overline{PQ} = 2$. 따라서 삼각형 OPQ 에서

$$\overline{OQ} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = 3$$

점 Q 에서 원 C_1 에 그은 두 접선이 원과 만나는 점을 각각 S, T 라 하자.



$\overline{QS} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$ 이므로 $\angle OQS = \beta$ 라 하면 $\alpha = 2\beta$ 이다.

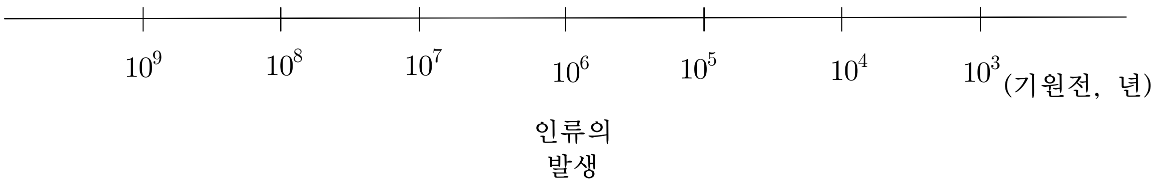
$\tan\beta = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\angle \mathrm{SQT} = 2\beta$ 이고, 따라서

$$\tan\alpha = \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta} = \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{1-\dfrac{1}{8}} = \frac{4\sqrt{2}}{7}$$

논제 1 [49)]

(가) 1cm 간격이 100만년의 기간을 나타내면 가로 30cm 크기의 종이에 가로 방향으로 그려진 직선에는 최대 3000만년의 기간을 나타낼 수 있다. 그러므로 표에 주어진 사건들 모두를 수직선에 나타내는 것이 불가능하다. 그리고 만약 1cm 간격이 10억년의 기간을 나타내면 표에 주어진 사건들 모두는 5cm 간격 안에서 나타내어지고 (3) 척추동물의 출현~(8) 인류의 발생 이렇게 여섯까지 사건은 모두 0.6cm 간격 안에서 나타내어진다. 특히, (7) 유인원의 출현, (8) 인류의 발생 이 두 가지 사건의 간격은 0.001cm 이므로 수직선에 나타내면 똑같은 시기로 오인할 수 있다. 또한 대응되는 사건이 없는 수직선 구간이 대부분이라 비효율적이다.

(나) 한 눈금의 값이 바로 왼쪽의 눈금 값의 $\dfrac{1}{10}$이 되도록 표시하면 다음과 같다.



왼쪽으로 밑이 10인 지수가 1 증가할 때, 간격이 1cm 늘어남으로 간격은 상용로그값으로 측정할 수 있다. 그리고 인류의 발생 시점을 기준으로 각 사건의 시점까지의 간격을 계산하면

[공룡의 출현]
$\log 245 < \log 300 = 2 + \log 3 = 2.47$ → 한 눈금의 중앙점을 기준으로 오른쪽

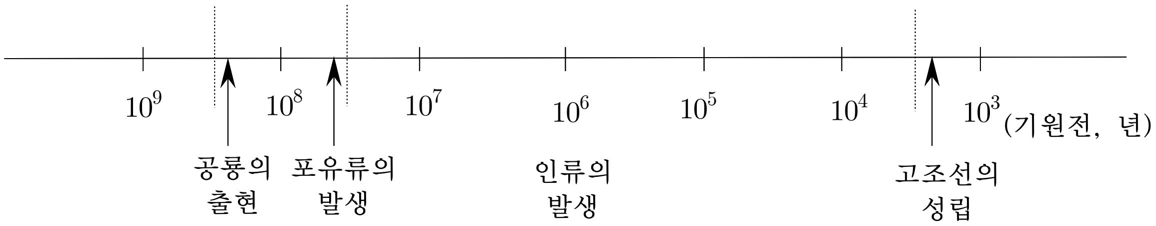
[포유류의 발생]
$\log 36 > \log 32 = 5\log 2 = 1.5$ → 한 눈금의 중앙점을 기준으로 왼쪽

49) 홍익대학교 예시답안 참조

"고조선의 성립"은 기원전 2300년이므로 이 시점은 10^3과 10^4지점 사이에 나타낼 수 있고 10^3시점을 기준으로 "고조선의 성립" 시점까지의 간격을 계산하면

[고조선의 성립]
$\log 23 < \log 30 = 1 + \log 3 = 1.47$ → 한 눈금의 중앙점을 기준으로 오른쪽

따라서 각 사건들의 시점을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



(다) 보낸 광자수를 x라 하자. 광섬유의 길이가 $1km$일 때, 받은 광자수 y를 x에 관한 식으로 나타내면 $10 \times \log(\frac{y}{x}) = -0.2$이므로

$$\log(\frac{y}{x}) = -0.02 = -\frac{1}{50},\ \frac{y}{x} = 10^{-\frac{1}{50}},\ y = 10^{-\frac{1}{50}}x$$

광섬유의 길이가 $2km$일 때, 받은 광자수 y를 x에 관한 식으로 나타내어 보면

$$y = 10^{-\frac{1}{50}}\left(10^{-\frac{1}{50}}x\right) = \left(10^{-\frac{1}{50}}\right)^2 x$$

이다. 같은 방법으로 하면 서울에서 10^{10}개의 광자를 보냈을 때, $150km$ 떨어진 대전에서 받은 광자의 수는 $\left(10^{-\frac{1}{50}}\right)^{150} \times 10^{10} = 10^7$(개)이다.

논제 2

(가) $g(u,v) = v \times 10^{u-7}$에서 u의 값이 고정되어 있을 때, v의 값이 증가할수록 $g(u,v)$의 값이 증가한다. 마찬가지로 v의 값이 고정되어 있을 때, u의 값이 증가할수록 $g(u,v)$의 값이 증가한다. 그러므로 Ω의 값은 $999 \times 10^{8-7}$, $998 \times 10^{9-7}$ 둘 중의 하나이다. 여기서 $99800 > 9990$이므로 Ω의 값은 99800이다.

(나) $120 = 0.0012 \times 10^5$을 소수점아래 첫째자리에서 반올림하면 100이상 998이하 이고, 그 반올림값은 120이다. f의 정의에 따라서 $f(0.0012) = (7-5, 120) = (2, 120)$

(다) $(4,123) \oplus (7,456) = f((0.123+456)) = f(456.123)$. 456.123×10^0을 소수점아래 첫째자리에서 반올림하면 100이상 998이하이고, 그 반올림한 값은 456이다. 따라서 $f(456.123) = (7,456)$

(라) $f\left(\frac{1}{3}\right) \otimes f(3) = (4, 333) \otimes (5, 300) = f(0.333 \times 3) = f(0.999)$

0.999×10^2을 소수점아래 첫째자리에서 반올림하면 100으로서, 100이상 998이하이다. 따라서 위 결과는 $f(0.999) = (5,100)$

(마) $(u, v) = (7, 200)$이면 $g(u, v) = 200$이다.

그러므로 $((4, 300) \oplus (4, 300)) \oplus (u, v) = (4, 600) \oplus (u, v) = f(0.6 + 200) = (7, 201)$

반면, $(4, 300) \oplus ((4, 300) \oplus (u, v)) = (4, 300) \oplus f(0.3 + 200) = (4, 300) \oplus (7, 200) = (7, 200)$

따라서, $((4, 300) \oplus (4, 300)) \oplus (u, v) \neq (4, 300) \oplus ((4, 300) \oplus (u, v))$

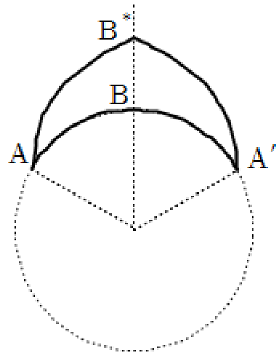
(참고. 주어진 (u,v)이외에도 $u = 7, 100 \le v \le 998$일 때 그리고 이 경우에만, 문제에서 요구하는 대로 결합법칙이 성립하지 않음.)

(바) 주어진 점화식을 풀면 수열 $a_n = \sum_{k=1}^{n} g\left(f\left(\frac{1}{k}\right)\right)$으로 쓸 수 있다. n이 충분히 크면, 예를 들어 $n \ge 10^5$이면, $\frac{1}{n} < \epsilon$이므로 $g\left(f\left(\frac{1}{n}\right)\right) = 0$. 따라서, $n \ge 10^5$이면 위 수열 a_n은 유한합 $\sum_{k=1}^{10^5-1} g\left(f\left(\frac{1}{k}\right)\right)$과 같고, 그러므로 수렴한다.

논제 3

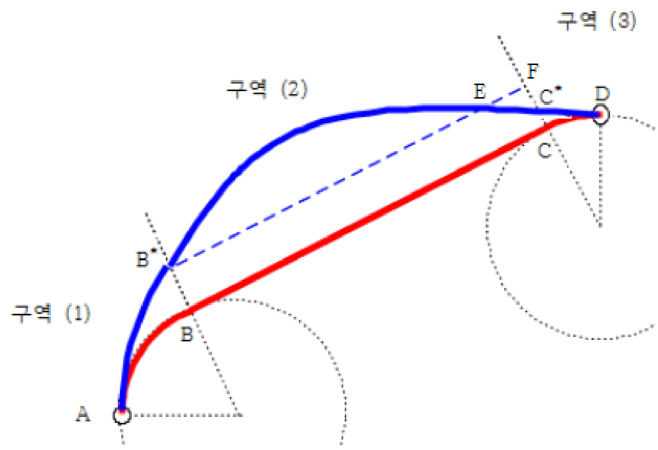
(가)[50] ⅰ) 구역 (1)에서, 아래 그림과 같이 원호 $\widehat{AB}$ 와 경로 AB^*를 직선 BB^*에 대하여 대칭이동하여 점 A의 대칭점을 점 A′이라고 하자. 그러면 사실 ②에 의해서 원호 $\widehat{ABA'}$의 길이가 경로 AB^*A'의 길이보다 짧다. 따라서 원호 $\widehat{AB}$의 길이는 경로 AB^*의 길이보다 짧다.

50) 출처 : 홍익대 예시 답안 참조



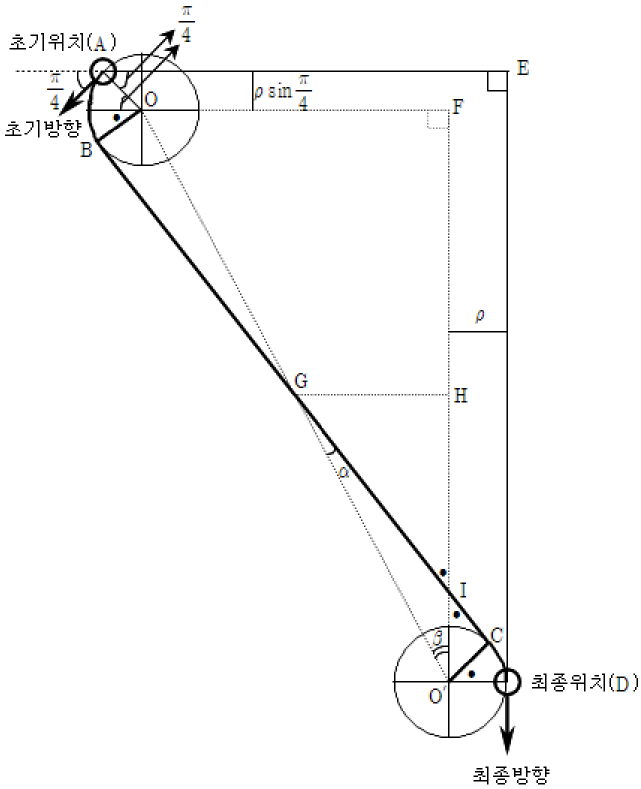
ⅱ) 마찬가지로 구역 (3)에서, 원호 $\overset{\frown}{CD}$의 길이는 경로 C^*D의 길이보다 짧다.

ⅲ) 구역 (2)에서 아래 그림과 같이 기호를 붙이자. 사실 ①에 의해서, 선분 B^*E의 길이가 경로 B^*E의 길이보다 짧고 선분 EC^*의 길이가 경로 EC^*의 길이보다 짧거나 같다. 한편, 직각삼각형 EFC^*에서 변 EF의 길이는 빗변 EC^*의 길이보다 짧으므로 선분 EF의 길이가 경로 EC^*의 길이보다 짧다. 그러므로 선분 B^*F의 길이(선분 B^*E의 길이와 선분 EF의 길이의 합)가 경로 B^*C^*의 길이(경로 B^*E의 길이와 EC^*의 길이의 합)보다 짧다. 그러므로 $\overline{B^*F}=\overline{BC}$에 의해서 선분 BC의 길이가 경로 B^*C^*의 길이보다 짧다는 것을 알 수 있다.



ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 의해서 운전경로 ABCD의 길이가 운전경로 AB^*C^*D의 길이보다 짧다.

(나) 길이가 가장 짧은 운전경로는 다음 그림의 굵은 선($\overset{\frown}{AB}$ ⇨ $\overline{BC}$ ⇨ $\overset{\frown}{CD}$)과 같다.



이제 위 그림과 같이 기호를 붙이고 가장 짧은 운전경로의 길이를 계산하자. 두 원의 중심 간의 거리는

$$\overline{\mathrm{OO'}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OF}}^2 + \overline{\mathrm{FO'}}^2} = \sqrt{\left(a - \rho\cos\frac{\pi}{4} - \rho\right)^2 + \left(b - \rho\sin\frac{\pi}{4}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho - \rho\right)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\right)^2}$$

이고, 선분 BC의 길이는 두 원의 공통내접선의 길이이므로

$$\overline{\mathrm{BC}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OO'}}^2 - (2\rho)^2} = \sqrt{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho - \rho\right)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\right)^2 - 4\rho^2}$$

이다. 그리고 선분 $\overline{\mathrm{FO'}}$와 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$가 만나는 점을 I라고 하고 $\angle \mathrm{IGO'} = \alpha(\mathrm{rad})$, $\angle \mathrm{IO'G} = \beta(\mathrm{rad})$라고 두면 α, β는 각각 등식

$$\tan\alpha = \frac{\overline{\mathrm{CO'}}}{\overline{\mathrm{CG}}} = \frac{2\rho}{\sqrt{\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho - \rho\right)^2 + \left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho\right)^2 - 4\rho^2}}$$

$$\tan\beta = \frac{\overline{\mathrm{FO}}}{\overline{\mathrm{FO'}}} = \frac{a - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho - \rho}{b - \frac{\sqrt{2}}{2}\rho}$$

를 만족하는 예각의 크기이다.

한편, $\angle \mathrm{CO'D} = \angle \mathrm{CIO'} = \alpha+\beta$, $\angle \mathrm{AOB} = \angle \mathrm{CO'D} + \frac{\pi}{4} = \alpha+\beta+\frac{\pi}{4}$ 이므로

$$\overset{\frown}{\mathrm{AB}} = \rho\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right), \quad \overset{\frown}{\mathrm{CD}} = \rho(\alpha+\beta)$$

이다.

따라서 가장 짧은 운전경로의 길이는

$$\rho\left(\alpha+\beta+\frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho-\rho\right)^2 + \left(b-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\right)^2 - 4\rho^2} + \rho(\alpha+\beta)$$

이다. 단, 여기서

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{2\rho}{\sqrt{\left(a-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho-\rho\right)^2 + \left(b-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho\right)^2 - 4\rho^2}}\right), \quad \beta = \tan^{-1}\left(\frac{a-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho-\rho}{b-\frac{\sqrt{2}}{2}\rho}\right)$$

이다.

발간을 도와주신 분들

기 획

천 정 국	부산광역시교육청 교육국장
김 영	부산광역시교육청 교수학습기획과장
변 용 권	부산광역시교육청 교수학습기획과 학력지원담당장학관
강 여 순	부산광역시교육청 교수학습기획과 장학사

집 필 위 원

김 기 현	부산동고등학교
박 윤 효	부산고등학교
박 철 호	금정고등학교
신 동 연	구덕고등학교
위 성 미	남산고등학교
이 재 식	만덕고등학교
이 지 희	부산중앙고등학교
임 승 윤	부산중앙고등학교
전 현 수	부산국제외국어고등학교
조 준 혁	부산동천고등학교

검 토 위 원

김 아 진	인지중학교
김 태 형	부산과학고등학교
김 학 철	부산남중학교
김 현 미	낙동고등학교
박 진 우	경남여자고등학교
양 석 진	혜화여자고등학교
최 소 영	구서여자중학교
최 혜 기	삼락중학교

수리논술 나침반 V

발 행 일 2013년 6월 10일
편집·발행 부산광역시교육청