부산교육 2010-082

2010학년도 대학별 **수리논술고사** 분석

수리논술 나침반 Ⅱ

부산광역시교육청
http://www.pen.go.kr

발 간 사

6세기경에 중국 남조 양(梁)의 주흥사(周興嗣)가 무제(武帝)의 명을 받아 지은 『천자문(千字文)』은 자연 현상부터 인륜 도덕에 이르는 넓은 범위의 글귀를 수록한, 한문(漢文)의 입문서입니다. 책을 펼치면 그 첫머리에 "하늘과 땅은 검고 누르며 우주는 넓고 크다. 해와 달은 차고 기울며, 별과 별은 벌여 있다. 추위가 오면 더위는 가고, 가을에는 거두어들이며, 겨울에는 감추어 둔다[天地玄黃 宇宙洪荒 日月盈昃 星辰列張 寒來暑往 秋收冬藏]."라는 구절이 보입니다.

자연의 이치를 먼저 일깨우고 난 뒤에 '사람[人]'을 가르쳐야 한다는 인식은 놀랍습니다. 그 혜안에 고개가 저절로 숙여집니다. 천자문을 만든 사람들은 이미 그 시절에 자연의 섭리를 먼저 알고 사는 삶과 인간의 탐욕을 먼저 아는 삶이 얼마나 다른지 알고 있었습니다. 그렇기에 자연의 섭리를 먼저 알게 한 뒤에 인간의 존재와 사람으로서의 도리를 가르쳤던 것입니다. 낱글자를 모아 율문으로 만들면서도 그들이 놓치지 않고 붙들었던 가치는 무엇일까요? 그것은 다름 아닌 후학을 위한 가르침의 미학이요, 숭고한 영혼의 미덕입니다.

대학별 수리논술고사의 출제 경향 파악, 깊이 있는 분석, 절제되고 풍부한 설명 등이 덧붙은 장학자료, 『수리논술 나침반』이 지난해에 이어 발간됩니다. 대학별로 공개하는 자료에만 수동적으로 의존하지 않고, 정기적인 연구 활동을 통해 기출문제를 분석하고, 토론하며, 심화・확장한 끝에 원고를 완성하였습니다. 그 첫 장만 열어도 그 동안의 노고와 열정을 한눈에 읽을 수 있습니다. 모쪼록 이 책이 교실 수업의 질을 제고하는 데 크게 기여하기를 기대합니다.

"눈을 밟으며 들길을 갈 때 반드시 함부로 걷지를 마라. 오늘 내가 남긴 발자국(행적)이 뒤에 오는 사람에게는 이정표가 될 것이니[踏雪野中去 不須胡亂行 今日我行蹟 遂作後人程]."

서산대사(西山大師)가 지은 것으로 전해지고 있는 한시(漢詩)입니다. 백범 김구(金九) 선생은 이 시를 인생의 좌표로, 삶의 경계로 삼았다고 합니다. 아무도 밟지 않은 눈길을 걸을 수 있다면 그것은 대단한 행운이요 축복입니다. 장학자료가 발간되기까지 애쓰신 분들의 마음이 이와 다르지 않을 것입니다. 하얀 눈길 위에 발자국을 남기는 분들이 더 많아지기를, 그 길에 동행하는 분들의 발자취가 더욱 선명하기를 기대합니다.

자료 개발을 위해 열정과 헌신을 아끼지 않으신 우리교육청 논술교육지원단과 수학나침반 동아리 교사 여러분께 감사의 말씀을 드립니다.

2010. 2. 23.

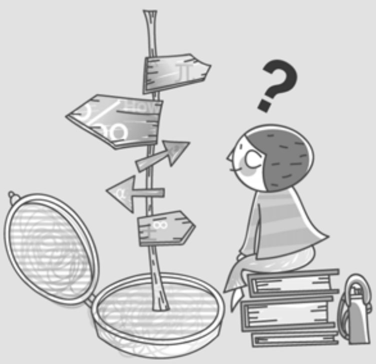
부산광역시교육감 **설 동 근**

차　　례

C O N T E N T S

2010학년도 대학별 수리논술고사 분석

수리논술 나침반 II



발 간 사

01. 경희대학교 예시 ········ 1
02. 고려대학교 예시 ········ 8
03. 고려대학교 수시 ········ 20
04. 동국대학교 예시 ········ 31
05. 동국대학교 수시 ········ 38
06. 부산대학교 예시 ········ 46
07. 부산대학교 수시 ········ 52
08. 서강대학교 수시(1) ········ 60
09. 서강대학교 수시(2) ········ 68
10. 서울대학교 정시 ········ 77
11. 성균관대학교 예시 ········ 92
12. 성균관대학교 수시 ········ 100
13. 숭실대학교 수시 ········ 111
14. 아주대학교 예시(1) ········ 121
15. 아주대학교 예시(2) ········ 132
16. 아주대학교 수시 ········ 140
17. 연세대학교 예시 ········ 158
18. 연세대학교 수시 ········ 170
19. 인하대학교 예시 ········ 181
20. 인하대학교 수시2-1(1) ········ 189
21. 인하대학교 수시2-1(2) ········ 199
22. 인하대학교 수시2-2(1) ········ 208
23. 인하대학교 수시2-2(2) ········ 216
24. 중앙대학교 예시 ········ 224
25. 한국외국어대학교 수시2-1 ········ 235
26. 한국외국어대학교 수시2-2 ········ 243
27. 한양대학교 예시 ········ 252
28. 한양대학교 수시 ········ 260

1 경희대학교 예시

제 시 문

(가)

여러 사물들은 제 각각의 특성을 지닌 채 자기만의 모양을 가지고 있다. 이러한 사물들을 이루는 가장 기본적인 요소들은 점, 선, 면이라고 할 수 있다. 그와 같은 기하학적 도형 중에서도 가장 기본적인 것은 직선과 원이다. 그리스인들은 직선과 원이야말로 기하학적 도형이며 완전하다고 생각하고 집중적으로 연구하였다. 이러한 믿음을 배경으로 그리스인들은 작도의 도구를 오직 원과 직선만을 그릴 수 있는 '자'와 '컴퍼스'에 국한시켰던 것이다. 수학적으로 모든 원은 닮은 꼴이며 같은 원에서는 어느 접점에서나 굽은 정도가 같다. 따라서 물체의 바퀴는 거의 대부분 원형이다. 또한 원은 어느 방향으로 재든지 폭(지름의 길이)은 일정하며 이 개념을 확장한 것이 정폭도형이며, 맨홀의 뚜껑 중 원모양이 많은 것은 이를 이용한 대표적인 예라고 할 수 있다.

원과 관련된 유용한 정리로 등주정리와 등적정리를 꼽을 수 있다. 등주정리는 같은 둘레의 길이를 가지는 도형 중에서 넓이가 최대가 되는 것은 원이라는 것이며, 등적정리는 같은 넓이를 가지는 도형 중에서 둘레의 길이가 최소가 되는 것은 원이라는 사실이다. 우리 생활 속에서 볼 수 있는 간단한 예는 두루마리 화장지의 심(화장지를 감는 축)이 원형이라는 것에서 찾아 볼 수 있다.

– 출처 : 수학으로 풀어보는 물리의 법칙, 오가미 마사시 외, 임정 역, 이지북, 2005

[1] 제시문 (가)를 참조하여 다음 물음에 답하시오.

1-1. 둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 가장 큰 것을 구하는 방법에 대하여 논술하시오.

1-2. 밑줄 친 "두루마리 화장지의 심(화장지를 감는 축)이 원형이라는 것에서 찾아 볼 수 있다."의 이유를 논술하시오.

1-3. 원과 임의의 도형을 이용하여 등주정리로부터 등적정리를 유도하는 방법과 등적정리로부터 등주정리를 유도하는 방법에 대하여 논술하시오.

제시문 분석

- **등주정리**

같은 둘레의 길이를 가지는 도형 중에서 넓이가 가장 큰 도형은 원이다.

- **등적정리**

같은 넓이를 가지는 도형 중에서 둘레의 길이가 최소가 되는 도형은 원이다. 그 예는 두루마리 화장지에서 찾아볼 수 있다.

논제 분석

- **둘레의 길이가 일정한 직사각형 중에서 넓이가 가장 큰 것을 구하는 방법을 찾을 수 있는가?**

직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x, y 라 두고, 둘레의 길이가 일정하다는 조건에서 $2x+2y=k$ 라는 관계식을 찾는다면 직사각형의 넓이 xy 에서 간단히 x 혹은 y 에 대한 이차식을 유도해 낼 수 있다. 이를 통하여 넓이가 최대가 되는 x, y 의 값을 구할 수 있다. 또한 산술평균, 기하평균을 이용하여 증명할 수도 있다.

- **두루마리 화장지의 예시에서 등적정리를 생각할 수 있는가?**

두루마리 화장지의 측면을 보면 심에 감긴 화장지의 두께는 실제 넓이에 해당함을 알 수 있다. 화장지의 두께가 일정할 때, 화장지의 심이 원형이어야 둘레의 길이가 최소가 됨을 등적정리와 연결하여 서술할 수 있다.

- **등주정리로부터 등적정리를 유도할 수 있는가?**

둘레가 같은 임의의 한 도형과 원이 있을 때, 원의 넓이가 더 크다는 사실을 이용하여(이는 등주정리로부터 얻을 수 있다.) 두 도형의 넓이를 같아지도록 조절하면서 두 도형의 둘레의 길이의 변화를 비교하여 등적정리를 유도할 수 있다.

- **등적정리로부터 등주정리를 유도할 수 있는가?**

넓이가 같은 임의의 한 도형과 원의 둘레를 비교할 때, 등적정리에 의해서 원의 둘레 길이가 더 짧다는 사실을 알 수 있다. 이를 이용하여 두 도형의 둘레의 길이를 같아지도록 만들어가면서 넓이의 변화를 비교하면 등주정리를 유도할 수 있다.

배경지식 쌓기

• 함수의 최댓값과 최솟값

함수 $y=f(x)$가 폐구간 $[a, b]$에서 연속이면, 이 구간에서 반드시 최댓값과 최솟값을 가지며, 이 때 $f(x)$의 극값, $f(a), f(b)$ 중에서 가장 큰 것이 최댓값, 가장 작은 것이 최솟값이다.

• 이차함수의 최댓값과 최솟값

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 에서 $ax^2+bx+c=a(x-p)^2+q$ 이면 주어진 이차함수는 $a>0$ 일 때, $x=p$ 에서 최솟값 q 를 가지며, $a<0$ 일 때, $x=p$ 에서 최댓값 q 를 가진다.

풀어보기

1. 좌표공간에 네 점 $\mathrm{A}(2, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, 1, 0)$, $\mathrm{C}(-3, 0, 0)$, $\mathrm{D}(0, 0, 2)$ 를 꼭짓점으로 하는 사면체 ABCD가 있다.

   모서리 BD 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$ 의 값을 최소로 하는 점 P 의 좌표를 (a, b, c) 라고 할 때, $a+b+c=\dfrac{q}{p}$ 이다. $p+q$ 의 값을 구하시오. (단, p, q 는 서로소인 자연수이다.) [2008 수능]

개요 짜기

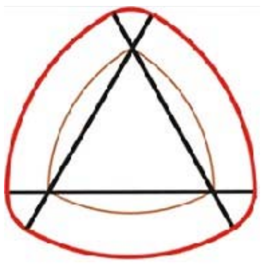
답안 작성

읽기 자료

● **정폭도형**

정폭도형(正幅圖形)은 도형과 접하는 두 평행선 사이의 거리가 항상 일정한 도형으로, 이때 두 평행선 사이의 거리를 폭이라고 한다. 즉, 정폭도형은 폭의 거리가 항상 일정한 도형이다. 정폭도형을 바닥에 굴릴 때 그 도형의 높이는 변하지 않고 일정하지만, 중심 위치는 바뀔 수도 있다. 정폭도형에는 원이나 뢸로 다각형 등이 있다. 폭이 같은 도형 중 가장 넓이가 큰 것은 원, 가장 넓이가 작은 것은 뢸로 삼각형이다.

● **뢸로 삼각형**



독일의 기계공학자 프란츠 뢸로(Franz Reuleaux 1829~1905)의 이름을 땄다. 뢸로 삼각형을 작도하려면, 정삼각형을 우선 그린 후, 각 꼭짓점에서 다른 꼭짓점을 지나는 원호를 그리고, 원래의 삼각형을 지워주면 된다.

폭 d인 뢸로 삼각형의 면적은 $\frac{1}{2}(\pi-\sqrt{3})d^2$로 같은 폭(지름)을 가진 원 면적의 90%보다도 작다. 뢸로 삼각형은 나중에 방켈 엔진의 기초가 됐다. 이 엔진은 1950년대 펠릭스 방켈에 의해 개발된 회전식 엔진으로 안쪽에 뢸로 삼각형이 회전할 수 있도록 되어 있다.

– 출처 : http://blog.naver.com/yunisoni/130028201793

● **정폭도형의 활용**

㉠ **맨홀 뚜껑** : 맨홀의 뚜껑이 구멍 속으로 빠지지 않도록 맨홀 뚜껑을 정폭도형으로 만든다.

– 출처 : http://www.mathlove.co.kr

㉡ **드릴의 날** : 원래 드릴은 칼날이 회전하면서 구멍을 뚫기 때문에 둥근 모양의 구멍이 생긴다. 그러나 칼날 모양이 정폭도형이라면 각진 모양의 구멍을 뚫을 수 있다. 정사각형(-정삼각형으로 만든 정폭도형 드릴로), 정육각형(-정오각형으로 만든 정폭도형 드릴로) 구멍을 뚫는 것이 가능하다. 이 놀랄만한 사실의 비밀은 뢸로삼각형(-정삼각형으로 만든 정폭도형)이 움직이면서 남기는 흔적이 정사각형에 거의 내접한다는 것과 회전축이 고정되어있지 않다는 것이다

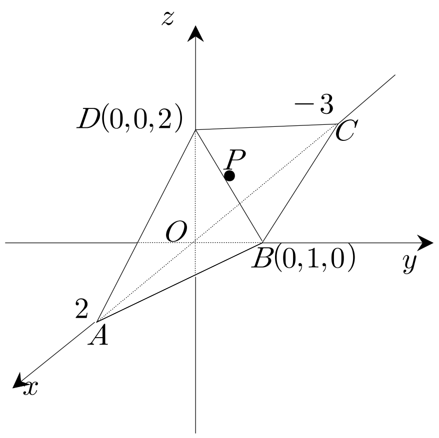
㉢ **자판기** : 자판기는 동전을 무게나 크기 등으로 구별하지 않고, 동전이 굴러갈 때의 폭으로 구별한다. 그러므로 자판기를 이용할 수 있는 동전은 원이 아니라도 정폭도형이면 가능하다. 실제로 파키스탄이 사각형의 5파이사(Paisa)와 12각형의 10파이사(Paisa), 영국이 7각형의 20펜스와 50펜스를 캐나다가 12각형의 1센트와 11각형의 1달러 주화를 발행하고 있다.

㉣ **굴림대** : 굴림대의 단면이 원이라면 물체는 지면과 받침대의 높이가 일정하기 때문에 안정되게 굴러간다. 그러나 굴림대의 단면이 꼭 원이 아니더라도 정폭도형이라면 지면으로부터 받침대까지의 높이가 일정하게 유지되어 약간 덜컹거리긴 하더라도(정폭도형은 회전시 중심이 이동되는 경우도 있음) 안정되게 굴러가게 된다.

– 출처 : http://ko.wikipedia.org/wiki
(부산일보 [우리 곁의 수학] 정폭도형 / 조영범)

예시답안

풀어보기



직선BD의 방정식은 $\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-2}$, $x=0$이고, 직선 위의 임의의 점P의 좌표를 $(0,t,-2t+2)$로 놓으면

$$\begin{aligned}\overline{PA}^2+\overline{PC}^2 &= 2^2+(-t)^2+(2t-2)^2+(-3)^2+(-t)^2+(2t-2)^2\\ &=10t^2-16t+21\\ &=10\left(t-\frac{4}{5}\right)^2+\frac{73}{5}\end{aligned}$$

$t=\frac{4}{5}$일 때, $\overline{PA}^2+\overline{PC}^2$의 값은 최소이고, 점$P$의 좌표는 $\left(0,\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right)$이므로

점P는 선분BD 위에 있다.

$$\therefore\ a+b+c=0+\frac{4}{5}+\frac{2}{5}=\frac{6}{5}$$

$$\therefore \; p+q=5+6=11$$

논제 1-1 직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x, y 라고 하면 둘레는 $2x+2y$ 이므로 $2x+2y=k$ (k 는 양의 상수)로 표현할 수 있다. 이때 직사각형의 넓이 (A)는 $A=xy$ 이며, 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$A=xy=x\left(-x+\frac{k}{2}\right)=-x^2+\frac{k}{2}x=-\left(x-\frac{k}{4}\right)^2+\frac{k^2}{16}$$

따라서 $\frac{dA}{dx}=-2x+\frac{k}{2}$ 이다. 즉 $x=\frac{k}{4}$ 근처에서 $\frac{dA}{dx}$ 의 부호가 양에서 음으로 변함을 알 수 있으며 (또는 $A''=-2<0$), 따라서 함수 A 는 $x=\frac{k}{4}$ 일 때 최댓값을 가지게 된다. 즉 $x=y=\frac{k}{4}$ 일 때, 즉 정사각형일 때 넓이가 최대가 됨을 알 수 있다.

논제 1-1 다른 풀이

직사각형의 가로와 세로의 길이를 각각 x, y ($x, y>0$)라고 하면 둘레는 $2x+2y$ 이므로 산술기하평균에 의하여 $2x+2y \geq 2\sqrt{4xy}$ 를 만족한다. 따라서 직사각형의 넓이는 $A=xy$ 이며, $xy \leq \frac{k^2}{16}$ 를 만족한다. 이때 등호는 $x=y$ 일 때 성립하므로 $x=y=\frac{k}{4}$ 일 때, 즉 정사각형일 때 넓이가 최대가 됨을 알 수 있다.

논제 1-2 실제로 감긴 두께는 넓이에 해당하므로 등적정리에 의하여 같은 넓이를 가진 도형 중에서 둘레(즉 감긴 화장지의 길이)가 최소가 되는 것은 원이므로, 원모양으로 화장지를 계속 감아놓았을 것이다. 물론 둥근 형태이므로 사용의 편리함도 생각하였을 것이다.

논제 1-3 먼저 등적정리를 가정하고, 넓이가 같은 임의의 도형과 원을 생각하자. 등적정리에 의하여 원의 둘레가 더 짧다. 따라서 원을 임의의 도형과 둘레가 같아지도록 확대 시키면 새로 만들어진 원은 임의의 도형과 둘레는 같지만 넓이는 더 크게 된다. 따라서 등주정리가 성립함을 알 수 있다.

역으로 등주정리를 가정하고 둘레가 같은 임의의 도형과 원을 생각하면 등주정리에 의하여 넓이는 원이 더 크다. 따라서 원을 임의의 도형과 넓이가 같아지도록 작게 해주면 넓이가 같은 도형 중에서 원의 둘레(의 길이)가 가장 작게 되고, 따라서 등적정리가 성립함을 알 수 있다.

2 고려대학교 예시

제 시 문

(아) 길이가 1로 고정된 선분 $\overline{AB}$ 위에 A로부터 $1-a$만큼 떨어진 지점에 P가 있다. [그림2]와 같이 선분 $\overline{AB}$의 양 끝점이 한 변의 길이가 3인 정사각형 OCDE의 변을 따라 움직이고 있다. 단 $0<a<1$이다.

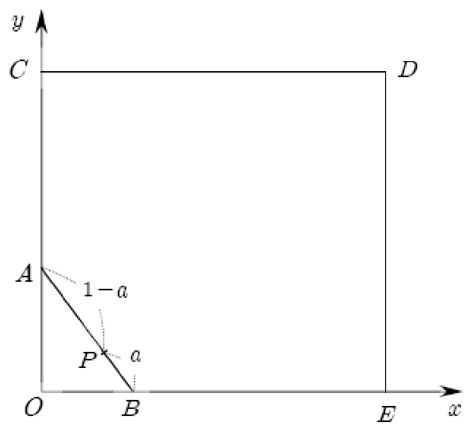


그림 2

(자) [그림3]과 같이 x축의 양의 방향과 이루는 각이 $\theta(0<\theta<\pi)$인 반직선 $\overrightarrow{OQ}$가 있다. 길이가 1로 고정된 선분 $\overline{AB}$ 위에 중점 P가 있고 A는 반직선 $\overrightarrow{OQ}$를 따라 움직이며 B는 양의 x축 위를 움직인다.

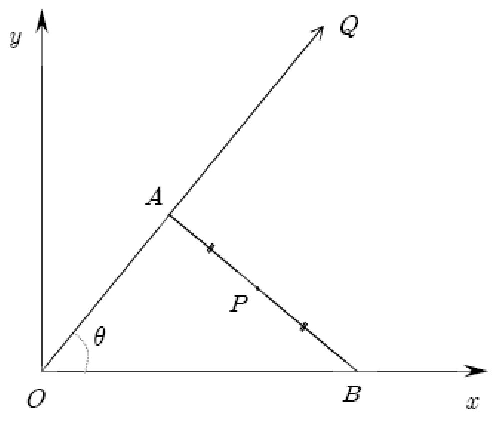


그림 3

4-1. [그림2]에서 A가 원점 O를 출발하여 점 C, D, E를 거쳐 다시 원점으로 돌아올 때 P가 그리는 자취에 대하여 설명하시오.

4-2. [그림2]에서 A가 사각형의 둘레를 한 바퀴 돌았을 때 생기는 P의 자취와 정사각형 OCDE의 네 변 사이에 있는 영역을 x축으로 회전시켰을 때 생기는 회전체의 부피를 $f(a)$라 할 때, 극한값 $\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{1}{n}\right)$을 구하시오.

(참고 : 적분 $\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$는 원점을 중심으로 하고 반지름이 r인 원의 넓이의 $\frac{1}{4}$이다.)

4-3. [그림3]에서 A가 원점 O에서 시작해서 1만큼 움직일 때 P가 그리는 자취에 대하여 설명하시오.

제시문 분석

- **일정한 길이의 선분의 양 끝점이 정사각형의 변을 따라 움직일 때 선분의 내분점의 자취**

일부 교과서에 제시된 것을 변형한 것이다. 길이가 1인 선분의 양 끝점이 한 변의 길이가 3인 정사각형의 변을 따라 움직이는 상황을 제시하며 그 내분점의 자취를 생각하게 한다.

- **조건의 일부 변형**

앞의 제시문은 수직으로 서 있는 벽을 미끄러지는 선분을, 두 번째 제시문은 벽이 수직이 아닌 상황을 제시하고 있다. 대신 선분의 내분점이 아니라 중점의 자취를 생각하도록 제시하고 있다.

논제 분석

- **선분의 양 끝점이 정사각형의 변을 따라 움직일 때 그 내분점이 그리는 자취를 설명할 수 있는가?**

주어진 조건을 수학적으로 기술하고, 기술된 식을 간단히 하여 자취의 방정식으로 나타낸 후, 자취의 방정식을 체계적으로 분석할 수 있어야 한다. 점 A가 y축 위에 있고 점 B가 x축 위에 있는 경우, 점 P의 좌표를 P(x, y)라 하고 점 A, B의 좌표를 적절히 설정한 후 선분 AB의 길이가 1임과 점 P가 선분 AB의 $1-a : a$ 내분점임을 이용하면 x와 y 사이의 관계식을 찾을 수 있다. 또한 이 관계식을 분석하면 점 P의 자취가 타원이 됨을 알 수 있고, 기하학적인 패턴을 이용하면 나머지 네 모퉁이에서의 자취 및 그 방정식도 추정할 수 있다.

이때, $a < \frac{1}{2}$, $a = \frac{1}{2}$, $a > \frac{1}{2}$인 경우에 자취의 모양이 어떻게 달라지는지를 분석하여 설명하면 더 좋은 답안이 될 것이다.

- **논제 4-1에서 얻은 도형을 x축으로 회전시킨 회전체의 부피를 구할 수 있는가?**

논제 4-1에서 얻은 도형을 적절히 평행이동 또는 대칭이동하여 상황을 간단히 만든 후에 적분하면 계산을 좀 더 간편히 할 수 있다. 일단 식을 세운 후에도 서로 상쇄되는 부분을 고려하면 계산 과정을 줄일 수 있다.

- **두 반직선이 각 θ를 이루면 만날 때 각 반직선에 양 끝점을 둔 선분의 중점의 자취를 구할 수 있는가?**

논제 4-3은 논제 4-1의 확장으로 두 반직선이 각 θ를 이루며 만날 때 각 반직선에 양 끝점을 둔 선분의 중점의 자취에 관한 문제이다. 논제 4-1에서와 마찬가지로

점 P의 좌표를 $P(x, y)$라 하고 각 반직선 위에 있는 두 점 A, B의 좌표를 $A(c, c\tan\theta)$, $B(d, 0)$이라 한 후 선분 AB의 길이가 1이고 점 P는 선분 AB의 중점임을 이용하면 x, y 사이의 관계식을 찾을 수 있다.

이렇게 찾은 방정식을 분석하여 타원을 회전한 곡선의 일부임을 설명할 수 있어야 한다.

배경지식 쌓기

- **타원의 방정식**

두 정점 $F(c, 0)$, $F(-c, 0)$으로부터 거리의 합이 $2a\,(0<c<a)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (0<b<a,\ b^2=a^2-c^2)$$

이고, 이 타원의 꼭짓점의 좌표는 각각 $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$이다.

- **타원의 회전이동**

점 (x, y)를 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동한 점의 좌표를 (x', y')이라 하면,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이다. 이를 이용하면 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$을 원점을 중심으로 θ만큼 회전이동시킨 타원의 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{(x\cos\theta+y\sin\theta)^2}{a^2}+\frac{(-x\sin\theta+y\cos\theta)^2}{b^2}=1$$

- **회전체의 부피**

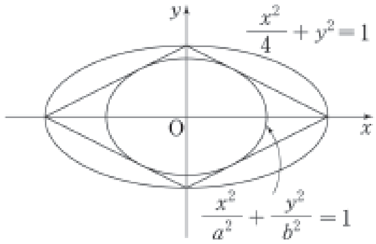
구간 $[a, b]$에서 연속인 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $x=a$, $x=b$로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜서 생긴 입체의 부피 V_x는

$$V_x=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b \{f(x)\}^2dx$$

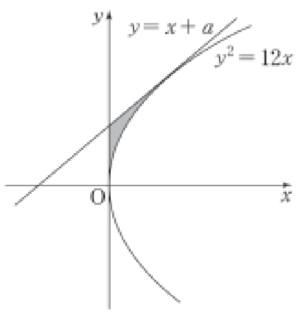
이다.

풀 어 보 기

1. 타원 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$의 네 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형에 내접하는 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(b,0)$, $\mathrm{F'}(-b,0)$일 때, a^2b^2의 값을 구하시오. [2009 수능]



2. 직선 $y=x+a$가 포물선 $y^2=12x$에 접할 때, 포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=x+a$ 및 y축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 $b\pi$라 하자. 두 상수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. [2009 수능]



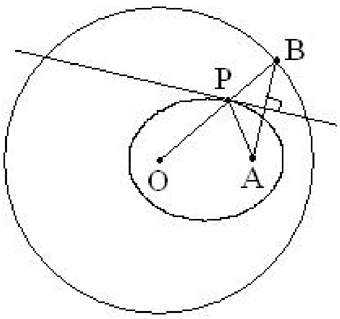
개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

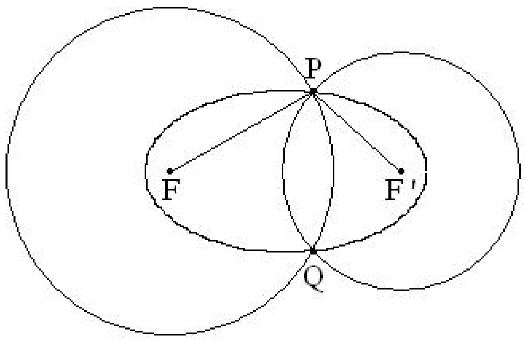
- **타원이 되는 자취**

① 반지름의 길이가 r이고 중심이 O인 원의 내부에 정점 A가 있다. 원 위의 임의의 점 B에 대하여 선분 AB의 수직이등분선이 선분 OB와 만나는 점을 P라 하자.



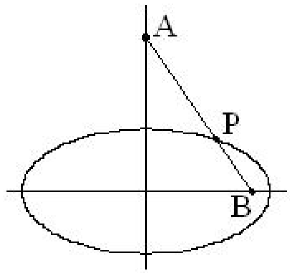
위 그림에서 삼각형 PAB는 이등변삼각형이므로 $\overline{PA}=\overline{PB}$이다. 따라서 $\overline{OP}+\overline{PA}=\overline{OP}+\overline{PB}=r$ (일정)이다. 즉, 점 P는 두 정점 O와 A에서의 거리의 합이 항상 일정하므로 점 P의 자취는 타원이 된다. 이때, 두 점 O와 A가 이 타원의 초점이 되고 처음에 주어진 원의 반지름 r가 타원의 장축의 길이가 된다.

② 두 정점 F, F′(두 점 사이의 거리를 $2c$라 하자)을 각각 중심으로 하고 반지름의 길이가 각각 r, $2a-r$인 두 원이 있다. r이 $a-c \leq r \leq a+c$인 범위에서 변할 때, 두 원의 교점을 P, Q라 하자.



위 그림에서 $\overline{PF}+\overline{PF'}$과 $\overline{QF}+\overline{QF'}$은 항상 $2a$로 일정하므로 점 P, Q의 자취는 타원이 된다. 이때, 두 점 F와 F′이 이 타원의 초점이 되고 두 원의 반지름의 길이의 합 $2a$가 타원의 장축의 길이가 된다.

③ 길이가 r로 고정된 선분 AB의 양 끝점 중 점 A는 y축 위에, 점 B는 x축 위에 있다. 두 점 A와 B가 각각 y축과 x축 위를 움직일 때, 선분 AB를 $k:r-k$로 내분하는 점을 P라 하자.



위 그림에서 선분 AB가 x축과 이루는 예각의 크기를 θ, 점 P의 좌표를 (x, y)라 하자. 그러면 다음 식이 성립한다.

$$x = r\cos\theta - r \cdot \frac{r-k}{r}\cos\theta = k\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta - r \cdot \frac{k}{r}\sin\theta = (r-k)\sin\theta$$

위 두 식에서 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$임을 이용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r-k}\right)^2 + \left(\frac{x}{k}\right)^2 = 1$$

$$\text{즉, } \frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{(r-k)^2} = 1$$

따라서 점 P의 자취는 꼭짓점의 좌표가 각각 $(k, 0), (-k, 0)$과 $(0, r-k)$, $(0, -r+k)$인 즉, 두 점이 모두 y축 위에 있을 때의 내분점과 두 점이 모두 x축 위에 있을 때의 내분점을 꼭짓점으로 하는 타원이 된다.

예시답안

풀어보기 1

타원 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$의 꼭짓점의 좌표가 $(2, 0), (-2, 0), (0, 1), (0, -1)$이므로 네 꼭짓점을 연결하여 만든 사각형 중 제1사분면에 있는 직선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}x+1$이다. 이것은 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 기울기가 $-\frac{1}{2}$인 접선으로 $y=-\frac{1}{2}x+\sqrt{a^2\cdot\frac{1}{4}+b^2}$과 같아야 한다. 따라서 다음 식을 얻는다.

$$\frac{a^2}{4}+b^2=1 \qquad \cdots\cdots(ㄱ)$$

또한 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 $\mathrm{F}(b, 0)$, $\mathrm{F}'(-b, 0)$이므로

$$a^2-b^2=b^2 \qquad \cdots\cdots(ㄴ)$$

이다. (ㄱ)과 (ㄴ)을 연립하여 풀면

$$a^2=\frac{4}{3},\ b^2=\frac{2}{3}$$

를 얻는다. 따라서 $a^2b^2=\frac{8}{9}$이다.

풀어보기 2

직선 $y=x+a$는 포물선 $y^2=12x$에 접하는 기울기가 1인 접선이므로 다음과 같아야 한다.

$$y=mx+\frac{p}{m}=x+3$$

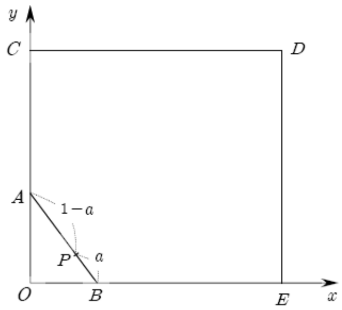
따라서 $a=3$이고, 접점의 좌표는 $(3, 6)$이다.

그러므로 포물선 $y^2=12x$와 직선 $y=x+3$ 및 y축으로 둘러싸인 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\pi\int_0^3\{(x+3)^2-12x\}dx\\&=\pi\int_0^3(x^2-6x+9)dx\\&=\pi\left[\frac{1}{3}x^3-3x^2+9x\right]_0^3\\&=\pi(9-27+27)=9\pi\end{aligned}$$

따라서 $b=9$이고 $ab=27$이다.

논제 4-1



먼저 위 그림과 같이 점 A는 y축 위에, 점 B는 x축 위에 있는 경우를 생각하자. 이때 두 점 A, B의 좌표를 각각 $\mathrm{A}(0, c)$, $\mathrm{B}(d, 0)$이라 하고 점 P의 좌표를 $\mathrm{P}(x, y)$라 하자. 여기서 선분 AB의 길이가 1이므로

$$c^2+d^2=1 \qquad \cdots\cdots \text{(ㄱ)}$$

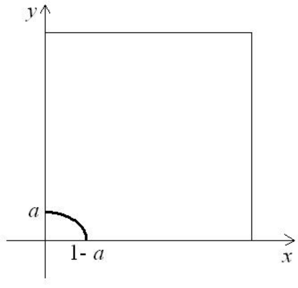
이고, 점 P는 선분 AB의 $1-a:a$ 내분점이므로

$$x=(1-a)d,\ y=ac \qquad \cdots\cdots \text{(ㄴ)}$$

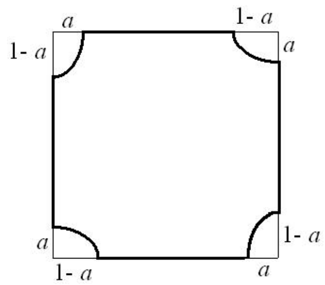
이다. (ㄴ)을 변형하여 (ㄱ)에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{x^2}{(1-a)^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$$

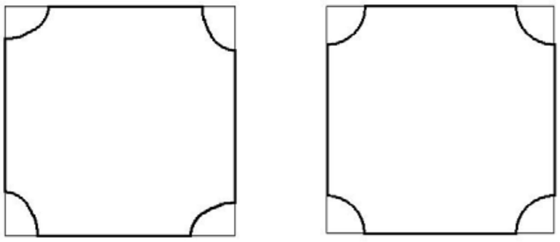
따라서 이는 다음 그림과 같이 중심이 원점이고 꼭짓점의 좌표가 각각 $(0, a)$, $(1-a, 0)$인 타원의 일부가 된다.



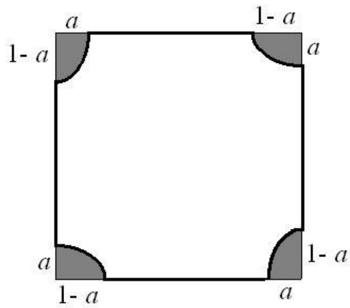
이렇게 y축 위의 한 점 $(0, a)$에서 출발한 점 P는 위 그림의 타원의 일부를 따라 x축 위의 점 $(1-a, 0)$에 도달하고 이후 x축을 따라 움직이다가 점 E 주변에서 첫 번째 타원이 회전된 모양을 따라 움직이고 다시 주어진 정사각형의 한 변을 따라 올라간다. 이러한 패턴을 반복하면 다음 모양을 얻을 수 있다.



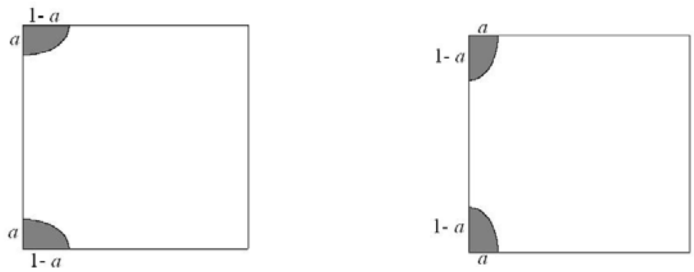
이는 $a<\frac{1}{2}$ 인 경우 위와 같은 모양이 되고, 만일 $a>\frac{1}{2}$ 이면 아래 왼쪽 그림과 같이 위의 모양에서 장축과 단축이 뒤바뀐 모양이 된다. 또한 $a=\frac{1}{2}$ 이면 아래 오른쪽 그림과 같이 네 모퉁이의 모양이 원의 일부가 된다.



논제 4-2



$f(a)$는 위 그림의 어두운 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피를 말하는 것으로 아래와 같이 적절히 평행이동 또는 회전이동을 통해 주어진 도형을 변형하여 회전시키면 더 간단히 계산하여 같은 값을 얻을 수 있다. 즉 아래 그림의 어두운 부분을 x축의 둘레로 회전시켜 얻은 회전체의 부피의 합으로 $f(a)$를 찾을 수 있다.



따라서 회전체의 부피 $f(a)$는 다음과 같다.

$$f(a)=\int_0^{1-a}\pi a^2\left(1-\frac{x^2}{(1-a)^2}\right)dx+\int_0^{1-a}\pi\left(3^2-\left(3-a\sqrt{1-\frac{x^2}{(1-a)^2}}\right)^2\right)dx$$

$$+\int_0^{a}\pi(1-a)^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx+\int_0^{a}\pi\left(3-(1-a)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2 dx$$

$$= \int_0^{1-a} 6\pi \frac{a}{1-a}\sqrt{(1-a)^2 - x^2}\,dx + \int_0^{a} 6\pi \frac{1-a}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx$$

$$= 6\pi \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1}{4}\pi(1-a)^2 + 6\pi\frac{1-a}{a} \cdot \frac{1}{4}\pi a^2$$

$$= 3\pi^2 a(1-a)$$

그러므로 $\lim_{n\to\infty} nf\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot 3\pi^2 \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 3\pi^2$이다.

논제 4-3 이 상황은 논제 [4-1]에서 A가 위치한 반직선이 B가 위치한 반직선과 수직이 아니라 각 θ를 이루며 만나는 것으로 변형된 것이다. 따라서 점 P의 좌표를 (x, y), 점 A의 좌표를 $(c, c\tan\theta)$, 점 B의 좌표를 $(d, 0)$으로 놓고 논제 [4-1]과 마찬가지의 방법을 사용할 수 있다. 즉, 선분 AB의 길이가 1이므로

$$(c-d)^2 + c^2\tan^2\theta = 1 \qquad \cdots\cdots \text{㈐}$$

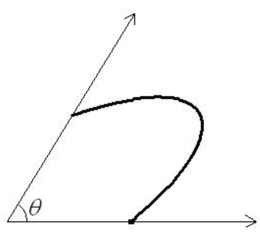
이고, 점 P는 선분 AB의 중점이므로

$$x = \frac{c+d}{2},\ y = \frac{c\tan\theta}{2} \qquad \cdots\cdots \text{㈑}$$

이다. ㈑을 변형하여 ㈐에 대입하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\left(\frac{4y}{\tan\theta} - 2x\right)^2 + (2y)^2 = 1$$

이는 다음과 같이 타원을 회전한 곡선의 일부가 된다.



3 고려대학교 수시

제 시 문

(가) [그림1]과 같이 곡선 $y=x^2+1$ 위에 두 점 $P_1(a_1,\, a_1^2+1)$과 $P_2(a_2,\, a_2^2+1)$가 있다. (단 $a_1<0<a_2$ 이고 $a_1+a_2\neq 0$ 이다.) 점 P_1에서의 접선과 점 P_2에서의 접선 그리고 곡선에 의해 둘러싸인 부분을 S라 하자. 점 P_1에서의 접선과 x축과의 교점을 Q_1, 점 P_1에서 x축에 내린 수선의 발을 R_1, 그리고 각 $\angle Q_1P_1R_1$의 이등분선이 x축과 만나는 교점을 T_1이라 하자.

또한 두 점 P_1과 P_2로부터 시작해서 곡선 위의 점 $P_{n+2}(n\geq 1)$를 그 점에서의 접선이 직선 P_nP_{n+1}과 평행이 되도록 계속 반복해서 택하여 나간다고 하자. [그림 2]는 이렇게 얻어지는 세 점 $P_n,\, P_{n+1},\, P_{n+2}$를 표시한 것이다. 이 세 점으로 만들어진 삼각형 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$의 넓이를 A_n이라 하고 선분 $\overline{P_nP_{n+1}}$과 선분 $\overline{P_{n+1}P_{n+2}}$가 이루는 각을 θ_n이라 하자.

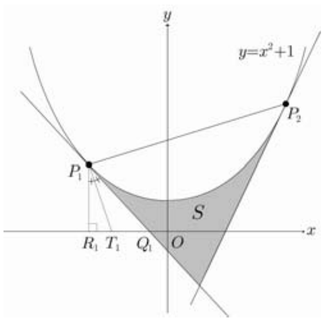


그림 1

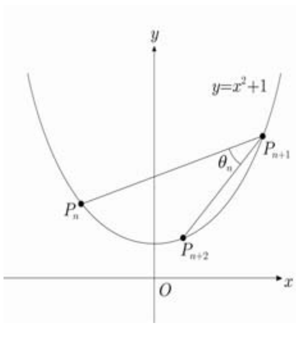


그림 2

[1]

1-1. [그림1]의 S의 넓이를 a_2-a_1의 식으로 나타내시오.

1-2. 벡터를 활용하여 T_1의 x좌표를 구하시오.

1-3. 삼각형 $\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}$의 넓이 A_n을 a_2-a_1의 식으로 나타내시오.

1-4. 점 $P_1, P_2, \cdots, P_n, \cdots$ 들이 수렴하는 점을 $P(a, a^2+1)$라 하자.

이때 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tan\theta_n}{a_{n+1}-a_n}\right|$을 a의 식으로 나타내시오.

제시문 분석

제시문 (가)에서는 포물선을 소재로 수열, 극한, 미분과 적분, 벡터의 개념들을 통합하도록 주문하고 있다. 포물선 위의 두 점에서의 접선과 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 그림과 함께 제시하고, 두 점을 잇는 직선의 기울기와 같은 기울기를 갖는 접선의 접점을 이용하여 수열로 해결해야 하는 상황을 제시하고 있다.

논제 분석

- **포물선 $y=x^2+1$ 위의 두 점에서의 접선과 곡선에 의해 둘러싸인 부분의 넓이를 두 접점의 x좌표에 관한 식을 나타낼 수 있는가?**

두 접선의 교점의 좌표를 찾아 이용하면 쉽게 해결할 수 있다. 정적분을 이용할 수도 있고, 삼각형의 넓이와 포물선과 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 이용할 수도 있다.

- **포물선의 접선과 접점에서 x축에 내린 수선이 이루는 각을 이등분하는 직선이 x축과 만나는 점의 좌표를 벡터를 이용해서 구할 수 있는가?**

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PT}}$를 각각 성분으로 표시하고 내적을 활용하면 계산이 복잡하지 않다. 삼각형의 각의 이등분선에 의한 길이의 비를 이용하는 방법도 있고, 이등분선의 성질에 의하여 점과 직선 사이의 거리를 이용하는 방법도 있으나, 이는 계산도 복잡하고 논제에서 벡터를 이용하라고 하였으므로 논제를 약간 벗어나는 방법이다.

- **삼각형 $\triangle \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$의 넓이 A_n을 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$의 x좌표의 차인 a_2-a_1에 관한 식으로 나타낼 수 있는가?**

P_n의 x좌표를 a_n이라 하면 P_{n+2}의 좌표를 a_n과 a_{n+1}에 관한 식으로 나타낼 수 있고, 이를 이용하여 A_n을 a_n과 a_{n+1}에 관한 식으로 나타낼 수 있다. 또 수열 $\{a_n\}$은 등비수열을 계차수열로 갖는 수열임을 파악하여 이를 식으로 나타내면 A_n이 등비수열임을 알 수 있다.

- **극한값 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{\tan\theta_n}{a_{n+1}-a_n}\right|$을 점 P_n이 수렴하는 점의 x좌표에 관한 식으로 나타낼 수 있는가?**

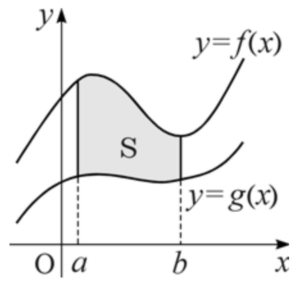
두 직선이 이루는 각이 두 직선이 x축과 이루는 각의 차임을 이용하여 탄젠트 공식을 활용하면 주어진 식을 a_n에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

배경지식 쌓기

- **연속하는 두 곡선 사이의 넓이**

폐구간 $[a, b]$ 에서 연속인 두 곡선 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=a,\ x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이 S

$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$$



- **벡터의 내적**

평면 또는 공간에서 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a},\ \vec{b}$가 이루는 각을 $\theta(0 \leqq \theta \leqq \pi)$라 할 때, $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$을 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 내적이라 하고, $\vec{a}\cdot\vec{b}$로 나타낸다.

즉 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\theta$ 이다. 특히, $\vec{a}=\vec{b}$ 이면 $\cos\theta=\cos 0^\circ=1$ 이므로 $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2,\ |a|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$ 가 성립한다.

또한, 벡터의 내적의 정의를 이용하면 두 벡터가 이루는 각 θ에 대하여 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ 이다.

그리고 $\triangle ABC$에서 $\overrightarrow{CA}=\vec{a},\ \overrightarrow{CB}=\vec{b}$ 라 두고 내적을 이용하여 $\triangle ABC$의 넓이를 구하면 $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ 이다.

- **수학적 귀납법과 수열의 귀납적 정의(점화식)**

- 수학적 귀납법 : 자연수 n 에 관한 명제 $p(n)$ 이 모든 자연수에 대하여 성립함을 밝히려면 다음 두 가지를 증명하면 된다.
  (1) $n=1$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 참이다.
  (2) $n=k\,(k\geq 1$인 자연수$)$ 일 때, 명제 $p(n)$ 이 참이라고 가정하면, $n=k+1$ 일 때에도 $p(n)$ 은 참이다.

- 수열의 귀납적 정의(점화식) : 처음 몇 개의 항과 이들을 이용하여 차례로 그 다음 항을 정할 수 있는 관계식을 주어 수열을 정의하는 방법을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

풀 어 보 기

1. 곡선 $f(x)=[x]+\sqrt{x-[x]}$ 와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.(단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대의 정수를 나타낸다.)

2. 세 점 $A(-2, 0, 1)$, $B(-1, 1, 1)$, $C(1, 1, -3)$을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 넓이를 구하시오.

3. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1, na_{n+1}=2(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)(n=1,2,\cdots\cdots)$을 만족할 때 a_{100}의 값을 구하시오

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

• 귀납 추론

귀납추론은 부분적 사례로부터 일반적 결론을 이끌어내는 것이므로 경험적·확률적 판단이라고 볼 수 있으며, 항상 참이라고는 할 수 없고 최선의 가정을 제공해 줄 뿐이다. 귀납에 의한 오류에는 선입견이나 부주의 등으로 관찰하여야 할 사례를 간과하는 데에서 오는 오류, 착각이나 편견 등으로 인하여 왜곡된 관찰을 하는 데에서 오는 오류, 조급하게 일반화하는 데에서 오는 오류, 검증 없이 사실의 단순한 열거만으로 일반화하려는 오류, 외형상의 유사점만으로 유추하는 데에서 생기는 오류, 원인 오인이나 인과의 상호작용 간과나 인과전도나 원인과 조건의 혼동 등 인과관계 추정의 오류 등을 생각할 수 있다.

귀납 추론은 이와 같은 오류를 범할 가능성이 항상 있음에도 불구하고 인간은 본능적으로 귀납적 추론을 하므로 귀납법은 탐구와 발견을 위한 유용한 방법이면서 자연스러운 수학 학습-지도 방법이다. 학교수학에서 사용되는 귀납적 추론에는 당면한 문제를 해결하기 위해 자료를 수집·정리하여 어떤 법칙성을 찾고자 하는 경우와, 구체적인 사례가 관찰될 때 그 가운데에서 어떤 법칙성을 발견하는 경우가 있다.

우연히 다음과 같은 사실에 접하였다고 하자.

$$1+8+27+64=100$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3=10^2$$

여기서 '잇달은 수의 세제곱의 합은 어떤 수의 제곱의 합이 될 것인가?
즉, $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=?^2$ 와 같은 의문이 제기된다. 이 질문에 답하기 위해 특수한 다른 경우를 조사해 본다.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2 \\ 1+8 &= 9 = 3^2 \\ 1+8+27 &= 36 = 6^2 \\ 1+8+27+64 &= 100 = 10^2 \\ 1+8+27+64+125 &= 225 = 15^2 \end{aligned}$$

그 결과 '처음 n 개의 수의 세제곱의 합은 어떤 수의 제곱이 된다'는 법칙을 강력하게 암시받는다. 제곱수에 대해서 무엇을 생각할 수 있을까?

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 3 &= 1+2 \\ 6 &= 1+2+3 \\ 10 &= 1+2+3+4 \\ 15 &= 1+2+3+4+5 \end{aligned}$$

따라서 다음과 같은 법칙을 귀납적으로 얻게 될 것이다.

$$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=(1+2+3+\cdots+n)^2=\frac{n(n+1)}{2}^2$$

(Polya, 1986)

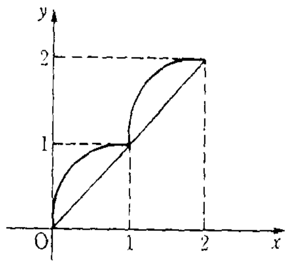
물론 이 단계에서 이 법칙은 잠정적인 것이다. 이와 같은 자연수와 관련된 일반적인 명제는 '수학적 귀납법'에 의해 증명된다. 자연수의 부분집합 가운데 1 이 포함되어 있고, n 이 포함될 때 $n+1$ 이 포함된다면 그 부분집합은 자연수 전체의 집합이 된다. 이러한 자연수의 기본성질을 '수학적 귀납법의 원리'라고 한다. 이를 이용하여, 자연수와 관련된 명제가 1 일 때 성립함이 증명되고 n 일 때 성립한다고 가정하면 $n+1$ 일 때 성립함이 증명되면 모든 자연수에 대하여 그 성질이 성립한다는 결론을 내릴 수 있다. 이와 같은 증명법이 수학적 귀납법이다. 수학적 귀납법은 귀납이 아니라 자연수의 기본성질을 이용한 연역이다. 귀납적 추론에 의해 이끌어 낸 법칙은 추측에 지나지 않으며, 그것이 참임을 보증하려면 연역적 추론, 곧 증명과정이 뒤따라야 한다. 그러나 학교수학에서는 추측된 일반적 성질이 참임을 보다 확실히 하기 위하여 새로운 사례를 검사해 보는 것으로 그치는 경우가 많다.
귀납은 몇 가지 예에 대한 충실한 관찰로 시작되므로, 학생들이 의도된 추측에 이르도록 하고 나아가 발견적 사고습관이 들도록 도와주는 적절한 질문과 권고를 통한 안내가 있어야 할 것이다.

– 출처 : 우정호, 수학 학습-지도 원리와 방법, 서울대학교출판부, 2005

예시답안

풀어보기 1

$0 \le x < 1$ 일 때, $f(x) = \sqrt{x}$
$1 \le x < 2$ 일 때, $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ 이므로
(오른쪽 그래프에서 구하는 넓이)
$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 2\int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$



풀어보기 2

$\overrightarrow{AB} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{AC} = (3,1,-4)$ 이고 , $\overrightarrow{AB}$ 와 $\overrightarrow{AC}$ 가 이루는 각을 θ 라 하면

$\cos\theta = \dfrac{3+1}{\sqrt{2}\sqrt{26}} = \dfrac{2}{\sqrt{13}}$

$\therefore \sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{1-\left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)^2} = \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\theta$

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{26}\dfrac{3}{\sqrt{13}} = 3$

풀어보기 3

$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n=S_n$ 이라 놓으면

$na_{n+1}=2S_n$ $\cdots\cdots$ ① $(n-1)a_n=2S_{n-1}$ $\cdots\cdots$ ②

①－② 하면, $na_{n+1}-(n-1)a_n=2a_n$

$\therefore na_{n+1}=(n+1)a_n\ (n\ge 2)$

$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}=\cdots\cdots=\dfrac{a_2}{2}$ 이다. 그런데 $a_2=2a_1=2$ 이므로 $\dfrac{a_n}{n}=1$이다.

따라서 $a_n=n$이고 $a_{100}=100$ 이다.

논제 1-1 포물선 $y=x^2+1$ 위의 점 $P_1(a_1,\ {a_1}^2+1)$에서의 접선의 방정식은 $y=2a_1x-{a_1}^2+1$이고, 점 $P_2(a_2,\ {a_2}^2+1)$에서의 접선의 방정식은 $y=2a_2x-{a_2}^2+1$이므로 이 두 접선의 교점의 x좌표는 $\dfrac{a_1+a_2}{2}$이다. 따라서 두 접선과 포물선으로 둘러싸인 부분의 넓이는 다음과 같이 정적분을 이용하여 구할 수 있다.

$$S=\int_{a_1}^{\frac{a_1+a_2}{2}}(x^2+1-2a_1x+{a_1}^2-1)dx+\int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{a_2}(x^2+1-2a_2x+{a_2}^2-1)dx$$

$$=\int_{a_1}^{\frac{a_1+a_2}{2}}(x-a_1)^2dx+\int_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{a_2}(x-a_2)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-a_1)^3\right]_{a_1}^{\frac{a_1+a_2}{2}}+\left[\frac{1}{3}(x-a_2)^3\right]_{\frac{a_1+a_2}{2}}^{a_2}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{a_2-a_1}{2}\right)^3$$

$$=\frac{1}{12}(a_2-a_1)^3$$

논제 1-2 점 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{Q}_1,\ \mathrm{R}_1$의 좌표가 각각 $\mathrm{P}_1(a_1,\ {a_1}^2+1)$, $\mathrm{Q}_1\left(\dfrac{{a_1}^2+1}{2a_1},\ 0\right)$, $\mathrm{R}_1(a_1,\ 0)$이다. $\angle Q_1P_1R_1=\theta$, 점 T_1의 좌표를 $\mathrm{T}_1(t,\ 0)$이라 하면 다음과 같이 벡터를 성분으로 나타낼 수 있다.

$$\overrightarrow{\mathrm{P_1R_1}}=(0,\ -{a_1}^2-1),\ \overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}=\left(\frac{-{a_1}^2-1}{2a_1},\ -{a_1}^2-1\right),\ \overrightarrow{\mathrm{P_1T_1}}=(t-a_1,\ -{a_1}^2-1)$$

여기서 $\overrightarrow{\mathrm{P_1T_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_1Q_1}}=|\overline{\mathrm{P_1T_1}}|\,|\overline{\mathrm{P_1Q_1}}|\cos\dfrac{\theta}{2}=|\overline{\mathrm{P_1T_1}}|\,|\overline{\mathrm{P_1Q_1}}|\dfrac{|\overline{\mathrm{P_1R_1}}|}{|\overline{\mathrm{P_1T_1}}|}=|\overline{\mathrm{P_1Q_1}}||\overline{\mathrm{P_1R_1}}|$이므로

$$(t-a_1)\cdot\frac{-a_1{}^2-1}{2a_1}+(a_1{}^2+1)^2=\sqrt{\frac{(a_1{}^2+1)^2}{4a_1{}^2}+(a_1{}^2+1)^2}\cdot(a_1{}^2+1)$$

$$-(t-a_1)+2a_1(a_1{}^2+1)=(a_1{}^2+1)\sqrt{1+4a_1{}^2}$$

$$t=2a_1{}^3+3a_1-(a_1{}^2+1)\sqrt{1+4a_1{}^2}$$

논제 1-3

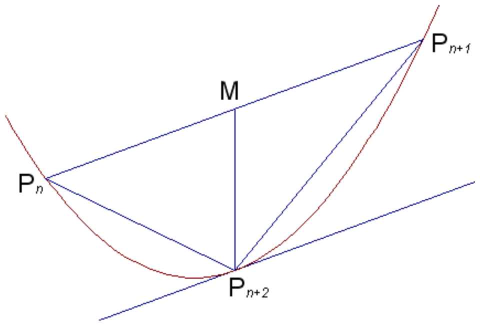


그림 3

세 점 $\mathrm{P}_n, \mathrm{P}_{n+1}, \mathrm{P}_{n+2}$의 좌표를 각각

$P_n(a_n, a_n{}^2+1), P_{n+1}(a_{n+1}, a_{n+1}{}^2+1), P_{n+2}(a_{n+2}, a_{n+2}{}^2+1)$ 이라 하자.

직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기 a_n+a_{n+1}와 점 P_{n+2}를 지나는 접선의 기울기 $2a_{n+2}$가 같으므로 $a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$이다.

따라서 P_{n+2}의 좌표는 $\left(\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}, \left(\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}\right)^2+1\right)$이다.

위 [그림3]과 같이 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 중점을 M이라 하면 M의 좌표는 $\left(\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}, \dfrac{a_n{}^2+a_{n+1}{}^2+2}{2}\right)$이다. 따라서 $\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$ 의 넓이를 A_n이라 하면

$$A_n = \frac{1}{2}\cdot\left\{\frac{a_n{}^2+a_{n+1}{}^2+2}{2}-\left(\frac{a_n+a_{n+1}}{2}\right)^2-1\right\}\cdot|a_{n+1}-a_n|$$

$$=\frac{1}{8}|a_{n+1}-a_n|^3\cdots(*)$$

$a_{n+2}=\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$이므로 $a_{n+2}-a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)$이다.

따라서 $a_{n+1}-a_n=(-\dfrac{1}{2})^{n-1}(a_2-a_1)$이고 이를 (*)에 대입하면

$A_n=\dfrac{(a_2-a_1)^3}{8^n}$이다.

논제 1-4 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 기울기를 $\tan\alpha$라 하면 $\tan\alpha = a_n + a_{n+1}$이고, 직선 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$의 기울기를 $\tan\beta$라 하면 $\tan\beta = a_{n+1} + a_{n+2}$이다. 따라서

$$\tan\theta_n = |\tan(\alpha-\beta)| = \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\right| = \left|\frac{(a_n + a_{n+1}) - (a_{n+1} + a_{n+2})}{1+(a_n + a_{n+1})(a_{n+1} + a_{n+2})}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{2}(a_{n+1} - a_n)}{1+(a_n + a_{n+1})(a_{n+1} + a_{n+2})}\right|$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tan\theta_n}{a_{n+1} - a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left|\frac{1}{1+(a_n + a_{n+1})(a_{n+1} + a_{n+2})}\right|$$

이다. 여기서 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_{n+2} = a$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\tan\theta_n}{a_{n+1} - a_n}\right| = \frac{1}{2(1+4a^2)}$$

이다.

4 동국대학교 예시

제 시 문

수학에서 기호의 사용은 매우 중요하다. 복잡한 이론을 유도하는 데 수학의 기호를 사용하는 것은 문제를 간결하고 명확하게 분석하는 데 효과적일뿐만 아니라 그 내용을 왜곡됨이 없이 정확히 전달할 수 있기 때문이다.

많은 수학 기호 중에 n 개의 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 들의 합을 의미하는 합의 기호 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 는 자주 사용된다. a_i 의 i 는 수열 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ 에서 개개의 수를 구분하는 색인이다. 예를 들어 $\sum_{i=1}^{4} a_{2i+1}$ 은 a_3, a_5, a_7, a_9 네 개의 수들의 합을 의미한다. 이 경우 a_3, a_5, a_7, a_9 들의 색인은 $3, 5, 7, 9$ 로 2 개씩 차이가 나는 일련의 또 다른 수열이 됨을 알 수 있다. 만일 이렇게 색인들 간의 차가 등간격이 아닌 경우는 $\sum_{i \in I} a_i$ 로 그 합을 표시할 수 있다. 여기서 I는 색인들의 집합을 의미한다. 가령 색인들의 집합을 $I=\{1, 7, 9, 10\}$ 로 정의한다면 $\sum_{i \in I} a_i$ 는 a_1, a_7, a_9, a_{10} 의 합을 의미한다.

$a_1, a_2, a_3, \cdots$ 외에 또 다른 수열 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 이 있는 경우를 생각해 보자. 두 가지 이상의 수열이 있는 경우 이들 간의 다양한 형태의 합을 계산하기 위해 합의 공식이 사용될 수 있다.

$\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (a_i + b_j)$ 은 $a_1+b_1, a_1+b_2, a_1+b_3, a_2+b_1, a_2+b_2, a_2+b_3$ 들의 합을 나타낸다.

물론 합의 기호의 성질을 이용하면 $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{3} (a_i + b_j)$ 을 $3(a_1+a_2)+2(b_1+b_2+b_3)$ 으로도 표현할 수 있다.

좀 더 복합한 예를 생각해 보자. $\sum_{i=1}^{10} a_i(2i) + \sum_{j=1}^{10} (b_{2j-1}+b_{2j})(11-j)$ 는 다음과 같은 수들의 합을 구하는데 사용될 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&a_1+b_1,\ a_1+b_2,\\
&a_2+b_1,\ a_2+b_2,\ a_2+b_3,\ a_2+b_4,\\
&a_3+b_1,\ a_3+b_2,\ a_3+b_3,\ a_3+b_4,\ a_3+b_5,\ a_3+b_6,\\
&\vdots\\
&a_{10}+b_1,\ a_{10}+b_2,\ a_{10}+b_3,\ a_{10}+b_4,\ a_{10}+b_5,\ a_{10}+b_6,\ \cdots,\ a_{10}+b_{20}
\end{aligned}
$$

재미있는 사실은 위와 같이 수들을 나열하여 봄으로써 그 합은 다소 복잡해 보이는 $\sum_{i=1}^{10} a_i(2i)+\sum_{j=1}^{10}(b_{2j-1}+b_{2j})(11-j)$ 가 실은 $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{2i}(a_i+b_j)$ 으로도 표현될 수 있다는 점이다. 마치 똑같은 내용이 기술하는 사람에 따라 다양하게 표현되듯이 수학의 기호를 통한 표현도 다양함을 알 수 있다. 물론 위 예의 경우는 $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{2i}(a_i+b_j)$ 이 그 수식의 목적을 전달하는 데는
$\sum_{i=1}^{10} a_i(i+1)+\sum_{j=1}^{10}(b_{2j-1}+b_{2j})(11-j)$ 보다 더 간결하고 효과적임을 알 수 있다.

[1] 다음 두 수열 $a_1=3, a_2=5, a_3=2$ 와 $b_1=6, b_2=-1, b_3=-2, b_4=7, b_5=2, b_6=3$ 을 생각해 보자. a_i 를 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 수열의 첫 번째부터 $2i$ 번째 수까지에서 각각 빼준 값들 모두를 더해 근을 구하고자 한다. 이에 대해 제시문 내용의 활용방안을 기술하고 근을 구하시오.

제시문 분석

• **수학에서의 기호의 사용**

수학에서의 기호는 문제를 간결하고 명확하게 분석하는 데 효과적이며 내용을 왜곡됨이 없이 정확하게 전달할 수 있게 해 줌으로써, 이공계 학문에서의 하나의 언어로 자리매김하고 있다.

• **다양한 기호의 표현**

똑같은 내용이 기술하는 사람에 따라 다양하게 표현되듯이 수학의 기호를 통한 표현도 다양함을 예를 들어 설명하고 있다.

즉, $\sum_{i=1}^{10} a_i(i+1) + \sum_{j=1}^{10}(b_{2j-1}+b_{2j})(11-j)$ 와 $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{2i}(a_i+b_j)$ 는 동일한 내용을 의미하는 수식으로써 앞의 수식보다는 $\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{2i}(a_i+b_j)$ 이 그 수식의 목적을 전달하는 데 더 간결하고 효과적임을 언급하고 있다.

논제 분석

• **수학적 표현을 다양하게 바꾸어 표현해 보고, 이를 구체적인 문제에 적용할 수 있는가?**

제시문에서 주어진 내용을 구체적인 상황에 적용할 수 있는지를 묻고 있다. 정규교육과정을 이수한 고등학생으로서는 합의 기호가 이중으로 겹쳐 있는 상황이 어색할 수 있으나, 제시문의 내용과 논제의 상황을 비교하여 식을 만들면 충분히 해결할 수 있을 것으로 생각된다. 고교과정에서 배우는 수열의 합을 표시하기 위해 $\sum_{i=1}^{n} a_i$ 와 같은 기호를 정의하고 이 기호를 좀 더 다양한 형태로 사용될 수 있는 예를 소개하였다. 이러한 예를 통해 기호의 의미와 활용법을 명확히 이해하도록 하였으며, 동일한 결과 또는 내용에 대해서 단일한 형태로만 표현되는 것이 아니라는 점을 제시하였다. 그리고 목적에 맞게 다양한 형태의 수식을 이용하는 것이 중요하다는 사실을 보여주고 있다.

배경지식 쌓기

- $\sum$의 기본성질

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k \pm \sum_{k=1}^{n}b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}ca_k = c\sum_{k=1}^{n}a_k \text{ (단, } c\text{는 상수)}$$

$$\sum_{k=1}^{n}c = cn \text{ (단, } c\text{는 상수)}$$

- 자연수의 거듭제곱의 합

$$\sum_{k=1}^{n}k = 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^3 = 1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

풀어보기

$\displaystyle\sum_{j=1}^{5}\left\{\sum_{i=1}^{5}(2^{i-1}\cdot j)\right\}=33a$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

개요 짜기

답안 작성

예시답안

풀어보기

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{5}\left\{\sum_{i=1}^{5}(2^{i-1}\cdot j)\right\} &= \sum_{j=1}^{5}\left(j\sum_{i=1}^{5}2^{i-1}\right)\\ &= \sum_{j=1}^{5}\left(j\cdot\frac{2^5-1}{2-1}\right)\\ &= 31\sum_{j=1}^{5}j\\ &= 31\cdot\frac{5\cdot 6}{2}\\ &= 465\end{aligned}$$

따라서 $33a=465$ 이므로, $a=\dfrac{155}{11}$ 이다.

논제 1 수열 a_i 를 $b_1, b_2, b_3, \cdots$ 수열의 첫 번째부터 $2i$ 번째 수까지에서 각각 빼준 값들 모두를 더한 합은 제시문의 예를 통해 구할 수 있다.

즉, 제시문에서의 $\displaystyle\sum_{i=1}^{10}\sum_{j=1}^{2i}(a_i+b_j)$ 를 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2i}(b_j-a_i)$ 으로 바꾸어 풀면 된다. 따라서 제시문에 의해 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2i}(b_j-a_i)$ 는 $\displaystyle\sum_{j=1}^{3}(b_{2j-1}+b_{2j})(4-j)-\sum_{i=1}^{3}a_i(2i)$ 와 동일하고 $b_1=6, b_2=-1, b_3=-2, b_4=7, b_5=2, b_6=3$ 에 있어서 $(b_{2j-1}+b_{2j})$ 가 모두 5 로 일정하므로

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2i}(b_j-a_i) &= \sum_{j=1}^{3}5(4-j)-\sum_{i=1}^{3}a_i(2i)\\ &= 5\times(3+2+1)-(3\times 2+5\times 4+2\times 6)\\ &= -8\end{aligned}$$

이 된다.

다른 풀이

첫 번째부터 $2i$ 번째 수까지에서 a_i 를 각각 빼준 값들의 합은 다음과 같은 수들의 합이다.

$$\begin{aligned}&b_1-a_1,\ b_2-a_1,\\ &b_1-a_2,\ b_2-a_2,\ b_3-a_2,\ b_4-a_2,\\ &b_1-a_3,\ b_2-a_3,\ b_3-a_3,\ b_4-a_3,\ b_5-a_3,\ b_6-a_3\end{aligned}$$

위와 같은 수들의 합은 $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2i}(b_j-a_i)$ 으로 표현되며 따라서 제시문에 의해

$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2i}(b_j-a_i)$ 과 $\sum_{j=1}^{3}(b_{2j-1}+b_{2j})(4-j)-\sum_{i=1}^{3}a_i(2i)$ 은 동일함을 알 수 있다.

수열 $b_1=6, b_2=-1, b_3=-2, b_4=7, b_5=2, b_6=3$ 에 있어서 $(b_{2j-1}+b_{2j})$ 가 모두 5 가 되므로

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2i}(b_j-a_i) &= \sum_{j=1}^{3}(b_{2j-1}+b_{2j})(4-j)-\sum_{i=1}^{3}a_i(2i)\\ &= \sum_{j=1}^{3}5(4-j)-\sum_{i=1}^{3}a_i(2i)\\ &= 5\times(3+2+1)-(3\times2+5\times4+2\times6)\\ &= -8\end{aligned}$$

5 동국대학교 수시

제 시 문

(가) 수열은 어떤 규칙에 의해 순서가 정해진 채 나열되는 수들의 집합을 의미한다. 이러한 수들의 관계가 수식으로 정의될 수 있다면 해당 수열에 대한 여러 가지 연산을 손쉽게 할 수 있다. 예를 들면, n을 자연수라 할 때 수열의 일반항 a_n이 $a_n = 2n-1$로 정의되면, 수열은 $a_1 = 1, a_2 = 3,\ a_3 = 5, \cdots$과 같은 홀수들을 나타내는 것임을 쉽게 알 수 있다. 수열에 관한 이러한 식은 수들 간의 관계를 탐구하고, 이를 간결하게 정리하는데 유용하다. 가령 57번째 수를 알고자 한다면 일반항으로부터 $a_{57} = 2\times57-1 = 113$임을 신속히 확인할 수 있다. 또한, a_1부터 a_{100}까지의 합, 즉 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = \sum_{n=1}^{100} a_n$을 구하기 위해 $a_1, \cdots, a_{100}$의 값을 일일이 구해서 합할 필요 없이 1부터 k까지 자연수의 합이 $\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$이라는 사실을 이용하여

$$\sum_{n=1}^{100} a_n = \sum_{n=1}^{100}(2n-1) = 2\sum_{n=1}^{100} n - 100 = 100\times101-100 = 10000$$

임을 쉽게 계산해 낼 수 있다.

(나) 수열들 중에는 재미있는 특성을 지닌 것도 있는데, 피보나치(Fibonacci) 수열은 그 생성규칙의 특이성과 성질로 인해 문화, 예술 등에 많은 영향을 주었다. 피보나치수열은 다음과 같다.

$$b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 2,\ b_4 = 3,\ b_5 = 5,$$
$$b_6 = 8,\ b_7 = 13,\ b_8 = 21,\ b_9 = 34,\ b_{10} = 55, \cdots$$

이 수열을 수열의 초기 값과 이웃하는 항들 사이의 관계식으로 구성되는 점화식으로 표현하면, 피보나치수열이 어떻게 생성된 것인지를 이해하기가 매우 쉽다.

$$b_1 = 1,$$
$$b_2 = 1,$$
$$b_n = b_{n-2} + b_{n-1}, \qquad n = 3,\ 4,\ 5,\ 6, \cdots$$

즉, b_1과 b_2는 1로 주어지고, b_3부터는 앞의 두 수의 합으로 정의된다는 것을 쉽게 확인할 수 있다. 하지만 위의 점화식으로는 b_n이 얼마인지 바로 확인하는 것은 매우 어렵다. 왜냐하면 b_{n-1}과 b_{n-2}를 알아야 하는데 이 값들 역시 b_{n-3}과 b_{n-4}의 계산 없이 구할 수 없기 때문이다. 물론 일반항을 이용한다면 쉽게 계산

할 수 있다. 아래와 같은 피보나치수열의 일반항은 다소 복잡해 보일 뿐만 아니라 점화식보다 피보나치수열의 생성방식을 이해하는 데는 불편하다.

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad n=1,\ 2,\ 3,\cdots$$

피보나치수열에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$은 흥미롭게도 고대 그리스인들 사이에서 가장 조화로운 비율로 믿어져왔던 황금비의 값(1.618...)과 일치한다. 이 황금비의 값은 지금까지도 미술, 음악, 역사, 건축, 생물학, 심리학 등의 다양한 영역에서 활용되고 있는데, 이 값은 피보나치수열의 점화식의 변형 $\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}+1$과 수열의 극한 등을 이용하여 유도해 낼 수 있다.

[1] 수열을 수식으로 표현하는 두 가지 방법에 관해 제시문을 근거로 서술하시오.

[2] 피보나치수열의 점화식을 이용하여 황금비의 값을 구하는 방법에 관해 서술하시오.

제시문 분석

- **수열의 일반항과 부분합을 제시하고 있다.**

수열의 일반항이 주어질 때, 부분합을 구하는 간단한 방법을 예를 들어 설명하고 있다.

- **피보나치수열을 정의하고 일반항, 특징 등을 제시하고 있다.**

점화식으로 표현된 피보나치수열의 일반항을 구하고, 피보나치수열에서 연속하는 두 항의 비가 황금비 수렴함을 보여주고 있다.

논제 분석

- **수열을 수식으로 표현하는 방법을 알고 있는가?**

수열은 나열되는 수들의 집합이라는 점과 이러한 수들 간의 관계를 수식으로 표현할 수 있다는 점을 제시하고 있다. 특히 수열을 하나의 수식으로 전개할 수 있으면 수열에 관한 여러 가지 연구를 손쉽게 할 수 있다는 사실을 알아야 한다. 수열을 표현하는 방법으로 일반항과 점화식 두 가지를 제시하고 있으므로 이 두 가지 방법에 대한 간단한 설명을 필요로 하므로 이는 그 특성을 비교함으로써 두 가지 표현법의 유용성을 더 정확하게 서술할 수 있다.

- **피보나치수열에서 찾아볼 수 있는 특징 중의 하나인 황금비에 대해서 구체적으로 설명할 수 있는가?**

피보나치수열에서 연속하는 두 항의 비율의 극한값을 구해 보면 황금비를 얻을 수 있음을 제시하고 이를 확인하기 위한 방법을 설명하도록 요구하고 있다. 점화식의 또 다른 형태와 수열의 극한에 관한 사항을 이용하여 황금비를 구할 수 있음을 언급하고 이를 보다 구체적으로 설명할 수 있다.

즉, 변형된 점화식을 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=x(\neq 0)$라고 두면 $x=\dfrac{1}{x}+1$로 정리되고, 이차방정식의 근의 공식으로부터 x의 값을 구할 수 있다. 피보나치수열은 음수가 될 수 없으므로 여기에서 구한 x의 값 중에서 양수를 선택해야 함을 언급하도록 한다.

배경지식 쌓기

• **수열의 귀납적 정의**

이웃하는 항 사이의 관계식을 이용하여 수열 $\{a_n\}$을 정의하는 것을 수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의라 하고, 이 때 이웃하는 항 사이의 관계식을 점화식이라 한다.

기본적인 점화식 : 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $n=1,2,3,\cdots$일 때

(1) $a_{n+1}-a_n=d \Rightarrow$ 공차가 d인 등차수열

(2) $a_{n+1}\div a_n=r \Rightarrow$ 공비가 r인 등비수열

(3) $2a_{n+1}=a_{n+2}+a_n \Rightarrow$ 등차수열

(4) $a_{n+1}^2=a_n a_{n+2} \Rightarrow$ 등비수열

(5) $\dfrac{2}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_{n+2}} \Rightarrow$ 조화수열

풀어보기

1. 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3a_n-1}{a_n+2}=2$일 때, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$의 값을 구하여라.

2. 이차방정식 $x^2+2x+n-\sqrt{n^2+2n}=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 할 때, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\alpha_n}+\dfrac{1}{\beta_n}\right)$의 값을 구하여라.

읽기 자료

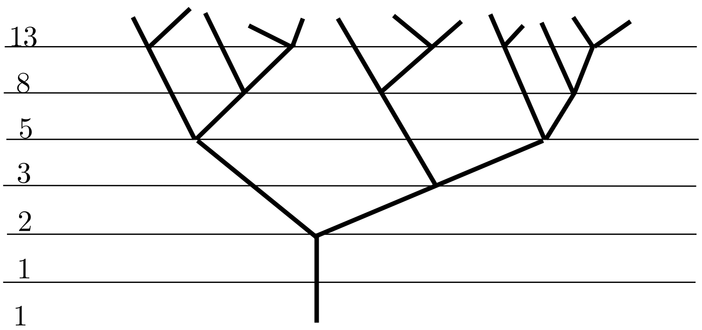
• 나선형의 곡선과 피보나치수열

한 변의 길이가 피보나치 수 1, 1, 2, 3, 5, 8,…인 정사각형을 그린 다음 곡선으로 연결하면 나선형 곡선이 된다. 자연에서는 나선형 곡선 구조를 쉽게 관찰할 수 있다. 특히, 달팽이의 껍질과 바다 생물의 껍질에서 나선형 곡선 구조가 흔히 발견된다. 해바라기 꽃봉오리에 씨앗이 배열된 모습에도 나선형 곡선이 오른쪽과 왼쪽 방향으로 나타남을 볼 수 있다. 씨앗이 나선형 곡선으로 배열되어 있어 길쭉한 모양의 많은 씨앗이 중앙과 가장자리까지 골고루 분포할 수 있는 것이다. 해바라기의 씨앗의 배열은 오른쪽 소용돌이와 왼쪽 소용돌이가 교차로 생성되고 있는데, 그 수는 34, 55, 89, … 이고, 데이지 꽃머리에는 서로 다른 34개와 55개의 나선이 있다. 사람 귀의 달팽이관 같은 인체의 많은 기관, 우주 은하의 모양, 물의 소용돌이나 태풍, 솔방울에서도 나선형 곡선 구조가 나타난다.

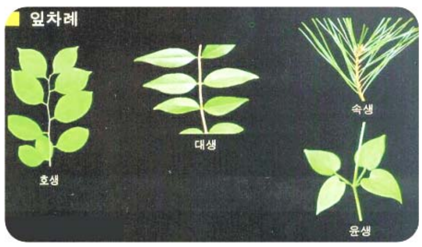
• 꽃잎과 나뭇가지에서의 피보나치수열

우리 주변의 꽃잎을 세어 보면 거의 모든 꽃잎이 3장, 5장, 8장, 13장, … 으로 되어 있다. 예를 들어, 백합과 붓꽃은 꽃잎이 3장, 채송화, 패랭이, 동백, 야생장미는 5장, 모란과 코스모스는 8장, 금불초와 금잔화는 13장, 애스터와 치코리는 21장, 질경이와 데이지는 34장, 쑥부쟁이는 종류에 따라 55장과 89장이다.

그리고 나무 가지치기에도 피보나치수열이 나타난다. 그림과 같이 처음에는 한 가지에서 2개의 가지가 나온다. 그 중 한 가지에서 새 가지를 치고 나머지는 그대로 있다. 한쪽 가지에서 분지되는 동안 다른 쪽은 쉬는 과정이 되풀이 되면서 피보나치수열을 이루는 가지치기가 이루어진다.



이러한 현상은 아래 가지에 그늘을 지우는 것을 최대한 피하기 위한 것이다. 이와 같은 현상은 식물의 잎차례에서도 볼 수 있다. 잎차례는 $\frac{t}{n}$로 표시할 수 있는데, 이는 t번 회전하는 동안 잎이 n



개 나오는 비율을 말한다. 참나무와 벚꽃, 사과는 $\frac{2}{5}$이고, 포플러, 버드나무, 장미, 배는 $\frac{3}{8}$, 갯버들과 아몬드는 $\frac{5}{15}$이다. 모두 피보나치수열이 이루는 숫자들의 비이다. 전체 식물의 90%가 피보나치수열의 배열을 가지고 잎차례를 따르고 있다.

특히, 이 수열에서 연속되는 항의 비를 계산해 보면 $\frac{a_{n+1}}{a_n}$은 가장 아름다운 비율이라는 황금비의 값$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.618\cdots\right)$에 가까워진다.

개요 짜기

답안 작성

예시답안

풀어보기 1

$b_n = \dfrac{3a_n - 1}{a_n + 2}$ 라고 두면 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$이다.

$a_n = \dfrac{2b_n + 1}{3 - b_n}$ 에서 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2b_n + 1}{3 - b_n} = 5$을 얻을 수 있다.

풀어보기 2

$x^2 + 2x + n - \sqrt{n^2 + 2n} = 0$의 두 근이 α_n, β_n이므로

$\alpha_n + \beta_n = -2,\ \alpha_n \beta_n = n - \sqrt{n^2 + 2n}$ 이고, $\dfrac{1}{\alpha_n} + \dfrac{1}{\beta_n} = \dfrac{\alpha_n + \beta_n}{\alpha_n \beta_n} = \dfrac{-2}{n - \sqrt{n^2 + 2n}}$ 이다.

그러므로
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{-2}{n - \sqrt{n^2 + 2n}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{-2\left(n + \sqrt{n^2 + 2n}\right)}{\left(n - \sqrt{n^2 + 2n}\right)\left(n + \sqrt{n^2 + 2n}\right)} \\ &= 2\end{aligned}$$

이다.

논제 1

제시문에서 수열 $\{a_n\}$이 일반항 $a_n = 2n - 1$ 또는 점화식 $a_n = a_{n-1} + 2$, $a_1 = 1$ 으로 표현할 수 있는 것처럼, 수열은 일반항과 점화식의 두 가지 형태로 표현할 수 있다. 일반항은 수열의 n번째 항의 값을 n의 함수식으로 정의한 것으로 n번째 항을 직접 구할 수 있다는 점과 수열의 합과 같은 연산을 간단하게 표현할 수 있다는 장점이 있다. 점화식은 수열의 n번째 항과 $n+1$번째 항 사이의 관계를 수식으로 표현하여 정의하는 것으로, 피보나치수열이 점화식으로 표현된 대표적인 예이다. 수열들 간의 관계에 관하여 설명하는 데는 일반항으로 표현하는 것보다 점화식이 훨씬 유용하다.

논제 2

피보나치수열의 연속하는 두 항의 비의 극한값이 존재하고 황금비와 일치함을 이용하여 황금비를 구하기 위해서 피보나치수열의 또 다른 형태의 점화식 $\dfrac{b_n}{b_{n-1}} = \dfrac{b_{n-2}}{b_{n-1}} + 1$을 살펴보도록 한다. $\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$과 $\dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}$의 극한값은 동일하고, 이 극한값을 x라 하면 위의 점화식으로부터 방정식 $x = \dfrac{1}{x} + 1$을 구할 수 있다. 이 방정식은 이차방정식 $x^2 - x - 1 = 0$으로 볼 수 있으며 이 방정식을 풀어서 x의 값을 구할 수 있다. 피보나치수열은 음수가 아니므로 근의 공식을 이용해서 얻어낸 두 근 중에서 양수인 값이 x가 되어야 한다. 따라서 위 방정식의 양의 실수 값이 황금비가 된다.

6 부산대학교 예시

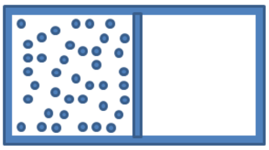
제 시 문

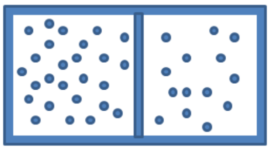
(가) 전 우주를 하나의 큰 계로 볼 때 우주는 한 가지 중요한 법칙을 지키며 시간에 따라 변해 간다. 즉 온 우주 전체의 질서가 시간이 지남에 따라 깨어지므로, 무질서도가 증가하는 방향으로 진행되어 가며 나이를 먹어간다. 이 법칙을 열역학 제2법칙이라 부른다. 열역학 제2법칙은 계의 크기와는 관계없이 외부와 완전히 차단된 고립된 어떤 계에서도 성립하는 법칙이다. 즉 외부와 완전히 차단된 계의 무질서도는 항상 증가하는 방향으로 변화해간다. 열/통계물리학에서는 이러한 무질서의 정도를 나타내는 양으로 엔트로피를 사용한다.

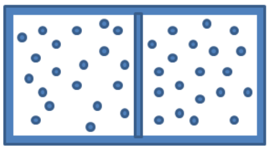
오스트리아 물리학자 볼츠만(Boltzmann)은 엔트로피 S를 $S = k_B \log W$로 통계적으로 정의하였다. 여기서 k_B는 볼츠만 상수이며, W는 계의 내부에너지 변화 없이 계를 배열시킬 수 있는 방법의 수 또는 통계적으로 경우의 수이다. 따라서 W가 클수록, 무질서도인 엔트로피가 커진다.

열역학 제2법칙의 간단한 예를 들면, 한 방안에서 향수병의 뚜껑을 열면 병으로부터 나온 향수분자가 방 전체로 퍼져가는 것을 알 수 있다. 그러나 그 퍼져간 향수분자가 다시 향수병 안으로 모이는 현상은 있을 수 없다. 또 물속에 떨어진 잉크방울이 시간이 지남에 따라 물 전체로 확산해 가는 것을 볼 수 있다. 그러나 그 잉크입자들이 다시 한 방울로 모이는 현상 또한 있을 수 없다.

위의 두 예를 이해하기 위해 다음 그림과 같이 두 개의 방으로 이루어진 간단한 모델을 생각해 보자.


(상태 A)


(상태 B)


(상태 C)

두 개의 방이 단열칸막이로 나누어져 있으며 이 두 방은 외부와 완전히 고립되어있다고 가정하자. 칸막이를 열기 전에 한 방에는 N개의 기체분자가 있고 다른 한 방은 비어 있다(상태 A). 칸막이를 열었다 닫았다 하면서 칸막이를 닫았을 때의 각 방의 기체분자의 수를 조사하면 기체분자의 시간에 따른 분포를 볼 수 있다. 오랜 시간을 지나면 기체분자가 두 방에 골고루 퍼지므로 이때 칸막이를 닫으면 기체분자는 각 방에 같은 수(즉 $N/2$)로 나누어질 것이다(상태 C). 칸막이 열기 전(상태 A)에서 마지막 상태(상태 C)로 진행되어 감에 따라 각 상태에서 기체분자들이 두 방에 배열될 수 있는 경우의 수는 변해 갈 것이다. 여기서 상태 B는 상태 A에서 상태 C로 변해가는 상태 중에 하나이다.

(나) 아래 그림처럼 인간을 포함한 동식물의 모든 생명체는 질서정연한 각각의 형태를 유지함으로써 아름다운 자연 생태계를 유지한다. 각 생물체는 시간이 지남에 따라 그 형태는 조금씩 변형되어 가나 그 형태질서는 생명이 다하는 시간까지 지속된다. 그러나 생명이 끝남과 동시에 급속도로 그 형태질서가 파괴되어 가는 것을 알 수 있다. 또한 인류 문명은 정교하며 잘 정돈된 건축물을 건설함으로 편리하면서 경관이 좋은 생활환경을 만들어 간다(아래의 그림 참조). 그러나 버려진 고대문명의 유적지를 살펴보면 그 형태를 거의 알아 볼 수 없을 정도로 파괴되어 폐허가 된 것을 볼 수 있다.


(http://www.butterflyoccasions.com와 http://i.pbase.com 에서 취하였음)

이러한 지구상에서 일어나는 인류 문명과 생명 현상을 포함한 자연현상들 또한 열역학 제2법칙을 따른다.

[1] 제시문 (가)에서의 간단한 모델에서 두 방으로 이루어진 계의 경우의 수가 시간이 지남에 따라 어떻게 변화해 가는지 기술하시오. 즉, 상태 A에서 상태 C로 변해가는 동안 기체분자들이 두 방에 배열될 수 있는 경우의 수의 변화를 기술하시오.

[2] 1번의 결과를 이용하여 향수분자나 잉크분자의 확산은 열역학 제2법칙을 따름을 설명하시오.

제시문 분석

- **열역학 제2법칙**

"외부와 완전히 차단된 계의 무질서도는 항상 증가하는 방향으로 변화해 간다."

- **엔트로피의 정의**

무질서도의 정도를 나타내는 양으로 $S=k_B \log W$(S-엔트로피, k_B-볼츠만 상수, W-계의 내부에너지 변화 없이 계를 배열시킬 수 있는 경우의 수)

논제 분석

- **경우의 수를 이용하여 기체분자의 배열상태를 설명할 수 있는가?**

시간이 지남에 따라 왼쪽 방의 기체분자가 오른쪽 방으로 옮겨가는데 이를 경우의 수를 이용하여 설명하면 된다.

- **이항계수의 성질을 이용하여 열역학 제2법칙을 설명할 수 있는가?**

기체분자가 위치하는 곳은 왼쪽 아니면 오른쪽 방 둘 중 하나이다. 따라서 이는 조합으로 표현되고, 이항계수의 성질에 의해 중앙에 있는 계수가 가장 크다는 것을 이용하여 열역학 제2법칙을 따름을 설명하면 된다.

배경지식 쌓기

엔트로피라는 개념은 1850년에 독일의 물리학자인 루돌프 클라우지우스에 의해서 처음 제안되었는데 때때로 열역학 제2법칙의 형태로 표현된다. 이 법칙에 따르면 고온과 저온의 기체가 저절로 혼합될 때나 기체가 진공내로 확산하여 갈 때 또는 연료가 연소할 때와 같은 비가역 과정에서는 엔트로피는 증가한다.

엔트로피의 통계적인 해석 방법에서는 열역학적인 평형상태에 있는 매우 거대한 계에서 엔트로피 S는 S에 해당하는 거시적 상태를 실현하는 미시적 방법의 최대 개수 W의 자연로그에 비례한다. 즉 $S=k_B \log W$이다. 여기서 k_B는 볼츠만 상수이다.

모든 자발적인 반응은 비가역적이다. 따라서 우주의 엔트로피는 증가하고 있다. 즉 역학적인 일로 변환할 수 있는 에너지가 점차 감소하고 있는데 이 때문에 우주가 '쇠퇴하고 있다'라고 말하기도 한다.

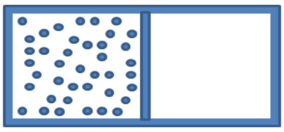
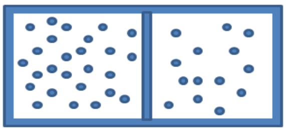
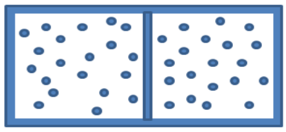
개요 짜기

답안 작성

예시답안

논제 1 여기서 각 상태의 경우의 수는 N개의 기체분자를 좌, 우 두 개의 방 중 어느 한쪽에 넣는 조합의 수와 같으므로 모든 경우의 수는 2^N 가지다.

아래 [그림 A]와 같이 칸막이를 열기 전 N개의 분자가 왼쪽 방에 모두 모여 있을 경우의 수는 ${}_NC_0 = 1$ 이다. 또 N개 중 한 개의 기체분자만 오른쪽 방으로 이동하는 경우의 수는 ${}_NC_1 = N$, 두 개의 기체분자가 이동하는 경우의 수는 ${}_NC_2$, $\cdots$, N개의 기체분자 중 m개 $\left(m < \dfrac{N}{2}\right)$만 오른쪽으로 이동하는 경우의 수는 ${}_NC_m$ ([그림 B] 참조), $\cdots$, 같은 방법으로 [그림 C]와 같이 각 방에 같은 수로 기체분자가 배열되는 경우의 수는 ${}_NC_{\frac{N}{2}}$ 이 된다.

[그림 A] [그림 B] [그림 C]

이상을 정리하면 (상태 A)에서 (상태 C)로 변해가는 동안 기체분자들이 두 방에 배열될 수 있는 경우의 수의 변화는

$$ {}_NC_0 \ , \ {}_NC_1 \ , \ {}_NC_2 \ , \ \cdots \ , \ {}_NC_{\frac{N}{2}} $$

와 같이 되고 이것은 시간이 증가함에 따라 경우의 수가 증가함을 알 수 있다.

논제 2 1번에서 오른쪽 방에 기체분자의 개수가 0개, 1개, 2개, $\cdots$, $\dfrac{N}{2}$개, $\cdots$, N개가 위치할 경우의 수는 각각

$$ {}_NC_0 \ , \ {}_NC_1 \ , \ {}_NC_2 \ , \ \cdots \ , \ {}_NC_{\frac{N}{2}} \ , \ \cdots \ , \ {}_NC_N \qquad \cdots (1) $$

이다. 이 때 두 방 사이의 칸막이를 오랜 시간 열었다 닫았다를 반복하면 기체분자가 두 방에 $\dfrac{N}{2}$개 씩 골고루 퍼지므로 이때 경우의 수는 ${}_NC_{\frac{N}{2}}$ 이 된다. 그리고 ${}_NC_{\frac{N}{2}}$ 은 (1)식의 이항계수 중에서 가운데 있는 것으로 가장 큰 값이다.

따라서 한 방안에 모아둔 향수분자는 시간이 지남에 따라 방 전체로 골고루 분포하게 되고(상태 C) 이 때 엔트로피 S는

$$ S = k_B \log\left({}_NC_{\frac{N}{2}}\right) = k_B \log\left\{\frac{N!}{\left(\dfrac{N!}{2}\right)\left(\dfrac{N!}{2}\right)}\right\} = k_B \log\left\{\log(N!) - 2\log\left(\frac{N!}{2}\right)\right\} $$

로 최대가 되어 시간이 지남에 따라 엔트로피도 증가한다.

따라서 향수분자나 잉크분자가 가능한 모든 공간을 활용하려고 하는 것은 엔트로피가 증가하는 방향이고 이것은 '시간이 지남에 따라 무질서도가 증가하는 방향으로 진행되고 그 반대 현상은 일어나지 않는다'는 열역학 제2법칙에 따름을 알 수 있다.

부산대학교 발표 예시답안

1. 여기서의 각 상태에서의 경우의 수는 N의 동일한 기체분자를 순서에 상관없이 두 개의 방에 넣는 조합의 가지 수와 같다.

처음 칸막이를 열기 전 (상태 A) : 경우의 수 = ${}_NC_N = \frac{N!}{N!0!} = 1$

시간에 따라 변하는 경우의 수 :

$$
\begin{aligned}
{}_NC_{(N-1)} &= \frac{N!}{(N-1)!1!} = N \\
{}_NC_{(N-2)} &= \frac{N!}{(N-2)!2!} = \frac{N(N-1)}{2} \\
{}_NC_{(N-3)} &= \frac{N!}{(N-3)!3!} = \frac{N(N-1)(N-2)}{6} \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

오랜 시간이 지난 뒤 경우의 수 (상태 C) : ${}_NC_{N/2} = \frac{N!}{(N/2)!(N/2)!}$

N은 큰 수이므로 시간이 증가함에 따라 경우의 수가 증가함을 알 수 있다. 그리고 이 경우의 수는 이항정리의 계수 항임을 알 수 있으며 더 나아가 기체분자가 각 방에 있을 확률이 1/2 이므로 p = 1/2인 이항분포로도 기술할 수 있다. 기체분자의 개수가 많으면 그 이항분포는 표준 정규분포로 근사할 수 있음을 알 수 있으며, 오랜 시간이 지난 후 기체분자가 골고루 확산되었을 때 가장 확률이 높음을 알 수 있다.

2. 볼츠만의 공식을 이용하면 엔트로피를 구할 수 있다.

볼츠만의 공식 : $S = k_B \log W$ 에서 W가 경우의 수 이므로 1번의 결과를 이용하고 k_B는 일정한 상수이므로,

처음 칸막이를 열기 전 엔트로피 (상태 A) : $S_0 = k_B\log(1) = 0$

시간에 따라 변하는 엔트로피 : $S_1 = k_B \log N$

$$S_2 = k_B \log[\frac{N(N-1)}{2}] = k_B[\log N + \log(N-1) - \log 2]$$

$$S_3 = k_B [\log N + \log(N-1) + \log(N-2) - \log 6]$$

$$\cdots$$

오랜 시간이 지난 뒤 엔트로피 (상태 C): $S_{N/2} = k_B[\log(N!) - 2\log(\frac{N!}{2})]$

시간이 지남에 따라 엔트로피도 증가함을 알 수 있다. 이 결과는 같은 개수의 기체분자들은 더 넓은 공간에 골고루 퍼지려는 경향이 있으며 더 넓게 퍼질수록 더 큰 엔트로피를 가짐을 보여준다. 그래서 기체분자는 가능한 모든 공간을 활용하려고 하는 것은 엔트로피가 증가하는 방향이다. 그러나 기체분자가 다시 작은 공간으로 모여드는 것은 엔트로피가 줄어드는 방향임으로 열역학 제2법칙에 의해서 가능하지 않다.

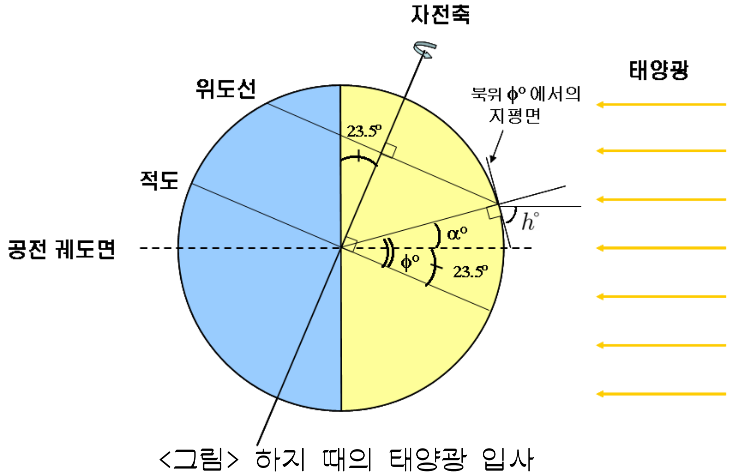
7 부산대학교 수시

제 시 문

(가) 현재 이용되는 지구상의 에너지 대부분은 태양으로부터 전달되어 저장되었거나 전달되고 있는 태양복사에너지이다. 석유, 석탄 등 화석에너지의 대체 에너지로 주목받고 있는 친환경 그린에너지의 하나인 태양광에너지도 태양복사에너지이다. 태양전지는 태양광에너지를 전기에너지로 변환하는 장치이다. 태양전지의 절대효율은 변환된 전기에너지와 입사된 태양광에너지의 비로 나타낸다. 태양전지 기술은 반도체 기술과 밀접한 관계가 있다. 우리나라는 세계적인 반도체 기술 국가인 만큼 그 기술 개발에 아주 유리하다. 물론 태양광에너지는 에너지의 밀도가 작고, 일조 시간, 기후와 계절 등에 따라 변동이 심하다는 문제점을 지니고 있다. 하지만, 지리적으로 깊은 산속이나 외딴섬과 같은 고립된 지역에서 사용할 수 있고 태양전지의 설비 규모를 자유롭게 조절할 수 있는 장점이 있다. 그리하여 태양광 에너지는 최근 우리나라에서 중요한 대체에너지원의 하나로 각광받고 있다.

(나) 태양광은 지구에서 매우 멀리 떨어진 태양으로부터 전파된다. 그러므로 지구에 도달하는 태양광은 아래 <그림>에서와 같이 평행한 광선으로 가정할 수 있다. 지구상의 한 지점에서의 지평면에 대한 태양광의 입사각도는, 지구의 자전축이 지구의 공전 궤도면에 수직인 축과 약 23.5°의 각을 이루기 때문에 지구의 공전 위치(계절)와 위도, 하루 중 시각에 의해 결정된다. 이로 인해 1년 중의 기후와 하루 중의 기온, 밤과 낮의 길이가 변하게 된다.

아래 <그림>은 하지 때에 태양광이 지구에 입사되는 현상을 간단하게 나타낸 것이다.



<그림> 하지 때의 태양광 입사

이 <그림>에서와 같이 태양광이 오른쪽으로부터 입사될 때 지구를 나타내는 원의 오른쪽 반은 지구의 낮이며 왼쪽 반은 밤이 된다. ϕ°는 북반구에서 위도를 나타낸다. 지구를 완전한 구라고 가정하고, 이 <그림>을 이용하여 다음과 같이 북위 ϕ°인 지점에서 하지 때의 낮과 밤의 길이를 계산할 수 있다.

$$\text{낮의 길이} = \left(1 - \frac{\theta^\circ}{180^\circ}\right) \times 24\text{시간}, \quad \text{밤의 길이} = \frac{\theta^\circ}{180^\circ} \times 24\text{시간} \quad \cdots\cdots\cdots \text{①}$$

(단, θ°는 $\cos(\theta^\circ) = \tan(23.5^\circ) \cdot \tan(\phi^\circ)$를 만족하는 $0^\circ \le \theta^\circ \le 90^\circ$인 각을 나타내며, 이 식은 위도 ϕ°가 어떤 값 이하까지에서만 성립한다.)

동지 때는 하지 때와는 달리 태양광이 <그림>의 왼쪽에서 입사되므로 식 ①에서의 밤의 길이와 낮의 길이를 바꾸면 된다. 또한, 춘분과 추분 때는 태양광이 <그림> 면과 수직으로 앞(춘분)과 뒤(추분)에서 입사되므로 밤과 낮의 길이는 동일하게 12시간이 된다.

(다) 태양광이 지평면과 이루는 각 중 90°이하인 각을 태양 고도라 한다. 태양 고도는 하루 동안 시간에 따라 변하는데 정오 때 가장 크다. 이때 태양 고도를 남중 고도라고 한다. 남중 고도는 그 지점의 위도와 계절에 따라 달라진다. 가령, 하지일 때 북위 $\phi^\circ \ge 23.5^\circ$인 지역에서 남중 고도 h°는 앞 <그림>을 참고하면 다음과 같이 나타난다.

$$h^\circ = 90^\circ - \alpha^\circ \ \text{ 또는 } \ h^\circ = 90^\circ - (\phi^\circ - 23.5^\circ) = 113.5^\circ - \phi^\circ \quad \cdots\cdots\cdots \text{②}$$

태양 고도가 높을수록 지표면에 도달하는 태양광 에너지는 많아진다. 가령, 하지의 정오 때 단위 면적당 지평면이 받는 태양광 에너지의 세기 I는 다음과 같이 남중 고도 h°, 북위 ϕ°에 관한 함수로 각각 나타낼 수 있다.

$$I(h^\circ) = I_0 \sin(h^\circ) \ \text{ 또는 } \ I(\phi^\circ) = I_0 \cos(\phi^\circ - 23.5^\circ) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

이 식에서 I_0는 h°가 90°일 때(태양광이 지평면과 수직일 때) I의 값을 나타낸 것으로, I의 최댓값에 해당한다. 지표면에 도달하는 태양광 에너지를 효율적으로 획득하기 위해서는 태양전지를 설치하고 작동할 때 태양 고도를 중요하게 고려해야 함을 말해 준다.

[1] 하지 때라고 가정하고, 다음 물음에 답하시오. [100점]

(1) 식 ①을 이용하여 적도에서 밤과 낮의 길이가 같음을 보이시오.

(2) 식 ①과 삼각함수의 증가와 감소의 성질을 이용하여, 적도에서 북쪽으로 갈수록(위도 ϕ°가 높아질수록) 낮의 길이가 길어짐을 보이시오.

(3) 어느 위도 이상이 되면 낮의 길이가 24시간이 되는 지점이 존재한다. 이 지점의 위도는 얼마인지 밝히시오.

[2] 다음 물음에 답하시오. [100점]

(1) 하지일 때의 태양의 남중 고도를 계산하는 식 ②를 참고하여, 우리나라(북위 $33^\circ \le \phi^\circ \le 43^\circ$)에서 동지와 춘분 때의 태양의 남중 고도를 각각 북위 ϕ°에 관한 함수로 표현하시오.

(2) 부산(북위 35°)에서 태양의 남중고도가 1년 동안 어떻게 변하는지 설명하시오.

[3] 태양전지의 절대효율이 정해져 있다고 가정할 때, 태양전지를 이용하여 태양광 에너지를 더 효율적으로 획득하기 위한 방법을 태양고도와 연관지어 설명하시오. [100점]

제시문 분석

• 밤과 낮의 길이

낮의 길이를 구하는 식이 낮의 길이$=\left(1-\dfrac{\theta^\circ}{180^\circ}\right)\times 24$시간 이고,

$\cos(\theta^\circ)=\tan(23.5^\circ)\cdot\tan(\phi^\circ)$이므로 결국 밤, 낮의 길이는 위도 ϕ°에 의해 결정된다.

• 남중고도를 구하는 식

간단한 평면 기하학적 원리로 남중고도를 구할 수 있다.

논제 분석

• 주어진 식을 이용하여 밤과 낮의 길이를 구할 수 있는가?

삼각함수의 증가, 감소를 이용하여 밤과 낮의 길이를 비교할 수 있다.

• 1년 동안 부산(북위 35°)에서 태양의 남중고도의 변화를 설명할 수 있는가?

하지 때 태양의 남중고도를 구하는 식을 이용하여 동지 때 태양의 남중고도를 구하는 식을 평면기하학을 이용하여 구할 수 있다. 춘분과 추분 때는 태양광이 그림면의 앞과 뒤에서 비침에 유의해야 한다.

배경지식 쌓기

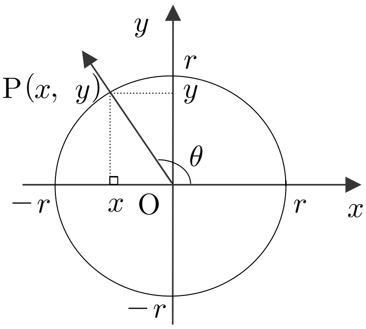
• 일반각의 삼각함수

오른쪽 그림에서

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$, $\quad$ $\mathrm{cosec}\,\theta = \dfrac{r}{y}$

$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$, $\quad$ $\sec\theta = \dfrac{r}{x}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, $\quad$ $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$



• 삼각함수 사이의 관계

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ $\qquad$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ $\qquad$ $1 + \cot^2\theta = \mathrm{cosec}^2\theta$

• $\dfrac{\pi}{2} \pm \theta$ 의 삼각함수

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = \cos\theta$ $\qquad$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\sin\theta$ $\qquad$ $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right) = -\cot\theta$ $\qquad$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta$

풀어보기

1. $\tan\theta = \sqrt{\dfrac{1-a}{a}}$ $(0 < a < 1)$일 때, $\dfrac{\sin^2\theta}{a+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)} + \dfrac{\sin^2\theta}{a+\sin\left(\dfrac{3}{2}\pi+\theta\right)}$ 의 값을 구하여라.

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

- **지구 자전의 증거**[1]

별의 일주운동이 지구의 자전으로 나타나는 현상이기는 하지만 옛사람들은 별이 움직이는 것으로 생각했기 때문에 지구 자전의 증거로는 미흡하였다. 지구 자전의 확실한 증거는 어떤 것이 있을까? 여러 가지가 있으나 그 중 가장 대표적인 것이 푸코의 전자다.

1851년, 푸코(Foucault 1819～1868)는 파리 판테온 성당 천정에 줄의 길이 67m, 추의 무게 28㎏인 전자를 매단 다음 진자를 흔들어 진자의 진동 방향이 시계 방향으로 회전하는 것을 보여 주었다. 즉, 진자를 일정한 방향으로 흔들어 놓았더니 진동 방향이 시계 방향으로 약 31시간에 1회전하는 것을 관측할 수 있었다. 이는 지구 자전의 확실한 증거가 된다. 즉, 진자가 진동하는 동안에 지면이 자전하기 때문에 진자의 진동면은 지면에 대하여 반대 방향으로 도는 것 같이 보이는 것이다.

푸코 진자의 회전 방향은 북반구에서는 시계 방향이고, 남반구에서는 반시계 방향이다. 이것은 천구상에서 볼 때 지구의 자전 방향이 북반구에서는 반시계 방향이고, 남반구에서는 시계 방향이기 때문이다.

[판테온 성당에 있는 푸코의 진자]

– 출처 : http://en.wikipedia.org/

1) 하이탑 지구과학II p73

예시답안

풀어보기

$$(\text{준식})=\frac{\sin^2\theta}{a+\cos\theta}+\frac{\sin^2\theta}{a-\cos\theta}=\frac{2a\sin^2\theta}{a^2-\cos^2\theta}\cdots ①$$

$$\tan^2\theta=\frac{1-a}{a}$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\frac{1-a}{a}$$

$$\cos^2\theta-a\cos^2\theta=a\sin^2\theta$$

$$\cos^2\theta=a(\cos^2\theta+\sin^2\theta)$$

$$\therefore\ \cos^2\theta=a,\ \sin^2\theta=1-a$$

이것을 ①에 대입하면 $\dfrac{2a(1-a)}{a^2-a}=-2$

논제 1

(1) 적도에서는 위도 ϕ 가 0이므로 $\cos(\theta^\circ)=\tan(23.5^\circ)\cdot\tan(0^\circ)=0$ $\quad\therefore\theta=90^o$

이것을 낮의 길이 식에 대입하면

$$\text{낮의 길이}=\left(1-\frac{90^\circ}{180^\circ}\right)\times 24\text{시간}=12\text{시간}$$

이므로 밤의 길이도 12시간이 되고, 낮과 밤의 길이는 같다.

(2) 북쪽으로 갈수록(위도 ϕ° 가 높아질수록) $\cos(\theta^\circ)=\tan(23.5^\circ)\cdot\tan(\phi^\circ)$는 증가한다.($\because$ $\tan x$는 증가함수)

그런데 $\cos x$ 는 감소함수이므로 $\cos(\theta^\circ)$ 가 증가하면 θ 는 작아진다.

따라서 낮의 길이$=\left(1-\dfrac{\theta^\circ}{180^\circ}\right)\times 24$시간 식에서 낮의 길이는 길어진다.

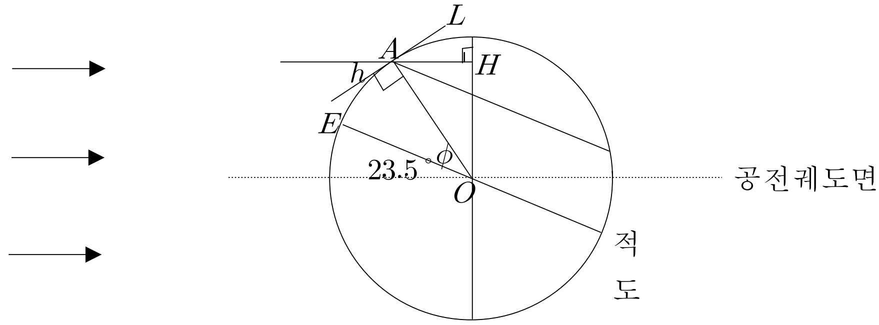
(3) 낮의 길이가 24시간이 되려면 $\theta^\circ=0^\circ$가 되어야 한다.

즉, $\cos(\theta^\circ)=\tan(23.5^\circ)\cdot\tan(\phi^\circ)$에서 $\tan(23.5^\circ)\cdot\tan(\phi^\circ)=1$이 되어야 하므로

$$\tan(\phi^\circ)=\frac{1}{\tan(23.5^\circ)}=\cot(23.5^\circ)=\tan(90^\circ-23.5^\circ)$$

즉, 위도가 66.5° 이상인 지점은 낮의 길이가 24시간이 된다.

논제 2 (1)



동지 때는 앞의 그림과 같이 지구 왼쪽에서 태양광이 비친다. 위도점 A에서 원에 그은 접선을 L이라 하자. $\angle LAH = h$ ($\because$ 맞꼭지각) 이므로 $\angle AOH = h$이다.

따라서 동지 때 남중고도 h는

$$h^{\circ} + \phi^{\circ} + 23.5^{\circ} = 90^{\circ}$$

$$\therefore h^{\circ} = 66.5^{\circ} - \phi^{\circ}$$

가 된다.

춘분 때는 <그림> 면과 수직되게 앞쪽에서 태양광이 비치므로 $\phi^{\circ} + h^{\circ} = 90^{\circ}$가 되므로 춘분 때 남중고도 h는

$$\therefore h^{\circ} = 90^{\circ} - \phi^{\circ}$$

(2) 부산은 북위 35°에 위치하므로 춘분에 남중고도 $90^{\circ} - 35^{\circ} = 55^{\circ}$에서 점점 고도가 높아져서 하지 때 $113.5^{\circ} - 35^{\circ} = 78.5^{\circ}$ 로 최고가 되고 또 다시 점점 낮아져서 추분에 55°가 된다. 이 후 다시 고도가 낮아져서 동지 때 $66.5^{\circ} - 35^{\circ} = 31.5^{\circ}$ 로 최저가 된다.

논제 3 $I(h^{\circ}) = I_0 \sin(h^{\circ})$에서 h°가 90°일 때 I가 최대가 된다. 그러나 계절에 따라 남중고도가 변하므로 태양전지를 이용하여 태양광 에너지를 더 효율적으로 획득하기 위해서는 계절에 관계없이 태양 전지판이 태양광과 이루는 각이 항상 90°를 유지시켜 주는 기계장치(마치 해바라기가 햇빛을 좇아가는 원리처럼)를 만들면 더 효율적이다.

8 서강대학교 수시(1)

제 시 문

(가) 현대는 디지털 시대이다. 이는 연속적인 것을 다루는 아날로그 방식의 사고에서 이산적인 사고로 전환하였음을 의미한다. 그런데 이산적이라는 것은 유한하거나 무한수열과 같이 자연수의 집합과 일대일 대응 관계에 있는 대상들을 다루는 것을 의미한다. 오늘날 이산수학은 대학에서 컴퓨터과학, 그 밖의 공학이나, 통계학, 확률론 그리고 OR 등을 공부하고자 하는 학생들에게 필수과목이 되고 있다.

그런데 이산수학에서 가장 기초적이며 중요한 것 중 하나는 유한집합의 원소의 개수를 세는 것이다. 이를 위해서는 ⓐ 주어진 유한집합과 일대일 대응 관계에 있으면서(따라서 두 집합은 개수가 같다), 보다 세기가 쉬운 다른 유한집합(들)을 생각하며 이를 해결하는 것이 보통이다.

그런데 두 개의 집합 C, D가 일대일 대응이라는 것은 C에서 D로의(또는 D에서 C로의) 전단사 함수가 존재한다는 것으로, 간단히 말하자면 하나의 집합에서 다른 집합으로의 함수가 존재하고 또 이의 역함수가 존재하는 것과 같다. ⓐ에 대한 예를 들자면 ⓑ k개의 원소로 이루어진 집합으로부터 중복을 허락하여 n개를 뽑아 만든 모든 중복집합의 개수 $M(k,\ n)$을 구하는 문제를 생각할 수 있다(여기서 중복집합에 있어서는 동일한 원소라 하더라도 서로 다르게 보나, 원소들의 순서는 고려하지 않는다).

가령 두 개의 원소로 이루어진 집합 $\{r,\ s\}$ 에서 중복을 허락하여 순서를 고려하지 않고 세 개를 뽑아 만든 중복집합은 다음과 같이 네 가지임을 알 수 있으므로 $M(2,\ 3)=4$이다.

$$\{r,\ r,\ r\}\ ,\ \ \{r,\ r,\ s\}\ ,\ \ \{r,\ s,\ s\}\ ,\ \{s,\ s,\ s\}$$

(나) 정보화시대에 살고 있는 우리는 모든 정보가 비트 수열로 변환되어 처리된다는 것을 알고 있다. 컴퓨터에 비트 수열의 상태로 자료가 저장되고, 휴대폰을 통한 음성도 비트 수열 상태로 전송된다. 예를 들어, 8개의 축구팀이 있다면 각각의 팀을 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111의 총 3개의 비트로 표현할 수 있다.

철수는 확률변수 X의 값을, 현옥은 확률변수 Y의 값을 알고 있으며, 철수와 현옥 모두 X와 Y의 비트 수열 표현 방법도 알고 있다. 현옥은 확률변수 X의 값을 알기 원한다. 이를 위해 철수와 현옥은 서로 메시지를 일정 회수만큼 교환한다. 메시지 전송이란 어느 한 사람이 다른 사람에게 비트 수열을 보내는 것을

뜻한다. 단, 메시지 하나의 비트수는 정해져 있지 않으나, 메시지 보내기의 횟수가 정해지면, 전송되는 비트의 총합의 최소화를 목표로 한다.

현옥이가 확률변수 X를 알기 위해 총 m회의 메시지를 전송하는 것을 허용할 때, 보내져야 하는 메시지들의 비트수의 총합의 최솟값을 $C_m(X,\ Y)$하자. 회수 m이 결정되면, 철수와 현옥 사이에 오고 가는 메시지의 방법이 정해지며, 이는 철수와 현옥에게 모두 공개된다. 예를 들어, 총 2회의 메시지가 허용된다면, 첫 번째 메시지와 두 번째 메시지가 각각 의미하는 것을 철수와 현옥 모두가 안다.

[1] 집합 A를 k개의 원소로 이루어진 집합으로부터 중복을 허락하여 n개를 뽑아 만든 모든 중복집합들의 모임이라고 하자. 집합 A와 아래의 집합 B는 일대일 대응 관계에 있다. 이에 대해 논술하라(ⓐ 참조).

$B=\ \{(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_k) \mid b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_k$는 양의 정수, $b_1+b_2+\cdots+b_k=n+k\}$

[2] 위 [1]의 집합 A와 집합 B사이의 일대일 대응 관계를 이용하고, 또 집합 B와 일대일 대응 관계에 있는 다른 구체적 대상의 예를 찾아서, 이들을 이용하여 ⓑ의 $M(k,\ n)$을 구하는 문제에 대하여 논술하라.

[3] 현옥이 TV에서 축구 경기를 보다가 잠시 전화를 받기 위해 집에서 나갔다. 이때 철수가 현옥의 집을 방문한다. 이 순간 축구 시합이 끝나고, 결과적으로 현옥은 시합한 두 팀의 이름만 알고, 철수는 이긴 팀만 안다고 가정하자. 현옥은 어느 팀이 이겼는지를 철수로부터 알고자 한다. 총 L개의 축구팀이 있다고 가정하자. 단 한 번의 메시지 전송이 허용된다면, 철수는 당연히 이긴 팀 이름을 현옥에게 알려주어야 한다. 그런데 총 L개의 팀이 있으므로 $[\log_2 L]$개의 비트수로 모든 팀을 표현할 수 있기에 $C_1(X,\ Y)=[\log_2 L]$이다. 여기서 $[a]$는 실수 a보다 크거나 같은 최소의 정수를 나타낸다. 그렇다면 메시지를 전송하는 것이 2회 가능하다고 할 때, 첫 번째와 두 번째 메시지의 전송 방향과, $C_2(X,\ Y)$와 $C_1(X,\ Y)$를 비교하여 그 효율성에 관하여 논술하라.(힌트 : 철수와 현옥 모두 각각의 팀이 어떤 비트 수열로 표현되는지 알고 있다.)

제시문 분석

- 제시문 (가)에서는 일대일 대응관계를 이용하여, 원소의 개수를 세기가 곤란한 집합의 경우, 원소의 개수를 세기가 보다 쉬운 다른 유한집합을 생각하여 해결할 수 있음을 말하고 있다.
- 제시문 (나)에서는 정보가 비트수열의 상태로 저장, 전송되는 상황을 예를 들어 제시하며, 두 사람 사이의 메시지 전송 시 비트의 총합의 최소화를 목표로 함을 언급하여 문제 상황을 설정하고 있다. 문자를 2회 만에 전송할 때 사용되는 비트 수의 효율성을 계산하는 능력을 평가하는 문제이다.

논제 분석

- [1]은 중복조합의 경우의 수를 일대일 대응관계에 있는 집합의 원소의 개수를 이용하여 구할 수 있는가 하는 문제이다. 즉 서로 다른 k개 중에서 중복을 허락해서 n개를 택하는 경우의 수는
  $A=\{(x_1, x_2, \cdots x_k)|x_1+x_2+\cdots+x_k=n,\ x_i\text{는 음이 아닌 정수}\}$의 원소의 개수와 같으며 이는 $B=\{(b_1, b_2, \cdots, b_k)|b_1+b_2+\cdots+b_k=n+k,\ b_i\text{는 양의 정수}\}$의 원소의 개수와 같음을 일대일 대응관계를 이용하여 보일 수 있는가 하는 문제이다.

- [2]에서는 중복조합을 계산하는 방법을 구체적 대상을 이용해서 설명할 수 있는가 하는 문제이다. 중복조합은 명칭은 조합이지만 실제로는 같은 것이 있는 순열을 계산하는 방법과 같다. 즉, $k-1$개의 구분자 |와 n개의 ○를 일렬로 세우는 경우의 수와 일대일 대응관계에 있음을 설명할 수 있는 지를 묻는 문제이다.

- [3]은 문자를 전송할 때 사용되는 비트 수의 최솟값이 전송횟수에 따라 어떻게 달라지는지를 묻는 문제이다. 제시문 (나)와 연결하여 생각해야 문제를 해결할 수 있다.

배경지식 쌓기

• 중복조합

집합 $\{a, b, c\}$에서 중복을 허용하여 6개를 추출하는 문제를 생각해 보자.

a b c	a b c	a b c
o o o l o o l o	l o o o l o o o	l l o o o o o o

위의 표에서 첫 번째 칸은 A를 3개, B를 2개, C를 1개 선택한 경우이고, 두 번째 칸은 A를 0개, B를 3개, C를 3개 선택한 경우이고, 세 번째 칸은 A를 0개, B를 0개, C를 6개 선택한 경우이다. 위의 사실에서 서로 다른 3개를 구분하려면 구분자 '1'이 2개 필요하고 선택된 6개는 o로 표현할 수 있음을 알 수 있다. 그리고 그 경우의 수는 ooooooll을 일렬로 배열하는 경우의 수와 같다.

위의 사실을 일반화하면, 서로 다른 k개 중에서 중복을 허락해서 n개를 택하는 경우의 수는 $k-1$개의 구분자 |와 n개의 ○를 일렬로 세우는 경우의 수와 같음을 알 수 있다.

따라서 그 경우의 수는 $\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$로 계산할 수 있다.

이는 $\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!} = {}_{n+k-1}C_k$로 표현할 수 있다. 이것은 $n+k-1$개의 위치 중에 $n-1$개를 뽑아 구분자 |를 위치시키는 것에 해당하기도 한다.

풀어보기

1. 다음 식에 대하여 주어진 조건에 알맞은 정수해의 개수를 구하시오.

$x_1 + x_2 + x_3 = 15$

① $x_i \geq 0,\ i = 1,2,3$

② $x_i \geq 1,\ i = 1,2,3$

③ $x_1 \geq 0,\ x_2 > 0, x_3 > 1$

읽기 자료

• **똑같아 보이는 무한집합이라도 서로 수준이 다르다.**

무한집합에서 자연수 전체의 집합 N과 일대일 대응이 되는 집합을 셀 수 있는 무한집합, 즉 가산집합(countable set)이라고 한다. 그러면 셀 수 없는 무한집합도 존재할까?

자연수 전체의 집합과 실수 전체의 집합 사이에는 일대일 대응을 정의할 수 없다. 왜냐하면 먼저 자연수 전체 집합의 원소 개수와 0부터 1 사이의 모든 실수의 개수에 대해 비교해 보자. 만약 두 집합사이에 일대일 대응관계가 성립하는 함수가 존재한다고 가정해보자. 그러면 1, 2, 3, …에 대응하는 순서대로 다음과 같은 소수를 나열할 수 있다. 이 때, 각 자리 수는 0과 9 사이의 자연수이고, 유한소수는 무한소수 표현을 쓰는 것으로 한다. (예를 들면 0.6은 0.599999…로 쓴다.)

① : $0.\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}\ a_{14}\cdots\cdots$

② : $0.\ a_{21}\ a_{22}\ a_{23}\ a_{24}\cdots\cdots$

③ : $0.\ a_{31}\ a_{32}\ a_{33}\ a_{34}\cdots\cdots$

④ : $0.\ a_{41}\ a_{42}\ a_{43}\ a_{44}\cdots\cdots$

⋮

이제 위 그림의 대각선을 따라서 a_{11}과 다른 자연수 b_1을 고르고, a_{22}와 다른 자연수 b_2를, a_{33}와 다른 b_3를 차례대로 골라서 다음과 같은 수 *을 만든다.

$$* : 0.\ b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots\cdots \ (\text{즉, } b_1 \neq a_{11},\ b_2 \neq a_{22},\ b_3 \neq a_{33},\ \cdots\cdots)$$

새로 생겨난 *는 위에 나열된 ①, ②, ③, ④, …의 소수 중 그 어느 것과도 일치하지 않는다. 왜냐하면 $b_1 \neq a_{11}$이므로 ①과 *은 소수 첫째 자리가 다른 수이기 때문에 같은 소수가 될 수 없다. 또, $b_2 \neq a_{22}$이므로 ②와 *은 소수 둘째 자리가 다른 수이기 때문에 같은 수가 되는 것은 불가능하다. 같은 이유로 *와 위에 배열된 모든 소수는 같지 않다. 이는 자연수와 일대일대응에서 탈락된 소수가 있음을 보여준다. 그러므로 0과 1 사이의 실수 전체 집합과 자연수 전체 집합은 일대일대응이 될 수 없다. 이로써 자연수보다 0과 1 사이의 실수가 훨씬 많다는 것을 알 수 있다. 0과 1 사이의 실수 전체 집합의 원소 개수와 실수 전체 집합의 원소 개수가 같음을 보일 수도 있다.

이와 같이 자연수와 일대일 대응을 만들 수 없는 무한집합도 존재하고 이를 셀 수 없는 무한집합, 즉 비가산집합(uncountable set)이라 한다. 따라서 실수 전체의 집합 R은 비가산무한집합이다.

개요 짜기

답안 작성

예시답안

풀어보기

1. 서로 다른 3개 중에서 중복을 허용하여 15개를 선택하는 문제와 같다. 즉, x_1을 선택하지 않은 경우, $x_1=0$이고, 두 번 선택한 경우 $x_2=2$이다.

중복조합을 이용하면 2개의 구분자 |과 15개의 0을 나열하는 경우의 수와 같으므로 $\frac{17!}{2!15!}=136$개이다.

2. $x_1+x_2+x_3=15$, $x_i \geq 1$, $i=1, 2, 3$이므로, $x_1=y_1+1$, $x_2=y_2+1$, $x_3=y_3+1$이라고 하면 $y_1+y_2+y_3=12$의 음이 아닌 정수해의 개수와 같으므로 $\frac{14!}{2!12!}=91$개의 경우가 있다.

3. $x_1+x_2+x_3=15$, $x_1 \geq 0$, $x_2>0, x_3>1$이므로 $x_2=y_2+1$, $x_3=y_3+1$이라고 하면 $y_1+y_2+y_3=12$의 음이 아닌 정수해를 찾는 경우의 수와 같으므로 91개의 경우를 찾을 수 있다.

논제 1 집합 A를 k개의 원소로 이루어진 집합으로부터 중복을 허락하여 n개를 뽑아 만든 모든 중복 집합들의 모임이라고 하자. 이 때 서로 다른 k개의 원소를 각각 $x_1,x_2\cdots,x_k$라고 하자. $x_i(i=1,\cdots,k)$를 선택하지 않으면, $x_i=0$에 대응시키고, 한 번 뽑았을 때$x_i=1$에 대응시키고, $\cdots$, n번 뽑았을 때, $x_i=n$에 대응시키면, 집합 A와 집합 $X=\{(x_1, x_2, \cdots x_k)|x_1+x_2+\cdots+x_k=n, x_i$는 음이 아닌 정수$\}$는 일대일 대응관계에 있다.

여기서 $b_i=x_i+1$에 대응시키면, $b_1+b_2+b_k=(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots(x_k+1)=n+k$ $B=\{(b_1, b_2, \cdots, b_k)|b_1+b_2+\cdots+b_k=n+k, b_i$는 양의 정수$\}$가 된다. 따라서 집합 X와 집합 B는 일대일 대응이다. 이것은 집합 A와 집합 B가 일대일 대응 관계에 있음을 의미한다.

논제 2 A, B, C가 주어졌을 때, 중복을 허용해서 4개를 선택하는 경우를 다음과 같이 생각해 보자. A, BB, C를 0|00|0과 같이 생각할 수 있다. 즉, 서로 다른 세 가지를 구분하려면 '|'이 두 개 필요하고 각각의 개수는 0의 개수로 표현할 수 있다.

따라서 서로 다른 k개 중에서 중복을 허락해서 n개를 택하는 경우의 수는 $k-1$개의 구분자 '|'와 n개의 '0'을 일렬로 세우는 경우의 수와 일대일 대응관계에 있음을 알 수 있다.

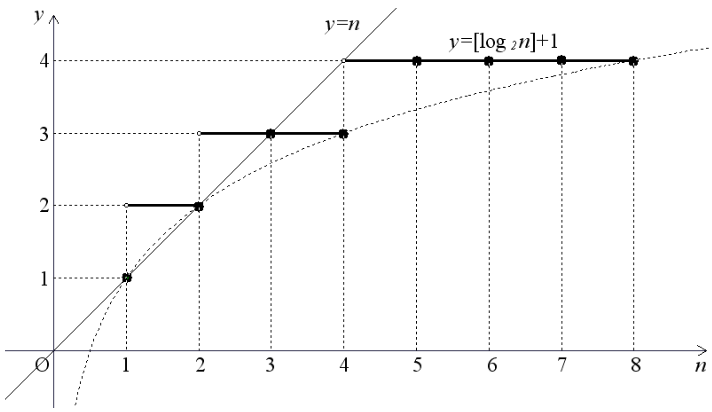
따라서 그 경우의 수는 같은 것을 포함하는 순열의 수로써 $\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}$로 계산할 수 있다. 그런데 $\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}={}_{n+k-1}C_k$로 표현할 수 있다.

이것은 집합 A의 원소의 개수가 $M(k,\ n)=\dfrac{(n-1+k)!}{(n-1)!k!}={}_{n+k-1}C_k$임을 의미한다.

논제 3 현옥이는 시합한 두 팀의 이름을 이미 알고 있고 그것을 비트로 표현한 이진법의 수를 이미 알고 있고 철수는 이긴 팀의 이진법 표현을 알고 있다는 것이 가정이다. 만약에 $[\log_2 L]=n$이라고 하자. 시합한 두 팀은 서로 다른 팀이므로 비트 수가 다른 $i(0 \le i \le n)$번째 비트가 반드시 존재한다.

따라서 현옥이는 i번째 비트수를 질문하면 되고 철수는 그것을 한 비트(0 또는 1)로 답하면 된다. 그런데 $C_1(X,Y)=[\log_2 L]=n$이므로 n까지의 수를 표현하기 위한 비트수의 개수는 $[\log_2 n]=[\log_2[\log_2 L]]$이고 철수가 답하기 위한 비트 수는 1이다.

따라서 $C_2(X,Y)=[\log_2 n]+1=[\log_2[\log_2 L]]+1$이고, 첫 번째 메시지 전송 방향은 현옥→철수, 두 번째 전송 방향은 철수→현옥이다.

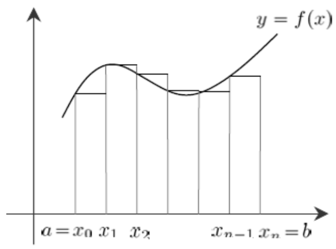


위의 그래프에서 n이 4 이상의 자연수이면 $[\log_2 n]+1<n$이다. 따라서 $[\log_2 L]$이 4 이상의 자연수이면 즉, L이 9 이상이면 $C_2(X,Y)<C_1(X,Y)$이다. 이것은 9개 이상의 팀이 경기를 할 때는 두 번 전송하는 것이 비트의 효율성을 높인다는 것을 의미한다.

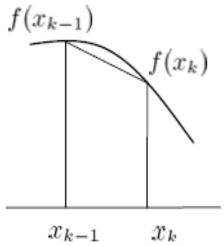
9 서강대학교 수시(2)

제 시 문

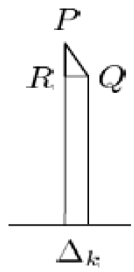
(가) 직사각형 또는 직사각형이 아닌 유한한 영역의 면적을 쉽게 구할 수 있을까? 이런 질문은 *B.C.* 3세기 경, 위대한 수학자안 아르키메데스(Archimedes)에 의해 처음으로 생각되었고 연구되었다. *A.D* 17세기경에 이르러 뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)에 의해서 미분의 개념이 구체화되었다는 것을 생각한다면 아르키메데스의 연구 업적은 매우 놀라운 것이라고 할 수 있다. [그림 1]과 같이 선분$[a,\ b]$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 넓이를 계산하기 위하여, 선분 $[a,\ b]$를 n등분하여 그림과 같이 직사각형을 만들고 그 넓이를 더한 값을 S_n이라고 하자. 이 때 선분 $[a,\ b]$를 잘게 나눌수록 n은 커지고 S_n은 원래 도형의 넓이에 가까워진다는 것이 아르키메데스의 생각이다.



[그림 1]



[그림 2]



[그림 3]

(나) 이러한 생각으로부터 [그림2]처럼 연속적으로 미분 가능한 곡선 $y=f(x)$의 구간 $a \le x \le b$를 잘게 나눈 부분 현의 길이를 합하여 호의 길이를 근사한다. 이러한 방법을 구분 구적법이라 부르며, 이를 이용하여 적분 형태로부터 원하는 호의 길이를 얻을 수 있다.

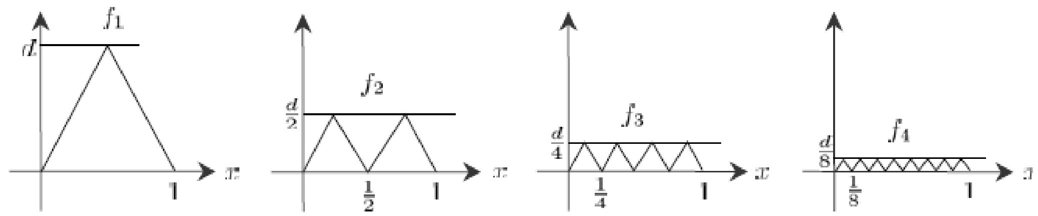
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[f(x_k)-f(x_{k-1})]^2+\left[\frac{b-a}{n}\right]^2}=\int_a^b\sqrt{[f'(x)]^2+1}\,dx$$

(다) 그런데, 반드시 현의 길이의 합으로부터 호의 길이를 구하여야 할까? [그림 3]처럼 구간 $[a,\ b]$를 매우 촘촘히 분할하여, $\Delta_k = |x_k - x_{k-1}|$을 충분히 작게 한다면, 함수 값의 차, $|f(x_k)-f(x_{k-1})|$(즉, 높이의 차 $\overline{PR}$)와 현 $\overline{PQ}$는 매우 근사한 값을 가진다. 따라서 각 구간별 높이의 차를 더해감으로써 호의 길이를 근사하려고 한다.

그렇다면, 연속적으로 미분 가능한 곡선 f에 대한 호의 길이가 다음과 같이 계산될 수 있다:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \mid f(x_k)-f(x_{k-1}) \mid = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} \frac{\mid f(x_k)-f(x_{k-1}) \mid}{\triangle_k} \triangle_k = \int_a^b \mid f'(x) \mid dx$$

(라) 구간 [0, 1]에서 정의되고 각 변의 길이가 1 인 산(山)모양의 함수 f_1을 [그림 4]처럼 톱니 모양으로 바꾸는 변환을 적용하여 f_n을 만든다. 이 함수들 $\{f_n\}$ 은 구간 [0, 1]의 모든 점에서 0 으로 수렴하는 수열이 된다. 각 n 에 대해서 곡선 f_n의 길이는 항상 2 이다. 그러나 f_n의 극한으로 만들어진 곡선은 $x-$축의 [0, 1]과 같으므로, 그 길이는 1 이다. 이러한 결과로부터 구간 [0, 1]의 길이에 대하여 무엇을 말할 수 있을까?



[그림 4]

[1] 제시문 (가)를 참고하여, (나)의 방법에서 곡선이 '연속적으로 미분가능하다.'는 조건이 반드시 필요한지, 그렇지 않다면 꺾인 곡선 또는 끊어진 곡선에 대해서 이 방법을 적용할 수 있는지에 대하여 예를 들어 논술하라.

[2] 제시문 (가)를 참고하여, (다)가 올바르다면 논증하고 그렇지 않다면 반례를 들어 설명하되, (다)의 극한은 무엇을 뜻하는지 예를 들어 논술하라.

[3] 제시문 (나)를 참고하여, (라)의 올바른 결론에 관하여 적절한 예를 들어 논술하라.

제시문 분석

- 제시문 (가)에서는 정적분의 의미를 설명하고 있다.
- 제시문 (나)에서는 연속적으로 미분가능한 곡선의 호의 길이를 구분구적법으로 하는 방법을 설명하고 있다.
- 제시문 (다)는 정적분에 대한 오해를 예시한 지문이다.
- 제시문 (라)는 무한소의 합에 대한 오해의 예를 제시한 지문이다.

논제 분석

- [1]은 곡선의 길이를 구하려면 피적분함수가 연속적으로 미분 가능하다는 조건이 반드시 필요한 것인지를 묻는 문제이다. 피적분함수가 유한개의 미분 불가능한 점을 가지면 이때는 적분 구간을 나누어서 적분해야 한다. 그렇지 않고 그냥 적분을 하면 모순이 발생하는 사례를 알고 있는가를 물어보는 문항이다.
- [2]는 무한소라고 해서 무조건 서로 같다고 주장하면 모순이 있음을 설명하는 능력을 평가하는 문제이다. 또 주어진 정적분의 식을 보고 그 의미를 파악할 수 있는지를 평가하는 문제이다.
- [3]은 곡선의 길이를 구하는 올바른 방법을 알고 있는가와 무한소의 무한합이 1이 되는 경우와 1이 되지 않는 경우를 구분할 수 있는 능력을 묻는 문제이다.

배경지식 쌓기

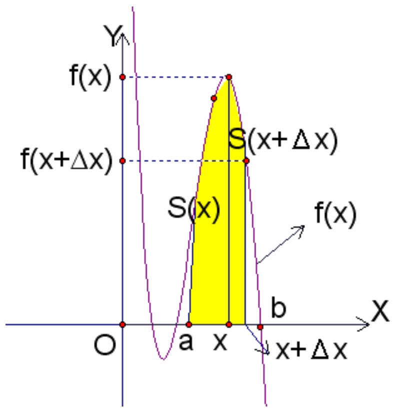
• 적분 가능한 함수의 충분조건은 연속함수이다.

미분 가능한 함수는 흔히 곡선의 모양을 보고 바로 판정할 수 있다. 곡선이 매끄러운 곡선(smooth curve)이면 미분가능하다. 그렇다면 “적분 가능한 함수의 충분조건은 무엇인가?”라는 의문이 들 수 있다. 고등학교에서 직접적으로 적분가능 조건을 언급하고 있지는 않지만 다음과 같이 유추할 수 있다. 엄밀한 증명은 대학교 과정의 미적분에서 취급한다. 아래의 내용은 미적분학의 기본정리를 간단히 설명한 내용의 일부이다.

함수 $y=f(t)$가 폐구간$[a, b]$에서 연속이고 $a \leq t \leq b$ 에서

$y=f(t)$와 직선 $t=a$ 와 $t=x$ 및 t 축 사이의 넓이를 $S(x)$라고 하면

$S(x)=\int_a^x f(t)dt$일 때, $S(x+\Delta x)-S(x)$를 생각해 보자. (그림 참조)



구간 $[x,x+\Delta x]$에서 $f(t)$의 최댓값을 M, $f(t)$의 최솟값을 m이라고 하면 $m\Delta x \leqq S(x+\Delta x)-S(x) \leqq M\Delta x$ 이다. 여기서 양변을 Δx로 나누면

$m \leqq \dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} \leqq M$ 이고 여기에 극한을 취하면

$f(x)=\lim\limits_{\Delta x \to 0} m \leqq \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{S(x+\Delta x)-S(x)}{\Delta x} \leqq \lim\limits_{\Delta x \to 0} M = f(x)$ … ①이므로

$\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^x f(t)dt = f(x)$임을 알 수 있다.

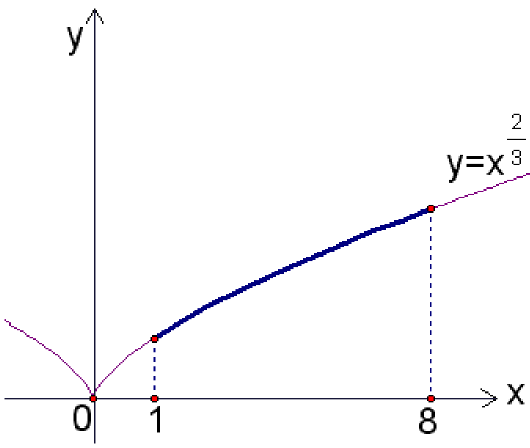
위의 정리에서 핵심내용은 ①임을 알 수 있다.

①이 성립하려면 핵심적인 사항은 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x)=f(x)$이 성립해야 한다.

이것은 바로 연속함수의 정의(definition)이다. 사실 연속함수의 정의는 적분 가능성을 염두에 두고 수학자가 연속의 정의를 그렇게 만든 것이다.

풀어보기

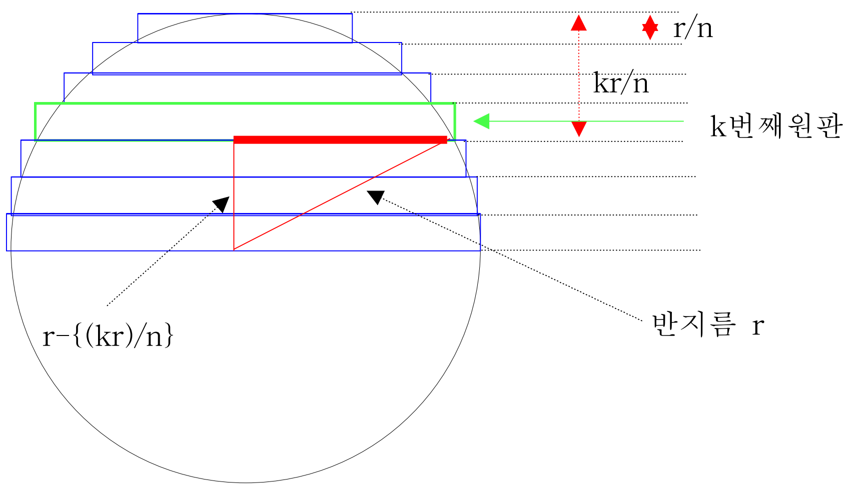
1. 곡선 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 의 $x=1$ 에서 $x=8$ 까지의 호의 길이를 구하여라.



읽기 자료

- **구분구적법으로 구의 부피를 구해 보자.**

반지름의 길이가 r인 구의 부피를 구하기 위해 아래 그림과 같이 구를 얇은 판으로 나누자.



우선 반구의 부피를 구분구적법으로 구해 2배 해 주자. 위 그림으로 부터 k 번째 원판의 두께는 $\frac{r}{n}$이고, 원판의 반지름은 피타고라스 정리를 쓰면 $\sqrt{\frac{2kr^2}{n}-\frac{k^2r^2}{n^2}}$ 이 된다.

따라서 원판의 부피들의 합은 $\sum_{k=1}^{n}\pi r^2\left(\frac{2k}{n}-\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{r}{n}$ 이다.

그러므로 반구의 부피는

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\pi r^2\left(\frac{2k}{n}-\frac{k^2}{n^2}\right)\frac{r}{n}$$

이고 이것은 $\int_0^1 \pi r^3(2x-x^2)dx$가 된다.

따라서 반구의 부피는 $\pi r^3[x^2-\frac{1}{3}x^3]_0^1=\frac{2}{3}\pi r^3$ 이므로 구의 부피는 $\frac{4}{3}\pi r^3$이 된다.

개요 짜기

답안 작성

예시답안

풀어보기

(풀이 1) $x>0$이므로 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 을 x에 관해서 풀면

$x=y^{\frac{3}{2}}$ 이므로 $x=1$ 일 때, $y=1$, $x=8$ 일 때, $y=4$ 이다. 그런데 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}$ 이므로

$1+\left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2=1+\dfrac{9}{4}y=\dfrac{1}{4}(4+9y)$이다. 따라서 호의 길이를 구하는 공식에 대입하면

호의 길이 s 라고 하면

$$s=\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy=\frac{1}{2}\int_1^4\sqrt{4+9y}\,dy=\frac{1}{27}\left[(4+9y)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{1}{27}(40\sqrt{40}-13\sqrt{13})$$

(풀이 2) 제시문에서 사용된 공식을 그대로 사용하면

$s=\displaystyle\int_1^8\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_1^8\frac{\sqrt{9\sqrt[3]{x^2}+4}}{3\sqrt[3]{x}}dx$ 이므로 여기서 $\sqrt[3]{x}=t$로 치환하면

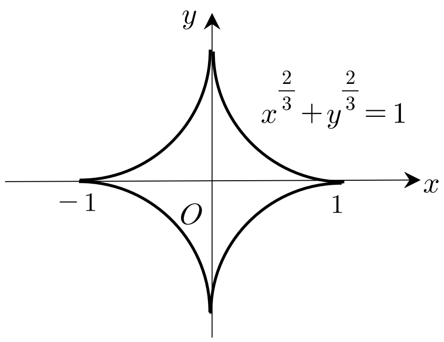
$$s=\int_1^2\sqrt{9t^2+4}\cdot tdt$$

이고, 다시 t^2 을 l 로 치환하면

$$s=\int_1^4\sqrt{9l+4}\cdot\frac{1}{2}dl=\frac{1}{27}\left[(9l+4)^{\frac{3}{2}}\right]_1^4=\frac{1}{27}(40\sqrt{40}-13\sqrt{13})$$

이다. 참고로 (풀이 1)이 (풀이 2)보다 쉬움을 알 수 있다.

논제 1 연속적으로 미분가능하다는 조건은 반드시 필요하다. 예를 들어 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 을 생각해 보자. 이 곡선은 아래 그림과 같이 별처럼 생긴 곡선(astroid)이다.



이 곡선의 $y\geq 0$인 부분의 곡선의 길이(이 길이를 2배하면 전체 곡선의 길이가 나온다.)를 구하기 위해 제시문 (나)의 공식을 사용해 보자.

$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$ 를 정리하면 $y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 가 되므로 $y'=-x^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}$ 이다.

따라서 $\sqrt{1+(y')^2}=x^{-\frac{1}{3}}$ 이 되므로

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\int_{-1}^{1}x^{-\frac{1}{3}}\,dx=\frac{3}{2}\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{1}=0$$

가 되어 모순이다. 이는 $y=\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ 이 구간 $[-1,1]$에서 미분불가능한 점 $x=0$을 포함하고 있기 때문이다.

그러므로 연속적으로 미분가능하다는 조건은 반드시 필요하다.

따라서 이와 같은 경우는 미분 가능한 구간으로 나누어 적분해 주어야 곡선의 길이를 구할 수 있다. 즉 위의 예에서는 제1 사분면의 곡선의 길이를 구해서 4 배해 주어야 한다. 그러므로 $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$의 곡선의 길이는

$$4\int_{0}^{1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=4\int_{0}^{1}x^{-\frac{1}{3}}\,dx=6\left[x^{\frac{2}{3}}\right]_{0}^{1}=6$$

이 된다.

논제 2 제시문 (다)의 추측은 잘못된 것이다. 예를 들어 $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$를 생각해 보자. 이 곡선의 $x=0$ 에서 $x=1$ 까지의 곡선의 길이 l은 제시문 (나)에 의하면 다음과 같이 구할 수 있다.

$y'=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 이므로 $\sqrt{1+(y')^2}=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 가 된다. 따라서

$$l=\int_{0}^{1}\sqrt{1+(y')^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$$

이다. 그러나 제시문 (다)의 방법에 의하면

$$\int_{0}^{1}|y'|dx=\int_{0}^{1}\frac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)-1$$

이 되어 서로 다른 값이 나온다.

제시문 (다)에서 구한

$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{|f(x_k-f(x_{k-1})|}{\triangle_k}\triangle_k=\int_{a}^{b}|f'(x)|\,dx$는 어떤 곡선 $y=f(x)$가 $x=a$에서 $x=b$ 까지 변할 때, $f(x)$의 변화량 즉, $f(b)-f(a)$를 나타낸다.

논제 3 $\left[0,\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$에서 $f_n{}'(x)$는 직선의 기울기이므로 $f_n{}'(x)=\sqrt{3}$이다.

따라서 호의 길이를 s라고 하면

$$s=2^n\int_0^{\frac{1}{2^n}}\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}\,dx=2^n\int_0^{\frac{1}{2^n}}2dx=2\cdot 2^n\int_0^{\frac{1}{2^n}}1dx=2$$

이다.

여기서 제시문 (라)에서처럼 높이가 0에 근접한다고 해서 산 모양의 선분의 길이의 무한 합이 밑변의 길이와 같다고 주장하는 것은 무리가 있다. 이것은 무한소의 무한합이 1이 된다는 주장으로 다음과 같은 반례를 들 수 있다.

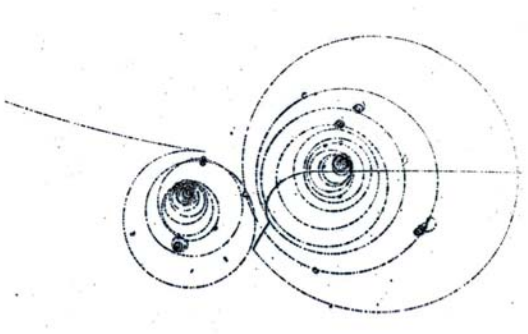
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(n^2+n)}{n^2}=\frac{1}{2}$$

이것은 무한소의 무한 합이 1이 아닐 수도 있음을 보여 준다.

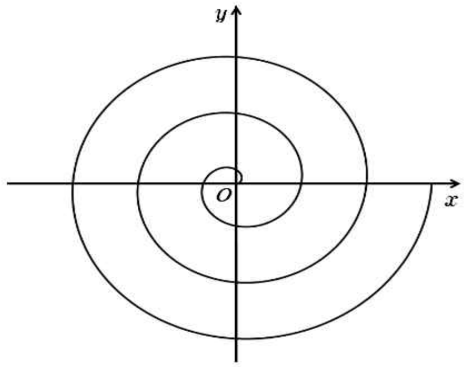
10 서울대학교 정시

제 시 문

(가) 20세기 초기에 새로운 입자들의 발견에는 안개상자 실험이 중요한 역할을 하였다. 전하를 띤 입자가 안개 속을 지나갈 때 작은 물방울이 형성되면서 [그림1]과 같은 자취를 볼 수 있다. 안개상자에 자기장을 함께 걸어 주면 전하를 띤 입자는 자기력에 의하여 원 운동을 하며, 그 반지름은 입자의 운동량에 비례한다. 한편 움직이는 입자는 안개 입자 또는 공기와 부딪혀 연속적으로 조금씩 에너지를 잃어 원 운동의 반지름은 점차 줄어든다. 입자는 나선(와선) 모양을 따라 움직이다가 결국 모든 에너지를 잃고 정지한다.



[그림1]

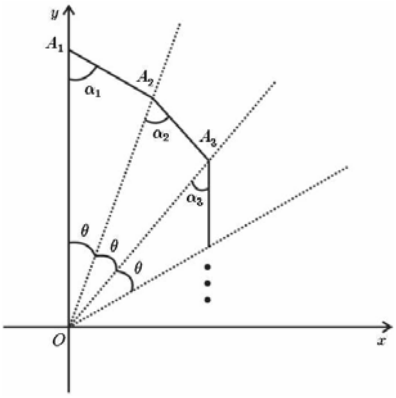


[그림2]

기원전 250년경 아르키메데스는 한 나선을 연구하였는데, 그것은 좌표평면 위를 움직이는 점의 좌표 $(x,\ y)$가 $x=\theta\cos\theta$, $y=\theta\sin\theta$(단, θ는 매개변수)로 정의되는 곡선으로서, $\theta\geq 0$인 경우 [그림2]와 같은 자취를 갖는다. 아르키메데스는 자와 컴퍼스만으로는 작도가 불가능한 기하학의 문제들, 예컨대 각의 3등분 문제, 원의 넓이와 같은 정사각형을 찾는 문제 등을 이러한 나선을 사용하여 쉽게 해결할 수 있음을 보였다.

먹잇감을 향해 날아가는 독수리를 하늘 위에서 내려다보면, 독수리는 먹이를 가장 잘 관찰할 수 있는 각도를 유지하면서 날아간다. 독수리가 먹이를 가장 잘 관찰할 수 있는 방향은 날아가고 있는 방향이 아니라, 날아가는 방향에서 일정한 각도를 이루고 있다. 1638년 데카르트가 발견한 로그 나선 또한 이러한 성질을 가지고 있다. 즉, 로그 나선의 각 점에서의 접선과 그 점에서 나선의 중심을 잇는 선분이 이루는 각도는 항상 일정하다. 예를 들어, 좌표평면 위를 움직이는 점의 좌표 $(x,\ y)$가 $x=e^{\theta}\cos\theta$, $y=e^{\theta}\sin\theta$(단, θ는 매개변수)로 주어지는 로그 나선은 각 점에서의 접선과 그 점에서 원점까지의 선분이 이루는 각도가 항상 $\frac{\pi}{4}$이다.

(나) 나선의 형태와 길이와의 관계를 알아보기 위하여 선분으로 이루어진 다각 나선을 생각해보자. [그림3]과 같이 평면 위의 점 $A_1(0,\ 1)$에서 시작하여 시계 방향으로 각 θ만큼 회전하되 y축과 각 α_1을 이루도록 하여 선분을 점 A_2까지 긋는다. 같은 방법으로 차례로 각 $\alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4,\cdots$를 이루면서 선분들이 $\overline{OA_n} \geq \overline{OA_{n+1}}(n=1,\ 2,\cdots)$을 만족하며 서로 겹치지 않고 점차 안 쪽 방향으로 전진해 가면서 다각 나선을 만든다. 이와 같은 다각 나선은 주어진 각의 수열 $\{\alpha_n\}$에 따라 다양한 형태로 나타난다.



[그림3]

(다) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다. 그러나 일반적으로 그 역은 성립하지 않는다. 예를 들어, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$은 발산하고 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$은 수렴한다는 사실이 알려져 있다. 또한 모든 $n=1,\ 2,\cdots$에 대하여 $0 < a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다는 것도 알려져 있다. 이 사실을 이용하면 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$이 수렴함을 알 수 있는데, 그 이유는 $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}(n=1,\ 2,\cdots)$이기 때문이다.

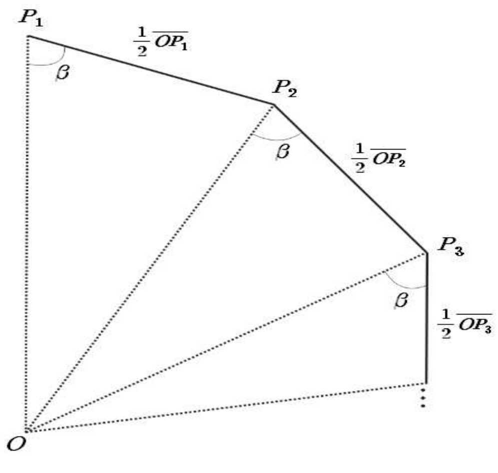
[1] 제시문 (나)에 주어진 임의의 수열 $\{\alpha_n\}$에 관하여 각 $\theta = \dfrac{\pi}{2010}$일 때,

(1) 다각 나선이 원점으로 한없이 가까워지지 않을 수도 있음(즉, n이 한없이 커질 때, $\overline{OA_n}$이 0으로 수렴하지 않을 수도 있음)을 예를 들어 설명하시오.

(2) 원점으로 한없이 가까워지는 경우에, 다각 나선을 이루고 있는 선분들의 길이의 무한급수 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots$가 항상 수렴하는지 논하시오.

[2] 제시문 (나)에 주어진 임의의 수열 $\{\alpha_n\}$에 관하여 $0<\alpha_1<\theta<\dfrac{\pi}{3}$이고 $0<\alpha_{n+1}\le\alpha_n\,(n=1,2,\cdots)$일 때, 다각 나선이 원점으로 한없이 가까워짐을 설명하시오. 또, 다각 나선을 이루고 있는 선분들의 길이의 무한급수 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots$가 항상 수렴함을 설명하시오.(단, θ는 고정되어 있다.)

[3] 원점이 O인 좌표평면 위에 한 점 P_1이 주어졌다고 하자. 아래 그림과 같이 점 P_1에서 선분 OP_1에 대하여 각 β방향으로 길이 $\dfrac{1}{2}\overline{OP}$만큼 이동한 점을 P_2라 하자. 이러한 과정을 계속 반복하여, 점 P_n에서 선분 OP_n에 대하여 각 β 방향으로 길이 $\dfrac{1}{2}\overline{OP_n}$만큼 이동한 점을 P_{n+1}이라 하자. n이 한없이 커짐에 따라 점 P_n이 좌표평면에서 어떻게 움직이는지 $\cos\beta$에 관하여 구체적으로 기술하시오.



[4] 제시문 (가)의 로그 나선 $x=e^{\theta}\cos\theta,\, y=e^{\theta}\sin\theta$ 위의 한 점 P에서 나선의 접선을 긋고, 원점 O에서 선분 OP에 수직인 직선을 그어 접선과 만나는 점을 Q라 고 하자. θ가 $\dfrac{\pi}{2}$에서 π까지 변할 때, 선분 PQ가 지나간 영역을 구체적인 그림으로 나타내고 그 넓이를 구하시오.

제시문 분석

• **아르키메데스 나선, 로그나선 등 여러 가지 나선의 예와 그 특징**

안개상자 실험과 수학사에서 등장하는 아르키메데스의 나선, 자연현상에서 나타나는 로그 나선을 이야기 형식으로 제시하고, 로그나선의 특징을 구체적으로 설명하고 있다.

• **다각나선의 특징**

선분들이 서로 겹치지 않으면서 점차 안쪽 방향으로 전진해가면서 만들어지는 다각나선을 통해서 나선의 형태와 길이와의 관계를 알아볼 수 있다.

• **무한급수의 수렴성**

모든 $n=1,\ 2,\cdots$에 대하여 $0<a_n\le b_n$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.

논제 분석

• **각에 따라 변하는 다각나선의 움직임을 이해하고 적절한 예를 구할 수 있는가?**

㉠ 등비수열의 합을 이용하여 $\overline{OA_n}$이 0으로 수렴하지 않는 경우를 찾을 수 있다.

㉡ 다각 나선을 이루고 있는 선분들의 길이의 무한급수가 수렴하는 경우와 수렴하지 않는 경우를 조화수열을 이용하여 찾을 수 있다.

• **주어진 조건하에서 다각나선의 움직임을 설명할 수 있는가?**

삼각함수, 무한등비급수, 제시문 (다)를 이용하여 다각나선의 움직임을 설명할 수 있다.

• **길이에 따라 변하는 다각나선의 움직임을 예측하고 분류할 수 있는가?**

제2코사인법칙, 등비수열의 수렴조건으로 다각나선의 움직임을 분류할 수 있다.

• **로그나선의 기하학적 성질을 이용하여 주어진 도형의 넓이를 구할 수 있는가?**

제시문 (가)의 ‘로그 나선은 각 점에서의 접선과 그 점에서 원점까지의 선분이 이루는 각도가 항상 $\frac{\pi}{4}$이다’와 도형의 회전이동을 이용하여 논제에서 설명한 도형의 모양을 추측하고 넓이를 구할 수 있다.

배경지식 쌓기

- **무한등비급수**

㉠ 첫째항이 a, 공비가 r 인 무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 얻은 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \text{ (단, } a \neq 0\text{)}$$

을 무한등비급수라고 한다.

㉡ 무한등비급수의 수렴과 발산

○ $|r| < 1$일 때에만 수렴하고, 합이 존재한다. 합을 S라 하면

$$S = \frac{a}{1-r} \quad \text{곧,} \quad \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

○ $|r| \geq 1$일 때에는 발산한다.

- **사인법칙과 제2코사인법칙**

㉠ 사인법칙 : $\triangle ABC$ 에서 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ (단, R는 외접원의 반지름)

㉡ 제2코사인법칙 : $\triangle ABC$ 에서 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$$

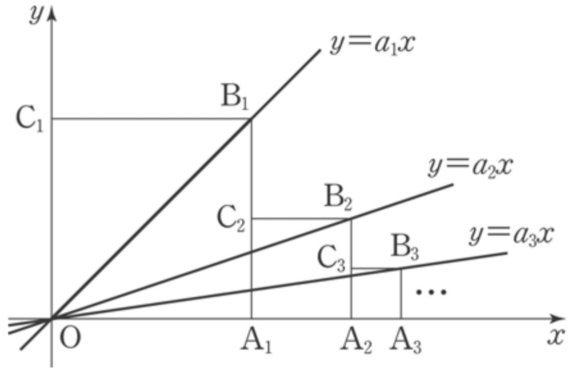
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

풀어보기

1. 다음 문장이 참이면 증명하고, 거짓이면 반례를 드시오.

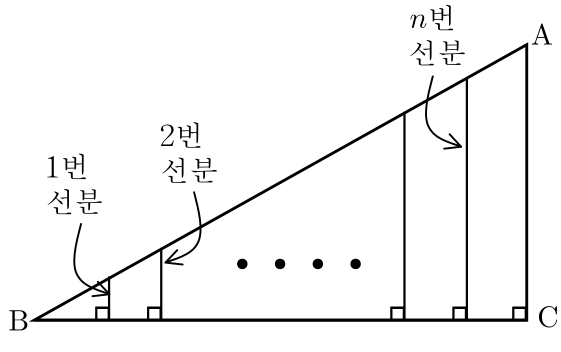
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < a_n < 1\text{이면 } \lim_{n\to\infty} a_1 \times a_2 \cdots a_{n-1} \times a_n = 0\text{이다.}$$

2. 그림과 같이 x 축 위에



$\overline{\mathrm{OA}_1}=1, \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2}=\frac{1}{2}, \overline{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3}=\left(\frac{1}{2}\right)^2, \cdots, \overline{\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}}=\left(\frac{1}{2}\right)^n, \cdots$을 만족하는 점 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \cdots$ 에 대하여, 제1 사분면에 선분 $\mathrm{OA}_1, \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3, \cdots$ 을 한 변으로 하는 정사각형 $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1, \mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2\mathrm{C}_2, \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3\mathrm{C}_3, \cdots$ 을 계속하여 만든다. 원점과 점B 을 지나는 직선의 방정식을 $y=a_n x$ 라 할 때, $\lim_{n\to\infty} 2^n a_n$ 의 값을 구하시오.

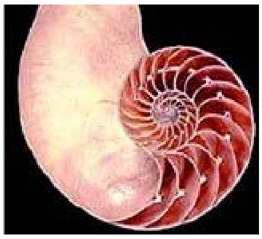
3. 그림과 같이 높이가 h인 직각삼각형ABC의 내부에 변 AC와 평행인 n개의 선분이 일정한 간격으로 그어져 있을 때, 이들 n개의 선분의 길이의 합은 얼마인가?



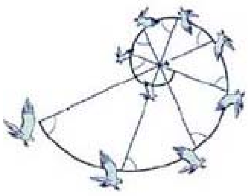
개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

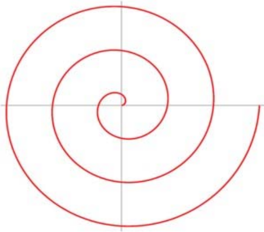


우리 주변에는 아르키메데스나선이나 베르누이나선과 같이 많은 사람들의 마음을 사로잡은 아름다운 곡선들이 많다. 베르누이나선은 로그나선 또는 등각나선, 황금나선 등의 여러 가지 이름으로 불리는데, 한 번 회전할 때 마다 일정한 비율이 곱해져서 생기는 곡선이다.



$r = ke^{c\theta}$ $(k > 0,\ c = \cot\phi)$

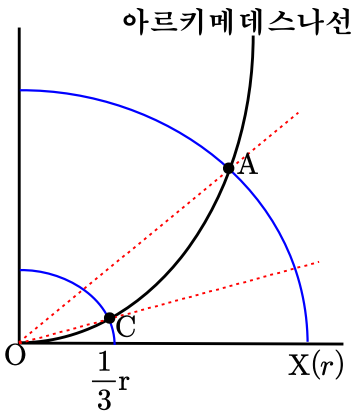
특히 베르누이나선의 경우 피보나치수열과 밀접한 관계가 있으며, 앵무조개 껍질이나 솔방울의 모양, 태풍, 독수리가 먹이를 향해 날아가는 모습 등 자연에서 흔히 찾아 볼 수 있는 자연 생성의 기본원리와 관계가 있기도 하다.



$r = a + b\theta$ (a, b는 실수)

아르키메데스나선은 볼트 혹은 모기약에서 볼 수 있는 것과 같이 일정한 간격으로 감겨있는 나선으로, 아르키메데스 펌프가 바로 이 나선을 이용한 것이며, DNA의 이중나선 역시 이 구조이다.

또한, 아르키메데스나선은 임의의 각을 3등분하는데 사용할 수 있다.



임의의 각을 $\angle \mathrm{AOX} = \theta$ 라고 하고, 점O를 중심으로 하는 아르키메데스나선을 그리자. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{OA}} = 3\overline{\mathrm{OC}}$인 점C를 작도할 수 있다. 아르키메데스나선의 방정식은 $x = \theta\cos\theta,\ y = \theta\sin\theta$이므로

$\angle \mathrm{COX} = \dfrac{\theta}{3}$ 이다.

물론 아르키메데스나선은 자와 컴퍼스만으로 작도할 수 없으므로 '각의 3등분' 문제를 해결했다고 할 수는 없다.

예시답안

풀어보기

1. 거짓. $a_n = 2^{-\frac{1}{2^n}}$ 이면 $\forall n \in \mathbb{N}$에 대하여 $0 < a_n < 1$이지만 $\lim_{n\to\infty} a_1 \times a_2 \cdots a_{n-1} \times a_n = \frac{1}{2}$ 이다.

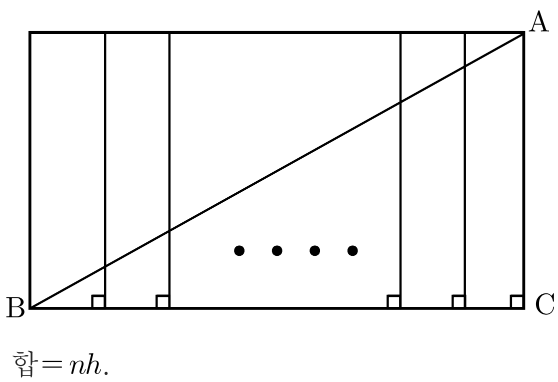
2. 원점을 지나는 직선 $y = a_n x$의 기울기를 나타내는 $a_n (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$을 차례로 구해 보면

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}, \quad a_3 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2}, \ \cdots\cdots$$

$$\therefore\ a_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty} 2^n a_n = \lim_{n\to\infty} 2^n \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = 1$$

3.



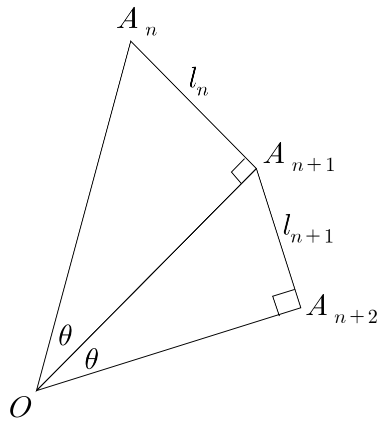
n개의 선분의 길이의 합$= nh$.

논제 1

(1) $\overline{OA_1}=1$, $\overline{OA_2}=1-\frac{1}{3}$, $\overline{OA_3}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3^2},\cdots$, $\overline{OA_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$, $\cdots$이 되도록 수열 $\{\alpha_n\}$을 정하면 $\lim_{n\to\infty}\overline{OA_n}=\frac{1}{2}$이다. 즉, 다각 나선이 원점으로 한없이 가까워지지 않을 수도 있다.

(2) (가) 원점으로 한없이 가까워지는 경우에, 다각 나선을 이루고 있는 선분들의 길이의 무한급수 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots$이 수렴하는 예 :

$\overline{A_nA_{n+1}}=l_n$, $\angle A_nA_{n+1}O=\frac{\pi}{2}$ 라고 하면 $l_1=\sin\theta$, $\overline{OA}=1$가 된다.



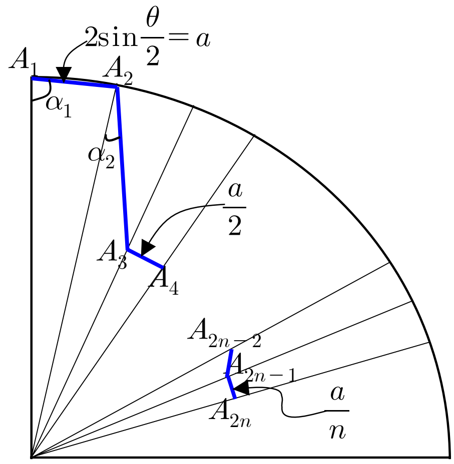
위 그림에서 $\overline{OA_{n+1}}=\overline{OA_n}cos\theta$이므로 $\left\{\overline{OA_n}\right\}$은 등비수열이다. 그런데 공비가 $0<\cos\theta<1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\overline{OA_n}=0$이다.

$l_{n+1}=\overline{OA_{n+1}}\sin\theta$, $l_n=\overline{OA_{n+1}}\tan\theta$이므로 $l_n=\overline{OA_{n+1}}\tan\theta=\overline{OA_{n+1}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{l_{n+1}}{\cos\theta}$이다. 즉, $l_1=\sin\theta$이고 $l_{n+1}=l_n\cos\theta$ 이므로 무한급수

$$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots=l_1+l_2+l_3+\cdots$$

는 공비가 $\cos\theta$인 무한등비급수이다. 그런데 공비가 $0<\cos\theta<1$이므로 이 무한급수는 수렴한다.

(나) 원점으로 한없이 가까워지는 경우에, 다각 나선을 이루고 있는 선분들의 길이의 무한급수 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots$이 수렴하지 않는 예 :



$\alpha_1=\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}$이면 $\overline{OA_1}=\overline{OA_2}=1$, $\overline{A_1A_2}=2\sin\frac{\theta}{2}=a$이다. 수열 $\{\alpha_n\}$을 다음과 같이 정하도록 하자. $\alpha_1=\alpha_3=\alpha_5=\cdots$이고,

$\overline{A_3A_4}=\frac{a}{2}$, $\overline{A_5A_6}=\frac{a}{3}$, $\overline{A_7A_8}=\frac{a}{4}$, $\cdots$, $\overline{A_{2n-1}A_{2n}}=\frac{a}{n}$, $\cdots$이 되도록 α_{2n}을 정하자.

$\overline{OA_n}=\begin{cases}\frac{1}{k} & (n=2k,\ k=1,2,3,\cdots)\\ \frac{1}{k+1} & (n=2k+1,\ k=0,1,2\cdots)\end{cases}$ 이고 $\lim_{n\to\infty}\overline{OA_n}=0$이다. 그러나

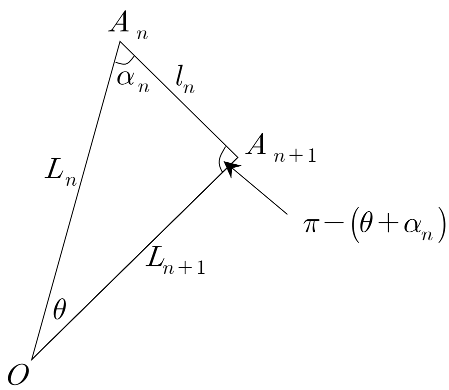
$\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots>\overline{A_1A_2}+\overline{A_3A_4}+\overline{A_5A_6}\cdots=a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots\right)$

이므로 무한급수 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots$은 수렴하지 않는다.

논제 2 $\overline{OP_n}=L_n$이라 하면 $L_1=1$이다. 아래 그림의 삼각형에서 사인법칙을 사용하면

$$\frac{L_{n+1}}{\sin\alpha_n}=\frac{L_n}{\sin\{\pi-(\theta+\alpha_n)\}}$$

즉, $L_1=1$, $L_{n+1}=\frac{\sin\alpha_n}{\sin(\theta+\alpha_n)}L_n$ 이다.



$\frac{\pi}{3} > \theta > \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq \alpha_n > 0$ 이므로 $\sin\alpha_1 \geq \sin\alpha_2 \geq \cdots \geq \sin\alpha_n$ 이고,

$\pi - (\theta + \alpha_n) = \beta_n$ 이라 하면 $\beta_1 \leq \beta_2 \leq \cdots \leq \beta_n$ 이므로 $\sin\beta_1 \leq \sin\beta_2 \leq \cdots \leq \sin\beta_n$ 이다. 따라서

$$1 \geq \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \geq \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} \geq \cdots \geq \frac{\sin\alpha_n}{\sin\beta_n}$$

이므로 수열 $\left\{\frac{\sin\alpha_n}{\sin\beta_n}\right\} = \left\{\frac{\sin\alpha_n}{\sin[\pi - (\theta + \alpha_n)]}\right\}$은 감소수열이다. 그러므로 수열$\{L_n\}$은

$$0 < L_n = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} \cdot \cdots \cdot \frac{\sin\alpha_{n-1}}{\sin\beta_{n-1}} \leq \left(\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}\right)^{n-1}$$

은 n이 한없이 크질 때, 0으로 수렴한다.

또한,

$$l_n = L_n \frac{\sin\theta}{\sin(\theta + \alpha_n)} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} \cdot \cdots \cdot \frac{\sin\alpha_{n-1}}{\sin\beta_{n-1}} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\beta_n} \leq \left\{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}\right\}^{n-1} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\beta_1}$$

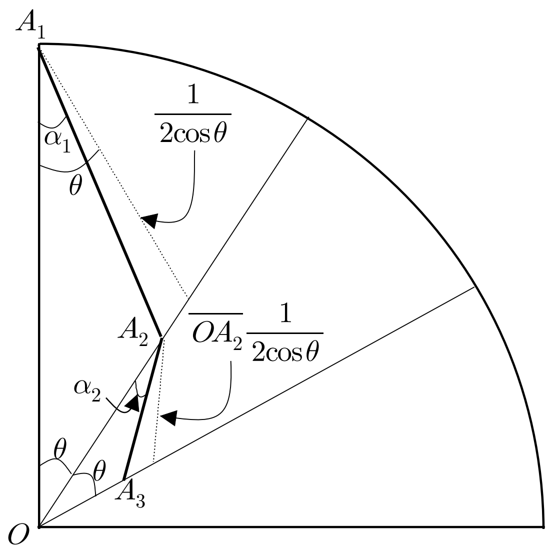
이다.

제시문 (다)에서 “모든 $n=1,\ 2, \cdots$에 대하여 $0 < a_n \leq b_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$이 수렴하면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴한다.”라고 하였다. 모든 $n=1,\ 2, \cdots$에 대하여

$0 < l_n < \left\{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}\right\}^{n-1} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\beta_1}$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1}\right\}^{n-1} \cdot \frac{\sin\theta}{\sin\beta_1}$ 이 수렴한다.

따라서 무한급수 $\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \overline{A_3A_4} + \cdots = l_1 + l_2 + l_3 + \cdots$은 수렴한다.

다른 풀이



그림에서 $\overline{OA_1}=1$, $\overline{OA_2}<\dfrac{1}{2\cos\theta}=r$, $\overline{OA_3}<\overline{OA_2}\dfrac{1}{2\cos\theta}<\left(\dfrac{1}{2\cos\theta}\right)^2$, ……,

$\overline{OA_n}<\left(\dfrac{1}{2\cos\theta}\right)^{n-1}$ $(\because 0<\alpha_1\le\alpha_2\le\cdots\le\alpha_n<\theta)$이다.

또한 $0<\theta<\dfrac{\pi}{3}$이므로 $1<2\cos\theta=r<2\to\dfrac{1}{2}<r<1$이고 $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{OA_n}=0$이다.

$\overline{A_nA_{n+1}}^2=\overline{OA_n}^2+\overline{OA_{n+1}}^2-2\overline{OA_n}\,\overline{OA_{n+1}}cos\theta$, $\overline{A_nA_{n+1}}^2<2\overline{OA_n}^2\left(\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$

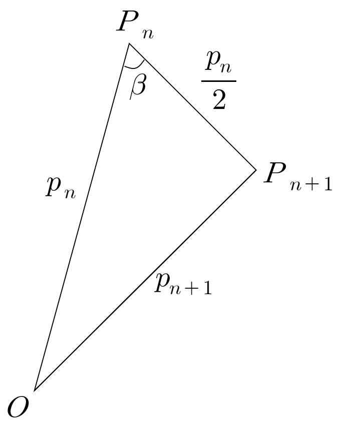
이고 $\overline{A_nA_{n+1}}<\sqrt{2}\,\overline{OA_n}$ $(n=1,\ 2,\cdots)$이다.

제시문 (다)에서 "모든 $n=1,\ 2,\cdots$에 대하여 $0<a_n\le b_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴한다."라고 하였다.

모든 $n=1,\ 2,\cdots$에 대하여 $0<\overline{A_nA_{n+1}}<\sqrt{2}\,\overline{OA_n}<\sqrt{2}\,r^{n-1}$이고 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{2}\,r^{n-1}$이 수렴한다.

따라서, 무한급수 $\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\overline{A_3A_4}+\cdots$은 수렴한다.

논제 3 $\overline{OP_n}=p_n\ (n=1,2,3,\cdots)$이라 하고 n번째 삼각형 OP_nP_{n+1}에서 코사인법칙을 사용하면



$$(p_{n+1})^2=(p_n)^2+\left(\frac{p_n}{2}\right)^2-2\cdot p_n\cdot\frac{p_n}{2}\cdot\cos\beta=\left(\frac{5}{4}-\cos\beta\right)p_n^2$$

즉, $p_{n+1}=\sqrt{\dfrac{5}{4}-\cos\beta}\cdot p_n$ 이므로 수열$\{p_n\}$은 공비가 $\sqrt{\dfrac{5}{4}-\cos\beta}$인 등비수열이고

$$p_n=p_1\cdot\left(\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\beta}\right)^{n-1}$$

이 된다. 따라서

① $0 < \cos\beta < \frac{1}{4}$이면 ;

공비는 $\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\beta} > 1$ 이 되어 $\lim_{n\to\infty} p_n = \infty$ 가 되고, 따라서 점 P_n은 원점에서 한없이 멀어진다.

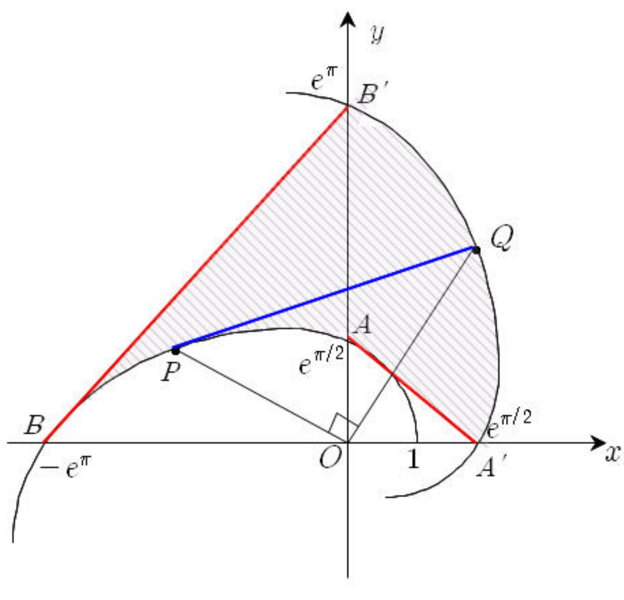
② $\cos\beta = \frac{1}{4}$이면 ;

공비는 $\sqrt{\frac{5}{4}-\cos\beta} = 1$ 이 되어 점 P_n 은 원점 O를 중심으로 하고 반지름이 p_1 인 원위를 끝없이 움직인다.

③ $\frac{1}{4} < \cos\beta < 1$이면 ;

공비는 $\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{5}{4}-\cos\beta} < 1$ 이 되어 $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ 가 되므로 점 P_n은 원점으로 한없이 가까워진다.

논제 4 $\theta = \pi/2$이면 $A(0, e^{\pi/2})$ 이고, $\theta = \pi$ 이면 $B(-e^{\pi}, 0)$ 이다. 이때 θ 가 $\frac{\pi}{2}$ 에서 π까지 변할 때, 선분 PQ가 지나간 영역은 [그림1]의 선분 AA'가 곡선을 따라 선분 BB'까지로 갈 때 그려지는 영역이다. 로그나선위의 임의의 점을 P라 하면 제시문 (가)에 의해 $\angle OPQ = \frac{\pi}{4}$이다. 따라서 $\overline{OP} = \overline{OQ}$ 이고 곡선 AB 와 곡선 $A'B'$ 는 합동이다. 그러므로 구하려는 영역을 그림으로 나타내면 [그림1]의 빗금 친 부분과 같다.

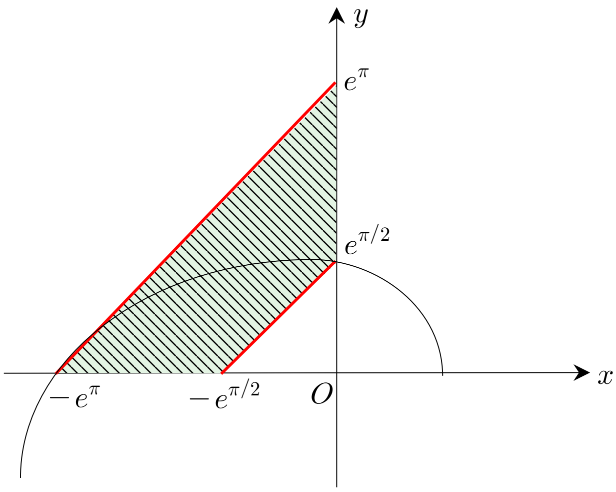


[그림1]

또, [그림1]에서 1사분면의 빗금 친 부분을 회전하여 곡선$A'B'$를 곡선AB와 겹치게 하면 아래 [그림2] 와 같은 도형이 되므로 선분PQ가 지나간 영역의 넓이는

$$\frac{1}{2}\left\{(e^{\pi})^2-(e^{\pi/2})^2\right\}=\frac{e^{\pi}}{2}(e^{\pi}-1)$$

이 된다.



[그림2]

11 성균관대학교 예시

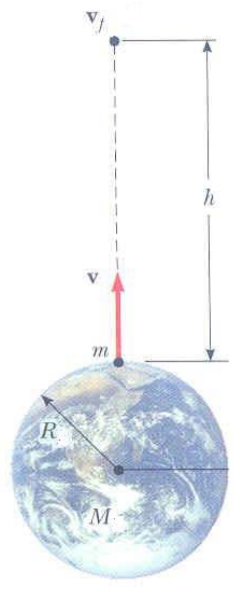
제 시 문

[가] 물체의 운동에너지 K와 위치에너지 U의 합을 역학적 에너지라고 한다. 마찰력이나 공기의 저항을 무시하고 물체가 중력만 받아 운동할 때 물체의 역학적 에너지는 보존되는데 이것을 **역학적 에너지보존법칙**이라고 한다.

$$U+K=(\text{일정}).$$

[나] [그림3]과 같이 질량 m인 물체를 지구 표면에서 처음 속력 v로 수직방향으로 발사한다고 하자. 이 때, 지구 표면에서 물체의 운동에너지는 $K=\frac{1}{2}mv^2$ 이다. 지구 표면에서 높이 h까지 도달한 물체의 중력 위치에너지의 변화는 다음과 같이 적분식으로 정의된다.

$$U(R+h)-U(R)=GMm\int_R^{R+h}\frac{1}{r^2}\,dr \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



[그림3]

여기서, $R=6\times10^6(\mathrm{m})$은 지구의 반지름이며, $G=7\times10^{-11}(\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2)$는 만유인력 상수이며, $M=6\times10^{24}(\mathrm{kg})$은 지구의 질량이다.

[다] 물체가 지구의 중력 영향으로부터 탈출하기 위한 처음 속력의 최솟값을 탈출속력이라 한다.

[1] [나]에서 주어진 질량 m인 물체가 지구 표면에서 높이 h인 지점에 도달했을 때 속력을 v_f 라면, (1)의 적분 결과를 이용하여 지구 표면과 지구 표면에서 높이 h인 지점에서의 역학적 에너지를 각각 논하시오.

[2] 지구 표면에서 탈출속력으로 발사된 질량 $m=1000\,\mathrm{kg}$인 물체는 지구 표면으로부터 무한히 멀어지면(즉, $h\to\infty$ 이면), 속력이 0에 가까워질 것이다(즉, $v_f\to0$ 이다). 이 사실과 [가]에 주어진 역학적 에너지보존법칙을 이용하여 [다]에 주어진 물체의 지구 표면에서 탈출속력 v에 대해 논하시오.

제시문 분석

- [가]는 역학적 에너지(물체의 운동에너지 K와 위치에너지 U의 합)의 의미와 마찰력이나 공기의 저항을 무시하고 물체가 중력만 받아 운동 할 경우 물체의 역학적 에너지 보존법칙($U+K=$일정)이 성립됨을 설명하고 있다.

- [나]는 질량이 m, 초기속력 v인 물체의 지구표면에서의 운동에너지가 $K=\frac{1}{2}mv^2$ 임을 지구표면에서 높이 h까지 도달한 물체의 중력 위치에너지의 변화를 적분식 $U(R+h)-U(R)=GMm\int_R^{R+h}\frac{1}{r^2}dr$ 로 정의됨을 설명하고 있다.
  (단, $R=6\times10^6(m)$: 지구의 반지름, $G=7\times10^{-11}(m^3/kg\cdot s^2)$: 만유인력 상수, $M=6\times10^{24}(kg)$: 지구질량, r : 지구중심에서 질량m인 물체까지의 거리)

- [다]는 탈출속력에 대한 정의를 설명하고 있다.

논제 분석

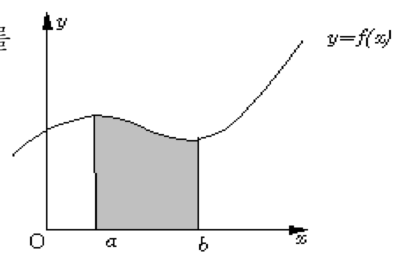
- [1] 수학에서의 간단한 정적분을 이해함으로써 위치에너지를 알아내고 물리 I 의 역학적 에너지 보존에 대한 기본 내용을 이용하여 역학적 에너지를 추론하면 된다.

- [2] 주어진 제시문의 정보를 통하여 탈출속력을 유추하는 논리적인 능력을 평가하기 위한 문제이다. 실제 숫자 계산과 주어진 계산식으로부터 논리적인 답안을 구성하면 된다.

배경지식 쌓기

- **정적분의 정의**

함수 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분 중 $x=a$에서 $x=b$까지, 넓이를 정적분이라 한다. 기호로 $\int_a^b f(x)dx$라 하고, a를 아래 끝, b를 위 끝이라 한다.



정적분의 정의 : $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\triangle x$

- **역학적 에너지보존법칙**

'위치에너지와 운동에너지는 서로 전환하지만, 외부에서 에너지의 공급이나 손실이 없다면 그 전체의 양은 항상 일정하다.' 는 물리법칙으로 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$E_{k\text{처음}}+E_{p\text{처음}}=E_{k\text{나중}}+E_{p\text{나중}}=\text{일정}[(K+U_g)_i=(K+U_g)_f]$$

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2(\text{운동에너지}),\ E_p=mgh(\text{위치에너지})\ (\text{처음값 } i,\ \text{나중값 } f)$$

풀어보기

1. 곡선 $y=x^3$과 x축 그리고 직선 $x=2$로 둘러싸인 도형의 넓이를
   (1) 구분구적법을 이용하여 구하고
   (2) 정적분의 계산을 통해 각각 구하라.

2. 지구 표면에 있는 질량 $10kg$인 물체의 만유인력에 의한 위치에너지는 얼마인가? (단, 지구의 질량 $M=6.0\times10^{24}kg$, 반지름 $R=6.4\times10^6m$이고, 만유인력 상수 $G=6.7\times10^{-11}N\cdot m^2/kg^2$으로 한다.)

읽기 자료

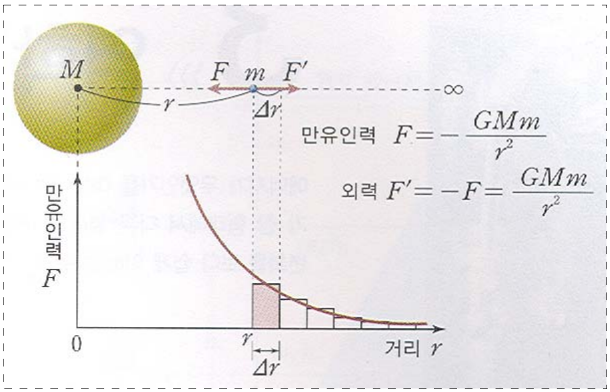
- **만유인력에 의한 위치에너지**

지면을 기준점으로 할 때, 기준점으로부터 그리 멀리 떨어지지 않는 범위 내에서 중력가속도 g의 값이 거의 일정하기 때문에 위치에너지는 $E_p=mgh$와 같이 표현 가능하고 높이 h만의 함수로 나타낼 수 있다.

그러나 기준점에서 더 멀리 떨어져 가면 g의 값이 점점 작아지기 때문에 물체의 위치에너지 E_p의 값도 점점 작아진다. 그러므로 이론상으로 중력의 기준점을 지구 중심으로부터 무한원점($r=\infty$)이 되는 점을 잡고 이 점의 위치에너지의 기준점 ($E_p=0$)으로 정한다.

따라서 지구 중심에서 거리 r만큼 떨어져 있는 곳에 질량 m인 물체가 놓여 있을 때, 이 물체가 가지는 위치에너지는 물체를 이 점에서 무한원점까지 가져가는

데 필요한 일이 된다. 또한, 이 일은 물체를 무한원점에서 이 점으로 가져올 때 중력이 하는 일과 같다.



물체를 거리 r인 지점에서 $r+\Delta r$인 지점까지 이동시키는데 필요한 일 ΔW는

$$\Delta W = F\Delta r = G\frac{mM}{r^2}\Delta r$$

이 되므로, 거리r인 지점에서 무한원점까지 가져가는 데 필요한 일은 위 그림과 같이 그래프 아래의 매우 작게 세분 된 사각형의 면적을 합한 것과 같다.

$$W = \int_{\infty}^{r} F dr = \int_{\infty}^{r} G\frac{Mm}{r^2}dr = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = -G\frac{Mm}{r}$$

즉, 지구 중심으로부터 거리 r인 지점에 놓여 있는 질량 m인 물체의 만유인력에 의한 위치에너지 E_p는 다음과 같이 나타낸다.

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} \text{((-)부호는 물체가 지구에 속박되어 있다는 의미이다)}$$

– 출처 : 김영유 외, 공대생을 위한 일반 물리학, 성안당, 2009

- **탈출속도**

탈출속도는 물체의 운동에너지가 중력위치에너지와 같아지는 속도를 의미한다. 대개는 중력장을 빠져나가는 속도로 이해한다. 중력장을 빠져나가기 위해서는 어느 방향으로가 중요한 것이 아니라 얼마나 빠르냐가 중요하기 때문에 속도라는 말은 사실 약간 문제가 있으며, 속력이 더 적합하다. 따라서 학술적으로는 탈출속도는 벡터가 아닌 스칼라 형태이다.

탈출속도는 주어진 중력장과 위치로부터 별다른 추진 없이 중력을 벗어날 수 있는 최소 속도를 의미한다. 계산이 편리하도록, 별다른 기술이 없다면 균일한 구 형태의 행성으로부터 수직으로 움직이는 물체, 즉 행성의 중심으로부터 뻗어 나오는 선을 따라 움직이는 물체를 다루는 것으로 하며, 해당 물체에 작용하는 유일한 힘은 행성의 중력으로 가정한다.

탈출속도는 방향성을 기술하지 않기 때문에 속도가 아니라 속력의 개념이다. 탈출속도를 유도하는 가장 쉬운 방법은 에너지보존법칙을 이용하는 것이다. 질량 M의 행성 중심으로부터 r의 거리에 있는 초기속도 v_e의 질량 m의 물체를 생각해 보자. 해당 물체에는 운동에너지와 위치에너지만이 존재하므로, 초기 상태와 최종 상태의 에너지의 합이 동일하다는 에너지보존법칙을 사용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$(K+U_g)_i=(K+U_g)_f$$

중력장을 간신히 벗어날 정도의 에너지, 즉 무한대의 거리에서 속력이 0일 조건을 구하는 것이 목적이므로, 최종 상태에서의 운동에너지 및 위치에너지 K_f와 U_{gf}는 모두 0이다.

따라서, $\frac{1}{2}mv_e^2+\frac{-GMm}{r}=0+0$, $v_e=\sqrt{\frac{2GM}{r}}$ 이 성립한다.

형식적으로 정의하면, 탈출속도는 중력장 내에 위치한 초기 위치로부터, 무한대의 거리로 물체를 이동시키고 또한 최종속도가 0이 되도록 하는 초기속도를 의미한다. 반대로 말해서, 무한대의 거리의 초기속도 0인 물체가 단지 중력에 의해서 끌어당겨져서 어떤 위치까지 이동했을 때의 속도가 바로 그 위치에서의 탈출속도가 된다. 일반적인 행성이나 위성에 대해 탈출속도를 언급할 때는, 표면을 초기 위치로 가정한다. 지표면에서의 탈출속도는 대략 11.2 km/s(마하 34)정도이다. 하지만 고도 9,000 km에서는 대략 7.1km/s 이하이다.

회전체에서의 탈출속도는 탈출하려는 물체가 향하는 방향에 좌우된다. 예로, 지구의 회전속도는 적도를 기준으로 465m/s이므로, 지구의 적도에서 동쪽으로 향하는 접선상으로 발사된 로켓은 10.735 km/s의 초기속도가 필요한 반면, 적도에서 서쪽으로 발사된 로켓은 11.665 km/s 의 초기속도가 필요하다. 표면속도는 위도에 대한 코사인 함수의 형태로 감소하기 때문에, 우주선 발사 장소는 가능하면 적도 근처에 설치하려고 한다. 프랑스령 기아나에 위치한 기아나우주센터도 적도로부터 5도밖에 떨어져 있지 않다.

– 출처 : http://ko.wikipedia.org/wiki

- **이상적분**

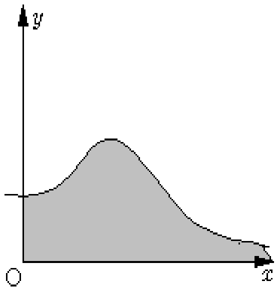
이상적분은 구간의 길이가 무한하거나, 혹은 그 구간에서 함수가 발산하는 경우 등, 일반적인 정적분의 정의로는 정의되지 않는 경우에 대한 정적분이다.

이상적분은 일반적으로 더 작은 구간에서의 정적분에 대한 극한으로 정의된다.

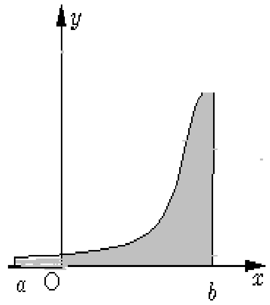
예를 들어, $\int_a^{\infty} f(x)dx$는 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^{\infty} f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)dx$$

마찬가지로 $\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)dx$ 가 된다.



$$\int_0^{\infty}\frac{1}{1+x^2dx}$$



$$\int_a^b \frac{e^x}{\sqrt{b-x}}dx$$

○적분구간의 길이가 무한한 경우의 이상적분　○함수가 발산하는 경우의 이상적분

또한, 발산하는 함수의 경우는 다음과 같이 정의한다.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)dx \quad (x=b\text{에서 발산})$$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)dx \quad (x=a\text{에서 발산})$$

이러한 이상적분은 그 극한이 수렴할 경우에만 존재한다고 정의한다.

개요 짜기

답안 작성

예시답안

풀어보기 1

(1) 부분합 $S_n = \frac{2}{n}\times(\frac{2}{n})^3 + \frac{2}{n}\times(\frac{2}{n}\times 2)^3 + \cdots + \frac{2}{n}\times(\frac{2}{n}\times n)^3 = \frac{4n^2(n+1)^2}{n^4}$ 이다.

따라서 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2(n+1)^2}{n^4} = 4$ 이다.

(2) $S = \int_0^2 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2 = [4-0] = 4$

풀어보기 2

만유인력에 의한 위치에너지 $E_p = -G\frac{Mm}{r}$ 에서

$$E_p = -G\frac{Mm}{r} = -\frac{6.7\times10^{-11}\times6\times10^{24}\times10}{6.4\times10^6} = -\frac{6.7\times6}{6.4}\times10^8 = -6.3\times10^8 J$$

논제 1 제시문에 있는 적분 (1)을 이용해 위치에너지의 변화를 구하면

$$U(R+h) - U(R) = GMm\int_R^{R+h}\frac{1}{r^2}dr = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{R+h} = -\frac{GMm}{R+h} + \frac{GMm}{R}$$

이 된다. 그러므로 $U(R) = -\frac{GMm}{R}$ 이고, $U(R+h) = -\frac{GMm}{R+h}$ 로 판단된다.

따라서 [1]로부터 지구 표면에서의 역학적 에너지는 $K + U(R) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$

이고, 높이 h인 곳에서의 역학적 에너지는 $\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{GMm}{R+h}$ 이다.

논제 2 [가]에 주어진 역학적 에너지보존법칙에 의하면, 지구 표면에서 역학적 에너지와 무한히 먼 곳에서의 역학적 에너지는 같다. 무한히 먼 곳에서 $h\to\infty$, $v_f\to 0$ 이라 하면 [가]의 결과로부터 무한히 먼 곳에서의 역학적 에너지는 0이 되고 v가 탈출속도일 때, $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R} = 0$ 을 만족한다. 따라서

[다]에 주어진 탈출속도는 $V = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$ 이 되며, 이는 물체의 질량 m 에 무관하다.

여기에 주어진 만유인력 상수값 $G = 7\times10^{-11} N\bullet m^2/kg^2$, 지구질량 $M = 6\times10^{24} kg$, 지구반지름 $R = 6\times10^6 m$ 을 이용하여 탈출속도를 구하면 그 값은 약 초속 11 (혹은 12, 11.8, $\sqrt{140}$ 등) km/s 의 매우 빠른 속력이다.

12 성균관대학교 수시

제 시 문 1

(가) 운동하는 관찰자가 물체의 운동을 관찰하면 속도가 다르게 보이는데, 이러한 속도를 상대속도라 한다. 상대속도는

(상대속도) = (물체의 속도) - (관찰자의 속도)로 구한다.

시각 t에서 직선운동을 하는 점 P의 가속도를 $a(t)$ 라 하고,

어떤 시각 t_0 에서의 속도를 $v(t_0)$ 라 하면

시각 t 에서의 점 P 의 속도 $v(t)$ 는 $v(t)=\int_{t_0}^{t} a(t)dt+v(t_0)$

이고, 시각이 $t=a$ 에서 $t=b$ 로 변할 때, 변위는 $\int_a^b v(t)\,dt$ 이다.

(나) 뉴턴은 질량을 가진 모든 물체 사이에 인력이 존재한다는 것을 발견하였는데, 이 힘을 만유인력이라고 한다. 질량 m_1 인 물체와 질량 m_2 인 물체가 거리 r 만큼 떨어져 있을 때 두 물체 사이에 작용하는 만유인력의 크기는 다음과 같다. $F=G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$ (G는 만유인력 상수). 여기서 힘의 방향은 두 물체를 서로 당기는 방향으로 작용한다.

[1] 동일한 직선 위를 운동하는 물체 A, B가 시각 $t=0$ 에서 원점에 있다. A 와 B 의 초기($t=0$) 속도는 각각 $4\ m/s$ 와 $16\,m/s$ 이다. 물체 A 는 $4\ m/s$ 으로 등속도 운동을 한다. 물체 B는 시각 $t=k$ 까지 $-3\ m/s^2$ 으로 등가속도 운동을 하고 $t=k$ 에서부터는 $(16-3k)\ m/s$ 로 등속도 운동을 한다. $k+1$ 초 동안 물체 A 에서 관찰한 물체 B 의 상대적인 변위는 $\int_0^{k+1} v_{BA}(t)dt$ 로 구할 수 있다.

이 변위가 최대가 되는 k 와 최댓값을 구하고 풀이과정을 기술하시오. 여기서, k 는 양수이고, $v_{BA}(t)$ 는 물체 A 에서 관찰한 물체 B 의 상대속도이다.

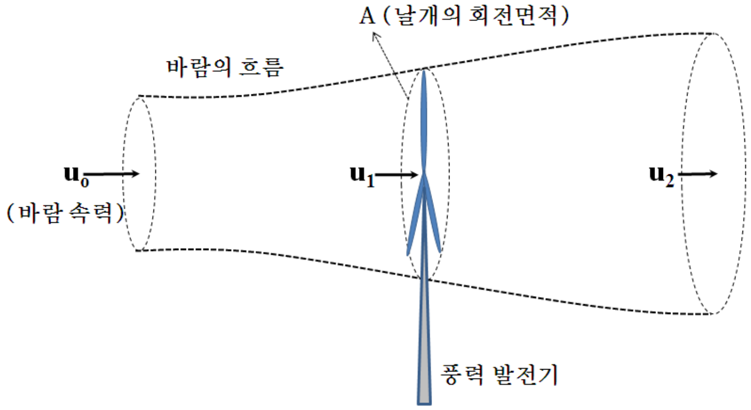
[2] 좌표평면 위의 동일한 질량 M을 가지는 물체 A, B가 놓여 있다. 물체 A 는 원점에 놓여 있고, 물체 B 는 $(x-100)^2+y^2 \le 50^2$, $y \ge 0$ 인 영역 위를 움직인다고 하자. 좌표평면 위의 점 P에 물체 C를 놓았을 때, A, B 물체로 인해 C 에 가해지는 만유인력 $\overrightarrow{F_A}$ 와 $\overrightarrow{F_B}$ 가 $\overrightarrow{F_A}=-\overrightarrow{F_B}$ 가 되는 P 의 영역의 넓이를 구하고 풀이과정을 기술하시오.

제 시 문 2

(가) 풍력발전기는 바람의 에너지를 이용하여 발전기 날개를 회전시켜 전기를 생산하는 장치이다. 어떤 곳에 날개의 회전 면적이 A인 풍력발전기가 설치될 예정이다. 면적 A에 대해 바람이 속력 u_o로 불고 있을 때, 단위 시간당 지나는 공기 질량은 $\rho A u_o$ (단위 : kg/s)이다. 이 때 ρ는 공기의 밀도(단위 : kg/m^3)이다. 바람의 일률 P_o(단위 : W)는 단위시간당 공기 질량의 운동에너지로부터 구할 수 있다.

$$P_o = \frac{1}{2}\rho A u_o^3$$

(나) 풍력발전기가 설치되면 바람의 운동에너지가 날개에 전달되면서 속력이 감소하게 된다. 이 때 바람의 속력 u_o와 발전기 날개를 지나는 속력 u_1, 날개를 빠져나간 속력 u_2는 아래 그림과 같이 나타낼 수 있다. $(u_o \geq u_1 \geq u_2 \geq 0)$



발전기에 전달된 일률 P는 운동에너지와 추진력 두 가지 방식으로 표시할 수 있다. 날개 앞뒤에서 감소한 운동에너지는 날개에 전달된 운동에너지이므로 발전기의 일률은 다음과 같다.

$$P = \frac{1}{2}\rho A u_1 (u_o^2 - u_2^2)$$

또한 날개 앞뒤에서 운동량의 변화율 $\rho A u_1 (u_o - u_2)$에 속력 u_1을 곱하면 일률이 되므로 발전기의 일률은 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

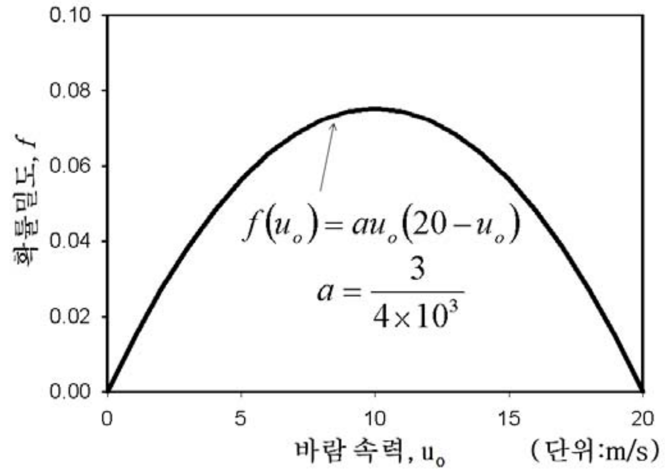
$$P = \rho A u_1^2 (u_o - u_2)$$

이때, 발전기의 효율 c는 식(1)에 정의된 바람의 일률 P_o에 대해 발전기의 일률 P의 비로 정의된다.

$$c = \frac{P}{P_o}$$

[1] 제시문 (가)와 (나)에 주어진 식들로부터 속력 u_o, u_1, u_2 사이의 관계식을 구하시오. 이를 이용하여 주어진 바람 속력 u_o에 대하여 풍력발전기의 효율 c (P/P_o)가 가질 수 있는 최댓값과 이때의 u_1과 u_o의 비율(u_1/u_o)을 구하시오.

[2] 풍력발전기를 설치하기 위해 바람의 속력을 일정 시간 간격마다 측정하였다. 그 결과 $0\ m/s$에서 최대 $20\ m/s$에 대해 그림과 같은 속력의 분포를 나타내는 확률밀도함수 $f(u_o)$를 얻었다.



$$f(u_o) = au_o(20 - u_o), \quad a = \frac{3}{4\times10^3}$$

이 함수를 이용하여 발전기 일률 P의 평균값을 구하시오. 이 때 발전기의 효율 C는 속도에 관계없이 0.2로 일정하고, 공기의 밀도 ρ는 $1\ kg/m^3$ 발전기 날개의 회전면적 A는 10,000 m^2이다.

제시문 분석

물리와 수학의 혼합 형태로 물리 현상을 이해하고 수학의 여러 방법을 이용하여 문항에 맞는 수식을 논리적으로 세우고 이를 계산하여 물리적 현상을 해결하는 능력을 평가하고자 하였다.

[제시문 1]

- (가)에서는 관찰자의 입장에서 바라본 물체의 상대속도와 직선운동을 하는 물체의 변위를 계산하는 적분 공식을 제시하고 있다.
- (나)에서는 질량을 가진 모든 물체 사이에 작용하는 만유인력의 크기 공식과 힘의 방향은 두 물체를 서로 당기는 방향으로 작용한다고 설명하고 있다.

[제시문 2]

- (가)에서는 풍력발전기에서 단위 시간당 공기 질량의 운동에너지를 이용하여 바람의 일률을 계산할 수 있는 공식을 제시하고 있다.
- (나)에서는 바람의 운동에너지가 날개에 전달되면서 발생하는 발전기의 일률을 구하는 공식 2가지와 발전기의 효율을 계산하는 공식을 설명하고 있다.

논제 분석

[제시문 1]

[1] 두 물체가 서로 다른 속력으로 직선운동할 때 상대속도를 이용하여 변위를 구하고, 적분으로 표시된 변위를 계산하여 최댓값을 구할 수 있는가?

$t=0$ 에서 $t=k$ 까지의 상대속도와 $t=k$ 에서 $t=k+1$ 까지의 상대속도가 다르기 때문에 변위를 구할 때도 적분구간을 나누어 계산하여야 한다.

[2] 두 물체에 작용하는 만유인력이 크기가 같고 방향이 반대가 되는 지점의 자취를 구하고 그 영역의 넓이를 계산할 수 있는가?

두 물체에 작용하는 만유인력의 크기가 같고 방향이 반대가 되는 지점은 항상 두 물체의 중점임을 알고 두 물체의 중점의 자취의 방정식을 구하여 계산한다.

[제시문 2]

[1] 바람의 속력(u_0), 발전기 날개를 지나가는 속력(u_1), 발전기를 빠져나간 속력(u_2) 사이의 관계를 파악하고 풍력발전기의 최대 효율을 구할 수 있는가?

발전기의 일률을 계산하는 2가지 공식을 이용하여 u_0, u_1, u_2 사이의 관계식을 구하고 u_2 에 대해 정리하여 발전기의 효율공식에 대입하면 u_0, u_1 으로 이루어진 식을 얻을 수 있고 정리하여 최댓값을 구한다.

[2] 확률밀도함수로 표시된 바람의 속력을 이용하여 발전기의 일률의 평균값(기댓값)을 구할 수 있는가?

발전기의 효율 공식에 의해 발전기의 일률의 평균값은 바람의 속력(실제는 속력의 세제곱)의 평균값을 구하면 계산할 수 있다. 바람의 속력의 평균값은 연속확률밀도함수에서의 평균 공식을 이용하면 된다.

배경지식 쌓기

• 속도·거리와 적분

직선 위를 움직이는 점P의 시각 t에서의 속도 v가 $v=f(t)$로 주어질 때, $t=a$에일 때부터 $t=b$일 대까지 점 P가 움직이면

· 점P의 위치의 변화량 : $\int_a^b f(t)dt$ · 점P의 운동거리 : $\int_a^b |f(t)|dt$

- **원의 내부**

점 (a,b)를 중심으로 하고 반지름이 r인 원의 내부(경계선포함)는

$$(x-a)^2+(y-b)^2 \le r^2$$

- **함수의 최대·최소와 미분**

닫힌구간 $[a,\ b]$에서 함수 $f(x)$가 연속일 때 $f(a)$, $f(b)$, $[a,\ b]$에서의 $f(x)$의 모든 극댓값 중에서 최대인 것이 $f(x)$의 최댓값이고, $f(a)$, $f(b)$, $[a,\ b]$에서의 $f(x)$의 모든 극솟값 중에서 최소인 것이 $f(x)$의 최솟값이다.

- **평균, 분산, 표준편차의 성질**

$$E(aX+b)=aE(X)+b\ ,\quad V(aX+b)=a^2V(X),\quad \sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$$

- **연속확률분포의 평균과 분산**

확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$에서

$$m=E(X)=\int xf(x)dx$$

$$V(X)=\int (x-m)^2f(x)dx=\int x^2f(x)dx-m^2$$

풀 어 보 기

1[2]. 지면에 정지해 있던 열기구가 수직 방향으로 출발한 후 t분이 지났을 때의 속도 $v(t)$(m/분)를

$$v(t)=\begin{cases} t & (0\le t\le 20) \\ 60-2t & (20\le t\le 40) \end{cases}$$

라 하자.

출발한 후 $t=35$분일 때, 지면으로부터의 열기구의 높이는? (단, 열기구는 수직 방향으로만 움직이는 것으로 가정한다.) [2004 수능]

2. 좌표평면 위에 점 $A(0,2)$가 있다. $0<t<2$일 대, 원점 O와 직선 $y=2$ 위의 점 $P(t,2)$를 잇는 선분 OP의 수직이등분선과 y축의 교점을 B라 하자. 삼각형 ABP의 넓이를 $f(t)$라 할 때, $f(t)$의 최댓값은 $\frac{b}{a}\sqrt{3}$이다. $a+b$의 값을 구하시오. (단, a,b는 서로소인 자연수이다.) [2010년 6월 모의수능]

2) 그림: http://blog.naver.com /juno77kr?Redirect=Log&logNo=100070622633

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

- **풍력발전[風力發電 wind power generation]**

풍력발전기는 바람의 에너지를 전기에너지로 바꿔주는 장치로서, 풍력발전기의 날개를 회전시켜 이때 생긴 날개의 회전력으로 전기를 생산한다.

- **원리와 시스템 구성**

[삼양대관령목장 풍력발전기]

풍력발전기는 바람이 지니고 있는 에너지를 우리가 유용하게 사용할 수 있는 전기에너지로 바꿔주는 장치이다. 불어오는 바람은 풍력발전기의 날개를 회전시키게 된다. 이때 생긴 날개의 회전력으로 전기를 생산하는 것이다. 풍력발전기는 날개, 변속장치, 발전기의 세 부분으로 구성되어 있다. 날개는 바람에 의해 회전되어 풍력에너지를 기계적인 에너지로 변환시키는 장치이다. 변속장치는 날개에서 발생한 회전력이 중심 회전축을 통해서 변속기어에 전달되어 발전기에서 요구되는 회전수로 높여서 발전기를 회전시킨다. 발전기는 날개에서 발생한 기계적인 에너지를 전기에너지로 변환하는 장치이다.

- **시스템의 분류**

풍력발전기는 날개의 회전축의 방향에 따라 회전축이 지면에 대해 수직으로 설치되어 있는 수직축 풍차와 회전축이 지면에 대해 수평으로 설치되어 있는 수평축 풍차로 구분된다. 수평축 풍차는 간단한 구조로 이루어져 있어 설치하기 편리하나 바람의 방향에 영향을 받는다. 수직축 풍차는 바람의 방향에 관계가 없어 사막이나 평원에 많이 설치하여 이용할 수 있지만 그 소재가 비싸고 수평축 풍차에 비해 효율이 떨어지는 단점이 있다.

- **입지 조건**

풍력발전기는 풍속이 세고, 풍차가 클수록 더 많은 풍력에너지를 생산할 수 있기 때문에 풍력발전기의 발전량은 바람의 세기와 풍차의 크기에 의존하고 있다. 또한 높이가 높아질수록 바람이 세게 불기 때문에 높은 곳의 발전기가 낮은 곳의 발전기보다 크고 발전량도 많다. 풍력으로 발전하려면 평균 초속 4m/s 이상으로 부는 바람이 필요하다. 여기서 말하는 바람의 속도는 우리가 서 있는 땅위가 아니라 풍력발전기의 날개가 있는 높이에서의 속도를 말한다. 그럼 초속 4m/s로 부는 바람이란 어느 정도의 바람인가?

다음은 바람과 우리 생활과의 관계를 나타낸 것이다.
- 2미터/초 : 바람을 느낀다.
- 4미터/초 : 나뭇가지가 흔들린다.
- 7미터/초 : 먼지가 인다.
- 12미터/초 : 몸이 떨린다.
- 25미터/초 : 나무가 뽑힌다.
- 30미터/초 : 유리창이 깨진다.

• **풍력발전의 효과**

첫째, 바람의 운동에너지를 이용한 발전방식으로 화석연료 대체효과가 매우 크다.
둘째, 낙도 등의 낙후지역에 경제성 있는 전력 보급이 가능하다.
셋째, 풍향이 우수한 해안 및 산간지역에 설치함으로써 국내 토지 이용을 합리화할 수 있다.
넷째, 제주 지역과 같은 일부 특정 지역의 경우 대규모 풍력발전단지 조성으로 관광자원으로 활용이 가능하다.

– 출처 : 두산백과사전 EnCyber & EnCyber.com

• **풍력발전기의 날개는 왜 3개일까?**

제9회 청소년과학탐구반(YSC) 전국과학탐구발표대회(주최 교육과학기술부・주관 한국과학창의재단)에서 동화초등의 6학년 장연정, 5학년 김은지・좌민영 양은 '풍력발전기의 날개는 왜 3개일까?'를 주제로 수상의 영광을 안았다. 이 팀의 탐구 과제는 신재생에너지를 배우기 위해 근처에 있는 풍력발전단지를 찾았을 때 든 작은 궁금증에서 싹이 텄다. 어린이들은 먼저 풍력발전기 날개의 수, 크기, 두께를 달리한 실험을 통해 원리부터 깨우치는 것으로 탐구를 시작했다. 그 결과, 날개의 회전 속도는 날개의 두께가 얇을수록 빨라지는 반면, 날개의 크기와 폭이 크면 바람에 의한 저항이 커져 회전 속도가 느려지고, 떨림도 심해진다는 것을 알아냈다. 또 날개를 2~6 개로 변화를 주어, 3 개일 때 회전 속도가 빠른 동시에 떨림도 적다는 사실을 밝혀냈다.

– 출처 : 소년한국일보(2010. 1. 29.)

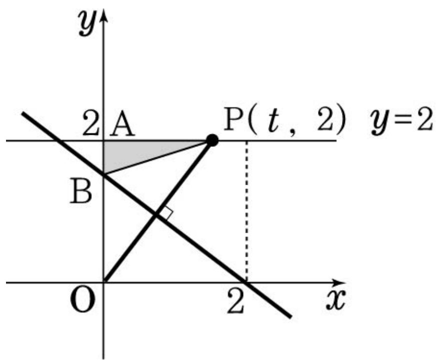
예시답안

풀어보기

1. 열기구가 출발한 후 t 분 후의 높이를 $h(t)$ 라 하면

$$h(35)=\int_0^{35} v(t)dt=\int_0^{20} v(t)dt+\int_{20}^{35} v(t)dt=\int_0^{20} t\,dt+\int_{20}^{35}(60-2t)dt=275$$

2[3]. 직선 OP의 기울기가 $\frac{2}{t}$ 이므로 선분 OP의 수직이등분선은 기울기가 $-\frac{t}{2}$ 이고 점 $\left(\frac{t}{2},\ 1\right)$ 을 갖는다.



$\therefore\ y=-\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)+1$

$\quad =-\frac{t}{2}x+\frac{t^2}{4}+1$

따라서 점 B의 좌표는 $\left(0, \frac{t^2}{4}+1\right)$ 이므로

$f(t)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{4}\right)\cdot t=-\frac{t^3}{8}+\frac{t}{2}$

$f'(t)=-\frac{3}{8}t^2+\frac{1}{2}=0$ 에서 $\quad \frac{3}{8}t^2=\frac{1}{2}$ 이므로 $t^2=\frac{4}{3}$

$$\therefore\ t=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

함수 $f(x)$의 증감표는 다음과 같다.

t	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	2
$f'(t)$	+	+	0	−	−
$f(t)$	↗	↗	극대 (최대)	↘	↘

따라서 $f(t)$의 최댓값은 $t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 일 때 $-\frac{1}{8}\times\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{1}{2}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{9}\sqrt{3}$ 이므로 $a+b=9+2=11$ 이다.

3) 비상에듀 2010년 6월 모의수능 해설

[제시문 1]

논제 1 물체 A에서 관찰한 물체 B의 상대적인 변위는

$\int_0^{k+1} v_{BA}(t)dt = \int_0^{k} v_{BA}(t)dt + \int_k^{k+1} v_{BA}(t)dt$ 로 나타낼 수 있다.

i) $t=0$에서 $t=k$까지

A는 $4m/s$로 등속도 운동을 하므로 $v_A = 4$

B는 초기속도 $16m/s$, 등가속도 $-3m/s^2$이므로 $v_B = \int_0^t (-3)dt + 16 = -3t+16$

$v_{BA}(t) = v_B(t) - v_A(t) = (-3t+16) - 4 = -3t+12$ 이다.

그러므로 $\int_0^k v_{BA}(t)dt = \int_0^k (-3t+12)dt = \left[-\frac{3}{2}t^2+12t\right]_0^k = -\frac{3}{2}k^2+12k$

ii) $t=k$에서 $t=k+1$까지

A는 $4m/s$로 등속도 운동을 하므로 $v_A = 4$

B는 $(16-3k)m/s$로 등속도 운동을 하므로 $v_B(t) = 16-3k$

$v_{BA}(t) = v_B(t) - v_A(t) = (16-3k) - 4 = 12-3k$

그러므로 $\int_k^{k+1} (12-3k)dt = [(12-3k)t]_k^{k+1} = 12-3k$

따라서 $\int_0^{k+1} v_{BA}(t)dt = \int_0^{k} v_{BA}(t)dt + \int_k^{k+1} v_{BA}(t)dt = \left(-\frac{3}{2}k^2+12k\right) + (12-3k)$

$= -\frac{3}{2}k^2 + 9k + 12 = -\frac{3}{2}(k-3)^2 + \frac{51}{2}$

그러므로 $k=3$일 때, 최댓값 $\frac{51}{2}$이다.

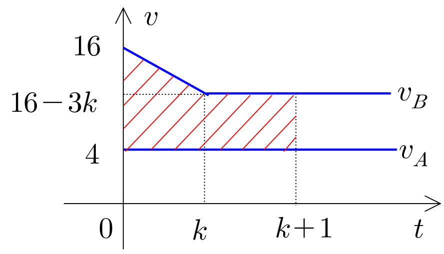
다른 풀이

$v_{BA} = v_B - v_A$ 이므로 $\int_0^{k+1} v_{BA}(t)dt$는 오른쪽 그림의 빗금친 부분의 넓이와 같다. (최댓값을 구하기 때문에 v_B의 그래프가 v_A의 그래프 아래로 내려오는 경우는 고려할 필요가 없다.)

따라서 $\int_0^{k+1} v_{BA}(t)dt = \frac{1}{2}(3k)k + (12-3k)(k+1)$

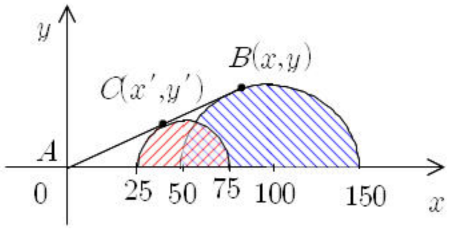
$= -\frac{3}{2}k^2 + 9k + 12 = -\frac{3}{2}(k-3)^2 + \frac{51}{2}$

그러므로 $k=3$일 때, 최댓값 $\frac{51}{2}$이다.



논제 2 물체 A의 위치 $(0,0)$, 물체 B의 위치 (x,y), 물체 C의 위치를 (x',y')라 둔다.

$\overrightarrow{F_A}=-\overrightarrow{F_B}$, 즉 힘의 크기는 같고 방향은 반대이므로 물체 C의 자취는 물체 A와 물체 B의 중점의 자취이다.



$x'=\frac{x}{2}$, $y'=\frac{y}{2}$ 이므로 $x=2x'$, $y=2y'$를 $(x-100)^2+y^2\le 50^2$, $y\ge 0$에 대입한다.

$$(2x'-100)^2+(2y')^2\le 50^2,\ y'\ge 0$$

정리하면 $(x'-50)^2+(y')^2\le 25^2$ 로 위 쪽 반 원 내부이다.

따라서 P영역의 넓이는 $25^2\pi\times\frac{1}{2}=\frac{625}{2}\pi$이다.

[제시문 2]

논제 1 (1) 발전기 일률은 $P=\frac{1}{2}\rho Au_1(u_0{}^2-u_2{}^2)=\rho Au_1{}^2(u_0-u_2)$이므로 $\frac{u_0+u_2}{2}=u_1$이다.

(2) $c=\frac{P}{P_0}=\frac{\rho Au_1{}^2(u_0-u_2)}{\frac{1}{2}\rho Au_0{}^3}=\frac{2u_1{}^2}{u_0{}^3}\{u_0-(2u_1-u_0)\}$ ($\because$ $u_2=2u_1-u_0$)

$$=\frac{2u_1{}^2}{u_0{}^3}(2u_0-2u_1)=\frac{4}{u_0{}^3}\left(-u_1{}^3+u_0u_1{}^2\right)$$

$f(u_1)=-u_1{}^3+u_0u_1{}^2$라 두면 $f'(u_1)=-3u_1{}^2+2u_0u_1=u_1(-3u_1+2u_0)=0$이므로

$f(u_1)$은 $u_1=\frac{2}{3}u_0$에서 극댓값이자 최댓값 $\frac{4}{27}u_0{}^3$을 갖는다.

그러므로 효용의 최댓값은 $c=\frac{4}{u_0{}^3}\times\frac{4}{27}u_0{}^3=\frac{16}{27}$ 이고, $\frac{u_1}{u_0}=\frac{2}{3}$ 이다.

논제 2 $c=\frac{P}{P_0}$ (c는 상수)이므로 $P=cP_0$이고,

$E(P)=E(cP_0)=cE(P_0)=0.2E(P_0)$이다.

$\rho=1$, $A=10^4$이므로 $E(P_0)=E\left(\frac{1}{2}\rho Au_0{}^3\right)=\frac{1}{2}\rho AE(u_0{}^3)=5\times10^3E(u_0{}^3)$이다.

즉, $E(P)=0.2E(P_0)=\frac{1}{5}E(P_0)=\frac{1}{5}\times(5\times10^3)\times E(u_0{}^3)=10^3E(u_0{}^3)$이다.

$f(u_0)=au_0(20-u_0)$, $a=\frac{3}{4\times10^3}$ 이므로

$$E(u_0{}^3)=\int_0^{20}u_0{}^3f(u_0)du_0=\int_0^{20}u_0{}^3\cdot au_0(20-u_0)du_0=a\int_0^{20}(-u_0{}^5+20u_0{}^4)du_0$$

$$=a\left[-\frac{1}{6}u_0{}^6+4u_0{}^5\right]_0^{20}=a\times20^5\times\left(-\frac{20}{6}+4\right)=\frac{3}{4\times10^3}\times(2^5\times10^5)\times\frac{2}{3}=1600$$

13 숭실대학교 수시

제 시 문

(가) 1931년 미국 텍사스 대학의 레일리(William J. Reilly)는 뉴턴의 만유인력의 법칙에서 영감을 받아, 한 도시의 소매 고객 흡인력은 그 도시의 인구에 비례하고 고객의 거주지와 그 도시까지 거리의 제곱에 반비례한다는 ‘소매인력의 법칙’을 주장했다.

서로 경쟁하는 두 상점의 고객 흡인력을 산정하는 데 소매 인력의 법칙을 적용할 수 있다. 만일 상점 A와 B의 좌표가 각각 (x_1, y_1), (x_2, y_2)이고 두 상점의 경쟁력이 각각 α, β라면, 점 (x, y)에 위치한 고객 P에 대한 상점 A와 B의 흡인력은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{상점 } A\text{의 흡인력} = \frac{\alpha}{\overline{PA}^2}, \quad \text{상점 } B\text{의 흡인력} = \frac{\beta}{\overline{PB}^2}$$

위 식에서 $\overline{PA}$ 는 고객 P에서 상점 A까지의 거리, $\overline{PB}$ 는 고객 P에서 상점 B까지의 거리를 나타낸다. 고객은 두 상점 가운데 흡인력이 더 큰 상점을 이용한다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\text{상점 } A\text{를 이용하는 고객의 집합} = \left\{ P(x, y) \mid \frac{\alpha}{\overline{PA}^2} \geq \frac{\beta}{\overline{PB}^2} \right\}$$

$$\text{상점 } B\text{를 이용하는 고객의 집합} = \left\{ P(x, y) \mid \frac{\alpha}{\overline{PA}^2} \leq \frac{\beta}{\overline{PB}^2} \right\}$$

소매인력의 법칙은 경제학 및 경영학 분야에서 널리 응용되고 있다. 이 법칙은 경쟁하는 두 상점이 있을 때 두 상점의 비교요소(자본력, 서비스의 질, 가격경쟁력 등)와 상점까지의 거리를 이용해 각 상점의 고객 점유영역을 나타내거나, 여러 상점들이 주어져 있을 때 새로운 상점을 개설할 최적의 입지를 선택하는 문제 등에 쓰인다.

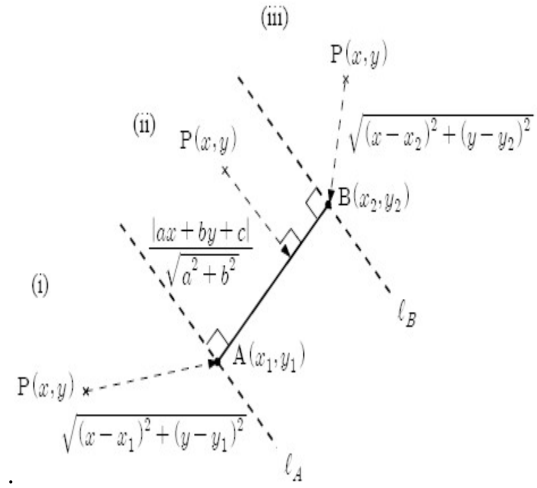
(나) 평면의 한 점 $P(x, y)$에서 다른 점 $Q(u, v)$까지 거리는 $\sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$이다. 그러면 평면의 한 점 $P(x, y)$에서 도형 Γ까지의 거리는 어떻게 정의할까? 가장 널리 쓰이는 정의는 다음과 같다.

$$\text{점 } P(x,y)\text{에서 도형 } \Gamma\text{까지의 거리} = \min_{(u,v) \in \Gamma} \sqrt{(x-u)^2+(y-v)^2}$$

즉, 도형 Γ에 포함된 점 (u, v) 중에서 $P(x, y)$와 가장 가까운 점까지의 거리가 바로 $P(x, y)$에서 도형 Γ까지 거리인 것이다. 예를 들어, 점 (x_0, y_0)에서 직선 $l: ax+by+c=0$까지 거리는 점 (x_0, y_0)에서 직선 l에 내린 수선의 발까지의 거리

즉, $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ 이 된다.

그러면 한 점 $P(x,y)$ 에서 선분 $\overline{AB}$ 까지의 거리는 어떻게 구할 수 있을까? 점 $P(x,y)$ 와 선분 $\overline{AB}$ 의 위치관계에 따라 다음과 같이 세 가지 경우로 나누어 구할 수 있으며, 이를 그림으로 표현하면 <그림1>과 같다. 여기서 직선 $\overleftrightarrow{AB}$ 의 방정식은 $ax+by+c=0$ 이다



<그림 1> 점 P(x,y)에서 선분 $\overline{AB}$까지의 거리

(ⅰ) 점 $P(x,y)$ 가 그림의 직선 l_A 의 아래쪽에 위치하여 점 P 에서 가장 가까운 선분 $\overline{AB}$ 의 점이 $A(x_1,y_1)$ 인 경우 :

$$\text{점 } P(x,y)\text{에서 선분 } \overline{AB}\text{까지의 거리} = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

(ⅱ) 점 $P(x,y)$ 가 그림의 직선 l_A 와 직선 l_B 사이에 위치하여 점 P 에서 가장 가까운 선분 $\overline{AB}$ 의 점이 선분의 내부에 있는 경우 :

$$\text{점 } P(x,y)\text{에서 선분 } \overline{AB}\text{까지의 거리} = \frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

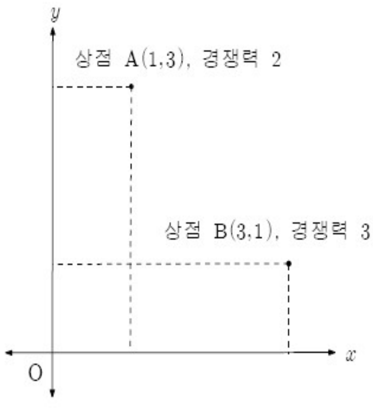
(ⅲ) 점 $P(x,y)$ 가 그림의 l_B 의 위쪽에 위치하여 점 P 에서 가장 가까운 선분 $\overline{AB}$ 의 점이 $B(x_2,y_2)$ 인 경우 :

$$\text{점 } P(x,y)\text{에서 선분 } \overline{AB}\text{까지의 거리} = \sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}$$

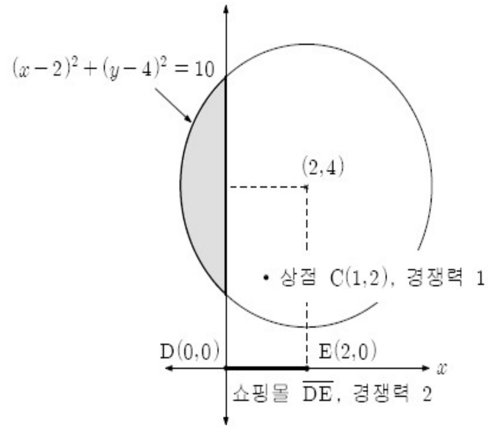
[논제] 다음 질문에 답하시오

[1] xy 평면에 경쟁력 2 인 상점 $A(1,3)$ 와 경쟁력 3 인 상점 $B(3,1)$ 가 있다 <그림 2>. 제시문 (가)에서 설명한 소매인력의 법칙에 따라 상점 A 를 이용하는 고객의 집합과 상점 B 를 이용하는 고객의 집합을 xy 평면에 그리시오.

(상점 A 와 상점 B 의 위치도 함께 표시할 것)



<그림 2>



<그림 3>

[2] 상점 C[좌표 $(1,2)$, 경쟁력 1]와 선분으로 이루어진 쇼핑몰 $\overline{DE}$[D의 좌표 $(0,0)$, E의 좌표 $(2,0)$, 경쟁력 2]가 있다. 고객으로부터 쇼핑몰 $\overline{DE}$까지의 거리는 제시문 (나)에서 설명한 '점에서 선분까지의 거리'로 정의된다고 하자. 그러면 고객으로부터 쇼핑몰까지의 거리는 제시문 (나)에서와 같이 경우 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)의 세 가지로 나누어 구할 수 있다. (ⅰ)은 고객이 위치한 점 $P(x, y)$가 직선 $x=0$의 왼쪽에 있는 경우(즉, $x \leqq 0$인 경우)에 해당한다. 이 때 고객에 대한 상점 C의 흡인력은 $\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2}$ 이고, 쇼핑몰 $\overline{DE}$의 흡인력은 $\dfrac{2}{x^2+y^2}$ 이다.

따라서

상점 C를 이용하는 고객의 집합 $=\left\{(x, y) \mid x \leqq 0, \dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2} \geqq \dfrac{2}{x^2+y^2}\right\}$ -(식 1)

이 되며, <그림3 >에서 회색으로 나타낸 영역으로 표시된다.

(2-1) 제시문 (나)의 (ⅱ)와 (ⅲ)의 경우에 대하여 상점 C를 이용하는 고객의 집합을 (식 1)과 같이 표현하시오.

(2-2) 다음 표는 세 학생의 좌표를 나타낸다. 소매인력의 법칙에 따르면 세 학생이 각각 상점 C와 쇼핑몰 $\overline{DE}$ 중에서 어느 곳을 이용할 것으로 예상되는지 설명하시오.

학생	좌표
학생 1	(1, 8)
학생 2	(1, 1.5)
학생 3	(4, 2)

제시문 분석

• **소매인력의 법칙에 대해서 설명하고 있다.**

두 상점의 비교 요소(자본력, 서비스의 질, 가격 경쟁력 등)와 상점까지의 거리를 이용해 각 상점의 고객 점유 영역을 나타내거나, 여러 상점들이 주어져 있을 때 새로운 상점을 개설할 최적의 입지를 선택하는 문제를 해결할 수 있다

• **소매인력의 법칙의 중요한 요소인 상점과 소비자의 거리에 대한 정의를 하고 있다.**

점으로서의 상점과 소비자의 거리뿐만 아니라 쇼핑몰 같은 큰 영역(평면이나 도형)과 점과의 거리도 정의할 수 있다.

논제 분석

• **소매인력법칙을 이용하여 부등식의 영역을 풀 수 있는가?**

경쟁력과 점과 점 사이의 거리를 이용하여 각 상점의 흡인력을 구한 후 어느 상점이 흡인력이 많은지 비교하는 부등식을 풀어서 그것을 xy 평면에 표현한다.

• **점과 직선 사이의 거리를 구하는 방법을 이용하여 특정상점이나 쇼핑몰을 이용하는 고객의 집합을 표현할 수 있는가?**

점과 직선 사이의 거리는 세 가지 유형으로 나누어 표현할 수 있는데 각각의 유형별로 거리를 구하여 부등식을 풀이한 후 집합의 형태로 표현할 수 있는가?

배경지식 쌓기

• **점과 직선 사이의 거리**

좌표평면 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 직선 l : $ax+by+c=0$까지의 거리를 구하여 보자.

(i) $a\neq 0,\ b\neq 0$일 때

한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 직선 l에 그은 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$라 하자.

직선 PH는 직선 l에 수직이므로 직선 PH의 기울기는 $\dfrac{b}{a}$이다.

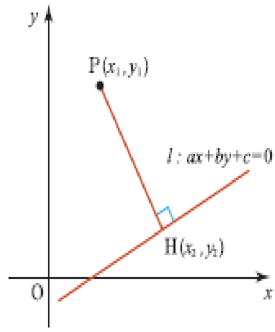
따라서 직선 PH의 방정식은 $y-y_1=\dfrac{b}{a}(x-x_1)$

한편, 직선 PH는 점 H를 지나므로 $b(x_2-x_1)-a(y_2-y_1)=0 \quad \cdots\cdots$ ①

직선 l도 점 H를 지나므로 $ax_2+by_2+c=0 \quad \cdots\cdots$ ②

①, ②에서 $x_2 - x_1 = \dfrac{-a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$,

$y_2 - y_1 = \dfrac{-b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$ 임을 알 수 있다.



따라서, 구하는 선분 PH 의 길이는

$\overline{\mathrm{PH}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ 이므로

$\overline{\mathrm{PH}} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

$= \sqrt{\dfrac{(ax_1 + by_1 + c)^2 (a^2 + b^2)}{(a^2 + b^2)^2}}$

$= \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ …… ③

(ii) $a = 0,\ b \neq 0$ 일 때

직선 l 의 방정식은 $y = -\dfrac{c}{b}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PH}} = \left| y_1 - \left(-\dfrac{c}{b}\right) \right| = \left| \dfrac{by_1 + c}{b} \right|$ …… ④

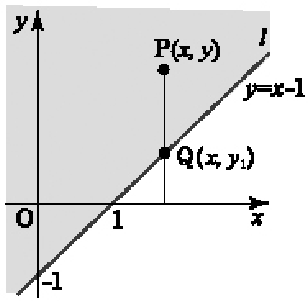
(iii) $a \neq 0,\ b = 0$ 일 때

직선 l 의 방정식은 $x = -\dfrac{c}{a}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PH}} = \left| x_1 - \left(-\dfrac{c}{a}\right) \right| = \left| \dfrac{ax_1 + c}{a} \right|$ …… ⑤

그런데 ③은 ④, ⑤를 만족하므로 $\overline{\mathrm{PH}} = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 이다.

- **부등식의 영역**

방정식 $y = x - 1$ 이 나타내는 직선을 l 이라고 하면 직선 l 은 좌표평면을 l 의 위쪽 부분과 아래쪽 부분으로 나눈다.



l 의 위쪽 부분에 있는 임의의 점 $\mathrm{P}(x, y)$ 를 잡고, 점 P 에서 y 축에 평행한 직선을 그어 직선 l 과의 교점을 $\mathrm{Q}(x, y_1)$ 이라 하면

$$y_1 = x - 1$$

이다.

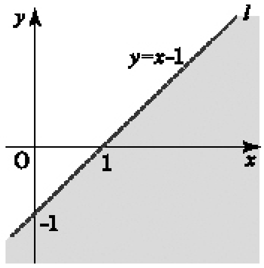
이 때, 점 P 는 점 Q 의 위쪽 부분에 있으므로 $y > y_1$ 이다.

따라서, 직선 l 의 위쪽 부분에 있는 모든 점은 $y > x - 1$ 을 만족한다.

역으로, $y > x - 1$ 을 만족하는 점 (x, y) 는 직선 l 의 위쪽 부분에 있다.

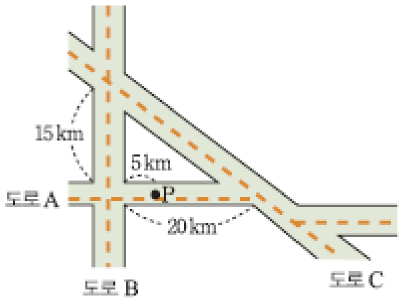
같은 방법으로, 부등식 $y < x - 1$ 을 만족하는 모든 점 (x, y) 는 직선 l 의 아래쪽 부분에 있음을 알 수 있다.

이와 같이 좌표평면 위에서 x, y 에 대한 부등식을 만족하는 점 (x, y) 전체의 집합을 그 부등식의 영역이라고 한다.



풀어보기

1. 오른쪽 그림과 같이 서로 직교하는 두 도로 A, B와 또 다른 도로 C가 위치해 있다. 도로 A와 B의 교차로에서 5㎞ 떨어진 도로 A 위의 한 지점 P에서 도로 C까지의 최단거리를 구하여라.(단, 도로의 폭은 무시한다.)



2. 부등식 $(x-4)^2+(y+2)^2 \leqq 4$ 을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $\dfrac{y+4}{x+2}$ 의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

개요 짜기

답안 작성

예시답안

풀어보기 1

도로 C는 x 절편이 20, y 절편이 15 인 직선이므로 $\dfrac{x}{20}+\dfrac{y}{15}=1$

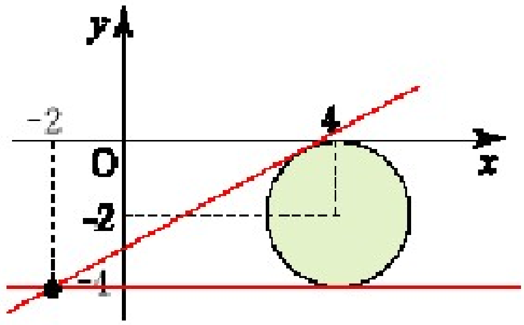
정리하면, $3x+4y-60=0$ 지점 P 는 P$(5,\ 0)$ 이므로 점과 직선 사이의 거리에 의하여 최단거리는 $\dfrac{|15-60|}{5}=9$ 이다. 즉, 최단거리는 $9\,km$이다.

풀어보기 2

$(x-4)^2+(y+2)^2 \leqq 4$ 의 영역과 $\dfrac{y+4}{x+2}=k$ 로 놓고 y에 대하여 정리하면

$y=k(x+2)-4$에서 이 직선은 기울기가 k이고, 점 $(-2,-4)$을 지난다.

이것을 좌표평면 위에 표현하면 다음과 같다.



$(x-4)^2+(y+2)^2 \leqq 4$에서 $\dfrac{y+4}{x+2}$ 의 최댓값과 최솟값은 직선

$y=k(x+2)-4$과 원 $(x-4)^2+(y+2)^2=4$ 이 접할 때이다.

즉, $\dfrac{|6k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=2$, $(6k-2)^2=4(k^2+1)$, $k(4k-3)=0$

$\therefore\ k=\dfrac{3}{4}$, 0

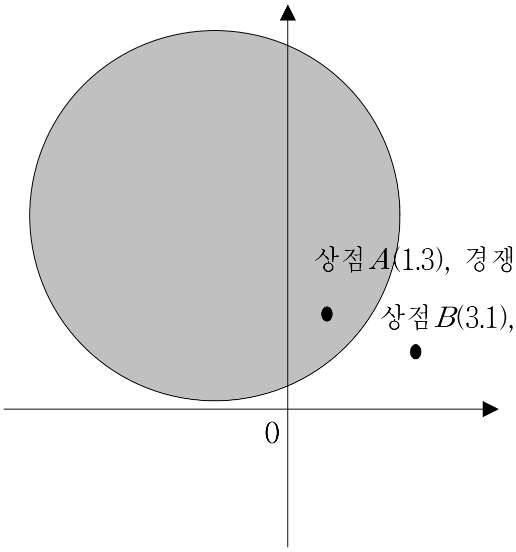
최댓값 $\dfrac{3}{4}$, 최솟값 0

논제 1 상점 A를 이용하는 고객의 집합은

$$\left\{P(x,y) \mid \frac{2}{(x-1)^2+(y-3)^2} \geq \frac{3}{(x-3)^2+(y-1)^2}\right\}$$ 으로 나타내어지고

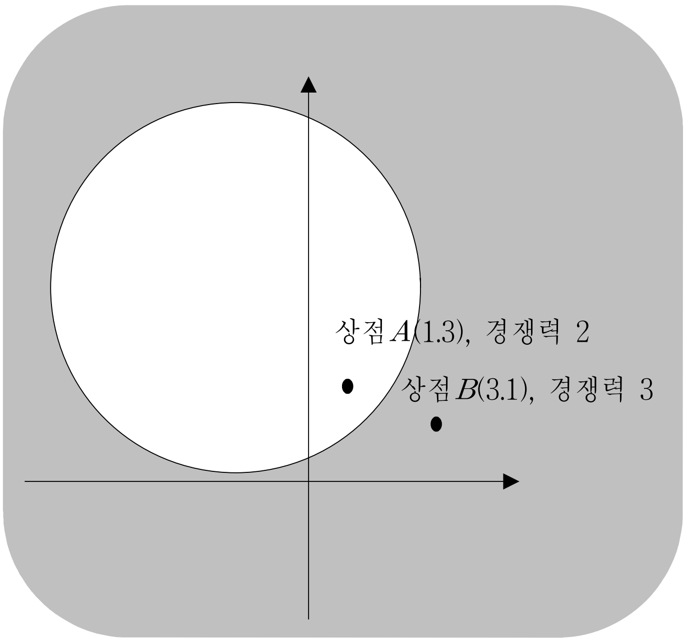
$\{P(x,y) \mid (x+3)^2+(y-7)^2 \leq 48\}$ 로 표현할 수 있다.

이 영역을 xy 평면에 나타내면 아래와 같다.



상점 B를 이용하는 고객의 집합은 상점 A를 이용하는 고객의 집합에서 부등호의 방향만 바꾸는 것이기에 $\{P(x,y) \mid (x+3)^2+(y-7)^2 \geq 48\}$ 로 표현할 수 있다.

이 영역을 xy 평면에 나타내면 아래와 같다.



논제 2-1

(ⅱ)의 경우는 고객이 위치한 점 $P(x,y)$가 직선 $x=0$과 직선 $x=2$ 사이에 있는 경우(즉, $0<x<2$인 경우)에 해당한다. 이 때 고객에 대한 상점 C의 흡인력은 $\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2}$ 이고, 쇼핑몰 $\overline{DE}$의 흡인력은 $\dfrac{2}{y^2}$ 이다. 따라서

상점 C를 이용하는 고객의 집합 $=\left\{(x,y)\,|\,0<x<2,\ \dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2} \geq \dfrac{2}{y^2}\right\}$ 이다.

(ⅲ)의 경우는 고객이 위치한 점 $P(x,y)$가 직선 $x=2$의 오른쪽에 있는 경우(즉, $x \geq 2$인 경우)에 해당한다.

이 때 고객에 대한 상점 C의 흡인력은 $\dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2}$ 이고,

쇼핑몰 $\overline{DE}$의 흡인력은 $\dfrac{2}{(x-2)^2+y^2}$ 이다. 따라서

상점 C를 이용하는 고객의 집합 $=\left\{(x,y)\,|\,x \geq 2,\ \dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2} \geq \dfrac{2}{(x-2)^2+y^2}\right\}$ 이다.

논제 2-2

학생 1은 제시문 (나)의 (ⅱ)의 경우에 해당되며 상점 C의 흡인력은 $\dfrac{1}{36}$이 되고 쇼핑몰 $\overline{DE}$의 흡인력은 $\dfrac{1}{32}$이 되어 쇼핑몰 $\overline{DE}$를 이용할 것이며,

학생 2도 제시문 (나)의 (ⅱ)의 경우에 해당되며

상점 C의 흡인력은 $\dfrac{1}{0.25}$이되고 쇼핑몰 $\overline{DE}$의 흡인력은 $\dfrac{1}{1.125}$이 되어 상점 C를 이용할 것이며,

학생 3은 제시문 (나)의 (ⅲ)의 경우에 해당되며 상점 C의 흡인력은 $\dfrac{1}{9}$이 되고 쇼핑몰 $\overline{DE}$의 흡인력은 $\dfrac{1}{4}$이 되어 쇼핑몰 $\overline{DE}$를 이용할 것으로 예상된다.

14 아주대학교 예시(1)

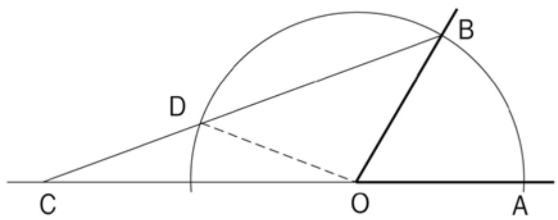
제 시 문

(가) 적당한 도구를 사용하여 다양한 기하학적 도형을 그리는 것을 작도라 한다. 고대 그리스인들은 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 할 수 있는 작도에 대해 연구하여 여러 가지 도형들의 작도법을 발견하였다. 그 이후로 기하학적 작도는 그들의 전통을 따라 눈금 없는 자와 컴퍼스만으로 하는 작도를 일컫게 되었다.

기하학적 작도에서 컴퍼스는 주어진 점을 중심으로 주어진 길이를 반지름으로 하는 원을 그리는 도구이고, 눈금 없는 자는 주어진 두 점을 지나는 직선이나, 주어진 원에 원 바깥에 주어져 있는 점으로부터 접선을 긋는 도구이다. 예를 들면, 주어진 선분의 수직이등분선, 주어진 각의 이등분선, 주어진 길이를 한 변으로 하는 정삼각형, 정사각형 등은 기하학적으로 작도 가능한 도형이다.

임의의 각을 3등분하기, 주어진 정육면체의 두 배의 부피를 갖는 정육면체의 한 변을 작도하기, 주어진 원과 넓이가 같은 정사각형의 한 변을 작도하기 등을 3대 작도불능 문제라 한다. 오랫동안 미해결로 남아있던 이 작도 문제들이 기하학적으로는 불가능하다는 것이 근세에 대수적으로 증명되었다.

다소 변칙적인 방법으로 임의의 각을 3등분하는 방법은 오래 전부터 알려져 있다. 기원전 아르키메데스(Archimedes)는 뉴시스작도(neusis comstruction)라는 방법으로 임의로 주어진 각을 3등분할 수 있다는 것을 보였다.



[그림1]

[그림1]에서 $\angle AOB$가 주어진 각이고, $\angle ACB$가 $\angle AOB$의 3등분각이다. $\angle ACB$를 작도하려면, 먼저 주어진 각의 꼭짓점인 O를 중심으로 하는 원을 그려서 주어진 각의 변과 만나는 점 A와 B를 구하고, 각의 변OA를 점O의 방향으로 연장한 직선을 긋는다. 다음으로 자를 직선OA와 맞추어 점O와 A에 대응되는 위치를 자 위에 표시한다. 전통적인 기하학적 작도에서는 이렇게 자 위에 표시를 할 수 없다. 마지막으로 자 위에 표시된 이 점들이 직선OA 위의 점C와 원O 위의 점D에 각각 위치하게 자를 움직여 점B를 지나는 직선BC를 긋는다. 즉, 선분CD와 선분OA의 길이가 같아지게 직선BC를 긋는다. 이렇게 작도하면 $\angle ACB$가 $\angle AOB$의 3등분각이 되는 것은 다음과 같이 증명할 수 있다.

$CD = OA = OD$ 이므로 $\triangle OCD$ 는 이등변삼각형이고

$$\angle OCD = \angle COD$$

따라서 $\angle ODB = \angle OCD + \angle COD$
$= 2\angle OCD$
$= 2\angle ACB$

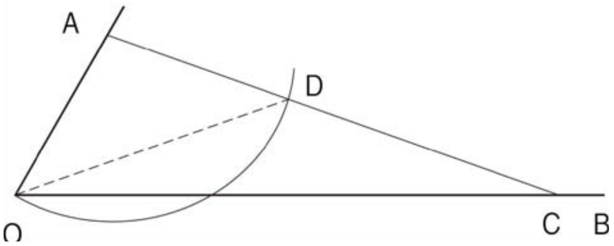
그리고 $OB = OD$ 이므로 $\triangle OBD$ 는 이등변 삼각형이고

$\angle ODB = \angle OBD$

따라서 $\angle BOD = 180^\circ - (\angle ODB + \angle OBD)$
$= 180^\circ - 2\angle ODB$
$= 180^\circ - 4\angle ACB$

그러므로 $\angle AOB = 180^\circ - (\angle BOD + \angle COD)$
$= 180^\circ - ((180^\circ - 4\angle ACB) + \angle ACB)$
$= 3\angle ACB$

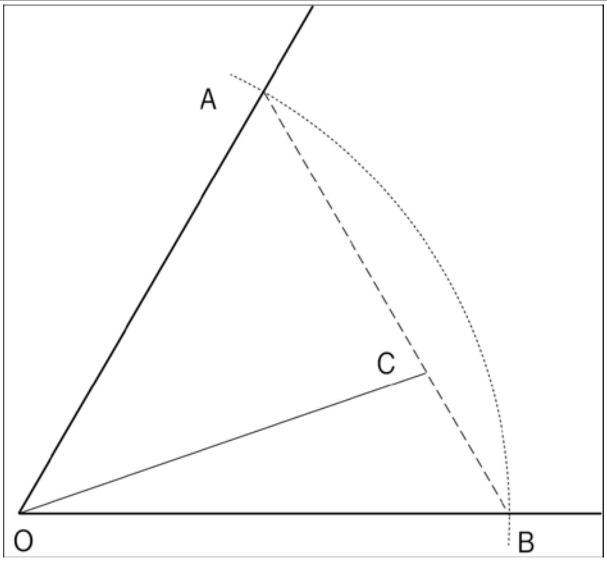
(나) [그림2]와 같이, 각의 한 변 위에 한 점 A 를 잡고 점 A 를 중심으로 하고 각의 꼭짓점 O 를 지나는 원호 S 를 그린다. 이 원호 S 위에 점 D 를 잘 잡아 직선 AD 와 각의 다른 변 OB 와의 교점 C 에 대해 $OD = CD$ 가 되면, $\angle COD$ 가 주어진 각 $\angle AOB$ 의 3등분각이 된다.



[그림2]

전통적인 기하학적 작도법이나 뉴시스작도법으로는 이와 같은 점 D 를 작도할 수 없다. 그러나 다음과 같은 방법으로 D 에 임의로 가까운 점들을 작도할 수 있다. 먼저 원호 S 위에 한 점 D_1 을 잡고, $OD_1 = C_1D_1$ 인 점 C_1 을 변 OB 위에 잡는다. 다음으로 직선 AC_1 과 원호 S 의 교점을 D_2 라 하고 $OD_2 = C_2D_2$ 인 점 C_2 를 변 OB 위에 잡는다. 이런 과정을 반복하여 원호 S 위에 점 D_1, D_2, D_3, …를 잡으면 이 점들은 한 점으로 수렴하게 되는데, 이 극한점이 점 D 가 된다.

(다) 각을 3등분하는 것은 각의 꼭짓점을 중심으로 하는 원이 각의 두 변에 의해서 잘려진 원호를 3등분하는 것과 같다. [그림3]과 같이 현을 3등분하는 것으로 3등분각을 작도할 수 없으나 주어진 각의 크기가 작을 때에는 3등분각에 가까운 각을 얻을 수 있다.



[그림3]

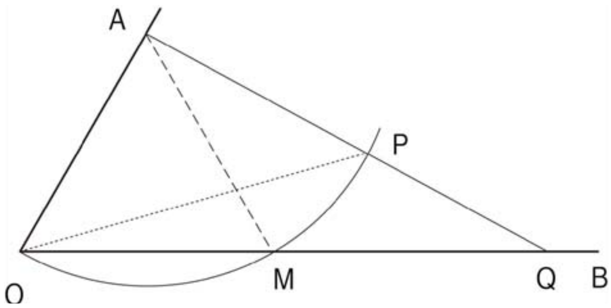
[그림3]에서 $OA=OB$이고 점C는 현AB를 $2:1$로 내분하는 점이다. $\angle AOB$와 $\angle BOC$의 크기를 각각 α와 β라 하면 다음 부등식이 성립한다.

(1) $\left|\beta-\frac{1}{3}\alpha\right| \leq \frac{3}{25}\alpha^2$ (단, 각의 단위는 라디안(radian)이다.)

즉, α가 작을 때 β는 $\frac{\alpha}{3}$의 근삿값이 된다. 실제로, $\angle AOB$가 30°일 때 $\angle BOC$의 3배는 약 29.896°가 된다.

[1] [그림2]에서 $AO=AD$이고 $OD=CD$이면, $\angle COD$가 $\angle AOB$의 3등분각이 됨을 제시문 (가)를 참조하여 증명하라.

[2] 아래 그림에서 예각 $\angle AOB$와 점A는 고정되어 있고, A를 중심으로 하고 AO를 반지름으로 하는 원S와 변OB의 교점은 M이다. 점P는 원S 위를 움직이며, 점Q는 직선AP와 변OB의 교점이다.



$\angle AOB$와 $\angle MAP$의 크기를 각각 α와 γ라 할 때, $\lim_{\gamma\to 0}\frac{PQ}{OP}$와 $\lim_{\gamma\to\alpha}\frac{PQ}{OP}$를 구하고, 이를 이용하여 원$S$ 위에 $OP=PQ$인 점 P가 존재함을 설명하라.

[3] 제시문 (나)에 나오는 점 D_1, D_2, D_3, $\cdots$들이 점 D에 수렴함을 보일 때 다음 사실들을 이용할 수 있다.

(a) $OD_n < OD$ 이면 $OD_n < OD_{n+1} < OD$ 이다.

(b) $OD_n > OD$ 이면 $OD_n > OD_{n+1} > OD$ 이다.

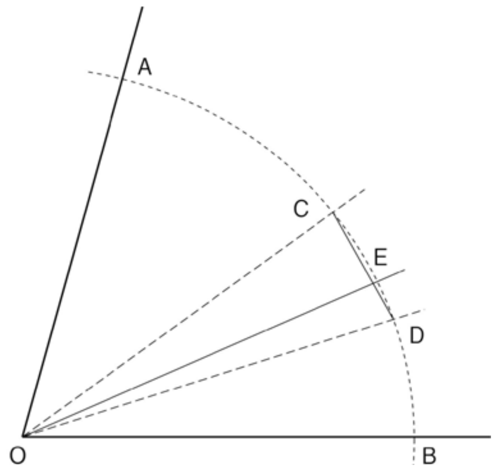
(a)를 증명하라.

[4] [그림3]에서 $\angle AOB$와 $\angle BOC$의 크기를 각각 α와 β라 할 때, $\cos(\beta)$를 α에 관한 식으로 나타내어라.

[5] 다음 그림에서 OC는 $\angle AOB$의 이등분선이고, OD는 $\angle BOC$의 이등분선이며, 점 E는 현 CD를 $2:1$로 내분하는 점이다. $\angle AOB$와 $\angle BOE$의 크기를 각각 α와 δ라 할 때, δ가 $\frac{\alpha}{3}$의 근삿값이 됨을 설명하고, 부등식

$$\left|\delta - \frac{1}{3}\alpha\right| \leq \frac{3}{400}\alpha^2$$

이 성립함을 증명하라.



제시문 분석

눈금 없는 자와 컴퍼스만을 사용하는 기하학적 작도로 풀리지 않는 3대 작도불능 문제 중 3등분각의 작도를 다소 변칙적 방법으로 풀 수 있다.

- **아르키메데스의 뉴시스작도**

눈금 없는 자에 눈금을 표시하여 임의로 주어진 각을 3등분할 수 있고 이를 삼각형의 성질을 이용하여 주어진 각이 3등분됨을 설명한다.

- **극한을 이용하는 방법**

극한을 이용하여 임의로 주어진 각의 3등분각에 수렴하게 한다.

- **주어진 각의 크기가 작을 때 현과 호가 근사함을 이용**

임의의 작은 각이 주어질 때 현의 삼등분점을 이용하여 3등분각에 가까운 근사각을 얻을 수 있다.

논제 분석

- 제시문에 주어진 "이등변삼각형의 두 밑각은 같다.", "삼각형의 한 외각은 이웃하지 않은 두 내각의 합과 같다."를 이용하여 3등분각이 됨을 설명한다.

- **$\angle MAP$의 변화에 따른 $\dfrac{PQ}{OP}$의 변화를 설명하고 $\dfrac{PQ}{OP}=1$인 점 P의 존재 근거를 제시할 수 있는가?**

  OP, PQ를 α, γ를 이용해 표현하고 $\lim\limits_{\gamma \to 0}\dfrac{PQ}{OP}$ 와 $\lim\limits_{\gamma \to \alpha}\dfrac{PQ}{OP}$ 값을 구한 후,

  두 극한값 사이에 $\dfrac{PQ}{OP}$의 값이 변화함을 설명하고

  $OP=PQ$인 점 P가 존재하는 근거를 제시하여 설명한다.

- $a<b$이면 $a<c<b$인 실수 c가 존재한다.

- 삼각형의 한 변의 길이를 나머지 변과 각을 이용하여 표현하고 α, β 사이의 관계식을 구한다.

- 제시된 그림에서 제시문 (다)의 α, β를 적용할 수 있는 부분을 찾아 치환하여 근삿값이 됨을 설명하고 부등식을 증명한다.

배경지식 쌓기

- **중간값 정리**

함수 $f(x)$가 구간 $[a, b]$에서 연속이고 $f(a) \neq f(b)$일 때, $f(a)$와 $f(b)$ 사이의 임의의 값을 k라 하면 $f(c)=k$인 c가 개구간 (a, b) 사이에 적어도 하나 존재한다.

- **수열의 극한의 대소 관계**

(1) $a_n < b_n$ 이면 $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$ 이다.

(2) $a_n < c_n < b_n$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ 이면 $\lim_{n\to\infty} c_n = \alpha$ 이다.

- **제2코사인법칙**

(1) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

(2) $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B$

(3) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

풀 어 보 기

1. 방정식 $\cos \pi x + ax - 17 = 0$ 은 오직 하나의 실근을 갖는다. 이 실근이 구간 $(2, 3)$ 에 존재할 때, 정수 a 값을 구하시오.

2. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $n < a_n < n+1$ 을 만족시킬 때,

$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 의 값을 구하시오.

개요 짜기

답안 작성

예시답안

풀어보기 1

$f(x)=\cos\pi x+ax-17$ 로 두고 중간값 정리를 활용하자.

$f(x)$ 가 폐구간 $[2,3]$ 에서 연속이고, $f(2)=2a-16$, $f(3)=3a-18$ 이므로 $2(a-8)\cdot 3(a-6)<0$ 이면 중간값 정리에 의해 $f(x)=0$ 의 근이 구간 (2, 3)에 존재한다. 따라서 $6<a<8$ 이며 정수 a 는 7이다.

풀어보기 2

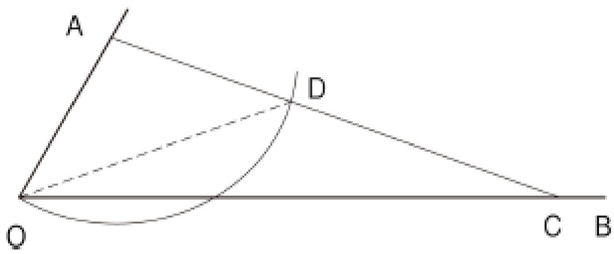
$n<a_n<n+1$ 이므로 $\sum_{k=1}^{n}k<a_1+a_2+\cdots+a_n<\sum_{k=1}^{n}(k+1)$ 이다.

각 변에 역수를 취하고 n^2 을 곱하면

$\dfrac{2n^2}{n(n+3)}<\dfrac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}<\dfrac{2n^2}{n(n+1)}$ 이고, $\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n(n+3)}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n(n+1)}=2$ 이므로

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{a_1+a_2+\cdots+a_n}=2$ 이다.

논제 1



[그림 2]

$AO=AD$ 이므로 $\triangle AOD$ 는 이등변삼각형이고 $\angle AOD=\angle ADO$ 이다.
또 $OD=DC$ 이므로 $\triangle COD$ 도 이등변삼각형이고 $\angle DOC=\angle DCO$ 이다. 따라서

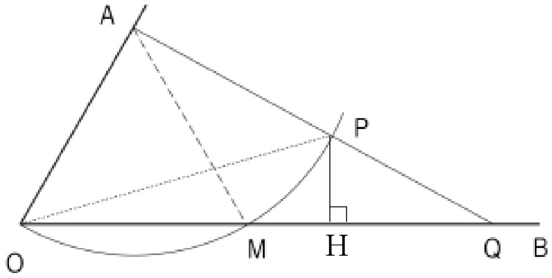
$$\angle ODC=180^o-(\angle COD+\angle DCO)=180^o-2\angle COD$$

그러므로

$$\begin{aligned}\angle AOB&=\angle AOD+\angle DOC\\&=\angle ADO+\angle COD\\&=180^o-\angle ODC+\angle COD\\&=180^o-(180^o-2\angle COD)+\angle COD\\&=3\angle COD\end{aligned}$$

따라서 $\angle COD$ 가 $\angle AOB$ 의 3등분각이다.

논제 2



$\angle MAP=\gamma$ 이므로 $\angle MOP=\dfrac{\gamma}{2}$ ($\because$ 호 PM 에 대한 원주각), $AO=AM$ 이므로 $\triangle AOM$ 은 이등변삼각형이고 $\angle AMO=\alpha$ 이다. 따라서 $\angle AQO=\alpha-\gamma$ 이다. 점 P 에서 OB 에 내린 수선의 발을 H 라 하면, $\triangle OPH$ 에서 $\sin\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{PH}{OP}$, $\triangle BPH$ 에서 $\sin(\alpha-\gamma)=\dfrac{PH}{PQ}$ 이므로

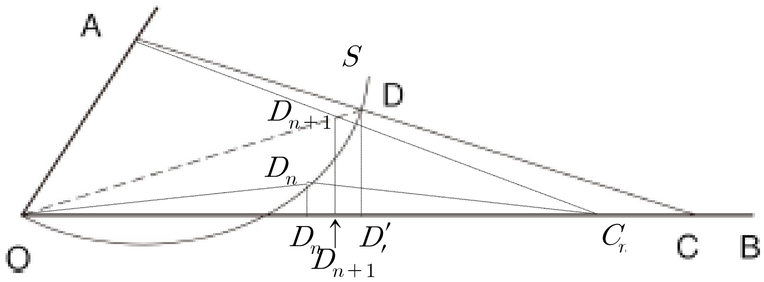
$$OP=\frac{PH}{\sin\frac{\gamma}{2}} \quad , PQ=\frac{PH}{\sin(\alpha-\gamma)}$$

따라서 $\dfrac{PQ}{OP}=\dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\alpha-\gamma)}$ 가 된다.

그러므로 $\displaystyle\lim_{\gamma\to 0}\frac{PQ}{OP}=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin(\alpha-\gamma)}=0$, $\displaystyle\lim_{\gamma\to\alpha}\frac{PQ}{OP}=\lim_{\gamma\to\alpha}\frac{\alpha-\gamma}{\sin(\alpha-\gamma)}\,\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\alpha-\gamma}=\infty$ 이다.

그런데 γ 가 0에서 α 까지 변할 때, $\dfrac{PQ}{OP}$ 는 0에서 ∞ 까지 연속적으로 변하므로 중간값 정리에 의해 $\dfrac{PQ}{OP}\to 1$ 로 가는 점, 즉 $OP=PQ$ 인 점 P 가 존재한다.

논제 3



[그림 2]

$OD_n < OD$ 이면 $\overset{\frown}{OD}$ 상의 점 D_n 에 대해 $\angle DOC > \angle D_nOC$ 이다.

이때 D, D_n 에서 OC 에 내린 수선의 발을 각각 D', $D_n{}'$ 이라 하면 $OD_n{}' < OD'$ 이고 $OC_n = 2OD_n{}'$, $OC = 2OD'$ 이므로 $OD_n{}' < OC_n < OC$ 이다.

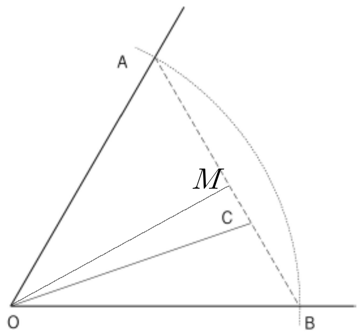
AC_n 이 원호 S 와 만난 점을 D_{n+1} 이라 하고 D_{n+1} 에서 OB 에 내린 수선의 발을 $D_{n+1}{}'$ 이라 하면 $OD_n{}' < OD_{n+1}{}' < OD'$ 이고 $D_nD_n{}' < D_{n+1}D_{n+1}{}' < DD'$ 이다.

또한 $OD^2 = OD'^2 + DD'^2$

$$OD_{n+1}^2 = OD_{n+1}{}'^2 + D_{n+1}D_{n+1}{}'^2$$
$$OD_n^2 = OD_n{}'^2 + D_nD_n{}'^2$$

이므로 $OD_n < OD_{n+1} < OD$ 이다.

논제 4



[그림 3]

원의 반지름을 R, AB 의 중점을 M 이라 하자.

$CM = \dfrac{1}{6}AB$, $OM^2 = R^2 - BM^2$ 이므로 $\triangle COM$ 에서

$$\begin{aligned} OC^2 &= OM^2 + CM^2 \\ &= R^2 - \frac{1}{4}AB^2 + \frac{1}{36}AB^2 \\ &= R^2 - \frac{2}{9}AB^2 \end{aligned}$$

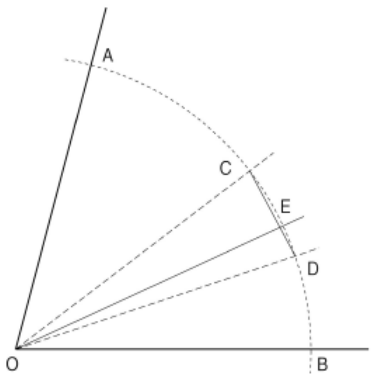
$\triangle AOB$ 에서 제2코사인 법칙을 사용하면

$$AB^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha = 2R^2(1-\cos\alpha)$$

이고, $BC^2 = (\frac{1}{3}AB)^2$ 이므로 $\triangle OBC$ 에서 제2코사인 법칙을 사용하면

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2\,OB \cdot OC} \\ &= \frac{R^2 + R^2 - \frac{2}{3}R^2(1-\cos\alpha)}{2R \cdot \sqrt{R^2 - \frac{2}{9} \cdot 2R^2(1-\cos\alpha)}} \\ &= \frac{2+\cos\alpha}{\sqrt{5+4\cos\alpha}} \end{aligned}$$

논제 5



$\angle COD = \angle BOD = \dfrac{\alpha}{4} = \gamma$, $\angle EOD = \beta$ 라 하면 γ가 작으므로($\angle AOB$가 90° 라 하더라도 $\angle COD$는 22.5° 로 제시문의 30° 보다 작다.) 제시문 (다)에 의해 β는 $\dfrac{1}{3}\gamma$에 근사한다. $\angle BOE = \angle BOD + \angle EOD$ 이므로 $\delta = \dfrac{\alpha}{4} + \beta \fallingdotseq \dfrac{\alpha}{4} + \dfrac{\gamma}{3} = \dfrac{\alpha}{3}$ 이다.

따라서, δ는 $\dfrac{\alpha}{3}$ 에 근사한다.

$\angle COD$와 $\angle EOD$의 크기는 각각 $\dfrac{\alpha}{4}$ 와 $\beta = \delta - \dfrac{\alpha}{4}$ 이므로 $\triangle COD$에 제시문 (다)의 (1)식을 사용하면

$$\left|\left(\delta - \frac{\alpha}{4}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha}{4}\right)\right| \le \frac{3}{25}\left(\frac{\alpha}{4}\right)^2$$

따라서 부등식 $\left|\delta - \dfrac{1}{3}\alpha\right| \le \dfrac{3}{400}\alpha^2$ 을 얻는다.

15 아주대학교 예시(2)

제 시 문

1827년, 영국의 식물학자 로버트 브라운은 액체속의 꽃가루를 현미경으로 관찰하던 중 꽃가루 알갱이가 액체 속에서 끊임없이 불규칙한 운동을 하며 떠다니는 현상을 발견하였다. 브라운은 꽃가루의 운동이 꽃가루 내부의 생명에너지에 의해 일어난다고 생각하였으나, 물리학자들은 내부 유체의 불규칙한 유동현상(유체분자의 충돌현상에 의해 일어남)이 꽃가루를 통하여 보이는 것이라고 결론지었다. 그리고 이 현상을 발견한 과학자의 이름을 따서 브라운운동이라고 하였다. 또 물리학자들은 온도가 높거나, 입자의 알갱이가 작을수록 브라운 운동이 활발해 짐을 발견했다. 특히 천재 물리학자 아인슈타인은 입자들의 평균이동거리를 확률적 방법을 응용하여 계산하였다. 브라운운동은 분자레벨의 모든 자연현상에서 일어나며 간단한 예로, 투명 용액 속에 붉은 잉크를 한 방울 떨어뜨릴 때, 잉크가 확산되어 전체용액이 오랜 시간 후 옅은 붉은색 용액으로 바뀌는 현상을 들 수 있다. 현대에는 브라운현상이 물리적 현상뿐만 아니라, 정보망을 통한 정보의 확산 과정, 주식의 가격변동 등 경제현상을 설명하는 주요한 수학적 도구로 활용되고 있다. 우리는 간단한 1차원 격자상의 불규칙한 유동현상(이를 랜덤워크라 부른다)실험을 통하여, 이 현상을 이해하고자 한다. 총질량 1그램의 물질을 고려해 보자. 물질은 3개의 격자점 $[-1,\ 0,\ 1]$ 위에만 분포하며, 매초마다 물질은 반반씩 이웃하는 격자로 확산된다. 만일 $(m^k_{-1},\ m^k_0,\ m^k_1)$ 을 k 초 후의 각 격자점에서의 물질의 질량이라고 정의하면, $k+1$ 초 후의 질량은 점화식

$$m^{k+1}{}_{-1}=\frac{m^k_{-1}+m^k_0}{2}\ ,m^{k+1}{}_0=\frac{m^k_{-1}+m^k_1}{2}\ ,m^{k+1}{}_1=\frac{m^k_0+m^k_1}{2}$$

을 만족한다. 즉 초기 물질의 질량분포가 $(0,1,0)$ 이라 하면, 1 초 후에는 $(1/2,\ 0,\ 1/2)$ 이 되고, 2 초 후에는 $(1/4,\ 1/2,\ 1/4)$ 이 된다.

[1] $(m^k_{-1},\ m^k_0,\ m^k_1)$ 가 시간이 갈수록 $(k\to\infty)$ 수렴한다고 할 때, 수렴값 $(m_{-1},\ m_0,\ m_1)$ 을 구하는 과정을 기술하고 그 값을 구하라.

[2] 초기치가 $(m_{-1}^0,\ m_0^0,\ m_1^0)=(0,1,0)$이면, 유한시간 k초에 수렴하는지를 판단하여 기술하라.

[3] k초 후에 이웃하는 격자점들 간의 질량차를 $d_{1/2}^k = m_1^k - m_0^k$, $d_{1/-2}^k = m_0^k - m_{-1}^k$으로 정의하며, 내부 격자점 0에서 질량차의 차이를 $D^k = d_{1/2}^k - d_{-1/2}^k$으로 정의한다. 또 내부 격자점 0에서 시간 k 및 $k+1$ 간의 질량차를 $e^k = m_0^{k+1} - m_0^k$으로 정의하자. 이 때, D^k와 e^k의 관계식을 구하라.

[4] 격자점에서의 질량 $(m_{-1}^k,\ m_0^k,\ m_1^k)$가 오랜 시간이 지나면($k\to\infty$) 반드시 수렴함을 보여라. (힌트 : $(m_{-1}^k,\ m_0^k,\ m_1^k)=(m_0^k+\alpha_k,\ m_0^k,\ m_0^k+\beta_k)$로 두고 풀어라.)

제시문 분석

- 아인슈타인은 입자들의 평균이동 거리를 확률적 방법을 응용하여 계산
- 브라운현상이 물리적 현상뿐만 아니라, 정보망을 통한 정보의 확산과정, 주식의 가격 변동 등 경제 현상을 설명하는 주요한 수학적 도구로 활용되고 있다.
- 1차원 격자상의 불규칙한 유동현상 실험에서 $k+1$초 후의 질량은 점화식 $m^{k+1}{}_{-1}=\dfrac{m_{-1}^k+m_0^k}{2}$, $m^{k+1}{}_0=\dfrac{m_{-1}^k+m_1^k}{2}$, $m^{k+1}{}_1=\dfrac{m_0^k+m_1^k}{2}$ 을 만족한다.

논제 분석

- **수열이 수렴한다는 조건하에 점화식을 연립하여 수열의 극한값을 구할 수 있는가?**

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ 이면 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\alpha$ 임을 활용하여 점화식을 수렴값 m_{-1}, m_0, m_1 으로 표현하고 점화식을 연립하여 수렴값을 간단히 나타낸다.

- **유한시간에 수렴한다고 가정하였을 때 모순점이 존재하는가?**

귀류법에 의해 유한시간에 수렴한다고 가정하였을 때 모순점이 존재함을 논리적으로 기술한다.

- **복잡한 식을 연립하여 식을 간단히 표현할 수 있는가?**
- **두 개 이상의 점화식을 연립하여 일반항을 표현할 수 있는가?**

세 개의 수열 m_{-1}^k , m_0^k , m_1^k 이 섞여 있는 점화식을 적절히 더하거나 빼는 등 연립하여 점화식을 하나의 수열에 관한 점화식으로 표현한 후 이 점화식을 풀어 일반항을 구하면 극한값을 구할 수 있다.

배경지식 쌓기

- **수열의 귀납적 정의와 점화식**

수열을 정의할 때, 수열의 일반항을 구체적인 식으로 나타내기도 하지만 이웃하는 항들 사이의 관계식을 써서 수열을 정의하기도 한다.

예를 들면, $a_1=3, a_{n+1}=a_n+4(n=1,2,3,\cdots)$ 로 정의된 수열 $\{a_n\}$ 은 첫째항이 3, 공차가 4인 등차수열이다. 이와 같이, 수열 $\{a_n\}$ 을 첫째항 a_1 의 값과 이웃하는 두 항 a_n 과 a_{n+1} 사이의 관계식으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라 하고 그 관계식을 점화식이라 한다.

풀 어 보 기

1. $a_{n+1} = pa_n + q(p \neq 1, q \neq 0)$ 의 꼴의 점화식을 $a_{n+1} - \alpha = p(a_n - \alpha)$ 꼴로 변형하여 일반항을 구하시오.

2. A 그릇과 B 그릇에 농도가 3%인 소금물과 5%인 소금물이 각각 $100g$ 씩 들어 있다. A, B 그릇에서 동시에 $10g$ 의 소금물을 퍼내어 서로 바꾸어 넣는 시행을 n 회 되풀이했을 때, A 그릇과 B 그릇의 농도(%)를 각각 a_n, b_n 이라고 하자. 이때, $\lim_{n \to \infty} a_n$ 의 값을 구하시오. (단, $n = 1,\ 2,\ 3, \cdots$)

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

- **귀류법[歸謬法 reductio ad absurdum]**

귀류법은 증명하려는 명제의 부정이 참이라는 것을 가정하였을 때 모순되는 결과가 나온다는 것을 보여, 원래의 명제가 참인 것을 증명하는 방법이다. '배리법(背理法)'이라고도 한다. 귀류법은 유클리드가 2300년 전 소수의 무한함을 증명하기 위해 사용하였을 정도로 오래된 증명법이다. 유클리드의 귀류법을 살펴보자.

- 명제 : '소수(素數)의 개수는 무한히 많다'

(증명) 소수가 유한하다고 가정하자. 유한개의 소수를 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 이라 하면,

$N=(p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n)$ 에 대하여 $N+1$ 은 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 과 다른 소수이다.

이것은 소수가 n 개라는데 모순이므로 소수의 개수는 무한히 많다. 또한 '$\sqrt{2}$ 는 유리수가 아니다'라는 명제의 다음과 같은 증명은 귀류법의 예로서 자주 인용되고 있다. $\sqrt{2}$ 가 유리수라고 가정하면 $\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ (m, n 은 서로소인 정수, 단 $m \neq 0$)과 같은 기약분수로 나타낼 수 있다. 이 식의 양변을 제곱하면 $2m^2=n^2$ 이 되며, 좌변은 짝수이므로 n 은 짝수, 즉 $n=2k$ 인 k (k 는 정수)가 있다. 따라서 $m^2=2k^2$ 이다. 역시 우변은 짝수이므로 m 도 짝수이다. m, n 이 모두 짝수가 된다면 m, n 은 공약수 2를 가지며 이는 m, n 이 서로소라는 사실에 모순이다. 따라서 가정 '$\sqrt{2}$ 는 유리수이다'는 거짓이 된다. 즉 $\sqrt{2}$ 는 무리수이다.

귀류법은 수학이나 자연과학에서 애호되는 논증법의 하나이다. 이 경우의 귀류법은 한 명제 A의 부정으로부터 모순을 끌어내어 A의 부정이 옳지 않다는 것을 증명한다. 즉, A가 성립함(참)을 말해 주는 증명 방법이다. 이 때 증명의 최종목적은 A의 증명에 있으며, 직접적으로는 A를 증명하지 않고, 우선 귀류법에 의하여 A의 부정을 부정하는 것을 시도해 보는 간접적인 방법을 사용한다.

예시답안

풀어보기 1

$a_{n+1}=pa_n+q$ 를 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ 의 꼴로 바꾸면

$a_{n+1}=pa_n+(1-p)\alpha$ 이므로 $(1-p)\alpha=q$ 에서 $\alpha=\dfrac{q}{1-p}$ 가 구해진다. … ①

한편, 수열 $\{a_n-\alpha\}$ 는 초항이 $a_1-\alpha$ 이고 공비가 p 인 등비수열이므로,

$a_n-\alpha=(a_1-\alpha)\cdot p^{n-1}$, 즉. $a_n=(a_1-\alpha)\cdot p^{n-1}+\alpha$ 가 얻어진다.

①에서 구한 α 의 값을 대입하면, $a_n=(a_1-\dfrac{q}{1-p})\cdot p^{n-1}+\dfrac{q}{1-p}$ 이 된다.

풀어보기 2

$$a_{n+1}=0.9a_n+0.1b_n \cdots ㉠$$

$$b_{n+1}=0.1a_n+0.9b_n \cdots ㉡$$

㉠+㉡하면 $a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+b_n$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$이므로 $a_n+b_n=8$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$

따라서 $b_n=8-a_n \cdots ㉢$

㉢을 ㉠에 대입하면 $a_{n+1}=0.8a_n+0.8$ 이고 $a_{n+1}-4=0.8(a_n-4)$

$$a_n=(a_1-4)\cdot 0.8^{n-1}+4$$

따라서 $\lim_{n\to\infty}a_n=4$

논제 1

$(m_{-1}^k,\ m_0^k,\ m_1^k)$가 시간이 갈수록 $(m_{-1},\ m_0,\ m_1)$에 수렴한다고 하였으므로 $\lim_{k\to\infty}m^k{}_{-1}=\lim_{k\to\infty}m^{k+1}{}_{-1}=m_{-1}$, $\lim_{k\to\infty}m^k{}_0=\lim_{k\to\infty}m^{k+1}{}_0=m_0$, $\lim_{k\to\infty}m^k{}_1=\lim_{k\to\infty}m^{k+1}{}_1=m_1$ 이고, 제시문에서

$$m^{k+1}{}_{-1}=\frac{m_{-1}^k+m_0^k}{2} \cdots ①\ ,\ m^{k+1}{}_0=\frac{m_{-1}^k+m_1^k}{2} \cdots ②\ ,\ m^{k+1}{}_1=\frac{m_0^k+m_1^k}{2} \cdots ③$$

이므로 양변에 $k\to\infty$ 로의 극한을 취하면

$$m_{-1}=\frac{m_{-1}+m_0}{2} \cdots ④,\quad m_0=\frac{m_{-1}+m_1}{2} \cdots ⑤,\quad m_1=\frac{m_0+m_1}{2} \cdots ⑥$$

①~③을 연립하면 $m^{k+1}{}_{-1}+m^{k+1}{}_0+m^{k+1}{}_1=m^k{}_{-1}+m^k{}_0+m^k{}_1$ 이고,

초기치 $(m_{-1}^0,\ m_0^0,\ m_1^0)$에 대해 $m^0{}_{-1}+m_0^0+m_1^0=M$ 이라 하면 귀납법에 의해

$m^k{}_{-1}+m^k{}_0+m^k{}_1=m^{k-1}{}_{-1}+m^{k-1}{}_0+m^{k-1}{}_1=\cdots=m^0{}_{-1}+m^0{}_0+m^0{}_1=M$ 이며

따라서 $m_{-1}+m_0+m_1=M$

또한 ④~⑥을 연립하면 $m_{-1}=m_0=m_1$ 이므로, $m_{-1}=m_0=m_1=\frac{M}{3}$ 이 된다.

논제 2

초기치 $m^0{}_{-1}=0$, $m^0{}_0=1$, $m^0{}_1=0$ 이면 [1]에서 $M=1$ 이므로 유한시간 k 초에 수렴한다면 $m^k{}_{-1}=\frac{1}{3}$, $m^k{}_0=\frac{1}{3}$, $m^k{}_1=\frac{1}{3}$ 인 실수 k 가 존재한다. 이를 ①~③에 대입하여 연립하면 $m^{k-1}{}_{-1}=\frac{1}{3}$, $m^{k-1}{}_0=\frac{1}{3}$, $m^{k-1}{}_1=\frac{1}{3}$ 이고 같은 방법으로 계속하면 $m^0{}_{-1}=\frac{1}{3}$, $m^0{}_0=\frac{1}{3}$, $m^0{}_1=\frac{1}{3}$ 이다. 이는 초기치 $m^0{}_{-1}=0$, $m^0{}_0=1$, $m^0{}_1=0$ 에 모순이므로 유한시간 k 초에 수렴하지 않는다.

논제 3

$$\begin{aligned} D^k &= d^k{}_{1/2} - d^k{}_{-1/2} \\ &= (m^k{}_1 - m^k{}_0) - (m^k{}_0 - m^k{}_{-1}) \\ &= m^k{}_{-1} + m^k{}_1 - 2m^k{}_0 \\ &= 2m^{k+1}{}_0 - 2m^k{}_0 \\ &= 2(m^{k+1}{}_0 - m^k{}_0) = 2e^k \end{aligned}$$

$$\therefore D^k = 2e^k$$

논제 4

$m^k{}_{-1} + m^k{}_0 + m^k{}_1 = M$ 이고 $m^{k+1}{}_0 = \dfrac{m^k_{-1} + m^k_1}{2}$ 이므로 $m^{k+1}{}_0 = -\dfrac{1}{2}m^k{}_0 + \dfrac{M}{2}$ 이다.

이 점화식을 풀면 $m^k{}_0 = (m^1{}_0 - \dfrac{M}{3})(-\dfrac{1}{2})^{k-1} + \dfrac{M}{3}$ 이므로 $\lim\limits_{k\to\infty} m^k{}_0 = \dfrac{M}{3}$ 이다.

점화식 ①에서 점화식 ③을 빼면 $m^{k+1}{}_{-1} - m^{k+1}{}_1 = \dfrac{m^k{}_{-1} - m^k{}_1}{2}$ 이고,

$m^k_{-1} = m^k_0 + \alpha_k$, $m^k_1 = m^k_0 + \beta_k$ 이므로 $m^k_{-1} - m^k_1 = (m^1_{-1} - m^1_1)(\dfrac{1}{2})^{k-1} = \alpha_k - \beta_k$ 이다.

이를 $M - m^k_0 = m^k_{-1} + m^k_1 = 2m^k_0 + \alpha_k + \beta_k$ 와 연립하여 풀면

$2\alpha_k = -3m^k_0 + M + (m^1_{-1} - m^1_1)(\dfrac{1}{2})^{k-1}$ 이다.

따라서, $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha_k = -\dfrac{3}{2} \cdot \dfrac{M}{3} + \dfrac{M}{2} = 0$, $\lim\limits_{k\to\infty}\beta_k = 0$ 이고, $\lim\limits_{k\to\infty} m^k_{-1} = \lim\limits_{k\to\infty}(m^k_0 + \alpha_k) = \dfrac{M}{3}$,

$\lim\limits_{k\to\infty} m^k_1 = \lim\limits_{k\to\infty}(m^k_0 + \beta_k) = \dfrac{M}{3}$ 이다.

16 아주대학교 수시

제 시 문 1

한 번 시행으로 일어날 수 있는 사건의 가짓수를 경우의 수라고 하며, 경우의 수의 계산은 확률 및 통계 분야의 문제해결에 필수적 요소이다. 경우의 수의 계산에는 일반적으로 순열과 조합의 수의 계산이 필요하여 이 계산에서 다음과 같은 논리적 오류가 발생할 수 있다.

* [누락] : 일부 경우를 누락하여 세는 오류.
* [중복] : 같은 경우를 중복하여 세는 오류.

다음은 경우의 수를 계산하는 주요한 두 가지 방법이다.

1) 직접계산 : 가능한 경우를 중복 또는 누락되지 않게 나열하여 계산하는 방법
2) 점화식계산 : 집단의 개수 및 종류의 개수를 늘이거나 줄일 때 생기는 경우의 수들의 관계식을 통하여 계산하는 방법

(가) 직접계산에 의한 순열 및 조합의 수의 계산 :

(순열) n 명의 학생 중에서 k 명의 학생을 차례로 선발하는 방법을 순열이라고 한다. 이 순열의 수를 $P(n,k)$ 라고 하자. 첫 번째 학생을 선발하는 방법은 n 가지, 그리고 두 번째 학생을 선발하는 방법은 $(n-1)$ 가지, 이 과정을 연속적으로 반복하면, 마지막 k 번 째 학생을 선발하는 방법은 $(n-k+1)$ 가지이다. 따라서 순열의 수는 $P(n,k)=n(n-1)\cdots(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ 이 된다. 단, $n \geq k$ 이며 $m!=m(m-1)\cdots 1,\ 0!=1$ 이다.

(조합) n 명의 학생 중에서 k 명의 학생을 선발하는 방법을 조합이라고 한다. 이 조합의 수를 $C(n,k)$ 라고 하자. n 명의 학생 중에서 k 명의 학생을 선발하고, 선발된 k 명의 학생을 순서대로 나열하는 방법의 수가 $P(n,k)$ 와 같다는 사실로부터 $C(n,k)k!=P(n,k)$ 이다. 따라서 $C(n,k)=\dfrac{P(n,k)}{k!}=\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ 가 된다. 단, $n \geq k$ 이다.

(중복조합) 중복조합은 예를 들어 설명한다. 모두 10 그릇의 자장면, 짬뽕, 우동을 주문할 때(우동만 10 그릇을 주문할 수도 있다), 서로 다른 주문 방법의 수 $H(10,3)$ 을 구하는 문제를 생각해 보자. 이 문제의 해는 12 칸의 빈 주문표에서 2 칸을 선택하는 방법의 수와 동일하다. 즉, [표1]과 같이 두 칸이 선택된 경우는, [표2]와 같이 빈칸에 자장면, 짬뽕, 우동을 순서대로 기입하여 자장면(3그릇), 짬뽕(5그릇), 우동(2그릇)을 주문하는 경우로 이해하면 된다.

따라서 $H(10,3)=C(10+2,2)$ 이다.

			XXX						XXX		

[표1]

자장면	자장면	자장면	XXX	짬뽕					XXX	우동	우동

[표2]

일반적으로 k 종류의 음식에서 n 그릇을 주문하는 방법의 수 $H(n,k)$ 는

$$H(n,k)=C(n+k-1,k-1)$$

이 된다. 이때 n 이 k 보다 같거나 클 필요는 없다.

(나) 점화식에 의한 순열 및 조합의 수 계산 :

(순열) n 명의 학생 중에서 k 명의 학생을 차례로 선발하는 방법의 수는, n 명의 학생 중에서 $(k-1)$ 명의 학생을 차례로 선발한 후, 남은 $(n-k+1)$ 명의 학생 중에서 한명을 더 선발하는 방법의 수와 같다. 따라서

$$P(n,k)=(n-k+1)P(n,k-1)$$

이 된다. 그런데 $P(n,1)=n$ 이므로 $P(n,k)=(n-k+1)(n-k+2)\cdots n$ 이 성립한다.

(조합) n 명의 학생 중에서 k 명의 학생을 선발하는 방법의 수는, 학생 1 명을 정해서, 그 학생이 선발된 경우와 선발되지 않은 경우로 나누어 계산할 수 있다. 즉, $(n-1)$ 명에서 $(k-1)$ 명을 선발하는 방법의 수와 $(n-1)$ 명에서 k 명을 선발하는 방법의 수의 합이다. 따라서 $C(n,k)=C(n-1,k)+C(n-1,k-1)$이 된다. 모든 자연수 j 에 대하여 $C(j,1)=j$, $C(j,j)=1$ 이며, 이를 이용하여 $C(n,k)$ 를 구한다.

(중복조합) 앞의 예와 같이 설명한다. 자장면, 짬뽕, 우동 10 그릇을 주문하는 방법은 우동의 수에 따라 다음의 10 가지의 경우로 분류할 수 있다. 우동이 하나도 없는 경우 자장면 밑 짬뽕에서 10 개를 주문하므로 방법의 수는 $H(10,2)$, 우동이 하나만 있는 경우 자장면 밑 짬뽕에서 9 개를 주문하므로 방법의 수는 $H(9,2)$, 이 과정을 반복하여 마지막으로 모두가 우동인 경우 방법의 수는 $H(0,2)$ 이 된다. 따라서 $H(10,3)=H(10,2)+H(9,2)+\cdots+H(0,2)=\sum_{j=0}^{10}H(j,2)$이 된다. 그리고 k 종류의 음식에서 n 그릇을 주문하는 방법의 수는

$$H(n,k)=\sum_{j=0}^{10}H(j,k-1)$$

이다. 모든 자연수 j 에 대하여 $H(0,j)=1$, $H(1,j)=j$ 이며, 이를 이용하여 $H(n,k)$ 를 구한다.

[1] 자장면, 짬뽕, 우동 10 그릇을 주문할 때, 3 종류의 음식을 적어도 한 그릇씩 반드시 포함하는 주문 방법의 수는 얼마인가?

[2] 철수는 빨강, 파랑 2종류의 구슬에서 2개의 구슬을 선택하는 방법의 수를, 빨강구슬 2개, 파랑구슬 2개(총 4개의 구슬)가 있는 가상의 구슬 주머니에서 2개의 구슬을 선택하는 방법의 수로 생각하여 $C(4,2)$ 로 계산했다. 철수의 계산에 어떤 오류가 있는지 누락 혹은 중복의 구체적인 예를 들어 설명하라.

[3] 중복조합의 수 $H(n,k)$ 가 만족하는 점화식을 $H(n,k)$, $H(n-1,k)$, $H(n,k-1)$의 관계식으로 구하고, 증명하여라.(단, $k \geq 2$, $n \geq 1$ 이다)

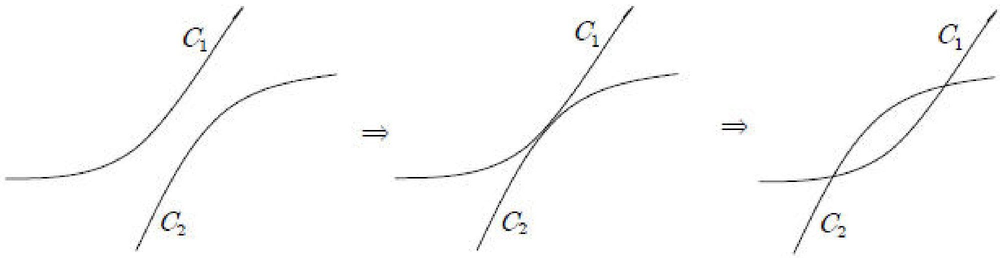
[4] (1) n 명의 학생을 k (단, $k \leq n$)개의 그룹으로 나누는 경우의 수 $G(n,k)$ 의 점화식을 구하라.(각 그룹은 적어도 한 명의 학생을 포함하며, 그룹의 나열 순서는 고려하지 않는다. 예를 들면 $G(3,3)=1$ 이다)

(2) $G(6,3)$ 을 계산하여라.

제 시 문 2

(가) 두 곡선이 접한다는 것을 기하학적으로 엄밀하게 정의하는 것은 간단하지 않다. 원과 직선이 접하는 경우는 예외적으로 간단하다. 원과 직선의 관계는 만나지 않거나, 한 점에서 만나거나, 두 점에서 만나는 세 가지인데, 이 중에서 한 점에서 만나는 경우가 바로 접하는 경우이기 때문이다. 일반적으로 두 곡선이 접한다는 것은 접점 근처의 국지적인 현상이다. 접점에서 멀리 떨어진 곳에서 두 곡선은 다시 접하거나 교차할 수 있다. 따라서 "두 곡선 C_1, C_2가 점 P에서 접한다."처럼 접점을 언급해야 두 곡선이 접한다는 것의 의미가 명확해진다. 함수의 그래프에 접하는 직선의 경우에는 대개 주어진 함수에 대한 미분을 이용하여 접선의 기울기를 설명하지만, 이 글에서는 미분을 사용하지 않고 접하는 조건을 설명하려고 한다.

다음과 같이 두 곡선 C_1, C_2 중에서 곡선 C_1은 고정하고, 곡선 C_2를 곡선 C_1을 향해 연속적으로 평행이동해 보자.



<그림 1>

이를 통해, 두 곡선이 접하는 경우는 일순간의 현상이며 그 전과 후에 접점은 사라지거나 두 개 이상의 교점으로 분리되는 것을 관찰할 수 있다. 접점이 두 개 이상의 교점으로 분리되면 이 교점들은 평행이동이 진행됨에 따라 일단 거리가 멀어진다. 또는 이 과정을 역으로 생각해서, 한 곡선의 평행이동에 따라 두 개 이상의 교점이 점점 가까워져서 한 점으로 겹쳐지는 순간 두 곡선이 접하게 된다는 것을 알 수 있다.

다음으로 한 곡선 C위의 점 P에서 이 곡선에 접하는 직선에 대해 생각해 보자. 먼저 점 P를 지나는 직선 l을 임의로 잡자. 이 직선을 점 P를 중심으로 해서 회전시켜 보면, l과 C의 두 개 이상의 교점이 점 P에서 겹쳐지는 순간이 있다. 이 순간의 직선이 점 P에서 곡선 C에 접하는 직선이 된다는 것을 알 수 있다.

이상의 관찰을 통해, <u>두 곡선이 접하는 것은 접점이 생겼을 때인데, 접점은 두 개 이상의 교점이 겹쳐진 점</u>이라고 결론지을 수 있다.

(나) 제시문 (가)를 통해 우리는 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 미지수 x, y에 관한 방정식 $f(x,y)=0$ 과 $g(x,y)=0$ 으로 각각 주어진 두 곡선이 서로 접하기 위해서는 두 방정식 $f(x,y)=0$ 과 $g(x,y)=0$ 에서 한 미지수를 소거하여 얻은 x 에 관한 방정식 또는 y 에 관한 방정식이 중근을 가지면 된다. 몇 가지 특별한 경우에 대해 이 조건을 구체적으로 살펴보기로 한다.

포물선과 직선 : 포물선 $y=ax^2+bx+c$ 와 직선 $y=mx+k$ 가 접할 조건은 이차방정식 $ax^2+bx+c=mx+k$ 가 중근을 가지는 것이다. 판별식을 사용해 이는 다음 등식이 성립하는 것임을 알 수 있다.

(수식 1) $\qquad (b-m)^2-4a(c-k)=0$

특히, 포물선 $y=x^2$ 위의 점 (t,t^2)에서 그은 접선의 방정식은 $a=1, b=c=0$, $k=t^2-mt$을 (수식1)에 대입해서 구한 $y=2tx-t^2$이 된다.

원과 직선 : 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 과 직선 $y=mx+k$ 가 접할 조건은 이차방정식 $(x-p)^2+(mx+k-q)^2=r^2$ 이 중근을 가지는 것이다. 판별식을 사용해 이는 다음 등식이 성립하는 것임을 알 수 있다.

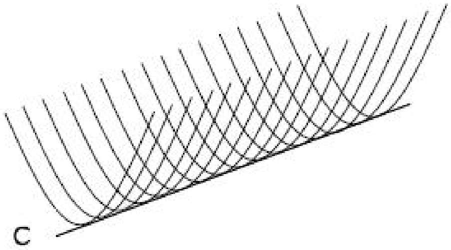
(수식 2) $\qquad (m^2+1)r^2=(mp+k-q)^2$

한편, 원 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 위의 한 점 (u,v)에서 그은 접선은 이 접점과 원의 중심 (p,q) 를 이은 직선이 이 접선과 수직이라는 사실에 의해 $y=-\dfrac{u-p}{v-q}(x-u)+v$ 가 됨을 알 수 있다. 이 접선의 방정식은 (u,v)가 원 위의 점이라는 사실을 이용하면 다음과 같이 나타낼 수도 있다.

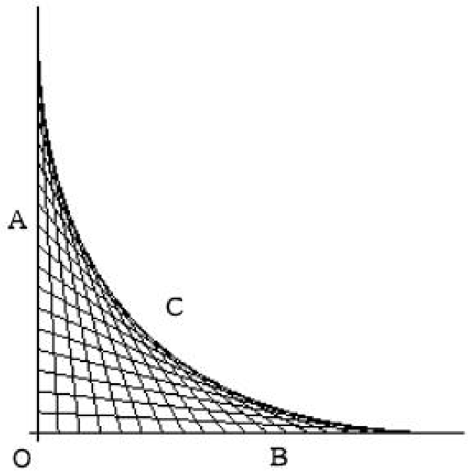
$$(u-p)(x-p)+(v-q)(y-q)=r^2$$

포물선과 원 : 포물선과 원은 최대 4개의 점에서 만날 수 있다. 이것은 포물선의 방정식 $y=ax^2+bx+c$ 을 원의 방정식 $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ 에 대입한 방정식이 x 에 관한 4차방정식인 것과 관련된다. 이 때문에 포물선과 원이 접하는 조건을 중근조건으로 파악하기는 용이하지 않다. 포물선과 원을 직접 관련짓는 대신, 포물선과 원이 접할 조건을 “접점에서 이 두 곡선이 공통인 접선을 갖는다.”는 것에 의해 파악할 수 있다.

(다) 포락선(envelope): F 가 곡선들의 집합이고 C 가 곡선일 때, F 에 속한 모든 곡선들이 각각 C 에 접하고, C 위의 각 점마다 그 점에서 C 에 접하고 F 에 속하는 곡선이 있을 때, C 를 F 의 포락선이라고 한다. <그림 2>는 F 가 포물선들의 집합이고 직선 C 가 이 포물선들의 포락선인 예이다. <그림 3>은 점 O에서 서로 수직으로 만나는 두 직선 위에 각각 위치한, $\overline{AO}+\overline{OB}$가 일정한 값이 되는 점 A 와 점 B 를 연결한 직선들의 포락선 C 를 보여주고 있다.



<그림 2>



<그림 3>

[1] 미분을 사용하지 말고, 다음 물음에 답하라.

1-1. 직선 $y=mx+k$ 가 포물선 $x=ay^2+by+c$ 에 접할 조건을 a, b, c, m, k 에 관한 등식으로 나타내어라.

1-2. 포물선 $x=-y^2$ 에 접하고 기울기가 1 인 직선의 방정식을 구하라.

1-3. 기울기 1 인 직선이 포물선 $x=-y^2$ 과 중심이 $(p, 0)$ 이고 반지름이 1 인 원에 동시에 접할 때, p 의 값을 구하라. (단, $p>0$)

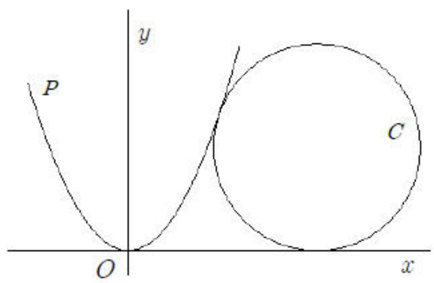
[2] 점$P(0,1)$ 와 직선 $y=-1$ 위의 임의의 점 $Q(t,-1)$ 를 잇는 선분의 수직이등분선들의 집합의 포락선은 포물선이 된다. 이 포물선C 를 다음에 따라 구하라.

2-1. 선분PQ의 수직이등분석l_t 의 방정식을 구하라.

2-2. 모든 직선l_t 에 접하는 포물선C 의 방정식을 구하라.

2-3. 포물선C 위의 임의의 점에 접하는 직선이 적당한 t에 대한 직선l_t 가 됨을 보여라.

[3] 오른쪽 그림과 같이 방정식이 $y=x^2$ 인 포물선P 에 바깥쪽으로부터 접하면서 동시에 x-축에[접하는 원C 의 중심 (p, q) 에 대해 다음에 답하라. (단, $p>0$)



3-1. P 와 C 의 접점의 좌표가 (t, t^2) 일 때, p 와 q 를 t 에 관한 식으로 나타내어라.

3-2. 위에서 구한 식을 이용하여, 극한값 $\lim_{t\to\infty}\frac{p}{q}$ 를 구하라.

제시문 분석

[제시문 1]

- **경우의 수 계산** : 경우의 수를 계산하는 방법에는 직접계산과 점화식 계산이 있으며 직접계산에서는 중복 또는 누락되지 않게 나열하여야 한다.
- **직접 계산하는 방법** : 직접계산에 의한 순열, 조합, 중복조합의 경우의 수를 계산하는 공식을 제시하고 있다.
- **점화식에 의한 계산 방법** : 점화식에 의한 순열, 조합, 중복조합의 경우의 수를 계산하는 공식을 제시하고 있다.

[제시문 2]

- **두 곡선의 접하는 경우** : 미분을 사용하지 않고 두 곡선이 접하는 조건을 설명하고 있다. 두 곡선에서 한 곡선의 평행이동에 따라 두 개 이상의 교점이 접점에 가까워져서 한 점으로 겹쳐지는 순간 두 곡선이 접하게 된다는 것을 설명하고 있다.
- **접선의 방정식** : 포물선과 직선, 원과 직선에서 접하는 조건과 접선의 방정식을 구하는 공식을 제시하고, 포물선과 원이 접할 조건은 '두 곡선이 공통접선을 갖는다.'에 의해 파악할 수 있다.
- **포락선** : 두 가지의 예를 들어 포락선을 설명하고 있다.

논제 분석

[제시문 1]

[1] 중복조합을 계산할 수 있는가?

3종류의 음식을 적어도 한 그릇씩 반드시 포함해야 하므로 자장면, 짬뽕, 우동 7그릇을 중복 허락하여 주문하는 경우와 같다.

[2] 중복조합의 계산을 일반조합으로 잘못 계산할 때의 오류를 구체적 예를 들어 설명할 수 있는가?

빨강구슬 2개, 파랑구슬 2개에 각각 구별하는 기호를 주고 4개 중에 2개를 선택하는 경우를 나열하면 빨강, 파랑 1개씩 선택하는 4가지의 경우가 중복됨을 알 수 있다.

[3] 중복조합을 점화식으로 표현할 수 있는가?

중복조합과 조합의 관계식, 조합의 점화식을 이용해서 중복조합의 점화식을 구한다.

[4] $G(n,k)$ 의 점화식을 구하고, $G(6,3)$ 의 값을 계산할 수 있는가?

학생 1명을 정해서 그 학생이 혼자 그룹을 이루고 있는 경우와 2명 이상의 그룹에 속해있는 경우로 나누어 두 경우의 합을 구한다. $G(6,3)$은 $G(n,k)$의 점화식에 대입하거나 n명이 3개의 그룹 중에 하나를 선택하는 방법의 수에서 두 그룹에만 들어가는 방법의 수와 한 그룹에 모두 다 들어가는 방법의 수를 빼는 경우의 수를 계산하면 된다.

[제시문 2]

[1]

1-1. 직선과 포물선이 접할 조건을 구할 수 있는가?

직선의 방정식을 x에 대하여 정리하고 포물선의 방정식에 대입하여 중근을 가질 조건을 구한다.

1-2. 포물선 $x=-y^2$에 접하고 기울기가 1인 직선의 방정식을 구할 수 있는가?

1-1에서 구한 조건의 식에 a, b, m의 값을 대입하여 y절편을 구한다.

1-3. 기울기가 1인 직선이 포물선과 원에 동시에 접할 때 원의 중심의 좌표를 구할 수 있는가?

1-2에서 구한 접선의 방정식을 이용하여 m, k, q, r의 값을 (수식2)에 대입하여 양수 p의 값을 구한다.

[2]

2-1. 선분 PQ 의 수직이등분선을 구할 수 있는가?

선분 PQ의 중점과 수직인 기울기를 이용하여 수직이등분선을 구한다.

2-2. 모든 직선 l_t에 접하는 포물선 C를 구할 수 있는가?

포물선의 방정식을 $y=ax^2+bx+c$ 라 두고 (수식1)에 대입하여 조건을 구하고 t에 관해 정리한 다음 모든 실수 t에 대해 성립하는 a, b, c의 값을 구한다.

2-3. 포물선 C 위의 임의의 점에 접하는 직선이 적당한 t에 대한 직선 l_t가 됨을 보일 수 있는가?

2-2에서 구한 포물선의 방정식과 (수식1)을 이용하여 구한 접선의 방정식을 구하고 그 직선이 직선 l_t와 같음을 보인다.

[3]

3-1. 포물선 P와 x축에 접하는 원 C가 (t, t^2)에서 접할 때 원의 중심의 좌표를 각각 t에 관한 식으로 나타낼 수 있는가?

(t, t^2) 에서 포물선의 접선과 원의 접선을 각각 구하고, 두 접선의 방정식이 같게 되는 조건을 이용하면 p, q 를 t 에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

3-2. $\lim_{t\to\infty}\frac{p}{q}$ 의 값을 구할 수 있는가?

$t\to\infty$ 일 때 분모와 분자의 차수가 같으므로 각각의 최고차수를 비교하여 극한값을 계산한다.

배경지식 쌓기

- [4]중복조합

서로 다른 n 종류의 물건 중에서 중복을 허용하여 r 개를 뽑는 방법을 중복조합이라 하고, 방법의 수를 ${}_nH_r$이라 표시한다. 일반적으로 같은 종류의 공 r 개를 서로 다른 n 개의 상자에 집어넣는 방법의 수와 같다. 같은 종류의 공 5개를 3개의 상자에 넣는 방법의 수는 공 5개와 칸막이 2개를 놓을 7개의 자리 중에 칸막이를 놓을 2개의 자리를 선택하는 경우의 수 ${}_3H_5 = {}_{5+3-1}C_{3-1} = {}_6C_2 = {}_6C_4$ 와 같다.

- 공을 $(2, 2, 1)$ 로 나누어 넣은 경우

1번 상자		칸막이	2번 상자		칸막이	3번 상자
○	○	|	○	○	|	○

- 공을 $(5, 0, 0)$ 로 나누어 넣은 경우

1번 상자					칸막이	칸막이
○	○	○	○	○	|	|

따라서 같은 종류의 공 r 개를 서로 다른 n 개의 상자에 집어넣는 방법의 수는 공 r 개에 칸막이 $n-1$ 개를 더한 $r+n-1$ 개의 자리 중에서 칸막이를 놓을 $n-1$ 개의 자리를 선택하는 경우인 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_{n-1} = {}_{n+r-1}C_r$ 과 같다. 제6차 교육과정에서는 ${}_nH_r = {}_{n+r-1}C_r$ 을 중복조합의 공식으로 사용했으며, [제시문 1]의 중복조합에서는 ${}_nH_r = H(r,n) = C(r+n-1, n-1)$ 의 공식으로 사용하고 있다.

- 이차곡선과 접선

㉠ 원 $x^2+y^2=r^2$ 과 직선 $y=mx+n$ 을 연립한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 일 때 원과 직선은 접한다.

㉡ 포물선 $y^2=4px$ 와 직선 $y=mx+n$ 을 연립한 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 $D=0$ 일 때 포물선과 직선은 접한다.

4) 제6차 교육과정의 수학Ⅰ 내용, 제7차 교육과정에서는 이산수학에서 다룸.

- **포물선과 접선**

㉠ 포물선 $y^2=4px$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m}\quad(m\neq 0)$$

㉡ 포물선 $x^2=4py$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx-m^2p$$

㉢ 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $P(x_1,y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

- **원과 접선**

㉠ 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하고 기울기가 m 인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

㉡ 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1,y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

㉢ 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $P(x_1,y_1)$ 에서의 접선의 방정식은

$$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$$

풀 어 보 기

1. $x+y+z=10$ 을 만족할 때, 주어진 조건에 알맞은 정수해의 개수를 구하여라.

(1) $x,\ y,\ z$ 는 음이 아닌 정수

(2) $x,\ y,\ z$ 는 양의 정수

2. 두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ 에 대하여 $f:X\to Y$이고, 집합의 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여 $x_1<x_2$ 이면 $f(x_1)\leq f(x_2)$가 되는 함수 f 의 개수를 구하여라.

3. 포물선 $(y+p)^2=4px$가 p 의 값에 관계없이 항상 일정한 두 직선에 접할 때, 이 두 직선의 식은?

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

- 5)제2종 스털링 수[Stirling number of the second kind]

음이 아닌 정수 r, n 에 대하여 r 개를 n 개의 그룹으로 나누는 방법의 수를 $S(r,n)$ 이라 한다. 이 수를 **제2종 스털링 수**라고 한다. 이 때 $S(r, n)$ 은 다음을 만족한다.

① 제2종 스털링 수는 다음을 만족한다.

㉠ $S(0, 0) = 1$

㉡ 모든 $r, n \in N$, $S(r, 0) = S(0, n) = 0$

㉢ $S(r, n) > 0$ $(r \geq n \geq 1)$

㉣ $S(r, n) = 0$ $(n > r \geq 1)$

㉤ $S(r, 1) = 1$ $(r \geq 1)$

㉥ $S(r, r) = 1$ $(r \geq 1)$

㉦ $S(r, 2) = 2^{r-1} - 1$

㉧ $S(r, 3) = \frac{1}{2}(3^{r-1} + 1) - 2^{r-1}$

㉨ $S(r, r-1) = C(r, 2)$

㉩ $S(r, r-2) = C(r, 3) + 3C(r, 4)$

② 제2종 스털링 수는 $(x)_n$ 의 계수

x 에 관한 식 $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ 을 $(x)_n$ 으로 정의하자. $(n \in N)$, $(x)_0 = 1$

제2종 스털링 수는 x^r 을 $(x)_n$ 으로 표현하였을 때, $(x)_n$ 의 계수로 나타난다. 예를 들면 $r = 2, 3$ 일 때 아래와 같다.

$x^2 = x + x(x-1) = (x)_1 + (x)_2 = S(2, 1)(x)_1 + S(2, 2)(x)_2$

$x^3 = x + 3x(x-1) + x(x-1)(x-2) = S(3, 1)(x)_1 + S(3, 2)(x)_2 + S(3, 3)(x)_3$

$$\cdot \ \cdot \ \cdot$$

$$x^r = \sum_{n=0}^{r} S(r, n)(x)_n \ (r = 0, 1, 2, \cdots)$$

이것은 수학적 귀납법을 사용하여 증명할 수 있다.

5) 첸추앙총 외, 류정현 외 옮김, 조합의 원리와 기법, 도서출판 도비, 2009

③ **제2종 스털링 행렬**

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0
5	0	1		㉮	㉯	1	0
6	0	1			㉰		1

$S(n, k)$값을 그림과 같이 나타낸 행렬을 제2종 스털링 행렬이라 하며, ㉮+㉯×(열번호)=㉰와 같은 관계를 관찰할 수 있다. 이것은 일반적으로 성립하는 성질로서 ㄱ^{열}－법칙 이라고 부르기도 한다.

[정리] $S(n, k)$의 ㄱ^{열}－법칙

$0<k<n$인 정수 n, k에 대하여

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + kS(n-1, k)$$

④ **벨 수**

n명을 수 개의 그룹으로 나누는 방법의 수를 벨 수라고 하고 기호로 B_n 으로 나타낸다. n명을 수 개의 그룹으로 나눌 때, 0개, 1 개, $\cdots$, 또 n 개의 그룹으로 나눌 수 있으므로

$$B_n = S(n, 0) + S(n, 1) + \ldots + S(n, n)$$

이다. 여기서 B_n 은 제2 종 스털링 행렬의 n 행의 성분들의 합임을 알 수 있다.

예시답안

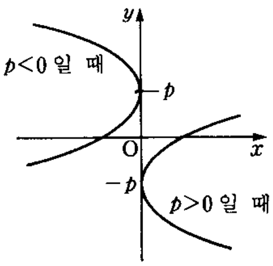
풀어보기 1

1. (1) x, y, z 의 3 종류에서 중복 허락하여 10 개의 문자를 고르는 문제와 같으므로 $H(10, 3)$과 같다. 예를 들어 $x=0, y=4, z=6$ 의 경우 x 는 0 번, y 는 4 번, z 는 6 번 선택했다고 생각하면 된다. 따라서 $H(10, 3) = C(12, 2) = \dfrac{12!}{2!10!} = 66$(가지)

(2) x, y, z 가 양의 정수이므로 각 1 개씩 선택되었다고 하면, x, y, z 의 3 종류에서 중복 허락하여 7 개의 문자를 고르는 문제와 같으므로 $H(7, 3) = C(9, 2) = \dfrac{9!}{2!7!} = 36$(가지)이다.

2. 4, 5, 6, 7, 8 의 5개의 숫자(5종류)에서 중복 허락하여 3개를 선택하는 경우와 같다. 예를 들어 (4, 4, 5)의 경우는 함숫값의 부등호에 따라 $f(1)=4,\ f(2)=4,\ f(3)=5$인 함수이다. 그러므로 $H(3,\ 5)=C(7,\ 4)=\dfrac{7!}{4!3!}=35$(가지)이다.

3. 그림에서 알 수 있듯이, 그 접선은 x축에 평행일 수 없으므로 접선의 방정식을 $x=my+n$으로 놓고 접한다는 조건을 이용하여 $m,\ n$ 의 값을 구한다.



$$(y+p)^2=4p(my+n)$$

$$y^2+2(p-2pm)y+p^2-4pn=0$$

$$\frac{D}{4}=(p-2pm)^2-(p^2-4pn)=0$$

p 에 관한 항등식으로 정리하면,

$$-4mp^2+4m^2p^2+4pn=0$$

$$4p^2(m^2-m)+4pn=0$$

$$\therefore m^2-m=0,\ n=0$$

$$\therefore m=0,\ 1,\ n=0$$

따라서 구하는 접선의 방정식은 $x=0,\ x=y$

논제 1-1 자장면, 짬뽕, 우동 10그릇을 주문할 때, 3종류의 음식을 적어도 한 그릇씩 반드시 포함해야하므로 $H(7,3)$을 구하는 것과 같다.

$$H(7,3)=C(7+3-1,3-1)=C(9,2)=\frac{9!}{2!7!}=\frac{9\times8}{2}=36$$

이므로 36가지이다.

논제 1-2 빨강, 파랑 2종류의 구슬에서 2개의 구슬을 선택하는 방법의 수는 중복조합이다. $H(2,2)=C(3,1)=3$, 즉 빨강만 2개, 빨강 파랑 각 1개, 파랑만 2개를 선택하는 3가지이다.

빨강구슬 2개, 파랑구슬 2개(총 4개의 구슬)가 있는 가상의 주머니에서 빨강구슬 2개를 각각 R_1, R_2, 파랑구슬 2개를 각각 B_1, B_2라 둔다. 이때 2개를 선택하는 방법

의 수인 $C(4,2)$ 는 $(R_1,R_2),(R_1,B_1),(R_1,B_2),(R_2,B_1),(R_2,B_2),(B_1,B_2)$ 의 6가지이다. 이때 $(R_1,B_1),(R_1,B_2),(R_2,B_1),(R_2,B_2)$ 는 모두 빨강 1개, 파랑 1개를 선택하는 것으로 중복 계산한 것이다.

논제 1-3 $H(n,k)=C(n+k-1,k-1)$, $C(n,k)=C(n-1,k)+C(n-1,k-1)$ 이므로

$$H(n,k)=C(n+k-1,k-1)=C(n+k-2,k-1)+C(n+k-2,k-2)$$
$$=C(n-1+k-1,k-1)+C(n+k-1-1,k-1-1)=H(n-1,k)+H(n,k-1)$$

이다. 따라서 $H(n,k)=H(n-1,k)+H(n,k-1)$ 이다.

논제 1-4

(1) n 명의 학생을 k(단, $k \le n$)개의 그룹으로 나누는 경우의 수 $G(n,k)$ 는 학생 1명을 정해서 그 학생이 혼자 그룹을 이루고 있는 경우와 2명 이상의 그룹에 속해 있는 경우로 나눌 수 있다. 혼자 그룹을 이루고 있는 경우는 나머지 $n-1$ 명의 학생을 $k-1$ 개의 그룹으로 나누는 경우와 같으므로 $G(n-1,k-1)$이다. 2명 이상의 그룹에 속해있는 경우는 $n-1$ 명의 학생을 k 개의 그룹으로 나누고 처음 정한 학생 1명을 k 개의 그룹 중의 하나에 들어가는 경우와 같으므로 $kG(n-1,k)$ 이다.

따라서 $G(n,k)=G(n-1,k-1)+kG(n-1,k)$ 이다.

(2) n 명을 1 개의 그룹 또는 n 개의 그룹으로 나누는 방법은 항상 한 가지이다.

즉, $G(n,1)=1$, $G(n,n)=1$ 이다.

(1)의 식에 의해

$$G(6,3)=G(5,2)+3G(5,3)=\{G(4,1)+2G(4,2)\}+3\{G(4,2)+3G(4,3)\}$$
$$=G(4,1)+5G(4,2)+9G(4,3)=1+5\{G(3,1)+2G(3,2)\}+9\{G(3,2)+3G(3,3)\}$$
$$=1+5G(3,1)+19G(3,2)+27G(3,3)=33+19\{G(2,1)+2G(2,2)\}=33+57=90$$

이다.

다른 풀이 1

$G(n,2)$ 는 n 명을 2 개의 그룹으로 나누는 방법의 수이다. n 명이 2개의 그룹 중에서 하나를 선택하는 2^n 가지 수에서 한 그룹에 모두 다 들어가는 2가지의 경우를 빼는 경우의 수는 2^n-2 이다. 그룹의 나열 순서는 고려할 필요가 없다.

따라서 $G(n,2)=\dfrac{2^n-2}{2!}=2^{n-1}-1$ 이다.

$G(n,3)$ 은 n 명을 3개의 그룹으로 나누는 방법의 수이다. n 명이 3개의 그룹 중에서 하나를 선택하는 3^n 가지 수에서 두 그룹에만 들어가는 $3(2^n-2)$ 가지와 한 그룹에 모두 다 들어가는 3가지의 경우를 빼는 경우의 수는 $3^n-3(2^n-2)-3$ 이다. 그룹의 나열 순서는 고려할 필요가 없다.

따라서 $G(n,3)=\dfrac{3^n-3(2^n-2)-3}{3!}=\dfrac{1}{2}(3^{n-1}+1)-2^{n-1}$ 이다.

그러므로 $G(6,3)=\dfrac{1}{2}(3^5+1)-2^5=122-32=90$ 이다.

다른 풀이 2

6명을 3개의 그룹으로 나누는 방법의 수는 $(1,1,4),(1,2,3),(2,2,2)$로 분할하는 방법이 있다.

$(1,1,4)$ 의 경우 : $C(6,1)\times C(5,1)\times C(4,4)\times\dfrac{1}{2!}=15$ (가지)

$(1,2,3)$ 의 경우 : $C(6,1)\times C(5,2)\times C(3,3)=60$ (가지)

$(2,2,2)$ 의 경우 : $C(6,2)\times C(4,2)\times C(2,2)\times\dfrac{1}{3!}=15$ (가지)

이 세 가지의 경우를 모두 더하면 90가지이다.

논제 2-1

(1) 직선 $y=mx+k$ 는 $x=\dfrac{1}{m}y-\dfrac{k}{m}$ 이므로 곡선 $x=ay^2+by+c$ 에 대입하여 중근을 가지면 접하게 된다.

$$\frac{1}{m}y-\frac{k}{m}=ay^2+by+c$$

$$ay^2+(b-\frac{1}{m})y+c+\frac{k}{m}=0$$

따라서 $\left(b-\dfrac{1}{m}\right)^2-4a\left(c+\dfrac{k}{m}\right)=0$ …… ㉠ 이다.

(2) 포물선 $x=-y^2$ 에 접하고 기울기가 1 인 접선이므로 $y=x+k$ 라 두고

$a=-1,\ b=c=0,\ m=1$ 을 ㉠ 식에 대입하면 $1+4k=0$, 즉 $k=-\dfrac{1}{4}$ 이다.

따라서 접선의 방정식은 $y=x-\dfrac{1}{4}$ 이다.

(3) 기울기가 1 인 직선이 포물선 $x=-y^2$ 에 접하므로 접선의 방정식은 풀이 (2)에 의해 $y=x-\dfrac{1}{4}$ 이고, 이 직선은 원 $(x-p)^2+y^2=1$ 에도 접해야 한다.

원과 직선이 접할 때 제시문의 (수식2) $(m^2+1)r^2=(mp+k-q)^2$ 를 만족한다.

$m=1,\ k=-\dfrac{1}{4},\ q=0,\ r=1$ 을 대입하면 $2=\left(p-\dfrac{1}{4}\right)^2$ 이다.

그리고 p 는 양수이므로 $p=\dfrac{1}{4}+\sqrt{2}$ 이다.

논제 2-2

(1) $P(0,1)$, $Q(t,-1)$ 에서 선분PQ의 중점은 $M\left(\frac{t}{2},0\right)$,기울기는 $\frac{1-(-1)}{0-t}=-\frac{2}{t}$ 이다.
선분PQ의 수직이등분선 l_t 의 방정식은

$$y-0=\frac{t}{2}\left(x-\frac{t}{2}\right)$$

$$y=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4}$$

이다.

(2) 모든 직선 l_t 에 접하는 포물선을 $y=ax^2+bx+c$ 라고 하면 (수식1)에 의해

$$\left(b-\frac{t}{2}\right)^2-4a\left(c+\frac{t^2}{4}\right)=0$$

이고, t 에 대해 정리하면,

$$\left(\frac{1}{4}-a\right)t^2-bt+b^2-4ac=0$$

이고, 모든 실수 t 에 대해 성립해야 하므로 $a=\frac{1}{4}, b=0, c=0$ 이다.

그러므로 모든 직선 l_t 에 접하는 포물선 C의 방정식은 $y=\frac{1}{4}x^2$ 이다.

(3) 포물선 $y=\frac{1}{4}x^2$ 위의 임의의 점 $\left(t,\frac{t^2}{4}\right)$ 에서의 접선을 $y=mx+k$ 라 두자.

$\frac{t^2}{4}=mt+k$ 이므로 $k=\frac{t^2}{4}-mt$ 이다.

$k=\frac{t^2}{4}-mt$, $a=\frac{1}{4}, b=c=0$ 을 제시문의 (수식1) $(b-m)^2-4a(c-k)=0$ 에 대입해서 정리하면, $m^2-tm+\frac{t^2}{4}=0$, $\left(m-\frac{t}{2}\right)^2=0$, $m=\frac{t}{2}$ 이고, $k=\frac{t^2}{4}-\frac{t}{2}\cdot t=-\frac{t^2}{4}$ 이다.
즉 $y=\frac{t}{2}x-\frac{t^2}{4}$ 이다. 그러므로 포물선 C위의 임의의 점 $\left(t,\frac{t^2}{4}\right)$ 에서의 접선의 방정식은 l_t 와 같다.

논제 2-3

(1) 포물선 $y=x^2$ 과 원$(x-p)^2+(y-q)^2=q^2$ 의 접점의 좌표를 (t,t^2)라 두면, (t,t^2)에서 포물선과 원의 접선의 방정식은 일치한다.

제시문의 포물선과 직선에서 $y=x^2$ 의 접선의 방정식은 $y=2tx-t^2$ 이다.

제시문의 원과 직선에서 원의 중심 (p,q)과 접점 (t,t^2)을 이용한 접선의 방정식은

$$(x-p)(t-p)+(y-q)(t^2-q)=q^2$$

이고, 전개하면$(t-p)x-tp+p^2+(t^2-q)y-qt^2+q^2=q^2$

$p>0$일 때 포물선의 접선이 x축과 수직일 수 없으므로 $t^2-q\neq 0$이다.

그러므로 접선의 방정식은 $y=\dfrac{p-t}{t^2-q}x+\dfrac{tp-p^2+qt^2}{t^2-q}$이다.

두 접선의 방정식이 같으므로

$$2t=\frac{p-t}{t^2-q}\ \cdots\cdots ㉡ \qquad \frac{tp-p^2+qt^2}{t^2-q}=-t^2\ \cdots\cdots ㉢$$

이다. ㉢을 정리하면

$$tp-p^2+qt^2=-t^4+qt^2$$

$$p^2-tp-t^4=0$$

$$p=\frac{t+\sqrt{t^2+4t^4}}{2}=\frac{t\left(1+\sqrt{1+4t^2}\right)}{2}$$

이고, $t>0$이므로 ㉡을 정리하면

$$2t^3-2tq=p-t$$

$$2t^3-2tq=\frac{t\left(1+\sqrt{1+4t^2}\right)}{2}-t$$

$$q=t^2+\frac{1-\sqrt{1+4t^2}}{4}$$

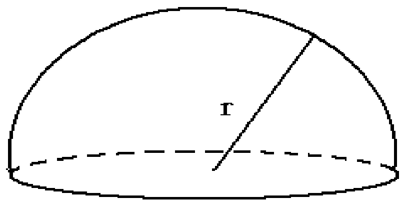
이다.

(2) $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{p}{q}=\lim_{t\to\infty}\frac{\dfrac{t+\sqrt{t^2+4t^4}}{2}}{t^2+\dfrac{1-\sqrt{1+4t^2}}{4}}=1$

17 연세대학교 예시

제 시 문

[1] 가스탄(폭발과 동시에 유해가스가 배출되는 폭탄)이 폭발하면서 아래 그림과 같은 반구의 모양으로 유해가스가 퍼져 나간다고 하자.(단, 부피의 시간에 대한 변화율은 일정하다고 한다.) 아래 표는 초당 가스의 부피를 나타낸 자료이다. 다음 물음에 답하시오.



t (초)	5	(가)	30	60
V (㎦)	1,000π	2,250π	(나)	14,750π

[1-1] 빈칸 (가), (나)의 값을 추정하시오.(10점)

[1-2] 위와 같이 가스가 퍼져갈 때, 반지름이 5㎞일 때 부피의 반지름에 대한 변화율을 설명하시오.(10점)

[1-3] 가스의 유해함을 막기 위해서는 반지름 r인 반구에 내접하는 최대 원기둥의 부피에 해당하는 양의 해독가스가 필요하다고 한다. 반지름이 5㎞일 때 필요한 해독가스의 양이 얼마인지를 설명하시오.(10점)

제 시 문

[2] 자신이 어떤 보험회사의 상품개발팀 사원이라고 가정한 후, 아래와 같은 가상의 자료를 이용하여 다음 물음에 답하시오.(단, 연이율은 $i = 3\%$로 일정하며 아래의 복리 이자율 표만을 이용한다.)

n(년)	1	2	3	4	5	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	
$(1+i)^n$	1.030	1.061	1.093	1.126	1.160	1.007	1.015	1.022
$\frac{1}{(1+i)^n}$	0.971	0.942	0.915	0.888	0.863	0.993	0.985	0.978

<복리 이자율표>

[2-1] 5년 후에 1,000,000원의 목돈을 마련하려고 한다. 현재 일시불로 얼마를 투자해야 하는지 설명하시오.(10점)

[2-2] 5년 후에 1,000,000원의 목돈을 마련하려면, 연납(매년 초에 일정한 금액을 투자하는 방식)으로 매년 얼마씩 투자해야 하는지 설명하시오.(10점)

[2-3] 보험상품으로 만 70세부터 시작하여 3년(70, 71, 72세)동안 보장하는 3년 만기보험금 1,000,000원의 사망보험 상품을 개발하려고 한다. 즉, 이 보험상품은 3년(70, 71, 72세) 내에 사망하면 보험금 1,000,000원을 받고, 생존해 있으면 매년 초에 똑같은 보험료를 내는 보험상품이다. 회사의 어떠한 이윤도 생각하지 않고, 논리적으로 수입과 지출을 같게 하여, 3년 동안 매년 초에 똑같은 보험료를 내는 연납 순수보험료(연납 순보험료)를 계산하려고 한다. 아래의 <생명표>는 신생아 10,000명당 연령별 생존자수와 사망자수를 가상으로 나타낸 것이다. <복리 이자율표>와 <생명표>를 이용하여 연납 순보험료를 얼마로 책정해야 하는지 설명하시오.(15점)

연령(세)	생존자수(명)	사망자수(명)
70	6,000	250
71	5,750	250
72	5,500	300

<생명표>

제 시 문

[3] 새로운 공법을 이용하여 신제품을 생산하고 있는 연세기업에서는 생산 기계가 정상적으로 작동하면 신제품의 중량은 정규분포 $N(50, 10^2)$ 을 (즉, 평균이 50, 표준편차가 10인 정규분포) 따른다고 한다. 그러나 생산 기계가 비정상적으로 작동하면 신제품의 중량은 정규분포 $N(37.5, 10^2)$, 또는 정규분포 $N(62.5, 10^2)$ 을 따르게 되는데 이 경우 정규분포 $N(37.5, 10^2)$ 을 따를 확률은 0.7, 정규분포 $N(62.5, 10^2)$ 을 따를 확률은 0.3이라고 한다.

기계의 정상 작동 여부를 검사하기 위하여 품질관리 부서에서는 생산된 신제품 4개를 표본으로 추출하여 이들 4개 제품 중량의 표본평균($=\overline{X}$)을 이용하기로 하고 아래와 같은 두 가지 안(案)을 마련하였다.

A 안 : $40 \leqq \overline{X} \leqq 60$ 이면 생산 기계가 정상적으로 작동하고 있다고 판단한다.

B 안 : $42 \leqq \overline{X} \leqq 65$ 이면 생산 기계가 정상적으로 작동하고 있다고 판단한다.

정규분포 $N(m, 10^2)$ 을 따르는 모집단에서 4개의 표본을 추출하여 구한 표본평균 $\overline{X}$ 는 정규분포 $N(m, \frac{10^2}{4})$ 을 따른다. 이 사실을 이용하여 아래 물음에 답하시오.

[3-1] 실제로 생산 기계가 정상적으로 작동하고 있을 때(즉, 생산되는 제품의 평균 중량이 50일 때), 품질관리 부서에서 기계가 정상적으로 작동하고 있다고 올바르게 판단하게 될 확률을 제안된 두 가지 안에 대해 각각 구하시오.(아래의 표준정규분포표를 이용할 것. 표준정규분포표에서 Z는 표준정규분포를 따르는 확률변수를 나타낸다.) [10점]

[3-2] 실제로 생산 기계가 비정상적으로 작동하고 있을 때(즉, 생산되는 제품의 평균 중량이 37.5, 또는 62.5일 때), 품질관리 부서에서 기계가 비정상적으로 작동하고 있다고 올바르게 판단하게 될 확률을 제안된 두 가지 안에 대해 각각 구하시오.(아래의 표준정규분포표를 이용할 것.) [20점]

[3-3] 품질관리 부서에서 제안한 두 가지 안 중에서 실제로 기계가 정상적으로 작동하고 있을 때 기계가 정상적으로 작동하고 있다고 올바르게 판단하게 될 확률과, 실제로 기계가 비정상적으로 작동하고 있을 때 기계가 비정상적으로 작동하고 있다고 올바르게 판단하게 될 확률이 큰 안을 최종 안으로 결정하려 한다. 위의 [3-1]과 [3-2]에서 구한 확률을 이용하여 두 가지 안 중에서 어떤 것이 최종 안으로 적절하다고 생각하는지에 대한 의견을 제시하시오. [5점]

z	0.2	0.5	0.9	1.0	1.2	1.6	2.0	2.5	3.0
$P(0 \leqq Z \leqq z)$	0.08	0.20	0.32	0.34	0.38	0.45	0.475	0.49	0.50

<표준정규분포표>

논제 분석

- **[1-1] "부피에 대한 시간의 변화율은 일정하다."라는 의미를 해석할 수 있는가?**

$\frac{dV}{dt}=c$ (c는 상수)일 때 $V=ct$임을 이용하여 설명하면 좋은 답이 될 것이다.

- **[1-2] 구의 부피를 반지름으로 표현할 수 있는가?**

구의 부피를 반지름으로 표현하면 다음과 같다. $V=\frac{4}{3}\pi r^3$이므로 반구의 부피를 V_1이라고 하면 $V_1=\frac{2}{3}\pi r^3$이다. 이를 반지름 r로 미분한 값을 구하면 정답이 된다.

- **[1-3] 반구에 내접하는 원기둥의 최대부피를 구할 수 있는가?**

반구에 내접하는 원기둥의 최대부피를 구하기 위하여 반구의 지름을 R, 원기둥의 반지름과 높이를 각각 r, h라고 할 때, 피타고라스 정리와 미분을 이용하여 R과 r의 관계를 구하면 문제를 해결할 수 있다.

- **[2-1] 복리이자를 이해하고 있는가?**

원금이 P원, 이율이 r, 기간이 n일 때, 복리이자의 원리합계금 S라고 하면 다음이 성립한다. $S=P(1+r)^n$ 옆의 식을 이용하면 정답을 작성할 수 있다.

- **[2-2] 기수불의 의미를 이해하고 있는가?**

연초에 P원씩, 이율 r, 기간이 n년 동안 예금하면 원리합계금 S는 다음과 같다. $S=P\{(1+r)+(1+r)^2+\cdots+(1+r)^n\}$이다. 이 식을 이용하면 정답을 작성할 수 있다.

- **[2-3] 기수불 기말불의 의미와 통계적 확률의 의미를 이해하는가?**

기간에 따른 이자 계산법을 이해하고 나아가서 통계적 확률의 의미를 이해하면 좋은 답을 작성할 수 있다. 보험금을 지급하는 시기를 먼저 결정하고 통계적 확률을 이용하여 매년 사망자수와 생존자수를 예측하여 보험금을 계산하면 좋은 답안이 될 것이다.

- **[3-1] 정규분포에서 표준화의 의미와 확률변수 X가 정규분포 $N(m,\sigma^2)$을 따를 때, 크기가 n인 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $N(m,\frac{\sigma^2}{n})$을 따른다는 의미를 이해하는가?**

평균이 m이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 X를 확률변수 $Z=\frac{X-m}{\sigma}$로 표준화시키는 의미와 확률변수 X가 정규분포 $N(50,10^2)$을 따를 때,

표본의 크기가 4인 표본평균 $\overline{X}$ 는 정규분포 $N(50, \frac{10^2}{4})$ 을 따르고 있음을 이해하면 정답을 작성할 수 있다.

- **[3-2] 제한조건이 있을 때, 정규분포의 확률을 구할 수 있는가?**

확률변수 X가 확률 P_1 으로써 정규분포 $N(m, \sigma^2)$ 을 따를 때, $P(a \leq X \leq b)$ 는 다음과 같이 계산할 수 있다. $P(a \leq X \leq b) = P_1 P\left(\frac{a-X}{\sigma} \leq z \leq \frac{b-X}{\sigma}\right)$

- **[3-3] 두개의 가정을 가지고 있을 때는 확률이 높은 쪽을 택하는 것이 현명한 판단이다.**

두 개의 판단 기준이 있을 때는 참일 확률이 높은 쪽을 선택하는 것이 올바른 판단이다. 위의 문제에서 확률이 높은 안을 선택하는 것이 올바른 기준이 될 것이다.

배경지식 쌓기

- **미분과 최대최소**

변화율이 일정한 함수는 일차함수이다. 즉, $f'(x) = a$ (a 는 상수)이면 f' 의 원시함수 f 는 다음과 같다. $f(x) = \int a dx = ax + b$ (b 는 적분상수)

- **복리예금에서 적금 계산법**

매월 초에 월이율 r, 기간 n 개월, 매달 적립하는 금액을 a 원이라고 하면 n 개월 후 원리합계금 S는 다음과 같다.(기수불)

$$S = a\{(1+r) + (1+r)^2 + \cdots + (1+r)^n\} = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^n - 1\right]}{r}$$

- **정규분포곡선과 표준화**

확률밀도함수가 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ 인 확률분포를 정규분포라고 부르며, 평균은 m 이고 표준편차는 σ 이다. 이 때, 확률변수 X를 $Z = \frac{X-m}{\sigma}$ 으로 치환하는 것을 표준화라고 부른다. 이 때 확률밀도함수 $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$ 이며 평균은 0이고 표준편차는 1이 된다. 이를 표준정규분포라고 부른다.

풀 어 보 기

1. 세계핸드볼연맹에서 공인한 여자 일반부용 핸드볼 공을 생산하는 회사가 있다. 이 회사에서 생산된 핸드볼 공의 무게는 평균 350g, 표준편차 16g 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 회사는 일정한 기간 동안 생산된 핸드볼 공 중에서 임의로 추출된 핸드볼 공 64 개의 무게의 평균이 346g 이하이거나 355g 이상이면 생산 공정에 문제가 있다고 판단한다. 이 회사에서 생산 공정에 문제가 있다고 판단할 확률을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하시오? [2009 수능]

z	$P(0 \leq Z \leq z)$
2.00	0.4772
2.25	0.4878
2.50	0.4938
2.75	0.4970

2. 다음 문제를 아래의 소문항 순서대로 해결하시오.

> 정부가 통일비용을 마련하기 위해 예산의 일부를 2009년부터 매년 1월 1일에 적립하기로 하였다. 적립할 금액은 경제성장률을 감안하여 매년 전년도보다 6% 씩 증액한다. 2009년 1월 1일에 10조원을 적립한다면, 2018년 12월 31일까지 적립된 원리합계는 얼마인가? 단, 연이율 6%, 1년마다 복리로 계산하고 $1.06^{10}=1.8$로 계산한다.

(1) 2009년 1월 1일 10조원을 예금하면 2018년 12월 31일 원리합계는 몇 조원이 되는가?

(2) 2012년 1월 1일에는 적립해야할 금액은 얼마인가?

(3) 2012년 1월 1일에 적립한 금액은 1018년 12월 31일 원리합계는 몇 조원이 되는가?

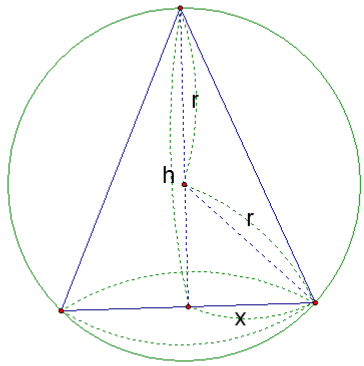
(4) 위의 계산을 토대로 2018년 12월 31일까지 적립된 금액의 원리합계는 몇 조원이 되는가?

읽기 자료

• 구에 내접하는 직원뿔의 부피가 최대인 경우

먼저 구의 반지름을 r 이라고 하자. 구면에 내접하는 직원뿔에서 밑면의 반지름의 길이를 $x\,(0<x<r)$ 라 하고, 원뿔의 높이를 h 라고 하면 직원뿔의 부피 V는

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 h(0<h<2r) \quad \cdots ㉠$$



이 때, 오른쪽 그림에서 $\triangle OAH$는 직각삼각형이므로

$$(h-r)^2+x^2=r^2\text{, 즉 } x^2=r^2-(h-r)^2 \quad \cdots ㉡$$

㉡을 ㉠에 대입하면

$$V=\frac{1}{3}\pi\{r^2-(h-r)^2\}h=\frac{1}{3}\pi(2rh^2-h^3)=\frac{1}{3}\pi(2r-h)h^2$$

여기서 $f(h)=(2r-h)h^2$ 으로 놓으면

$$f'(h)=-h(3h-4r)$$

$0<h<2r$ 에서 $f(h)$ 의 증감표를 만들면 아래와 같다.

h	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}r$	$\cdots$	$2r$
$f'(h)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(h)$	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}r^3$	$\searrow$	0

그러므로 $f(h)$ 는 $h=\frac{4}{3}r$ 일 때 최댓값을 가진다.

따라서 반지름이 r 인 구에 내접하는 직원뿔의 최대부피는 $V=\frac{32\pi}{81}r^3$ 이다.

위와 같은 방법을 적용하면, 반지름 r 인 구에 내접하는 원기둥의 부피는 $h=\frac{2}{\sqrt{3}}r$ 일 때 최대가 된다.

개요 짜기

답안 작성

예시답안

풀어보기 1

표본의 평균을 $\overline{X}$ 라고 하면 $\overline{X} \in N(350, \frac{16^2}{64})$ 이므로 $\overline{X} \in N(350, 2^2)$ 이라고 할 수 있다. 따라서 구하는 확률은 $P = P(\overline{X} \le 346) + P(\overline{X} \ge 355)$ 이다. 이것은 다음과 같이 변형할 수 있다. $P = P(\overline{X} \le 346) + P(\overline{X} \ge 355)$

$$= P(\frac{\overline{X}-350}{2} \le \frac{346-350}{2}) + P(\frac{\overline{X}-350}{2} \ge \frac{355-350}{2})$$
$$= P(Z \le -2) + P(Z \ge 2.5)$$
$$= 0.0228 + 0.0062 = 0.0290$$

풀어보기 2

(1) 2009년 1월 1일 예금한 돈을 P 원 연이율 6%로 10년간 예금했을 때
복리계산법을 따르면 원리 합계금은 $P(1.06)^{10}$ 이다.

(2) 매년 6%씩 증액시키므로 2012년 1월 1일에 적립할 금액은 $P(1.06)^3$ 이다.

(3) (2)의 금액을 7년간 예금한 것이므로 2018년 12월 31일에는
$P(1.06)^3(1.06)^7 = P(1.06)^{10}$ 이 된다.

(4) 따라서 2018년까지 총 적립된 금액의 원리합계는 $P(1.06)^{10} \times 10$ 이 된다.
P 에 10조원, $(1.06)^{10}$ 에 1.8을 대입하면 총 금액은 180조원이 된다.

논제 1-1

$\frac{dV}{dt} = a$ (상수)로 일정하기 때문에 $V = at + b$ 임을 알 수 있다. 표를 이용하여 상수 a, b 를 구하는 식은 다음과 같다.

$1000\pi = 5a + b$, $14750\pi = 60a + b$ 를 연립하여 풀면 $a = 250\pi, b = -250\pi$ 이므로 다음과 같은 표를 완성할 수 있다.

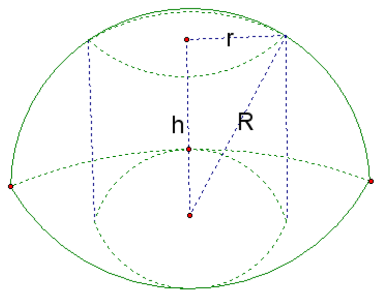
t (초)	5	(가)=10	30	60
V (㎦)	1,000π	2,250π	7250π=(나)	14,750π

논제 1-2

반구모양의 가스의 부피는 $V_1 = f(r) = \frac{2}{3}\pi r^3$ 이므로 부피의 반지름에 대한 변화율은 $f'(r) = \frac{dV_1}{dr} = 2\pi r^2$ 이다. 여기에 $r = 5$ 를 대입하면 $f'(5) = 50\pi$ 이다.

논제 1-3

오른쪽 그림과 같이 반구의 반지름을 R 반구에 내접하는 원기둥의 반지름을 r이라 하고 원기둥의 높이를 h라고 하자. 원기둥의 부피를 V라고 하면 다음이 성립한다.



$V=\pi r^2 h \cdots$ ①, $r^2=R^2-h^2 \cdots$ ②이므로 ②를 ①에 대입하면 $V=\pi(R^2-h^2)h$ 이다.

$\dfrac{dV}{dh}=\pi R^2-3\pi h^2=0$ 에서 $h=\dfrac{1}{\sqrt{3}}R \cdots$ ③이다.

즉, 원기둥의 부피는 높이가 $h=\dfrac{1}{\sqrt{3}}R$일 때 최대이며, ③을 ②에 대입하면 원기둥의 반지름은 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}R$이 된다. 따라서 반지름이 5km인 반구에 내접하는 원기둥의 최대 부피는 $V=\pi\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}5\right)^2\dfrac{1}{\sqrt{3}}5=\dfrac{250\sqrt{3}}{9}\pi$ 가 된다.

논제 2-1

일시불 투자금액을 X라고 하자. 그러면 $X \times (1+0.03)^5 = 1{,}000{,}000$ 원이 성립한다. 따라서 이 식을 이용하면 X를 구할 수 있다. 표를 이용하면 $(1.03)^5=1.160$ 임을 알 수 있고, 이를 대입하면

$X=\dfrac{1000000}{1.160}=\dfrac{100000000}{116} \fallingdotseq 862{,}069$원이다.(참고 : 정확한 계산을 요구하는 것은 아니고 계산식을 유도하는 과정을 보이면 좋은 답이 됨.)

논제 2-2

연납 투자금액을 P 라고 하자. 그러면

$P \times \{(1+0.03)^5+(1+0.03)^4+(1+0.03)^3+(1+0.03)^2+(1+0.03)\} = 1{,}000{,}000$ 원

$P\times\dfrac{1.03\{(1.03)^5-1\}}{1.03-1}=1{,}000{,}000$ 이므로 $P=\dfrac{0.03}{1.03\times0.16}\times1000000 \fallingdotseq 180239$원이다.

(참고 : 정확한 계산을 요구하는 것은 아니고 계산식을 유도하는 과정을 보이면 좋은 답이 됨.)

논제 2-3

보험금 지불 시점에 따라서 다양한 답이 나올 수 있다.

방법 ① : 보험금을 연말에 지급하는 경우

지출 총액 계산 방법

1차년도 지출 준비액 : $1{,}000{,}000 \times 250 \times \dfrac{1}{(1+0.03)}$

2차년도 지출 준비액 : $1{,}000{,}000 \times 250 \times \dfrac{1}{(1+0.03)^2}$

3차년도 지출 준비액 : $1{,}000{,}000 \times 300 \times \dfrac{1}{(1+0.03)^3}$

(수입) 연납 순보험료를 P라고 하자.

1차년도 : $\mathrm{P} \times 6{,}000 \times 1.000 = 6{,}000 \times \mathrm{P}$

2차년도 : $\mathrm{P} \times 5{,}750 \times 0.971 = 5{,}583 \times \mathrm{P}$

3차년도 : $\mathrm{P} \times 5{,}500 \times 0.942 = 5{,}181 \times \mathrm{P}$

따라서, 어떠한 이윤도 없으므로, (지출총액) = (수입총액)을 이용하면 P를 구할 수 있다.

논제 3-1

실제로 생산기계가 정상적으로 작동하고 있다면 $\overline{X}$ 는 정규분포 $N(50, \dfrac{10^2}{4} = 5^2)$ 을 따르게 된다. 이를 이용하여 기계가 정상적으로 작동하고 있다고 올바르게 판단하게 될 확률을 정규분포 확률변수의 표준화를 통해 제안된 두 가지 안에 대해 각각 구할 수 있다.

먼저 A안의 확률을 구하면 다음과 같다.

$P(40 \le \overline{X} \le 60) = P\left(\dfrac{40-50}{5} \le z \le \dfrac{60-50}{5}\right) = P(-2 \le z \le 2) = 0.95$ 이다.

다음 B안의 확률을 구하면 다음과 같다.

$P(42 \le \overline{X} \le 65) = P\left(\dfrac{42-50}{5} \le z \le \dfrac{65-50}{5}\right) = P(-1.6 \le z \le 3) = 0.95$ 이다. 따라서 정상을 정상이라고 판단할 확률은 A안이나 B안이나 동일하다.

논제 3-2

첫째, A안의 확률을 구하면 다음과 같다.

먼저 $X \in N(37.5, 10^2)$ 일 때, 즉 비정상으로 작동할 때, 정상으로 작동한다고 판단할 확률은

$$0.7P(40 \le \overline{X} \le 60) = 0.7P\left(\frac{40-37.5}{5} \le z \le \frac{60-37.5}{5}\right) = 0.7P(0.5 \le z \le 4.5) = 0.21$$

다음으로 $X \in N(62.5, 10^2)$ 일 때, 정상으로 작동할 확률은

$$0.3P(40 \le \overline{X} \le 60) = 0.3P\left(\frac{40-62.5}{5} \le z \le \frac{60-62.5}{5}\right) = 0.3P(-4.5 \le z \le -0.5) = 0.09$$

따라서 A안의 경우 기계가 비정상으로 작동할 때, 비정상이라고 판단할 확률은 다음과 같다. $1-(0.21+0.09)=0.7$ …①이다.

둘째, 첫째, B안의 확률을 구하면 다음과 같다.

먼저 $X \in N(37.5, 10^2)$ 일 때, 즉, 비정상이지만 정상으로 판단할 확률은

$$0.7P(42 \le \overline{X} \le 65) = 0.7P\left(\frac{42-37.5}{5} \le z \le \frac{65-37.5}{5}\right) = 0.7P(0.9 \le z \le 5.5) \fallingdotseq 0.126$$

다음으로 $X \in N(62.5, 10^2)$ 일 때, 정상으로 판단할 확률은

$$0.3P(42 \le \overline{X} \le 65) = P\left(\frac{42-62.5}{5} \le z \le \frac{65-62.5}{5}\right) = 0.3P(-3.9 \le z \le 0.5) = 0.21$$

따라서 B안의 경우 기계가 비정상으로 작동할 때, 비정상이라고 판단할 확률은 다음과 같다. $1-(0.126+0.21)=0.663$ …②이다.

논제 3-3

첫째, 위의 [문제 3-1]에서 정상을 정상이라고 판단할 확률은 A안이나 B안이나 같다.

둘째, 비정상적으로 작동할 때, 비정상이라고 판단할 확률은 위의 ①과 ②에서 A안이 비정상을 비정상으로 판단할 확률이 높음을 알 수 있다.

18 연세대학교 수시

제 시 문

갑은 좌표공간에서 시각 t에 따라 연속적으로 움직이는 평면도형 F를 관찰하고 있다. F는 모든 시각에 평면도형을 유지하나, 그 넓이와 모양은 연속적으로 변하고 있다. 갑은 을에게 관찰한 정보의 일부만을 알려주고, 을은 주어진 정보를 수학적으로 분석하여 좌표공간에서 F의 변화와 움직임을 알아내려고 한다.

- 시각 t에서 도형 F의 xy, yz, zx평면 위로의 정사영의 넓이를 각각 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$라 하고, 이들은 모든 시각 t에서 연속함수라고 가정한다.

[1-1] 갑은 을에게 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$를 각각 알려주었다. 을은 이 정보만으로 도형 F의 넓이 $S(t)$를 알아내었다. 을의 해결 방법을 설명하고, $S(t)$와 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$사이의 관계식을 구하시오. [10점]

[1-2] 갑은 을에게 시각 t $(0 \le t \le 1)$에서 $B(t)$와 $A(t) = C(t) = 0$임을 알려주었다. 또한, 도형F 위에 항상 존재하는 점 $P(f(t), g(t), 0)$도 알려주었다. 그리고 $f(t)$, $g(t)$는 구간 $0 \le t \le 1$에서 증가함수이고, 미분 가능하며, 또한 이들의 도함수가 연속이라는 조건을 알려주었다. 을은 $t=0$에서 $t=1$ 까지 도형 F가 만든 입체도형의 부피를 정적분으로 표현할 수 있었다. 그 이유를 설명하고, 입체도형의 부피를 적분변수 t를 사용한 정적분으로 나타내시오. [15점]

[1-3] 갑은 시각 t $(1 \le t \le 2)$에서 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ 각각을 모두 알고 있으나, 을에게는 이들의 합인 함수 $G(t) = A(t) + B(t) + C(t)$만을 알려주었다. 또한 이 구간에서 도형 F의 넓이 $S(t)$가 변하지 않았다는 정보도 알려주었다. 을은 이 두 가지 정보를 사용하여 어떤 조건하에서는 $S(t)$를 정확하게 구할 수 있었다. 을은 먼저 함수 $G(t)$의 최댓값 M과 최솟값 m 사이의 관계식을 구하였다. 을이 구한 이 관계식을 구하고, 이로부터 F의 넓이 $S(t)$를 구하는 방법을 설명하시오. [15점]

제시문 분석

'정사영'이란 화면에 수직이 되게 빛을 비추었을 때 생기는 어떤 도형의 그림자를 말한다.

논제 분석

- **어떤 도형의 정사영의 넓이를 구할 수 있는가?**

평면도형 F의 넓이를 S, 이 도형을 평면 α로 정사영한 도형의 넓이를 S'라 하면

$$S' = S\cos\theta \text{ (단, } \theta\text{는 } F\text{와 평면 } \alpha\text{의 이면각의 크기)}$$

- **입체도형의 부피를 구할 수 있는가?**

구간 $[a, b]$의 임의의 점에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 $S(x)$인 입체의 부피 V는

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

- **주어진 조건에서 정사영넓이의 합의 최대, 최소를 구할 수 있는가?**

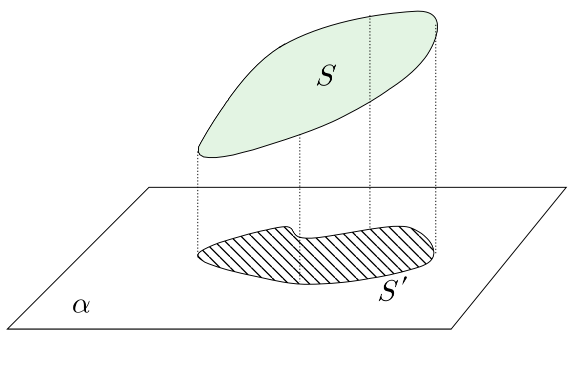
주어진 구간에서 평면도형 F의 넓이 S가 일정하다는 사실을 이용하여 G의 범위를 구할 수 있다.

배경지식 쌓기

- **정사영의 넓이**

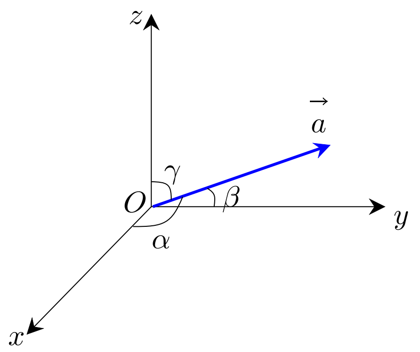
공간상의 평면 F의 넓이를 S, 이 도형을 평면 α로 정사영한 도형의 넓이를 S'라 하면

$$S' = S\cos\theta \text{ (단, } \theta\text{는 } F\text{와 평면 } \alpha\text{의 이면각의 크기)}$$



• 방향코사인(Direction Cosine)

공간벡터 $\vec{a}$ 가 x축, y축, z축과 이루는 각을 각각 α, β, γ라 할 때, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$를 벡터 $\vec{a}$의 '방향코사인'이라 한다. 이것은 벡터의 방향을 제시하기 때문에 이렇게 부른 것이다.



벡터 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$라 하면 $a_1=|\vec{a}|\cos\alpha$, $a_2=|\vec{a}|\cos\beta$, $a_3=|\vec{a}|\cos\gamma$이므로

$$|\vec{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2=|\vec{a}|^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)$$

$$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

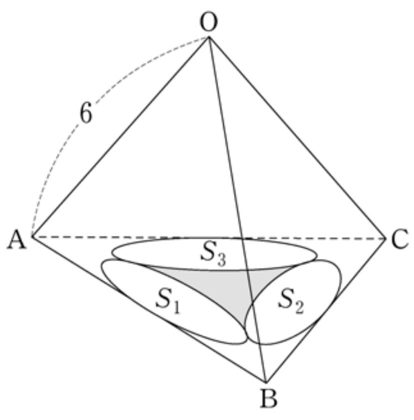
• 점과 평면 사이의 거리

점 $P(x_1, y_1, z_1)$에서 평면 $\alpha: ax+by+cz+d=0$ 까지의 거리 d는

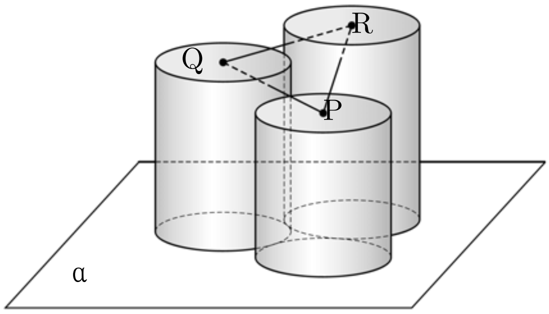
$$d=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

풀어보기

1. 한 변의 길이가 6인 정사면체 OABC가 있다. 세 삼각형 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$에 각각 내접하는 세 원의 평면ABC 위로의 정사영을 각각 S_1, S_2, S_3이라 하자. 그림과 같이 세 도형 S_1, S_2, S_3으로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 할 때, $(S+\pi)^2$의 값을 구하시오.



2. 그림과 같이 반지름의 길이가 모두 $\sqrt{3}$ 이고 높이가 서로 다른 세 원기둥이 서로 외접하며 한 평면 α 위에 놓여 있다. 평면 α 와 만나지 않는 세 원기둥의 밑면의 중심을 각각 P, Q, R라 할 때, 삼각형 QPR는 이등변삼각형이고, 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기는 $60°$이다. 세 원기둥의 높이를 각각 8, a, b라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, $8<a<b$)



개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

- **3차원 피타고라스정리6)**

좌표공간에 원점 O와 세 점 $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$가 있다. $\triangle ABC$, $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COA$의 넓이를 각각 S, S_1, S_2, S_3이라 할 때, $S=\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$가 성립한다. 왜냐하면

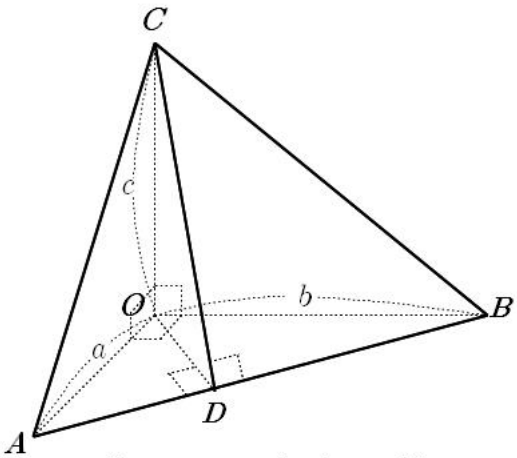
$\triangle AOB$: $S_1=\frac{1}{2}|ab|$

$\triangle BOC$: $S_2=\frac{1}{2}|bc|$

$\triangle COA$: $S_3=\frac{1}{2}|ca|$

$\triangle AOB$에서 $\overline{OD}=\frac{|ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\triangle COD$에서
$$\overline{CD}=\sqrt{\overline{OC}^2+\overline{OD}^2}=\sqrt{c^2+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$$



[a, b, $c>0$일 때, 그림]

따라서 $\triangle ABC$에서
$$S=\frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CD}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\times\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{4(\frac{1}{4}a^2b^2+\frac{1}{4}b^2c^2+\frac{1}{4}c^2a^2)}$$
$$=\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$$

이것을 '3차원 피타고라스 정리'라 한다.

6) '수학과 교육'(통권 73호) pp.20~21

예시답안

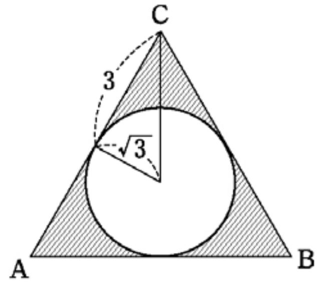
1. 구하는 부분의 넓이는 오른쪽 그림에서 어두운 부분을 평면 ABC 위로 정사영 시킨 넓이와 같다. 정사면체에서 이면각 θ에 대해

$\cos\theta=\frac{1}{3}$ 이므로

$S=\left\{\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2-\pi(\sqrt{3})^2\right\}\times\frac{1}{3}$

$=3\sqrt{3}-\pi$

$\therefore\ (S+\pi)^2=(3\sqrt{3})^2=27$



2. 점 P를 지나며 평면 α에 평행한 평면을 β라 하자. 점 Q, R에서 평면 β에 내린 수선의 발을 Q′, R′이라 하고, $\overline{QQ'}=x$, $\overline{RR'}=y\,(0<x<y)$ 라 하자.
삼각형 PQ′R′은 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$ 인 정삼각형이므로 다음이 성립한다.

$\overline{PQ}=\sqrt{x^2+12}$, $\overline{PR}=\sqrt{y^2+12}$, $\overline{QR}=\sqrt{(x-y)^2+12}$

이 때, $\overline{PR}>\overline{PQ}$, $\overline{PR}>\overline{QR}$이므로 $\overline{PQ}=\overline{QR}$이 성립한다. 따라서 $y=2x$이다.

점 Q에서 변 PR에 내린 수선의 발을 H라 하면 $\overline{QH}=\sqrt{(x^2+12)-\frac{1}{4}(y^2+12)}$

이므로 삼각형 PQR 의 넓이는 $\frac{1}{2}\sqrt{y^2+12}\sqrt{(x^2+12)-\frac{1}{4}(y^2+12)}$ 이다.

그런데 삼각형 PQR의 정사영이 삼각형 PQ′R′이고 삼각형 PQ′R′의 넓이는 $3\sqrt{3}$ 이다. 따라서 평면 QPR와 평면 α가 이루는 각의 크기가 60° 이므로 삼각형 PQR의 넓이는 $6\sqrt{3}$ 이다.

$$\frac{1}{2}\sqrt{y^2+12}\sqrt{(x^2+12)-\frac{1}{4}(y^2+12)}=6\sqrt{3}$$

$$\sqrt{4x^2+12}\sqrt{(x^2+12)-\frac{1}{4}(4x^2+12)}=12\sqrt{3}$$

$$\sqrt{4x^2+12}\sqrt{x^2+12-x^2-3}=12\sqrt{3}$$

$3\sqrt{4x^2+12}=12\sqrt{3}$, $4x^2+12=48$, $x^2=9$ $\therefore x=3,\ y=6$

따라서 $a=11$, $b=14$가 되어 $a+b=11+14=25$이다.

예시답안

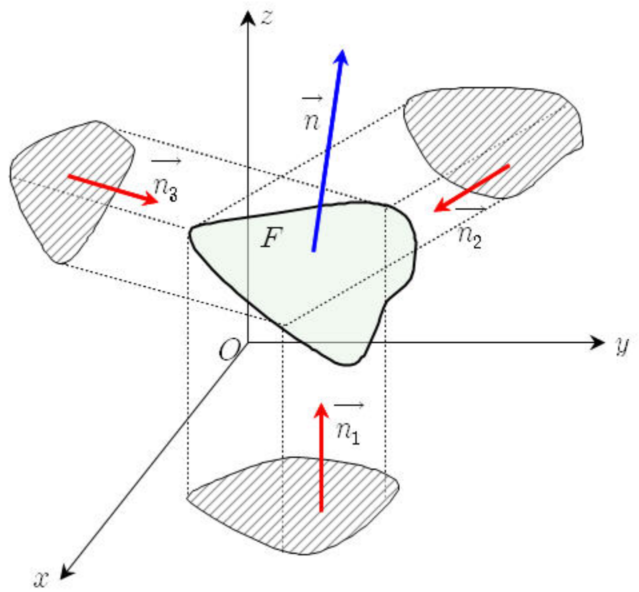
1. 다음 그림과 같이 평면도형 F의 넓이 $S(t)$와 같은 크기를 갖는 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$라 하면

$$S(t)=|\vec{n}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad \cdots\cdots ①$$

이다. 또 F를 xy, yz, zx평면에 정사영한 도형의 넓이 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$와 같은 크기를 갖는 법선벡터를 각각 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$ 라 하자. 그러면

$$\overrightarrow{n_1}=(0, 0, A(t)) , \overrightarrow{n_2}=(B(t), 0, 0) , \overrightarrow{n_3}=(0, C(t), 0)$$

가 된다.



$\vec{n}$과 $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$, $\overrightarrow{n_3}$ 가 이루는 각을 각각 θ_1, θ_2, θ_3라 하면

$$\cos\theta_1=\frac{\vec{n}\bullet\overrightarrow{n_1}}{|\vec{n}||\overrightarrow{n_1}|}=\frac{cA(t)}{S(t)A(t)}=\frac{c}{S(t)} .$$

같은 방법으로 하면 $\cos\theta_2=\dfrac{a}{S(t)}$, $\cos\theta_3=\dfrac{b}{S(t)}$이다. 두 평면이 이루는 각은 법선벡터가 이루는 각과 같으므로 정사영의 넓이를 구하면

$$A(t)=S(t)\cos\theta_1=c , B(t)=S(t)\cos\theta_2=a , C(t)=S(t)\cos\theta_1=b$$

가 되고 이것을 ①식에 대입하면

$$\therefore S(t)=\sqrt{\{A(t)\}^2+\{B(t)\}^2+\{C(t)\}^2}$$

다른 풀이

평면도형 F가 xy, yz, zx평면과 이루는 각을 각각 α, β, γ라 하면

$$A(t)=S(t)\cos\alpha \ , \ B(t)=S(t)\cos\beta \ , \ C(t)=S(t)\cos\gamma$$

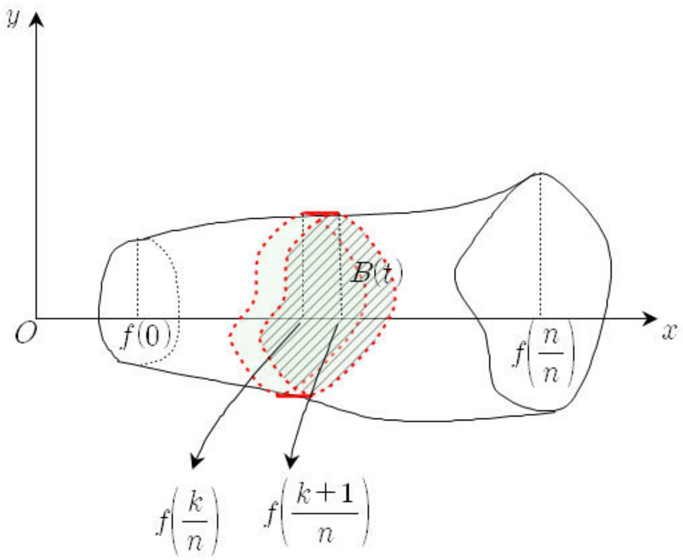
이다. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$이므로 양변을 제곱하여 변변 더하면

$$\{A(t)\}^2+\{B(t)\}^2+\{C(t)\}^2=\{S(t)\}^2(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=\{S(t)\}^2$$

$$\therefore S(t)=\sqrt{\{A(t)\}^2+\{B(t)\}^2+\{C(t)\}^2}$$

2. 시각t $(0 \le t \le 1)$에서 $A(t)=C(t)=0$이므로 평면도형 F는 yz평면에 평행하고, F가 만드는 입체도형을 시각 t에서 x축에 수직인 평면으로 자른 입체의 단면적은 $B(t)$가 된다.

아래 그림과 같이 구간 $(f(0), f(1))$를 n등분하여 각 분점을 $f\left(\frac{k}{n}\right)$ $(k=0, 1, 2, \cdots, n)$이라 두자.



구하려는 입체도형의 부피 V는 위 그림과 같이 밑면의 넓이가 $B(t)$이고 높이가 $f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)$인 원판 꼴 모양의 부피의 합과 유사하고, 구간을 점점 잘게 자를수록 구하려는 입체의 부피에 근사하므로

$$V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}B(t)\cdots\cdots②$$

이다. 그런데 $f(t)$가 미분 가능하므로 평균값정리에 의해

$$\frac{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=f'\left(\frac{k^*}{n}\right)$$

를 만족하는 $\frac{k^*}{n}$가 $\frac{k}{n}$와 $\frac{k+1}{n}$사이에 존재한다. 위 식을 ②에 대입하면

$$\therefore\ V=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left\{f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right\}B(t)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}f'\left(\frac{k^*}{n}\right)B(t)\frac{1}{n}=\int_0^1 f'(t)B(t)dt$$

를 얻는다.

다른 풀이

도형 F가 만든 입체도형을 x축과 수직인 평면으로 자른 단면적이 $B(t)$이므로 도형 F가 만든 입체도형의 부피는 구간$(0\le t\le 1)$에서 단면적을 x에 대해 적분하면 된다. 도형 F위에 항상 존재하는 점 $P(f(t), g(t), 0)$에서 $x=f(t)$ $(0\le t\le 1)$이다. $f(t)$가 증가함수이므로 입체도형의 단면들이 서로 겹치지 않는다. 또한 $f(t)$의 도함수가 연속이고 $dx=f'(t)dt$ $(0\le t\le 1)$이므로 입체도형의 부피는

$V=\int_{f(0)}^{f(1)}B(t)dx=\int_0^1 f'(t)B(t)dt$이다. 따라서, $V=\int_0^1 f'(t)B(t)dt$.

3. 문제1에서 $A^2+B^2+C^2=S^2$(일정)……③ 이다. $G=A+B+C$ …… ④라 두면 $A, B, C\ge 0$ 이므로 ③은 반지름이 S(일정)인 구면의 $A, B, C\ge 0$인 영역이고

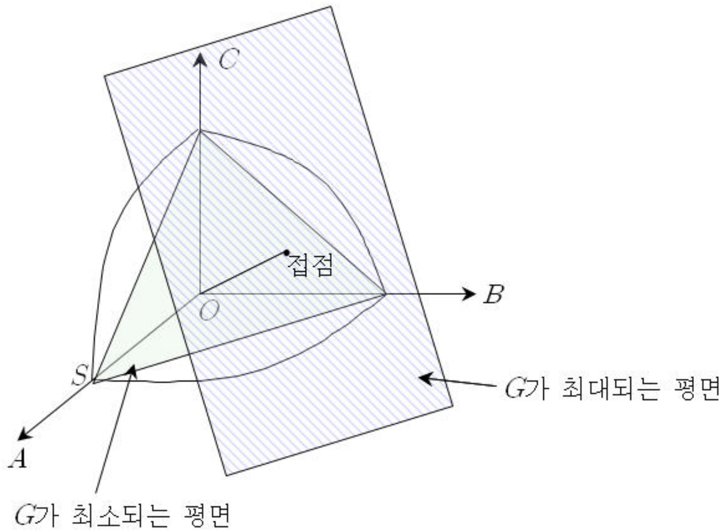
④는 $\frac{A}{G}+\frac{B}{G}+\frac{C}{G}=1$이므로 A, B, C축 절편이 모두 G인 평면의 방정식이다.

이 때 G가 최소가 되는 경우는 $G=S$인 경우이고,

최대가 되는 경우는 평면 ④가 구 ③에 접하는 경우이다.(아래 그림 참조)

따라서 최댓값은

$\frac{|-G|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=S$ ($\because$구의 중심에서 평면까지의 거리는 반지름과 같다.)



따라서 G의 최솟값 m은 S이고, 최댓값 M은 $\sqrt{3}\,S$가 되어 $M=\sqrt{3}\,m$인 관계가 있다.

따라서 평면 F가 xy, yz, zx평면 중 어느 한 평면에 평행하다면 $S(t)=G(t)$이고, F를 xy, yz, zx평면에 정사영시킨 도형의 넓이 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$가 모두 같다면 $S(t)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}G(t)$가 되어 $S(t)$를 구할 수 있다.

다른 풀이

$G(t)$의 범위를 구해보도록 하자.

① $S^2=A^2(t)+B^2(t)+C^2(t)\le(A(t)+B(t)+C(t))^2=G^2(t)\Leftrightarrow S\le G(t)\ (1\le t\le 2)$
(단, 등호는 $A(t)B(t)+B(t)C(t)+C(t)A(t)=0\Leftrightarrow A(t)$, $B(t)$, $C(t)$중 2개가 0
$\Leftrightarrow$ 도형 F가 xy, yz, zx평면 중 어느 한 평면과 평행할 때 성립한다.)

② Cauchy-Schwarz 부등식에 의해
$3S^2=(1^2+1^2+1^2)(A^2(t)+B^2(t)+C^2(t))\ge(A(t)+B(t)+C(t))^2=G(t)^2\Rightarrow G(t)\le\sqrt{3}\,S$
이다. (단, 등호는 $A(t)=B(t)=C(t)$일 때 성립한다.)

①과 ②에 의해 $S\le G(t)\le\sqrt{3}\,S$이다. 즉, $\sqrt{3}\,m=M$이다.

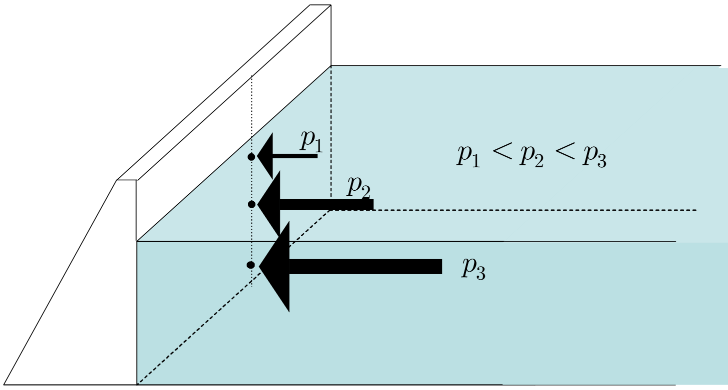
또한, ①, ② 부등식의 등호성립 조건하에서는 시각 $t\ (1\le t\le 2)$에서 평면도형 F의 일정한 넓이 S를 구할 수 있다.

이를테면, 시각 $t\ (1\le t\le 2)$에서 평면도형 F의 xy, yz, zx평면 위로의 정사영의 넓이 $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$들과 $G(t)$의 값은 ①, ② 부등식을 만족하며 변하지만 도형 F가 xy, yz, zx평면 중 어느 한 평면과 평행할 때 또는 $A(t)=B(t)=C(t)$일 때는 ①, ② 부등식의 등호가 성립하므로 평면도형 F의 일정한 넓이 S를 구할 수 있다.

19 인하대학교 예시

제 시 문

(가) [그림1]에서와 같이 댐은 아래가 위보다 더 두꺼운데 그 이유는 물의 깊이가 깊어짐에 따라 수압도 증가하기 때문이다. 즉, 물이 깊을수록 댐도 더 튼튼해져야 한다. 댐의 안쪽 표면에 있는 한 점에 작용하는 수압은 그 점의 깊이에 의해서만 결정되는데 깊이 h 와 수압 p 사이의 관계식은 $p=\rho gh$ 이다. 여기서 g 는 중력가속도이고 ρ 는 물의 밀도이다.



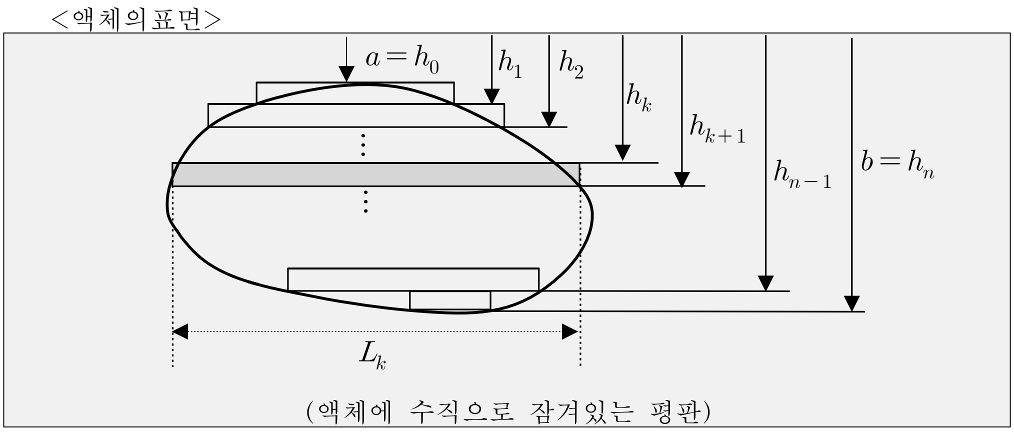
[그림 1]

(나) 밑면이 편평한 그릇에 담겨 있는 액체의 깊이를 h 라고 하면 이 액체의 무게 때문에 그릇의 밑면이 받는 힘 F 는 대기압을 무시하면

$$F=pA=\rho ghA \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

가 된다. 여기서 ρ 는 액체의 밀도, g 는 중력가속도, A 는 밑면의 넓이이다. 이 힘은 그릇의 형태에 무관하다. 일반적으로 파스칼의 원리에 따르면, 압력 p 는 모든 방향에 대하여 같은 크기로 작용한다. 따라서 액체 속에 수평으로 잠겨 있는 평판의 윗면에 아래로 작용하는 힘은 (1)식으로 주어진다. 그러나 수직으로 잠겨 있는 평판에 대하여는, 압력의 크기가 깊이 h 에 따라 변하므로 (1)식을 그대로 사용할 수 없다. 이 경우에는 평판을 수평으로 잘게 나누어서 각각의 띠에 작용하는 힘을 합하여 극한을 취하는 방법, 즉 구분구적법을 사용한다.

(다) 밀도가 ρ 인 액체 속에 평판이 아래 [그림2]와 같이 수직으로 잠겨 있다고 하자. 단, 평판의 두께는 무시하기로 한다.



[그림 2]

액체의 표면에서 평판의 윗부분과 아랫부분까지의 깊이를 각각 a,b라 하자. 폐구간 $[a,b]$를 일정하게 n등분한 것을

$$a=h_0<h_1<\cdots<h_k<h_{k+1}<\cdots<h_{n-1}<h_n=b$$

이라 하고, $\Delta h=h_{k+1}-h_k=\dfrac{b-a}{n}$ 라 하자. 그리고 액체의 표면에서 깊이 h_k 와 h_{k+1} 사이에 있는 직사각형 띠의 길이를 L_k 라 하면 작은 직사각형 띠의 넓이는 $L_k\Delta h$ 가 된다. 이때 작은 직사각형 띠에 가해지는 압력은 제시문 (나)에 의해 $\rho g h_k$ 와 $\rho g h_{k+1}=\rho g(h_k+\Delta h)$ 사이에 있다. 따라서 이 띠가 받는 힘을 ΔF 라 하면

$$\rho g\, h_k L_k \Delta h \le \Delta F \le \rho g\,(h_k+\Delta h)L_k\Delta h$$

이 된다. 각각의 띠에 작용하는 힘을 모두 합하면 다음 식을 얻는다.

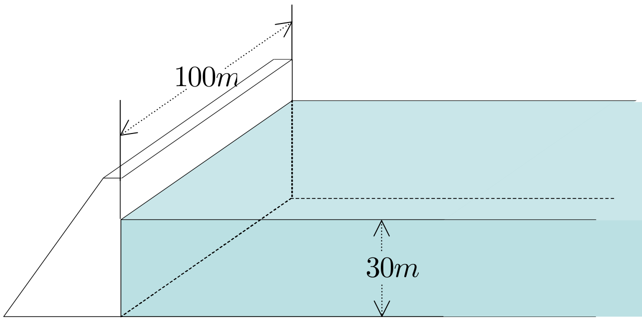
$$\sum_{k=0}^{n-1}\rho g\, h_k L_k\Delta h \le \sum_{k=0}^{n-1}\Delta F \le \sum_{k=0}^{n-1}\rho g\,(h_k+\Delta h)\,L_k\Delta h$$

이제 n을 무한히 늘리면 평판의 한쪽 면에 수직으로 작용하는 힘 F는 다음과 같이 적분을 사용하여 나타낼 수 있다.

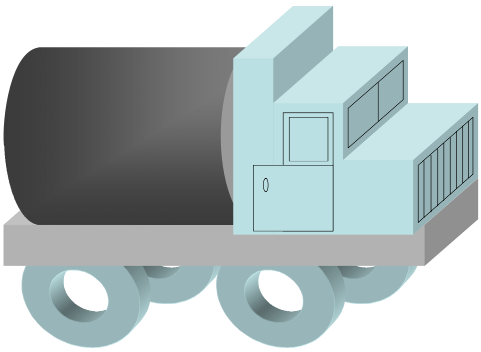
$$F=\int_a^b \rho g\, h L(h)dh=\rho g\int_a^b h\,L(h)\,dh$$

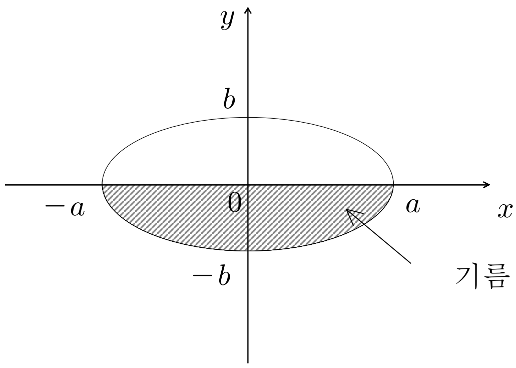
여기에서 $L(h)$ 는 깊이 h 에서의 평판의 가로 길이이다.

[1] 아래 그림과 같이 안쪽 면이 폭 $100\,m$ 인 직사각형 모양의 댐에 $30\,m$ 높이까지 물이 찼을 때, 이 댐의 안쪽 면이 받는 힘을 구하시오. 물의 밀도는 $\rho = 1000\,kg/m^3$ 이고 중력가속도는 $g = 9.8m/\sec^2$ 이다. 단, 대기압에 의한 효과는 무시하기로 한다.



[2] 아래 그림과 같이 유조차의 기름 탱크는 앞면과 뒷면이 편평한 타원기둥 모양이고, 이 기름 탱크에 밀도가 ρ 인 기름이 반이 채워져 있다고 하자. 이 기름 탱크의 단면이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$의 내부로 주어질 때, 기름 탱크의 뒷면이 받는 힘의 크기를 구하시오. 단, 중력가속도는 g 로 표시한다. 단, 대기압에 의한 효과는 무시하기로 한다.





<유조차의 기름 탱크 뒷면>

제시문 분석

- **한 점에서 댐이 받는 압력의 크기는 댐의 깊이에 비례한다.**

댐의 안쪽 표면에 있는 한 점에 작용하는 수압은 그 점의 깊이에 의해서만 결정되는데 깊이 h 와 수압 p 사이의 관계식은 $p=\rho g h$ 이다. 여기서 g 는 중력가속도이고 ρ 는 물의 밀도이다..

- **조건의 일부 변형**

댐의 면이 받는 힘의 크기는 적분량으로 계산할 수 있다. 수심이 a에서 b까지 변할 때, 면에 수직으로 작용하는 힘 F는 다음과 같이 적분을 사용하여 나타낼 수 있다.

$$F=\int_a^b \rho g\, h L(h) dh=\rho g \int_a^b h L(h)\, dh$$

여기에서 g는 중력가속도, ρ는 액체의 밀도이고 $L(h)$ 는 깊이 h 에서의 평판의 가로 길이이다.

– 제시문 출처 : (가) : 고등학교 수학 II 교과서, (주)금성출판사 외
(나), (다) : 미적분과 해석기하학, (주)대영사

논제 분석

- **유체의 압력에 의해서 평판이 받는 힘을 계산하는 방법이 주어졌을 때, 이를 구체적인 상황에 적용할 수 있는가?**

$F=\int_a^b \rho g\, h L(h) dh=\rho g \int_a^b h L(h)\, dh$ 라는 공식을 알고 있을 때, 이 식의 적용 능력을 묻고 있다. 즉, 위의 식은 높이에 대한 적분이므로 높이가 적분의 아래 끝 값과 위 끝 값을 구성한다. 따라서 $a=0, b=30$ 을 대입하고, 그림에서 $L(h)=100$ 임을 파악하면 문제는 해결된다. 이 문제는 기계적으로 해결하는 문제이므로 부분점수라든가, 좋은 풀이로 분류될 여지가 거의 없는 문제이다. 계산실수 외에는 맞거나 틀리거나 둘 중 하나인 문제이다.

- **[2]에서 주어진 식을 정리하여 x 의 길이를 구하고 제시문 (다)에 대입하여 적분할 수 있는가?**

타원의 식을 정리하고 제시문 (다)에 주어진 공식에 적용하여 적분계산을 할 수 있는가를 묻고 있다. 심화과정의 미분과 적분을 배운 학생이면 간단히 치환적분을 사용하여 계산할 수 있다.

배경지식 쌓기

- **타원의 방정식**

두 정점 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}(-c, 0)$으로부터 거리의 합이 $2a\,(0<c<a)$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (0<b<a,\ b^2=a^2-c^2)$$

이고, 이 타원의 꼭짓점의 좌표는 각각 $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$이다.

- **치환적분**

$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx$ 를 구하기 위해서 $z=\phi(x)$ 로 치환하면 $\frac{dz}{dx}=\phi'(x)$ 이므로 $dz=\phi'(x)dx$ 라고 보면, $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx=\int f(z)dz=F(z)+c$ 이다.

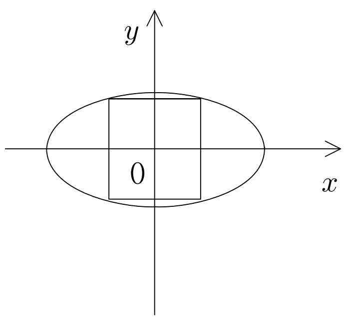
여기서 $\frac{dF(z)}{dz}=f(z)$ 이다. 구체적인 예를 살펴보면 다음과 같은 치환적분을 생각할 수 있다. $\int \sqrt{1-x^2}\,xdx$ 를 계산하기 위하여, $1-x^2=u$ 로 두면, $\frac{du}{dx}=-2x$ 이므로 $dx=-\frac{1}{2x}du$ 이므로

$$\int \sqrt{1-x^2}\,xdx=\int \sqrt{u}\cdot x\cdot \frac{-1}{2x}du=-\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot u^{\frac{3}{2}}+C=-\frac{1}{3}u\sqrt{u}+C=-\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+C \text{ 이다.}$$

풀어보기

1. 아래 그림과 같이 가로와 세로가 각각 x,y축에 평행한 직사각형이 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 에 내접하고 있다. 이 때 직사각형의 넓이의 최댓값은?



2. $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x dx$ 로 정의할 때, a_1+a_3 의 값을 구하시오.

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

- **치환적분의 활용**

① 타원의 넓이 구하기

타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

타원의 넓이를 S라고 하면 $\frac{S}{4}=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ 에서 $x=a\sin\theta$ 로 치환하면

$dx=a\cos\theta d\theta,\ x=0 \Rightarrow \theta=0, x=a \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2}$ 이므로

$$\frac{S}{4}=\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}\,a\cos\theta d\theta=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta d\theta=\frac{ab\pi}{4} \quad \therefore S=ab\pi$$

② 치환적분을 사용하여 적분을 간단하게 변형하기

함수 $f(x)$가 연속이고 임의의 실수 a에 대하여 $\int_0^{\frac{a}{2}}(f(x)+f(a-x))dx$ 는 다음과 같이 변형시킬 수 있다. $\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)dx$ 에서 $a-x=t$ 로 두면

$-dx=dt$ 이고 $x=0$ 일 때 $t=a,\ x=\frac{a}{2}$ 일 때 $t=\frac{a}{2}$ 이므로

$$\int_0^{\frac{a}{2}}f(a-x)dx=\int_a^{\frac{a}{2}}f(t)(-dt)=\int_{\frac{a}{2}}^a f(t)dt=\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx$$

이다.

따라서 $\int_0^{\frac{a}{2}}(f(x)+f(a-x))dx=\int_0^{\frac{a}{2}}f(x)dx+\int_{\frac{a}{2}}^a f(x)dx=\int_0^a f(x)dx$ 이다.

예시답안

풀어보기 1

사각형과 타원의 교점 중에 1사분면에 위치한 점을 (x,y)라고 하면, 구하는 넓이는 $4xy$ 임을 알 수 있다. 그런데, (x,y)는 타원 위의 점이므로 $x=5\cos\theta\,,\,y=4\sin\theta$로 둘 수 있다. 따라서 $S=4xy=4\cdot5\cdot4\cdot\sin\theta\cos\theta=40\cdot2\sin\theta\cos\theta=40\sin2\theta$ 이므로 넓이의 최댓값은 40이다.

풀어보기 2

$a_1+a_3=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^3 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x(1+\tan^2 x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x sec^2 x dx$ 이다.

여기서 $\tan x=u$ 로 두면, $\sec^2 x dx=du$ 이다.

또, $x=0$ 일 때, $u=0$ 이고 $x=\frac{\pi}{4}$ 일 때, $u=1$ 이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x sec^2 x dx=\int_0^1 u du=\frac{1}{2} \text{ 이다.}$$

논제 1 $a=0$, $b=30$, $L=100$, $\rho=1000\,kg/m^3$, $g=9.8\,m/\sec^2$ 이므로 제시문 (다)에서 주어진 공식에 대입하면

$$F=\rho g\int_a^b hL(h)\,dx = 9800\int_0^{30}100\,h\,dh = 9.8\times10^5\times\left[\frac{1}{2}h^2\right]_0^{30}$$
$$= 9.8\times10^5\times450 = 4.41\times10^8\ (N)$$

이 된다.

논제 2 깊이 y 에서 단면의 길이가 $L(y)=2x=2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ 이므로 제시문 (다)에서 주어진 공식에 대입하면 $F=\int_0^b\rho g\times2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,y\,dy$ 이 된다. 정적분을 계산하기 위해서 $u=1-\frac{y^2}{b^2}$ 이라고 놓으면 $du=-\frac{2y}{b^2}dy$ 이므로

$$F=ab^2\rho g\int_0^1\sqrt{u}\ du = ab^2\rho g\left[\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2ab^2}{3}\rho g$$

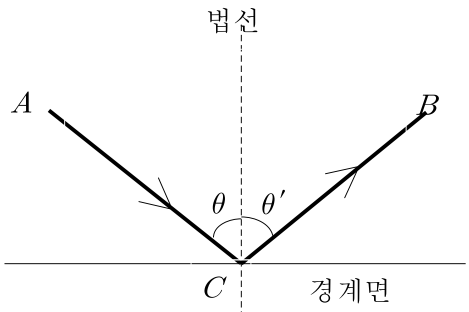
가 된다. 따라서 유조차의 단면이 받는 힘의 크기는 $F=\frac{2ab^2}{3}\rho g$ 가 된다.

(참고) $F=\int_0^b\rho g\times2a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\,y\,dy$ 의 계산은 다른 몇 가지 방법으로도 가능하다.

20 인하대학교 수시2-1(1)

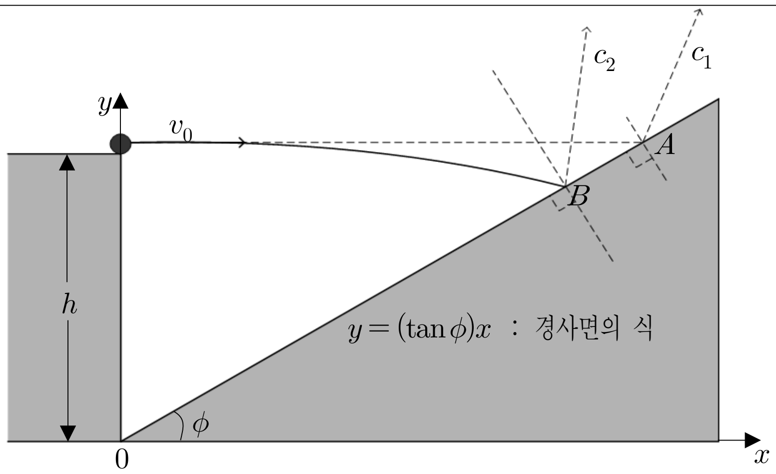
제 시 문

(가) 물체가 벽이나 바닥에 탄성 충돌한 경우 충돌 전 후의 속도의 크기는 변하지 않으며 방향만 바뀐다. [그림1]과 같이 점 A에서 물체가 출발하여 점 C에서 충돌한 후 점 B로 움직였다고 하자. 이 때, 점 C에서 바닥과 수직인 직선, 즉 법선과 직선 AC가 이루어진 각을 입사각이라 하고, 법선과 직선 CB가 이루어진 각을 반사각이라 한다. 충돌 후의 물체는 입사각 θ와 반사각 θ'가 같은 방향으로 움직인다.



[그림 1]

(나) [그림2]와 같이 직교좌표계에서 일정한 높이에서 수평 방향으로 던진 물체는 x 방향으로는 힘이 작용하지 않기 때문에 등속도운동을 하고, y 방향으로 중력 $-mg$ 가 작용하여 가속도가 $-g$ 인 등가속도운동을 한다. 점 $(0, h)$에서 v_0 의 속도로 수평으로 던진 물체가 경사각도가 ϕ(rad)인 경사면에 떨어지는 경우를 생각해 보자. 만약 중력을 무시할 수 있는 환경이라면(예 무중력 상태) 물체는 [그림2]의 점선을 따라 직선으로 나아가 점 A에서 경사면과 충돌하게 되고 입사각과 같은 각으로 반사되어 경로 c_1 방향으로 나아가게 될 것이다. 그러나 지표면에서와 같이 일정한 중력이 작용한다면 물체는 중력에 의해 포물선의 경로를 따라 떨어지게 될 것이며, 경사면과 만나는 점은 A보다 아래쪽인 B가 될 것이다. 이때 입사각과 반사각은 무중력 상태에 비해 작아지게 되고, 충돌 후의 물체는 좀 더 경사면의 법선에 가까운 c_2 방향으로 나아가게 된다.



[그림2]

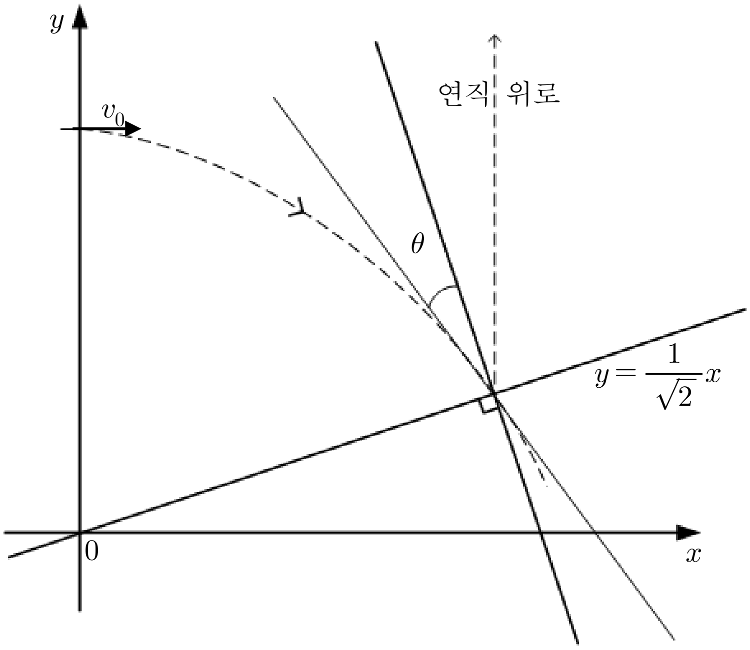
물체가 경사면과 탄성 충돌한 후의 운동은 중력의 크기, 경사면의 경사각도, 물체의 초기 높이 및 초기 속도에 따라 여러 가지가 있을 수 있다. 예를 들어, 충돌한 점에서 물체의 궤적인 포물선의 접선의 기울기가 경사면에 수직이면, 입사각이 0도가 되어 경사면에 충돌 후 물체는 다시 제 위치로 돌아간다.

[1] 제시문에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

제시문 (나)에서 높이 $h=10$ m이고 경사면의 식이 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ 라 하자. 단, 중력가속도 g 는 10m/sec^2 이며 충돌은 탄성 충돌이다.

1-1. 수평으로 던진 물체가 경사면과 만나는 점에서 포물선에 접하는 접선의 기울기를 초기 속도 v_0(m/sec) 로 표현하시오. [10점]

1-2. 아래 그림과 같이 수평으로 던진 물체가 경사면과 충돌할 때의 입사각을 θ라 하자. 이때 $\tan\theta$를 초기 수평속도 v_0(m/sec)의 함수로 표현하고, 연직 위로 오르게 되는 초기 수평속도 v_0을 구하시오. [15점]



제시문 분석

물리와 수학의 혼합 형태로 물리 현상을 이해하고 수학의 여러 방법을 이용하여 논리적으로 수식을 세우는 과정과 더불어 계산하는 능력도 평가하고자 하였다.

- 제시문 (가)에서는 탄성 충돌인 경우, 벽면에 충돌하기 전후의 물체의 속도에 대한 제시문이다. 충돌 후의 물체 속도의 방향은 반사의 법칙이 성립하다고 설명하였다.
- 제시문 (나)에서는 물체가 경사면에 충돌할 경우에 발생할 수 있는 여러 현상을 설명하였다.

논제 분석

- **수평방향으로 물체를 던질 때 나타나는 포물선의 식을 표현하고 경사면의 식과 교점을 구하여 충돌지점을 찾은 후, 충돌지점에서 접선의 기울기를 초기 속도로 표현할 수 있는가?**

x, y 위치를 각각 시간 t에 대해 함수로 나타내고 매개변수 t를 소거하면 포물선의 방정식을 구할 수 있다. 경사면을 식으로 나타내어 포물선과의 교점을 구하고 그 교점에서의 포물선의 접선의 기울기를 구한다.

- **물체가 경사면에 충돌할 때, 입사각의 탄젠트 값을 삼각함수의 공식을 응용하여 초기 속도로 표현하고, 물체가 연직 방향으로 올라가는 조건을 논리적으로 찾은 후, 이 경우의 초기 속도를 구할 수 있는가?**

1-1에서 구한 교점에서의 포물선의 접선과 경사면의 법선사이의 각을 입사각 θ 라 두면 경사면의 법선과 x축에 수직(연직 방향)인 직선사이의 각이 반사각이 된다. 이때 각 직선이 x축의 양의 방향과 이루는 각을 탄젠트 값으로 표시하고 입사각과 반사각의 크기가 같다는 성질을 이용하여 초기 수평속도 v_0 를 구한다.

배경지식 쌓기

• 매개변수

x에 대한 y의 함수가

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad (t\text{는 실수})$$

의 관계식으로 나타낼 때 이 함수를 매개변수로 나타내어진 함수라 하며 t를 매개변수라 한다.

• 미분과 접선의 기울기

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(\alpha, f(\alpha))$ 에서의 접선의 방정식은

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha)(x-\alpha)$$

이다.

• 탄젠트에 대한 삼각함수의 덧셈정리

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$$

풀어보기

1. $\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^2 \end{cases}$ 에서 t를 소거하여 x, y만의 관계식으로 나타내어라.7)

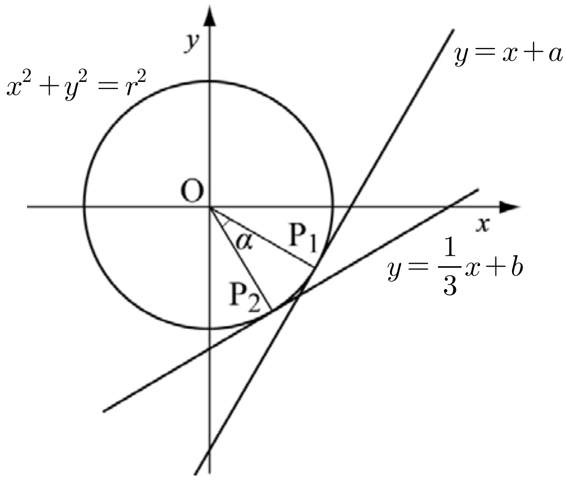
2. 수평면과 θ의 각을 이루는 방향으로 20m/s 의 처음 속도로 던진 공의 t초 후 위치를 $P(x,y)$ 라 할 때

$$\begin{cases} x = 20t\cos\theta \\ y = 20t\sin\theta - 5t^2 \end{cases}$$

으로 나타난다고 한다. 공이 최고 높이에 도달했을 때 속도 벡터 $\vec{v}$ 와 가속도 벡터 $\vec{a}$ 를 각각 구하여라.

7) 양승갑 외 8인. (2002). 미분과적분. (주)금성출판사

3. 두 직선 $y=x+a$, $y=\frac{1}{3}x+b$ 가 원 $x^2+y^2=r^2$ 에 접하는 점을 각각 P_1, P_2 라 하고 $\angle P_1OP_2=\alpha$ 일 때, $\tan\alpha$ 의 값은? (단, $a<0$, $b<0$) [전국연합 2008년 7월]



개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

• 반사와 굴절8)

빛의 파동설과 입자설 모두 광선의 반사에 대해서는 똑같이 예측했다. 그러나 굴절이 광선에 어떤 영향을 미칠지에 대해서는 서로 반대되는 예측을 했다. 실험을 통해 빛은 파동으로 움직인다는 사실이 증명되었다.

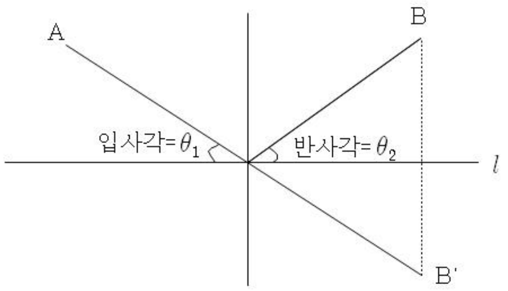
17세기 후반 호이겐스는 빛의 파동설을 발표했다. 호이겐스에 따르면, 전진하는 파장의 앞쪽 가장자리에 있는 각 점이 새로운 파동의 원천이라고 할 수 있으며, 이 '제2의 잔물결'이 새롭게 전진하는 파면이 된다. 이러한 개념으로 인해 파장의 물리학적 사실을 전부 이해하지 않고도 기하학만으로 파동이 어떻게 움직이는지를 계산할 수 있게 되었다.

이러한 시점으로 보면 반사는 매우 이해하기 쉽다. 광파는 거울처럼 반사면을 비출 때와 같은 각도로 튀어나가기 때문이다. 이런 실험은 파동설과 뉴턴의 입자설을 구분하는 데에는 별로 쓸모가 없다. 입자는 당구공이 당구대의 쿠션에서 튕겨나갈 때와 같은 방식으로 반사면에서 튀어나가기 때문이다. 굴절은 훨씬 흥미롭다. 빛이 공기처럼 밀도가 덜 높은 매질에서 물과 같이 밀도가 좀 더 높은 매질로 움직일 때 그 광선은 휘어서 두 매질 사이의 표면과 거의 수직에 가까운, 조금 덜 날카로운 예각을 이룬다. 곧은 막대기를 물속에 반만 담갔을 때 구부러진 것처럼 보이는 이유는 광선이 휘기 때문이다. 파동설은 이러한 현상을 밀도가 높은 매질에서는 빛이 천천히 움직이기 때문이라는 관점에서 설명하지만, 뉴턴의 입자설은 입자들이 밀도가 높은 매질에서 더 빨리 움직이기 때문이라고 설명한다. 이 문제는 계속 해결되지 못한 채 남아 있다가 1850년에 충분한 실험 기술을 갖춘 프랑스의 물리학자 장 푸코가 실제로 차이를 측정했다. 그 결과 광속이 공기 중에서보다 물속에서 더 느리다는 것이 증명되었고, 빛은 파동으로 움직인다는 사실도 확인되었다.

• 페르마의 원리9)

페르마 원리는 두 점 사이를 진행하는 빛은 진행 시간이 가장 짧게 걸리는 경로를 택하여 진행한다는 것이다.

[반사의 법칙] 정반사의 경우 다음 그림과 같이 설명할 수 있다.



8) 존그리빈 엮음, 한 번은 꼭 읽어야 할 과학의 역사1, 에코리브르, 2005
9) 수리논·구술 면접이론과 실제, 부산광역시교육청, 2008

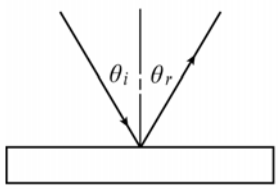
페르마(Fermat)는 빛이 최단거리로 진행한다고 추측하였다. 그는 빛의 성질에서 입사각은 반사각과 같다는 사실을 근거로 하여 이 추측의 타당성을 확인하였다. 점 A를 지난 빛이 직선 l과 같은 거울에 반사되어 B를 지났다고 하자. 빛은 최단거리로 가기 때문에 점 A와 직선 l, 점 B를 지나는 최단거리로 지나갈 것이다. 따라서 최단거리를 구하는 문제는 빛의 경로를 구하는 문제와 일치한다. 이 때, 최단 거리는 $\overline{\mathrm{AB}'}$과 같다.

• **스넬의 법칙**

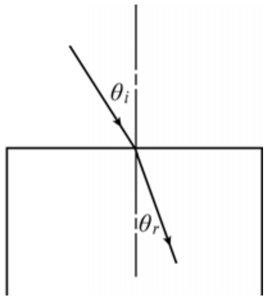
입사각과 굴절각의 관계는 1621년에야 독일의 과학자인 스넬에 의해 처음으로 밝혀졌다. 그가 알아낸 법칙은 다음과 같다. 입사각을 θ_i라 하고 굴절각을 θ_r이라 했을 때, $\sin\theta_i$는 $\sin\theta_r$에 어떤 상수를 곱한 것과 같다.

$$\sin\theta_i = n\sin\theta_r$$

이 식을 '스넬의 법칙' 또는 '굴절의 법칙'이라고 하며, 상수 n을 굴절률이라고 한다. 물의 경우 n 값은 1.33이다.



[빛의 반사]



[빛의 굴절]

예시답안

풀어보기

1. $y=t^2=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^2=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$

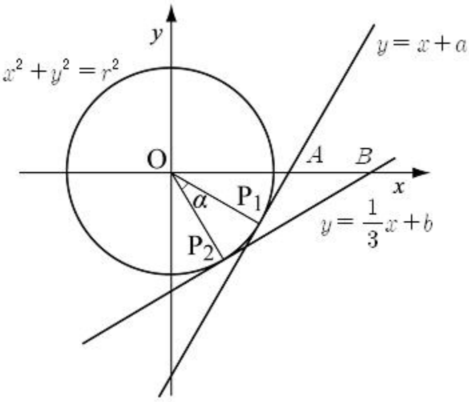
2. $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\dfrac{dy}{dt}\right)=(20\cos\theta,20\sin\theta-10t)$, $\vec{a}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\dfrac{d^2y}{dt^2}\right)=(0,-10)$

$\dfrac{dy}{dt}=0$ 일 때 공이 최고 높이에 도달하므로

$\dfrac{dy}{dt}=20\sin\theta-10t=0$ 에서 $t=2\sin\theta$

따라서 $\left[\vec{v}\right]_{t=2\sin\theta}=(20\cos\theta,0)$, $\left[\vec{a}\right]_{t=2\sin\theta}=(0,-10)$

3.



두 직선 $y=x+a$, $y=\dfrac{1}{3}x+b$ 와 x 축이 만나는 점을 각각 A, B 라 하고

$\angle \mathrm{OAP}_1=\theta_1$ 라 하면 $\tan\theta_1=1$ 이므로 $\theta_1=\dfrac{\pi}{4}$ 이다.

따라서 $\angle \mathrm{AOP}_1=\dfrac{\pi}{4}$ 이다

같은 방법으로 $\angle \mathrm{OBP}_2=\theta_2$, $\tan\theta_2=\dfrac{1}{3}$ 이고 $\overline{\mathrm{BP}_2}=3r$ 이다.

$\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)=3$ 에 의해서 $\therefore \tan\alpha=\dfrac{1}{2}$

다른 풀이 $\alpha=\theta_2-\theta_1$ 을 이용하여 계산한다.

논제 1-1 수평으로 던진 물체는 x 축 방향으로는 등속운동을 y 축 방향으로는 등가속도 운동을 하므로 x, y 의 위치는

$$x=v_0t,\ y=-\frac{1}{2}gt^2+h=-5t^2+10$$

이다. 이 때, t 를 소거하면, 경사면에 부딪히기 전의 물체의 궤적인 포물선

$$y=-\frac{5}{v_0^2}x^2+10$$

을 구할 수 있다. 경사면의 식은 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ 이므로 교점의 x 좌표는

$-\dfrac{5}{v_0^2}x^2+10=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x$ 으로부터 $x_0=\dfrac{-v_0^2+v_0\sqrt{v_0^2+400}}{10\sqrt{2}}$ 이다.

한편, 포물선의 도함수는 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{10}{v_0^2}x$ 이므로,

교점에서 포물선의 접선의 기울기는 다음으로 주어진다.

$$-\frac{10}{v_0^2}\left(\frac{-v_0^2+v_0\sqrt{v_0^2+400}}{10\sqrt{2}}\right)=\frac{1-\frac{1}{v_0}\sqrt{v_0^2+400}}{\sqrt{2}}$$

논제 1-2 아래 그림과 같이 경사면과 수직인 직선이 x축과 만나는 각도를 θ_c, 교점에서 포물선에 접하는 직선이 x축과 만나는 각도를 θ_0라 하면,

$$\tan\theta_c=-\sqrt{2}\ ,\ \tan\theta_0=\frac{1-\frac{1}{v_0}\sqrt{v_0^2+400}}{\sqrt{2}}$$

이다.

입사각을 θ라 하면, $\tan\theta=\tan(\theta_0-\theta_c)=\dfrac{\tan\theta_0-\tan\theta_c}{1+\tan\theta_0\tan\theta_c}$ 이므로,

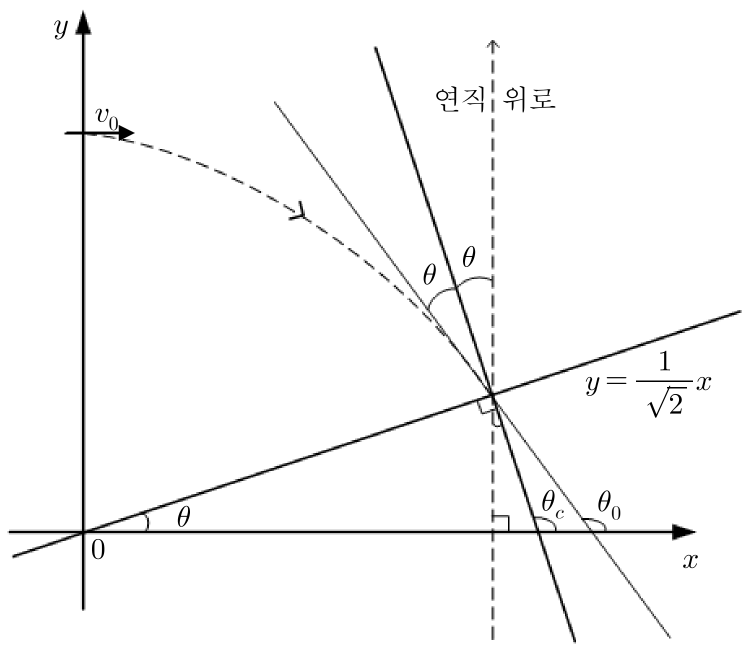
$$\tan\theta=\frac{3v_0-\sqrt{v_0^2+400}}{\sqrt{2}\sqrt{v_0^2+400}}$$

이다. 충돌 후 수직으로 움직이려면, 아래 그림과 같이 $\theta=\theta_c-\dfrac{\pi}{2}$일 때이므로,

$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 이다. 따라서

$$\frac{3v_0-\sqrt{v_0^2+400}}{\sqrt{2}\sqrt{v_0^2+400}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

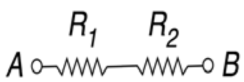
에서 $v_0=8\sqrt{5}$ 이다.



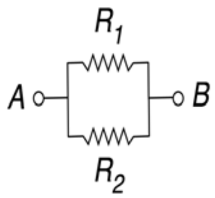
21 인하대학교 수시2-1(2)

제 시 문

(가) 두 개의 저항을 [그림1]과 같이 연결하는 방법을 직렬연결이라 하고, [그림2]와 같이 연결하는 방법을 병렬연결이라 한다. 크기가 R_1 과 R_2 인 두 개의 저항을 직렬연결할 때, 합성저항 R은 각 저항의 합과 같다($R=R_1+R_2$). 그리고 크기가 R_1과 R_2인 두 개의 저항을 병렬연결할 때, 합성저항의 역수는 각 저항의 역수의 합과 같다$\left(\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$.



[그림1]



[그림2]

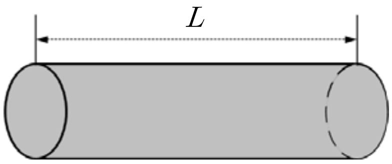
(나) 두 저항의 연결에 대한 흥미로운 예제를 생각해 보자. 예를 들어, 두 개의 저항 R_1과 R_2의 합이 상수 R일 때, 합성저항의 변화를 생각해 보자. 두 저항이 직렬연결인 경우에는 합성저항이 R이 되어 두 저항 각각의 값에 관계없이 일정한 반면, 병렬연결인 경우의 합성저항은 $\frac{R_1(R-R_1)}{R}$ 이 되어, R_1의 함수로 얻어진다. 병렬연결의 합성저항은 두 저항이 같을 때, $\frac{R}{4}$에서 최대가 되며 그 외의 값에서는 감소한다.

(다) 저항에 흐르는 전류의 세기가 약하더라도 오랫동안 흐르면, 강한 전류를 잠시 동안 흘릴 때 발생하는 열량과 같은 열량을 얻을 수 있다. 이와 같이 세기가 다른 전류에 의하여 발생하는 열량을 비교할 때에는 1초 동안 공급되는 전기에너지를 비교하면 편리하다. 전원에 의하여 1초 동안 공급되는 전기에너지를 전력이라고 한다. 전압 $V(\mathrm{V})$ 가 걸린 도선에 $I(\mathrm{A})$ 의 전류가 시간 $t(\mathrm{s})$ 동안 흘렀다면, 전기에너지는 $W=VIt$ 이므로 전력 P는

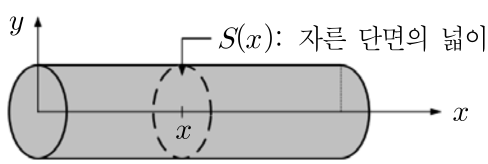
$$P=VI=I^2R=\frac{V^2}{R}$$

이 된다.

(라) 도선의 저항은 도선의 길이가 길수록 커지며 단면적이 클수록 작아진다. 이것은 도선의 길이가 길수록 자유전자와 금속 원자의 충돌횟수가 많아져서 저항이 커지고, 도선의 단면이 클수록 단면을 통과하는 자유전자의 수가 많아져서 저항이 작아진다. 따라서 [그림3]과 같은 도선의 저항 R은 도선의 길이L에 비례하고 단면적 S에 반비례한다. 비례상수를 ρ라 하면 $R=\rho\dfrac{L}{S}$이다. 여기서 ρ는 물질의 종류에 따라 정해지는 상수로서 물질의 비저항이라고 한다.



[그림3]



[그림4]

그러나 단면적이 도선의 위치에 따라 일정하지 않은 경우, 즉 [그림4]와 같이 도선에 좌표축을 세우고 원점에서 위치 x에서 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이가 x의 함수 $S(x)$로 주어지는 경우 도선의 저항은 다음과 같이 적분으로 주어진다.

$$R=\rho\int_0^L \frac{1}{S(x)}\,dx$$

(마) 타원의 단축 및 장축 길이가 각각 $2a, 2b$일 때, 타원의 면적S는 πab이다. 장축과 단축이 같은 경우에는 원이 된다.

[1] 제시문에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

길이 L인 도선으로 만들어진 저항이 있다. 도선의 비저항은 ρ이다. 도선의 단면은 타원이며, 타원의 단축 및 장축의 길이는 도선의 위치에 따라 일정하게 변한다. 도선 시작 부분 단면의 단축 길이는 $2a$이며, 장축 길이는 $2b$이다. 도선 끝 부분 단면의 단축 길이는 $2c$이며, 장축 길이는 $2d$이다. 단, L=100 mm, $\rho=\pi\ \Omega$mm, a=1 mm, b=2 mm, c=3 mm, d=3 mm이다.

1-1. 이 도선 전체 길이에 대한 총 저항(Ω)을 구하시오. [10점]

1-2. 이 도선 전체 길이를 둘로 나누어 2개의 저항을 만든 뒤, 전압이 1(V) 인 건전지와 병렬로 연결할 때, 총 소비전력이 최소가 되기 위한 짧은 도선의 길이(mm)를 구하시오. [15점]

제시문 분석

물리와 수학의 혼합 형태로 단면적이 타원인 직선도선의 저항을 둘로 나누어 병렬로 연결된 회로의 총 소비전력이 최소조건을 다루었다

- 제시문 (가)에서는 여러 개의 저항들이 직렬로 연결된 경우와 병렬로 연결된 경우 각각의 합성저항을 설명하였다.
- 제시문 (나)에서는 두 저항의 합은 일정하나 각각의 저항은 다를 수 있는 두 저항의 병렬연결의 합성저항의 변화를 살펴보았으며, 두 저항이 동일한 경우 합성저항은 최대가 됨을 설명하였다.
- 제시문 (다)에서는 저항에 전류가 흐르는 경우 소모하는 단위 시간 당 전기에너지인 전력은 저항 양쪽 끝 사이의 전압과 저항에 흐르는 전류의 곱으로 주어지며 옴의 법칙을 적용하면 저항에 반비례함을 설명하였다.
- 제시문 (라)에서는 도선으로 만들어진 저항의 저항값이 도선의 길이에 비례하며 도선의 단면적에 반비례함을 설명하였으며, 그 비례상수는 비저항이라는 도선의 성질임을 설명하였다. 특히, 도선의 단면적이 도선의 위치에 따라 달라지는 경우 적분의 구분구적법을 이용하여 도선의 총 저항을 적분식으로 표현하는 방법을 설명하였다.
- 제시문 (마)에서는 장축 및 단축 길이가 주어진 타원의 면적을 설명하였다.

논제 분석

- **제시문 (마)에서 주어진 타원의 면적 공식을 이용하여 함수를 구하고, 구한 함수에 대해 제시문 (라)에서 설명한 적분을 계산할 수 있는가?**

단축 및 장축 반지름이 위치에 따라 일정하게 변한다는 사실을 이용하여 $S(x)=\pi a(x)b(x)$ 로 표시하고 초기조건을 이용하여 $a(x), b(x)$ 를 구한 다음 (라)의 적분공식에 대입하여 계산한다.

- **제시문 [가], [나], [다]의 내용을 이용하여 물리적 상황에 맞는 방정식을 만들고 방정식의 근을 구할 수 있는가?**

총 소비전력이 최소가 되기 위해서는 제시문 (다)에 의해 두 저항의 합성저항이 최대가 되어야 하고, 또한 제시문 (나)에 의해 두 저항이 동일하게 본래의 저항의 $\frac{1}{2}$ 일 될 때이다. 이 결과를 이용하여 도선을 둘로 나눈 후 짧은 길이를 y 라 두고 짧은 도선의 총 저항이 도선 전체의 총 저항값의 $\frac{1}{2}$ 이 되는 y 의 값을 구하면 된다.

배경지식 쌓기

- **부분분수**

  · $\dfrac{1}{AB}=\dfrac{1}{B-A}\left(\dfrac{1}{A}-\dfrac{1}{B}\right)$

- **부정적분**

  · $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C$ (C는 적분상수)

  · $\displaystyle\int \frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$ (C는 적분상수)

  · $\displaystyle\int \frac{1}{x+a}dx=\ln|x+a|+C$ (C는 적분상수, a는 임의의 실수)

풀어보기

1. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}dx$ 의 값을 구하여라.

2. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 (x,y) 에서의 접선의 기울기가 $\dfrac{1}{x(x+1)}$ 이고, 곡선 $y=f(x)$ 가 점 $(1,-\ln 2)$ 를 지날 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{99} f(k)$ 의 값은? (단, $x>0$)[10]

10) 수리영역 미분과 적분. 파사쥬, 2002

개요 짜기

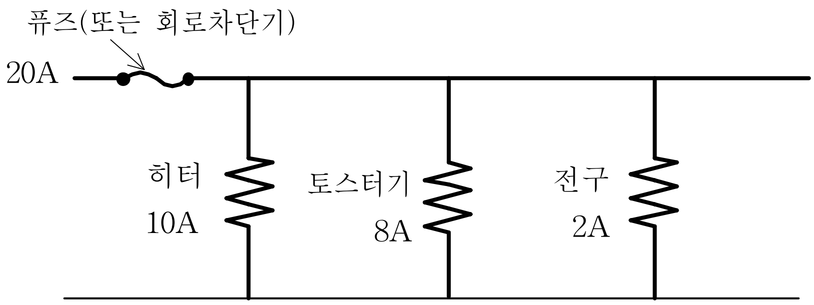
답안 작성

읽기 자료

• **병렬회로와 과부하**[11]

전기는 두 가닥의 전선으로 가정에 공급된다. 이 선들은 저항이 아주 작으며 벽의 콘센트에 연결되어 있다. 발전소의 발전기에 의해 $220V$ 정도의 전압이 이 두 선에 걸린다. 플러그를 이용하여 이 두 선에 병렬로 연결되는 전기 제품이나 장치에도 이 전압이 걸린다. 이 선에 전기기구를 더 많이 연결할수록 전류가 흐를 수 있는 더 많은 통로가 생긴다. 통로가 더 많아지면 어떻게 되는가? 그 답은 회로의 전체저항이 작아진다는 것이다. 따라서 전선으로 더 큰 전류가 흐른다. 규격 이상의 전류가 전선에 흐르는 것을 과부하라고 한다. 그러면 전선의 피복을 녹일 정도로 과열되며 불이 나게 된다.

다음의 회로를 살펴보면 어떻게 과부하가 되는가를 알 수 있다. 전선에는 $8A$ 를 쓰는 토스터기와 $10A$ 를 쓰는 전기난로, 그리고 $2A$ 를 쓰는 전구가 연결되어 있다. 토스터기만 작동하고 있을 때 전체 전류는 $8A$ 이다. 여기에 전기난로를 더 연결하면 전체 전류는 $18A$ 로 늘어난다. 전구까지 켜면 전선에 흐르는 전류는 $20A$ 가 된다. 전기 기구를 더 연결할수록 전류는 자꾸 증가한다.



<가정용 전원 공급선에 전기 제품이 연결된 회로도>

회로에 과부하가 걸리는 것을 막으려고 퓨즈를 전원 공급선에 직렬로 연결한다. 이렇게 하면 전체 회로 전류는 반드시 퓨즈를 통과하게 된다. 만일 퓨즈가 $20A$ 짜리라면 $20A$ 까지는 통과시키는데 그 이상은 통과시키지 못한다. 전류가 $20A$ 가 넘으면 퓨즈가 녹아버려서 회로가 끊어지고 만다. 타 버린 퓨즈를 갈아 끼우기 전에 과부하의 원인을 알아내서 제거해야 한다. 가끔 전선을 싸고 있는 피복이 벗겨져서 전선끼리 직접 닿는 경우가 있다. 이렇게 되면 회로의 길이가 줄어드는 효과가 나타나는데 이것을 합선이라고 한다. 합선이 되면 위험할 정도로 큰 전류가 흐르는데, 그 이유는 전류가 회로에 있는 저항을 통과하지 않고 직접 합선된 부분으로 흘러버리기 때문이다.

11) 공역 공창식 외, 알기 쉬운 물리학 강의, 청범출판사, 1997

자석이나 바이메탈로 스위치를 열게 되어 있는 '회로 차단기'로 회로를 보호할 수도 있다. 전력 회사에서는 발전기로 항상 돌아오는 전기의 통로인 전선을 보호하기 위해 회로 차단기를 사용한다. 현대식 건물에서는 퓨즈 대신 갈아 끼울 필요가 없는 회로 차단기를 쓴다. 문제를 해결하고 난 후 스위치를 닫기만 하면 된다.

예시답안

풀어보기

1. $\int_1^3 \frac{1}{x(x+1)}dx = \int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx = [\ln x - \ln(x+1)]_1^3 = \ln\frac{3}{2}$

2. $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ 이므로

$f(x) = \int \frac{1}{x(x+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \ln x - \ln(x+1) + C$

$f(1) = -\ln 2$ 에서 $C=0$ 이므로 $f(x) = \ln x - \ln(x+1)$

그러므로 $\sum_{k=1}^{99} f(k) = \sum_{k=1}^{99}\{\ln k - \ln(k+1)\} = \ln 1 - \ln 100 = -2\ln 10$

논제 1-1 도선 전체의 총 저항을 구하기 위해서는 도선의 단면적이 위치에 따라 다르기 때문에 다음의 적분값을 구해야 한다.

$$R = \rho\int_{x=0}^{x=L} \frac{1}{S(x)}dx,$$

여기서 $S(x)$ 는 도선의 시작 부분으로부터 x만큼 떨어진 위치에서의 단면의 면적이며, 단면이 타원이기 때문에 타원의 단축 길이를 $2a(x)$, 장축 길이를 $2b(x)$ 이라 하면 제시문 (마)에서 주어진 식에 따라 다음과 같다.

$$S(x) = \pi a(x)b(x).$$

단축 및 장축 반지름이 위치에 일정하게 변한다는 사실과 초기조건으로부터 다음을 구할 수 있다.

$$a(x) = \frac{c-a}{L}x + a$$
$$b(x) = \frac{d-b}{L}x + b$$

즉, 도선 전체의 총 저항 R 은

$$R=\int_{x=0}^{x=100}\frac{dx}{\left(\frac{3-1}{100}x+1\right)\left(\frac{3-2}{100}x+2\right)}$$

으로 주어진다. 적분값을 구하기 위해서는 적분함수를 부분분수로 나타내는 것이 편리할 것이다. 즉,

$$R=\int_{x=0}^{x=100}\frac{dx}{(0.02x+1)(0.01x+2)}$$

$$=\int_{0}^{100}\left(\frac{2/3}{0.02x+1}-\frac{1/3}{0.01x+2}\right)dx$$

$$=\left\{\frac{100}{3}\ln(0.02x+1)-\frac{100}{3}\ln(0.01x+2)\right\}\Bigg|_{0}^{100}$$

$$=\frac{100}{3}\ln\frac{0.02x+1}{0.01x+2}\Bigg|_{0}^{100}=\frac{100}{3}\left(\ln\frac{3}{3}-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{100}{3}\ln2$$

또는,

$$R=\int_{x=0}^{x=100}\frac{dx}{\left(\frac{x}{50}+1\right)\left(\frac{x}{100}+2\right)}$$

$$=\int_{x=0}^{x=100}\frac{5000dx}{(x+50)(x+200)}$$

$$=\frac{5000}{150}\int_{0}^{100}\left(\frac{1}{x+50}-\frac{1}{x+200}\right)dx$$

$$=\frac{100}{3}\{\ln(x+50)-\ln(x+200)\}\Big|_{0}^{100}=\frac{100}{3}\ln\frac{x+50}{x+200}\Bigg|_{0}^{100}$$

$$=\frac{100}{3}\left(\ln\frac{150}{300}-\ln\frac{50}{200}\right)=\frac{100}{3}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{4}\right)=\frac{100}{3}\ln2$$

논제 1-2 도선 전체 길이를 둘로 나누어 구한 두 저항에 의한 총 소비전력이 최소가 되기 위해서는 두 저항의 합성저항이 최대가 되어야 한다. 제시문 (나)에 의하면, 두 저항이 동일하게 본래의 저항의 $\frac{1}{2}$이 될 때, 두 저항의 병렬연결의 합성저항이 최대가 되게 된다. 이 결과를 이용하여, 도선을 둘로 나눈 후, 짧은 길이를 y라 할 때, 짧은 도선의 총 저항이 도선 전체의 총 저항 값의 $\frac{1}{2}$이 되는 y의 값을 구하면 된다. 즉, 식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\int_{x=0}^{x=y} \frac{dx}{\left(\frac{x}{50}+1\right)\left(\frac{x}{100}+2\right)} = \frac{1}{2}\frac{100}{3}\ln 2$$

위 식을 풀면 다음과 같다.

$$\int_{x=0}^{x=y} \frac{dx}{\left(\frac{x}{50}+1\right)\left(\frac{x}{100}+2\right)} = \frac{1}{2}\frac{100}{3}\ln 2$$

$$\frac{100}{3}\ln\frac{x+50}{x+200}\bigg|_0^y = \frac{1}{2}\frac{100}{3}\ln 2$$

$$\ln\frac{y+50}{y+200} - \ln\frac{50}{200} = \frac{1}{2}\ln 2$$

$$\frac{4(y+50)}{y+200} = \sqrt{2},\ 4(y+50) = \sqrt{2}\,(y+200)$$

$$y = \frac{200(\sqrt{2}-1)}{4-\sqrt{2}} = \frac{100(3\sqrt{2}-2)}{7} \approx 32,$$

다른 도선의 길이는 약 100-32=68mm이므로, 답은 $\frac{100(3\sqrt{2}-2)}{7}$mm(약 32mm)이다.

22 인하대학교 수시2-2(1)

제 시 문

(가) 야구 선수가 방망이로 야구공을 치는 경우 방망이와 공 사이에는 다양한 물리 현상이 일어난다. 예를 들면, 똑같은 야구공인데도 날아오는 속도가 빠를수록 방망이에 미치는 충격이 더 크다. 또 같은 속도로 날아오는 야구공과 탁구공을 비교하면 질량이 큰 야구공이 주는 충격이 더 크다. 이와 같이 운동하는 물체가 일으키는 효과는 그 물체의 질량 m과 속도 v로 나타낼 수 있다. 물체의 질량과 속도를 곱한 값을 그 물체의 운동량(p)이라 하고

$$p=mv$$

로 나타낸다. 운동량은 속도와 같은 방향을 가지는 물리량이며 단위는 kg・m/sec를 사용한다.

(나) 일정한 속도 v_0로 운동하고 있는 질량 m인 물체에 짧은 시간 간격 Δt 동안 일정한 힘 F가 작용하여 속도가 v로 되었다고 하자. 그러면 힘이 작용하는 Δt 동안 물체에 생긴 가속도는 $a=\dfrac{v-v_0}{\Delta t}=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ 이다. 따라서 뉴턴의 운동 법칙에 의해

$$ma=m\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{mv-mv_0}{\Delta t}=F \quad \cdots\cdots\cdots \text{(A)}$$

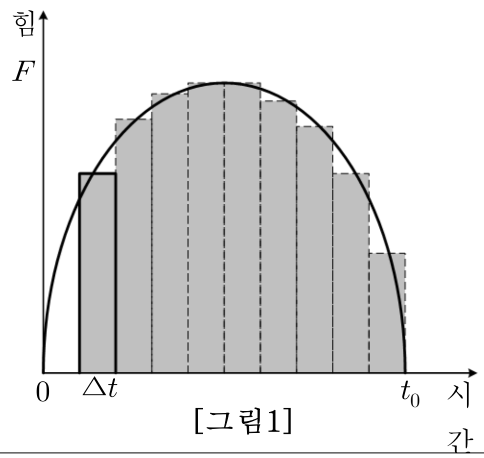
가 되며, 이 식은 다시 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F\Delta t=mv-mv_0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{(B)}$$

여기서 좌변 $F\Delta t$는 물체에 작용한 힘과 그 힘이 작용한 시간의 곱이며 이를 충격량이라고 하고 F를 충격력이라고 한다. 그리고 우변은 운동량의 변화를 나타내므로 식 (B)는 물체에 주어진 충격량은 물체에 일어난 운동량의 변화와 같다는 것을 말해 준다. 충격량은 운동량과 마찬가지로 크기와 방향을 가진 물리량이며 방향은 힘의 방향과 같다. 충격력의 단위는 뉴턴(N)을 사용하고 충격량의 단위는 N・sec= kg・m/sec를 사용한다.

(다) 물체에 가하는 힘의 크기가 시간의 함수 $F(t)$로 주어진 경우에는 적분을 이용하여 충격량을 구한다. [그림1]과 같이 시간을 짧은 구간 Δt로 나누고 각 구간에 상수의 힘이 작용한다고 가정한다. 그러면 작은 직사각형의 넓이가 짧은 시간 Δt 동안의 충격량을 근사적으로 나타내고 이들 작은 직사각형 넓이의 합에 대한 극한, 즉 곡선 아랫부분의 면적이 시간 t_0까지 물체에 가한 총 충격량이

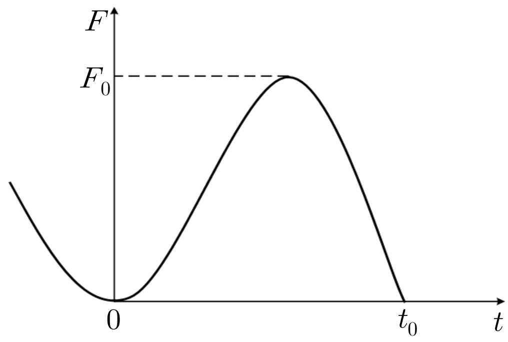
된다. 따라서 이 경우에 0 에서 t_0 초까지 물체에 가한 충격량은 $\int_0^{t_0} F(t)\,dt$ 가 된다. 그리고 충격량을 시간으로 나눈값 $\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} F(t)\,dt$ 를 평균충격력이라고 한다.



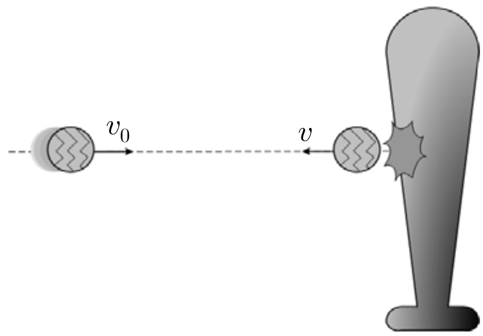
[그림1]

[1] 제시문에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

어느 야구 경기에서 투수가 던진 공을 타자가 방망이로 친다고 하자. 이 때 방망이가 공에 접촉되어 있는 시간을 t_0 초(sec)라 하고, 0 에서 t_0 초 동안에 방망이가 공에 가한 힘이 아래 [그림 2]와 같이 극댓값이 F_0 인 3차 함수 $F(t) = -k\,t^2(t-t_0)$ 로 주어진다고 하자. 여기에서 k 와 F_0 는 양의 실수인 상수이고 힘의 단위는 뉴턴(N) 이다.



[그림 2]



[그림 3]

1-1. 상수 k 와 공이 받은 충격량 (0 에서 t_0 초 동안)을 t_0 와 F_0 를 이용하여 표현하시오. [10점]

1-2. [그림 3]과 같이 질량이 m 인 야구공이 지면과 수평으로 날아와 방망이에 맞고 날아온 방향과 정반대 방향으로 날아갔다고 하자. 방망이에 닿는 순간의 공의 속도를 v_0 라 하고 방망이를 떠나는 순간의 공의 속도를 v 라 할 때, 제시문 [나]의 내용을 참고하여 속도 v 를 구하시오. 단, 공기의 저항과 다른 외부의 영향은 없다고 가정한다. [5점]

1-3. 야구공을 던지는 방법을 바꾸었더니 공이 방망이에 접촉한 시간이 $\frac{1}{10}$ 초였으며 그 시간 동안에 공이 방망이에 가한 힘은 $G(t) = A\sin^2(10\pi t)$ $\left(0 \le t \le \frac{1}{10}\right)$로 주어졌다고 한다. 이때 평균충격력이 (1)번 경우의 평균충격력과 같았다면 A는 얼마인가? F_0를 이용하여 표현하시오. [10점]

제시문 분석

- 제시문 (가)에서는 야구공을 소재로 해서 운동량을 정의하였다.
- 제시문 (나)에서는 충격량과 충격력을 소개하고 뉴턴의 운동법칙을 이용하면 물체에 주어진 충격량이 물체에 일어난 운동량의 변화와 같음을 설명하였다.
- 제시문 (다)에서는 충격력이 시간에 따라 변화하는 함수 $F(t)$로 주어졌을 때, 시간 0초에서 t_0초까지 물체에 가한 총 충격량은 $\int_0^{t_0} F(t)\,dt$이 됨을 구분구적법을 이용하여 설명하고 평균충격력을 언급하였다.

논제 분석

- **충격력 F이 미정계수가 포함된 시간 t에 대한 3차 함수에 극댓값이 주어졌을 때 미분을 이용하여 미정계수를 구할 수 있는가? 3차 함수를 적분하여 충격량을 구할 수 있는가?**

충격력이 미정계수가 포함된 3차함수에 극댓값이 주어졌을 때 미분을 이용하여 이 미정계수를 구하여 3차함수를 완성하는 문제와 다시 이 3차함수를 적분하여 충격량을 구한다.

- **운동량의 변화를 수식으로 표현하고 제시문 (나)에서 필요한 내용을 선별하여 식을 세우고 충격 후의 속도를 구할 수 있는가?**

제시문 (나)에서 설명한, 운동량의 변화가 충격량과 같다는 사실을 이용하여 초기속도와 [논제1]에서 구한 충격량을 이용하여 충격 후의 속도를 구한다.

- **충격력이 미정계수가 포함된 사인 함수의 제곱으로 주어졌을 때, 이 함수의 정적분하여 충격량을 구할 수 있는가?**

미정계수가 포함된 사인 함수의 제곱을 정적분한 값을 구하고 이 값과 (1)에서 구한 결과를 이용하여 이 미정계수를 구한다.

배경지식 쌓기

- 다항함수의 미분과 적분

㉠ $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$

㉡ $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$

- 삼각함수의 부정적분

㉠ $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

㉡ $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

㉢ $\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$

㉣ $\int \mathrm{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + C$

㉤ $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$

㉥ $\int \mathrm{cosec}\, x \cot x\, dx = -\mathrm{cosec}\, x + C$

풀어보기

1. 다음 조건을 만족하는 3차 함수 $f(x)$ 를 구하시오.

Ⅰ. $x=0$에서 극솟값 -2를 갖는다.
Ⅱ. $y=f(x)$ 위의 점 (1, 2)에서의 접선의 방정식은 $y=9x-7$ 이다.

2. 다음 부정적분을 구하시오.

$$\int \cos^2 x\, dx$$

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

• 뉴턴의 운동법칙

만유인력의 법칙 및 미적분학과 함께, 뉴턴의 운동법칙은 처음으로 회전체의 운동, 유체 안에서의 운동, 발사체의 운동, 빗면에서의 운동, 진자의 운동, 조석, 달과 천체의 궤도와 같은 물리학적 현상들에 대한 광범위한 설명을 가능하게 해주었다. 또한 뉴턴이 제2법칙과 제3법칙의 따름정리로 유도한 운동량 보존법칙은 최초의 보존법칙이었다. 뉴턴의 법칙들은 200년이 넘게 실험과 관측을 통해 입증되어 왔다. 이 법칙들은 인류의 척도(10^{-6}~10^{4}m의 길이에서 0~10^{8}m/s의 속도를 갖는 척도)에서 일어나는 운동학을, 관측 결과보다 더욱 정확하게 설명해 주고 있다. 경험적으로, 뉴턴의 법칙은 광속의 1/3 정도의 속도 이내에서는 그 오차를 무시할 수 있는 정도로 정확하다.

제1법칙은 관성의 법칙이나 갈릴레이의 법칙으로도 불린다.

- 모든 물체의 질량중심은 그 상태를 바꿀만한 힘이 강제로 주어지지 않는 한, 정지 상태를 유지하거나 일정한 운동을 하여 진행 방향으로 계속 움직이는 상태를 유지하려는 성질이 있다.
- 물체의 질량중심은 외부력이 작용하지 않는 한, 정지해 있거나, 진행 방향을 따라 일정한 속도 v로 계속 움직이려는 성질이 있다.

미적분학의 표현을 빌리자면, 이것은 $\frac{d}{dt}v=0$와 같이 표현할 수 있다.

제2법칙은 동역학의 기본법칙이나 힘과 가속도의 법칙으로 불린다.

- 운동량의 변화율은 물체에 작용하는 알짜힘에 비례하고, 알짜힘의 방향을 따른다.
- 일정한 질량을 가진 물체의 가속도는 알짜힘에 비례한다.

이 표현들을 수학적으로 $F=m\frac{dv}{dt}=ma$와 같이 표현할 수 있다.

여기서 F는 물체에 작용하는 힘, m 은 물체의 질량, a는 물체의 가속도, v는 물체의 속도이다. 이 방정식은 물체에 더 큰 알짜힘이 가해질수록, 운동량의 변화는 커진다는 것을 나타내 주고 있다.

뉴턴의 제3법칙과 함께, 제2법칙은 운동량 보존법칙을 포함하고 있다.

제3법칙은 작용과 반작용의 법칙이다.

- 물체 A가 다른 물체 B에 힘을 가하면, 물체 B는 물체 A에 크기는 같고 방향은 반대인 힘을 동시에 작용한다.
- 운동량은 보존된다.

″물체 A에 의한, 물체 B에 대한 힘이 존재할 때, 물체 B에 의한, 물체 A의 역힘이 존재한다.″는 설명이다. 예를 들어, 행성만 항성에 이끌리는 것이 아니라 항성 또한 행성에 이끌리고 있다.

예시답안

풀어보기

1. $f(x)=ax^3+bx^2+cx-2(a\neq 0)$ 로 두면 조건 Ⅰ에 의해 $f(0)=-2,\ f'(0)=0$ 이다. 따라서 $d=-2$ 이고 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$ 이므로 $c=0$ 이다.

조건 Ⅱ에 의해 $f(1)=2, f'(1)=9$ 이므로 $a+b=4,\ 3a+2b=9$ 이고 두 식을 연립하여 풀면 $a=1,\ b=3$이다. 그러므로 $f(x)=x^3+3x^2-2$ 이다.

2. $\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{\cos 2x+1}{2}dx = \frac{\sin 2x}{4}+\frac{1}{2}x+C$

논제 1-1 $F(t)=-kt^2(t-t_0)$를 시각 t로 미분하여 0으로 놓으면

$$\frac{d}{dt}F(t)=-2kt(t-t_0)-kt^2=-kt(3t-2t_0)=0$$

이다. $t=\frac{2}{3}t_0$의 좌우에서 $\frac{d}{dt}F(t)$의 값이 양에서 음으로 바뀌므로 $t=\frac{2}{3}t_0$에서 극댓값 F_0를 갖는다. 따라서 $F_0=F\left(\frac{2}{3}t_0\right)=-k\left(\frac{2}{3}t_0\right)^2\left(\frac{2}{3}t_0-t_0\right)=\frac{4}{27}kt_0^3$으로부터 $k=\frac{27}{4t_0^3}F_0$ 이다. 그리고

$$F(t)=-\frac{27F_0}{4t_0^3}t^2(t-t_0)$$

이다. 힘의 크기가 일정하지 않고 시각 t의 함수이므로 제시문 (다)에 의해서 총 충격량은

$$\int_0^{t_0}F(t)\,dt=-\frac{27F_0}{4t_0^3}\int_0^{t_0}(t^3-t_0t^2)\,dt=\left(-\frac{27F_0}{4t_0^3}\right)\left(\frac{1}{4}t_0^4-\frac{1}{3}t_0^4\right)=\frac{9}{16}F_0t_0$$

이다.

논제 1-2 제시문 (나)에 의해 충격량은 운동량의 변화와 같으므로 다음이 성립한다.

$$\frac{9}{16}F_0t_0=m(v-v_0)=mv-mv_0$$

따라서 날아가는 속도 v는 $v=v_0+\frac{9}{16m}F_0t_0$ 이다.

논제 1-3 [1-1]에서 평균충격력은 $\frac{1}{t_0}\int_0^{t_0} F(t)\,dt = \frac{9}{16}F_0$ 가 된다.

공을 던지는 방법을 바꾸어서 힘이 $G(t) = A\sin^2(10\pi t)$, $(0 \le t \le \frac{1}{10})$ 으로 주어졌을 때의 평균충격력은

$$10\int_0^{\frac{1}{10}} A\sin^2(10\pi t)\,dt = 10A\int_0^{\frac{1}{10}} \frac{1-\cos 20\pi t}{2}\,dt = \frac{A}{2}$$ 가 된다.

따라서 $\frac{A}{2} = \frac{9}{16}F_0$ 로부터 $A = \frac{9}{8}F_0$ 가 된다.

23 인하대학교 수시2-2(2)

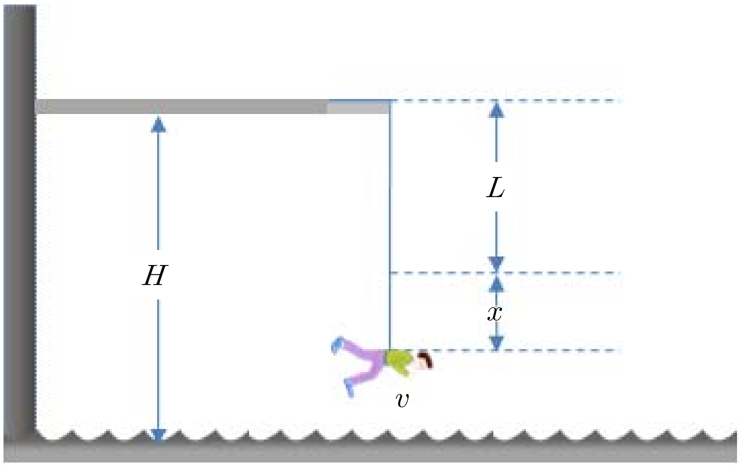
제 시 문

(가) 질량 m인 물체가 기준면으로부터 높이 h인 곳에 있을 때 mgh 만큼의 중력에 의한 위치에너지를 가진다. 여기서 g는 중력가속도이다. 이와 유사하게 탄성력에 의한 위치에너지도 존재한다. 변형된 용수철에 매달려 있는 물체는 원래의 위치로 되돌아가려는 탄성력을 받는다. 용수철이 변형되기 전의 길이를 기준으로 길이 x만큼 변형되면 '훅의 법칙'에 의해 x에 비례하는 탄성력 $F=-kx$가 생긴다. 여기서 k를 '용수철 상수' 혹은 '탄성 계수'라 한다. 이 용수철에 외부에서 힘을 가하여 원래의 길이에서 x만큼 변형시키는 데 필요한 일은 $\frac{1}{2}kx^2$이다. 즉 원래의 길이에서 x만큼 변형된 용수철은 $\frac{1}{2}kx^2$ 만큼의 에너지를 갖게 되고 이 에너지를 탄성력에 의한 위치에너지라고 한다.

(나) 질량이 m인 물체가 속력 v로 운동하고 있을 때 이 물체는 $\frac{1}{2}mv^2$의 운동에너지를 갖게 된다. 이 운동에너지와 제시문 (가)에서 설명한 위치에너지의 합을 역학적 에너지라 한다. 물체가 운동을 할 때 위치에너지가 운동에너지로 바뀌거나 반대로 운동에너지가 위치에너지로 바뀔 수 있다. 마찰이나 공기의 저항이 없이 중력이나 탄성력만 물체에 작용하는 경우 운동에너지와 위치에너지의 합인 역학적 에너지는 항상 일정하게 보존된다. 이를 역학적 에너지 보존의 법칙이라고 한다.

(다) 제시문 (가)와 (나)를 바탕으로 번지 점프를 하는 사람의 운동을 분석해 보자. [그림1]과 같이 수면으로부터 높이가 H인 점프대 위에서 번지 점프를 하는 사람이 있다. 몸에 연결된 탄성이 있는 줄은 변형되기 전의 길이가 L이고 '훅의 법칙'을 따르며, 줄의 질량은 무시한다. 정지 상태인 사람이 점프대에서 연직 방향으로 낙하하고 이때 공기 저항은 무시한다. 사람의 위치에 따른 역학적 에너지의 변화를 살펴보면, 처음에 점프대 위에서의 역학적 에너지는 정지 상태이기 때문에 위치에너지만 존재한다. 낙하를 시작하여 점프대로부터 거리 L만큼 떨어질 때까지는 줄이 원래 길이보다 늘어나지 않기 때문에 중력에 의해 등가속도의 자유낙하를 하게 된다. 따라서 이 구간에서의 '역학적 에너지=운동에너지+중력에 의한 위치에너지'가 된다. 그 후 더 낙하하여 줄이 원래 길이 L보다 길어지면 이제 아래쪽 방향의 중력 이외에도 줄이 늘어난 길이에 비례하는 탄성력이

위쪽 방향으로 작용하게 된다. 탄성력의 크기가 중력의 크기보다 커지는 순간부터는 낙하속력이 감소하기 시작한다. 이 구간에서의 '역학적 에너지=운동에너지+중력에 의한 위치에너지+탄성력에 의한 위치에너지'로 표현할 수 있다. 마지막으로 속력이 점점 줄어들어 멈추게 되면 이때는 '역학적 에너지=중력에 의한 위치에너지+탄성력에 의한 위치에너지'가 된다. 위의 모든 과정에서 역학적 에너지는, 그 형태는 바뀌지만 크기가 보존되기 때문에 역학적 에너지보존법칙을 이용하면 모든 위치에서 낙하속력을 알아낼 수 있다.



[그림1]

[1] 제시문에 주어진 내용을 바탕으로 다음을 기술하시오.

수면으로부터 높이가 H인 점프대 위에서 질량이 m인 사람이 번지점프를 한다. 몸과 점프대를 연결한 탄성이 있는 줄은 변형되기 전의 길이가 L이고 탄성 계수가 k인 '훅의 법칙'을 따르는 줄로 가정한다. 점프대에서 정지 상태인 사람이 연직 방향으로 낙하하여 처음으로 멈추게 될 때까지의 운동 과정에 대해 아래 물음에 답하시오. 단, 중력가속도의 크기는 g이고 줄의 질량은 무시한다. 그리고 사람은 크기가 없는 점 질량으로, 공기의 저항은 없는 것으로 가정한다.

1-1. 사람이 점프대에서부터의 거리가 L인 위치까지 낙하했을 때의 속력을 구하시오. [5점]

1-2. 낙하를 시작하여 처음으로 멈출 때까지의 전체 과정에서 최대 속력을 구하시오. [10점]

1-3. 수면에 가장 가까운 지점까지 낙하하여 처음으로 멈출 때 줄은 원래 길이에서 얼마나 더 늘어나는가? [10점]

제시문 분석

- 제시문 (가)는 중력에 의한 위치에너지와 탄성력에 의한 위치에너지가 수식으로 어떻게 표현되는지 설명하였다.
- 제시문 (나)는 운동에너지와 위치에너지의 합을 역학적 에너지라 정의하고 역학적 에너지보존법칙을 설명하였다.
- 제시문 (다)는 번지점프를 하는 사람의 낙하 위치에 따라서 역학적 에너지의 형태가 어떻게 변환되는지를 개략적으로 설명하였다.
  - ㉠ 높이 H인 점프대 위에서 역학적 에너지는 위치에너지만 존재
  - ㉡ 점프대로부터 줄의 원래 길이 L만큼 자유낙하할 때 역학적 에너지는 운동에너지+중력에 의한 위치에너지
  - ㉢ 줄이 원래의 길이 L보다 길어져 탄성력의 크기가 중력의 크기보다 커서 낙하 속력이 감소할 때 역학적 에너지는 운동에너지+중력에 의한 위치에너지+탄성력에 의한 위치에너지
  - ㉣ 낙하 속력이 감소하여 멈추게 될 때 역학적 에너지는 중력에 의한 위치에너지+탄성력에 의한 위치에너지

논제 분석

- **탄성력이 작용하기 전에 자유낙하하는 사람의 역학적 에너지를 표현하고 낙하속력을 구할 수 있는가?**

높이 H인 점프대 위에서 역학적 에너지는 위치에너지만 존재하며 거리 L 위치까지 낙하했을 때 역학적 에너지는 운동에너지와 중력에 의한 위치에너지의 합으로 표현하고 이를 역학적 에너지보존법칙에 의해 방정식으로 나타내고 그 해를 구한다.

- **자유낙하에 의해 증가하던 낙하속력이 탄성력에 의해 다시 감소하게 되는 운동 과정에서 속력의 최댓값을 구할 수 있는가?**

줄이 x 만큼 늘어났을 때 역학적 에너지는 운동에너지, 중력에 의한 위치에너지, 탄성력에 의한 위치에너지의 합으로 표현하고 역학적 에너지보존법칙을 이용하여 속력을 위치의 함수로 나타내고 그 최댓값을 구한다.

- **최대로 낙하하여 멈추었을 때의 위치를 구할 수 있는가?**

속력이 0 이 될 때 운동에너지는 0 이므로 역학적 에너지는 중력에 의한 위치에너지와 탄성력에 의한 위치에너지의 합으로 표현하고 역학적 에너지보존법칙에 의해 방정식으로 나타내고 그 해를 구한다.

배경지식 쌓기

- **이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$의 근의 공식**

$ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$의 근은 $x=\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

풀어보기

1. 흐르지 않는 물위에서 배 A의 최대속력은 배 B의 최대속력의 2배이다. 시속 2 km/h로 일정하게 흐르는 강의 상류를 향해 A, B가 같은 지점에서 최대 속력으로 동시에 출발하였다. B가 20km 운항 후 고장이 나서 그 순간부터 B는 강물의 빠르기로 하류를 향해 표류하기 시작하였고, 동시에 A는 B를 구조하기 위해 선회해서 B를 향해 운항하였다. A가 선회 후 1시간 만에 B를 만났다면, 흐르지 않는 물 위에서 배 A, B의 최대 속력(km/h)의 합을 구하시오.(단, A의 선회 시간과 배의 크기는 고려하지 않는다.)

– 2009학년도 7월 전국연합학력평가

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

• 고립된 물리계의 에너지 총량은 항상 보존된다 : 에너지보존법칙


역학적 에너지의 보존은 놀이동산의 롤러코스터에서도 볼 수 있다

에너지란 일을 할 수 있는 능력을 일컫는다. 여기서 일(work)이란 물리적으로 정의된 양으로 어떤 물체에 힘이 작용하여 그 방향으로 물체가 움직였을 때, 그 이동거리와 힘의 곱으로 주어진다. 쉽게 말해 에너지란 힘을 들여 뭔가를 움직일 수 있는 능력을 말한다. 에너지에는 여러 종류가 있다. 운동에너지, 화학에너지, 위치에너지, 열에너지, 소리에너지, 빛에너지, 전기에너지 등. 고립된 계의 에너지는 그 총량이 보존되는 한도 안에서 모든 가능한 형태로 바뀔 수 있다.

갈릴레이가 생각했던 빗면 실험을 떠올려 보자. 빗면 위에 구슬을 가만히 놓아두면 처음에는 이 구슬이 중력에 대한 위치에너지만 가진다. 처음에는 정지해 있으므로 운동에너지는 없다. 이제 구슬이 빗면을 굴러 내려오면 위치에너지는 줄어들고 운동에너지는 그만큼 늘어난다. 만약 구슬이 빗면을 다 내려와 지면에 닿게 되면 구슬의 위치에너지는 없어진다. 대신 구슬은 그만큼의 운동에너지를 가지고 지면을 따라 굴러간다. 즉 구슬의 위치에너지가 운동에너지로 바뀐 것이다. 만약 지면에 마찰이 없으면 구슬은 한없이 굴러갈 것이다. 왜냐하면 고립된 계의 에너지는 보존되기 때문이다.

당연한 것 같은 에너지보존법칙의 원리를 잘 새겨두면 우리의 일상생활을 이해하는 데에도 큰 도움이 된다. 요즘 한창 논란이 되고 있는 전 지구적인 환경문제와 에너지 자원 문제를 생각해 보자. 지구라는 행성이 담고 있는 에너지 자원이 무한하지 않다. 또한 지구의 자연 환경에 절대적인 영향을 미치는 태양은 지구 표면의 1㎠ 당 매분 0.5cal의 열량을 공급한다. 만약 인간을 포함한 지구 생태계가 이 한계를 넘어서는 에너지를 소비하기 시작한다면 언젠가는 지구가 감당하기 어려운 상황에 직면할 것이다. 주어진 한계를 넘어서는, 끝없는 성장이란 불가능하다.

에너지보존법칙을 한마디로 정리하자면 “세상에 공짜는 없다.”는 말로 요약할 수 있다. 에너지는 어디서 느닷없이 생기거나 사라지지 않는다. 만약 전체 에너지를 높이고 싶으면 그 계에 일(work)을 해 주어야만 한다. 이런 면에서 에너지보존법칙은 다른 학문- 예를 들자면, 경제를 이해하는 데에도 쓸 만하다.

예시답안

풀어보기

1. B의 최대 속력을 $v(km/h)$, A의 최대 속력 $2v(km/h)$라 하면 시속 2 km/h로 일정하게 흐르는 강의 상류를 향해 가므로 B는 $(v-2)$의 속력으로 $20km$를, A는 $(2v-2)$의 속력으로 $(20+x)$ km를 운항하였다. 따라서

$$\frac{20}{v-2}=\frac{x+20}{2v-2} \cdots ①$$

B는 강물의 빠르기로 하류를 향해 표류하여 1시간 만에 A를 다시 만났으므로 $2km$를 하류로 떠내려갔으므로 A는 $(2v+2)$의 속력으로 거리 $(x+2)km$를 1시간동안 운항한다. 따라서

$$\frac{x+2}{2v+2}=1 \cdots\cdots ②$$

①, ②를 연립하면 $v=12km/h$이다.

따라서 최대 속력의 합은 $36km/h$이다.

논제 1-1 점프대에서부터의 거리가 L인 위치까지 낙하하는 동안에는 탄성력이 작용하지 않으므로 중력에 의한 위치에너지와 운동에너지만 고려하면 된다. 점프대에서의 역학적 에너지는 위치에너지인 mgH만 있고, 점프대에서부터의 거리가 L인 위치까지 낙하했을 때의 속력을 v_1이라하면 이때의 역학적 에너지는 운동에너지와 위치에너지의 합인 $\frac{1}{2}mv_1^2+mg(H-L)$이다. 역학적 에너지 보존의 법칙에 의해

$mgH=\frac{1}{2}mv_1^2+mg(H-L)$, 따라서 $v_1=\sqrt{2gL}$이다.

논제 1-2 낙하를 시작하여 점프대로부터 L인 위치까지는 중력 mg에 의한 등가속도 운동을 하여 속력이 증가하고 줄이 늘어나기 시작하면 탄성력 $-kx$가 작용하여 (x는 줄이 늘어난 길이) 탄성력의 크기가 중력보다 커지면 속력이 줄어들게 된다. 즉, $kx=mg$일 때 속력이 최대가 된다.

줄이 x만큼 늘어났을 때의 속력을 v라 하면 이때의 총 역학적 에너지는 운동에너지 $\frac{1}{2}mv^2$, 중력에 의한 위치에너지 $mg(H-L-x)$

그리고 탄성력에 의한 위치에너지 $\frac{1}{2}kx^2$의 합이 된다.

따라서 역학적 에너지 보존의 법칙에 의해 $mgH=\frac{1}{2}mv^2+mg(H-L-x)+\frac{1}{2}kx^2$,

$v^2=-\frac{k}{m}x^2+2g(L+x)$.

그러므로 $x=\frac{mg}{k}$일 때 v^2은 최대가 되고 v의 최댓값은 $\sqrt{2gL+\frac{mg^2}{k}}$가 된다.

논제 1-3 수면에 가장 가까운 지점까지 낙하하여 정지했을 때는 운동에너지가 0이 되므로 이때의 총 역학적 에너지는 중력에 의한 위치에너지 $mg(H-L-x)$과 탄성력에 의한 위치에너지 $\frac{1}{2}kx^2$의 합이 된다. 역학적 에너지 보존의 법칙에 의해

$$mgH=mg(H-L-x)+\frac{1}{2}kx^2$$

이다, 이것은 x에 관한 2차 방정식이고 그 해는 $\frac{mg+\sqrt{m^2g^2+2kmgL}}{k}$이다. (여기서 또 다른 해인 $\frac{mg-\sqrt{m^2g^2+2kmgL}}{k}$는 음의 값으로 용수철과 같이 수축 변형이 일어나는 경우이므로 허근이 된다.)

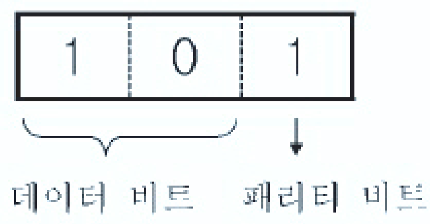
24 중앙대학교 예시

제 시 문

(가) 신호의 형식에는 아날로그와 디지털이 있는데, 아날로그 신호란 신호의 크기가 연속적인 값으로 나타나는 것이고, 디지털 신호란, 신호의 크기가 불연속적인 값으로 나타나는 것이다. 신호 전송의 방식에도 아날로그와 디지털이 있는데, 아날로그 방식은 시간에 따라 연속적으로 신호를 전송하는 방식이고, 디지털 방식은 시간에 따라 불연속적으로 신호를 전송하는 방식이다. 두 전송 방식의 특징적인 차이는 신호왜곡 현상이나 잡음의 영향력 차이이다. 아날로그 방식으로 통신을 하는 경우 통신로 자체의 특성에 따라 신호의 일그러짐이 생기거나 잡음에 의해 파형이 흐트러지게 되면 본래 신호를 복원하기가 매우 어렵다.디지털 통신의 경우에도, 정보를 전송할 때 신호세기 저하, 잡음 등의 이유로 오류가 발생할 수 있다. 그러나, 디지털 통신에서 정보의 기본 단위는 0또는 1의 값을 갖는 비트이므로, 전송중의 잡음 등으로 인한 신호 왜곡 현상이 발생하더라도 신호 유/무 여부의 판단만 가능하면 원래의 정보를 복원할 수 있다.

(나) 디지털 통신에서 정보 전송의 오류 여부를 알아내는 일은 매우 중요하며, 이를 위해 사용되는 방법 중 하나는 전송되는 데이터 비트의 일정한 주기마다 오류검사를 위한 비트 하나를 추가하는 것이다. 이때 추가되는 비트를 패리티(parity)비트라고 한다.

예를 들어, 옆의 그림과 같이 2개의 데이터 비트마다 1개의 패리티 비트를 추가하여 비트 3개를 한 묶음으로 전송하는 경우를 생각해 보자. 전송되기 전 2개일 때 패리티 비트의 값을 0으로, 그렇지 않으면 패리티 비트의 값을 1로 설정한다.



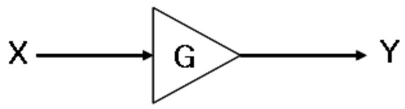
전송된 비트 3개 한 묶음에서 2개의 데이터 비트 중 값이 1인 비트의 수가 짝수인데 패리티 비트의 값이 1이거나, 2개의 데이터 비트 중 값이 1인 비트의 수가 홀수인데 패리티 비트의 값이 0이면, 전송 중 오류가 발생한 것으로 판정한다. 이와 같은 데이터 오류 검사를 패리티 검사라 한다.

(다) 먼 곳에 신호를 보내는 방법으로 전선이나 전파를 사용한다. 그런데, 전선은 저항 때문에 거리가 멀어지면 신호의 세기가 급격히 약해진다. 전파를 이용하는 경우에도 거리가 멀면 퍼지기 때문에 세기가 약해질 뿐만 아니라 장애물이 있으면 신호가 잘 전달되지 않는다. 광섬유를 통하여 신호를 보내면 이러한 단

점이 많이 줄어들지만, 이 경우에도 전송 거리가 아주 멀어지면 신호 세기의 감소로 인한 문제가 발생한다. 이러한 문제를 해결하기 위해 증폭기를 사용하며, 증폭기를 통하여 신호가 증폭되는 비율을 증폭기의 이득(gain)이라고 한다. 즉, 입력 신호의 세기를 X, 출력 신호의 세기를 Y, 이득을 G라고 할 때 다음의 식이 성립한다.

$$Y = GX$$

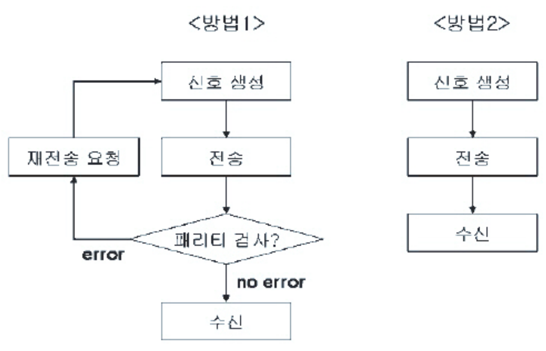
이 식에서 G는 상수가 아니라 입력 신호의 세기 X에 따라 변하는 값이다. 이러한 이득의 상대적인 차이로 인해 신호 증폭에 따른 신호 왜곡 현상이 발생한다. 일반적으로, 증폭기는 아래의 그림으로 나타난다.



(라) 피드백(feedback)은 어떤 원인에 의해 나타난 결과가 다시 그 원인에 영향을 미치는 현상을 말한다. 피드백은 미국의 수학자 Norbert Wiener에 의해 도입되어 특히 제어와 관련된 분야에 널리 쓰이게 되었다. 출력 신호의 일부가 입력 신호에 더해져서 입력을 강화시킬 때 이것을 '양의 피드백'이라 하며, 출력 신호를 증가시키는 역할을 한다. 예를 들어, 마이크를 사용할 때 가끔 '삐이익-'하고 듣기 싫은 소리를 내는 경우가 있는데 이를 하울링(howling)현상이라고 한다. 이것은 스피커에서 나온 소리가 다시 마이크로 들어가서 증폭기를 통해 더욱 크게 증폭되어 스피커로 출력되는 '양의 피드백'으로 인해 생기는 소리이다.

반대로, 출력 신호의 일부가 입력 신호의 역방향으로 작용하여 입력의 효과를 감소시키는 것을 '음의 피드백'이라 한다. 예를 들어, 실내 온도를 일정하게 유지하는 에어컨은 실내 온도가 설정 값보다 높으면 낮추는 방향으로, 낮으면 높이는 방향으로 출력을 제어하므로 '음의 피드백'을 응용한 것이다.

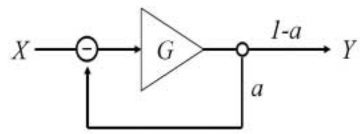
- 제시문 (나)에서 설명한 하나의 3비트 신호를 전송하기 위해 옆의 순서도와 같이 서로 다른 두 가지 방법을 사용하려고 한다. 하나의 비트가 전달되는 과정에서 제시문 (다)와 같은 이유로 오류가 발생할 확률은 $p(0 < p < 1)$이다.



[1-1] <방법1>을 사용하여 신호가 수신되었다고 할 때, 데이터에 오류가 있을 확률을 구하는 과정을 논리적으로 설명하시오.

[1-2] 두 방법에 따라 신호가 수신되었다고 하자. 각 데이터에 오류가 있을 확률을 비교한 후, p값에 따른 패리티 검사의 효과를 논리적으로 설명하시오. 단, <방법2>의 경우 패리티 비트는 무시한다.

[2-1] 옆과 같이 출력의 일정 비율 $a(0<a<1)$를 사용하여 제시문 (라)의 '음의 피드백'으로 구동되는 증폭기를 가정하자. 피드백이 없는 상황에서 증폭기의 이득을 G라고 할 때, 피드백이 주어진 전체 시스템의 이득을 구하는 과정을 제시문 (다)를 참조하여 설명하시오.



[2-2] 제시문 (다)에서 설명된 이득 G가 다음과 같은 입력 신호의 세기 X의 함수라고 하자.

$$G(X)=\frac{X+CG_0}{X+C}$$

[2-1]에 주어진 '음의 피드백 시스템을 사용하면, 피드백이 없는 경우에 비해 제시문 (다)에서 설명된 신호 왜곡 현상이 줄어들게 됨을 $X\to+0$인 경우와 $X\to\infty$인 경우를 고려하여 설명하시오.

제시문 분석

- 제시문 (가)는 디지털 통신은 정보의 기본단위는 0또는 1의 값을 갖는 비트이므로, 전송중의 잡음 등으로 인한 신호 왜곡 현상이 발생하더라도 신호 유/무 여부의 판단만 가능하면 원래의 정보를 복원할 수 있다는 설명이다.
- 제시문 (나)는 패리티비트에 대해 설명하고 패리티 비트에 의해서 정보 전송의 오류 여부를 알아 낼 수 있다는 설명이다.
- 제시문 (다)는 입력 신호의 세기와 출력 신호의 세기, 그리고 증폭기에 의해서 증폭되는 비율의 관계식을 설명이다.
- 제시문 (라)는 양의 피드백과 음의 피드백에 대해서 일상생활의 예를 들어 설명하고 있다.

논제 분석

- 전체 사건의 경우에서 데이터에 오류가 있을 경우의 수를 구하여 확률을 구한다.

- 각 방법에 따라 데이터가 오류가 있을 확률을 구하여 각각의 방법을 서로 비교해 보면 p에 따라 어떤 방법이 효과적인지 알 수 있다.

- 증폭기의 이득에 대한 공식을 가지고 비례식으로 표현할 수 있다.

입력, 출력신호와 이득에 대한 관계식 $Y=GX$에서 되돌아오는 크기를 정해 크기와의 비례식을 분석하여 구한다.

- 신호 왜곡 현상의 의미를 제시문에서 이해하고 왜곡 현상의 정도를 평가하는 기준을 논리적 사고를 통해 수리적으로 제시한다.

배경지식 쌓기

- 확률의 정의

[수학적 확률] 어느 시행에서 일어나는 모든 경우의 수가 N 이고, 어느 경우도 같은 정도로 기대될 때, 그 중 사건 A 가 일어나는 경우의 수가 a 라고 하면, A 가 일어날 확률

$$P(A)=\frac{a}{N} \qquad (0 \leqq P(A) \leqq 1)$$

[기하학적 확률] 길이, 넓이, 부피 등과 같이 연속량 P 가 움직이는 영역 전체를 A 라고 하자. 여기서 점 P 가 영역 A 안의 어느 점에 있을 확률도 같을 때, A 의 부분 영역 B 에 대하여 점 P 가 B 에 포함될 확률

$$\frac{B \text{ 의 길이}}{A \text{ 의 길이}},\ \frac{B \text{ 의 넓이}}{A \text{ 의 넓이}},\ \frac{B \text{ 의 부피}}{A \text{ 의 부피}}$$

[통계적 확률(경험적 확률)] 한 사건 A 가 일어날 확률을 P 라 할 때 n 번의 반복 시행에서 사건 A 가 일어난 횟수를 r 라 하면, 상대도수 $\frac{r}{n}$ 는 n 이 커짐에 따라 확률 P에 가까워짐을 볼 수 있다. 즉, $\lim_{n\to\infty}\frac{r}{n}=P$ 일 때, P 를 사건 A 의 통계적 확률이라고 한다.

• 단조증가 · 단조감소함수

실함수 $f(x)$에서 정의역의 원소 a, b가 $a < b$일 때 $f(a) \leqq f(b)$ 또는 $f(a) \geqq f(b)$가 성립하면 함수 $f(x)$를 단조증가함수 또는 단조감소함수라 하고, 이들을 합쳐서 단조함수라고 한다. 단조증가·단조감소함수의 최댓값 최솟값은 연속적으로 증가하거나 감소하기 때문에 x값에 따라 쉽게 판단할 수가 있다.

풀 어 보 기

1. 여섯 자리의 이진법으로 나타낸 수를 이용하여 정보를 전달하는 송신기와 수신기가 있다. 이때 각 자리의 숫자를 0을 1로 또는 1을 0으로 잘못 전달할 확률은 10%이고, 최대 2개의 숫자를 잘못 전달할 수 있다. 또, 정보를 전달할 때, 입력된 정보와 전달된 정보의 1의 개수가 짝수 개 또는 홀수 개인지의 여부가 일치하면 수신기가 정보를 수신하고, 일치하지 않으면 수신을 거부한다. 예를 들어 입력된 정보가 $110001_{(2)}$일 때, 전달된 정보가 $100011_{(2)}$이면 수신기가 정보를 수신하고, 전달된 정보가 $110000_{(2)}$이면 수신기가 정보를 수신하지 않는다. 송신기가 보낸 어떤 정보를 수신기가 수신하였다고 할 때, 이 정보가 여섯 자리 모두 정상적으로 수신되었을 확률은?[12]

2. 함수 $f(x) = ax + \ln(x^2+4)$ 가 구간 $(-\infty, \infty)$에서 증가함수일 때, 상수 a의 최솟값을 구하시오.

12) 왕규채 외, 수능 두 배 모의고사 수리영역 '나'형, 신사고, 2009

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

- **데이터의 오류를 검출하고 수정하는 오류 수정 코드**

컴퓨터 스스로 데이터 오류를 찾아낼 수 있는 코드로, 수학자 리처드 웨슬리 해밍(Richard Wesley Hamming 1916~1988)의 이름에서 유래되었다. 해밍이 1940년대 말에 벨전화연구소에서 개발하여 1950년 펴낸 저서에 소개한 이 코드는 패리티 검사(Parity Check) 등 보통의 에러 검출 코드들이 에러를 검출할 뿐 교정은 불가능한 것을 개선한 것으로, 대부분의 마이크로칩 디바이스에 채택되어 신뢰도를 높이는 데 사용된다. 오류를 수정하기 위해 재전송을 요구하기에는 시간이 많이 걸리는 원거리 장소로부터의 데이터 전송 신뢰도에 커다란 개선점을 제공한다. 특히 휴대전화나 콤팩트디스크 등에서 신호의 오류를 수정하거나, 자료를 압축해 인터넷 속도를 향상시킬 때 유용하게 쓰인다. 해밍 코드(Hamming Code)는 BCD에다 3개의 여분 비트를 추가하여 에러 검출 및 에러 교정 기능을 갖는 부호이다.

오류정정부호이론은 디지털 통신 시스템의 중요한 한 부분인 채널코드에 대하여 연구하는 분야이다. 채널코드의 목적은 적당량의 추가정보를 송신데이터에 덧붙여서 채널에서 발생하는 오류를 정정하고자 함에 있다. 크게 분류하면 block code와 trellis code로 나눌 수 있다.

블록 부호(block code)는 일정한 길이의 송신데이터 비트(예를 들어 k 비트)에 r 비트의 추가비트를 삽입한다. $k+r=n$이라 두면 k비트의 정보를 보내기 위하여 n비트의 부호어를 보내게 된다. 베이스밴드 송수신인 경우와 달리 변조가 필요한 경우 이를 반송파에 실어 보내는 과정을 디지털 변조과정이라 한다. 수신기는 디지털 복조과정을 거쳐서 수신 부호어를 결정하고 이를 복호하여 송신부호어를 추출한다. 제대로만 이루어지면 여기에서 k비트의 정보를 온전히 추출할 수 있다. 문제는 오류정정능력인데, 이를 크게 하고 싶으면 r이 증가해야 한다는 점이다. 즉, 원하는 오류정정능력을 유지하면서 가능한 조금만 추가비트를 첨가할 수 있다면 가장 좋은 결과를 가져올 것이다.

트렐리스 부호(trellis code)의 대표적인 예는 흔히 convolution code, 혹은 길쌈부호라고 한다. 여기에서는 보내고자 하는 송신 데이터 sequence를 블록으로 나누어 처리하지 않고 shift register에 순서대로 입력시켜 몇 가지 혼합된 logic을 거쳐 출력 부호 sequence를 만들어낸다. 이때, 입력 비트당 출력 비트의 수를 부호율이라 하는데, 대개, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, 혹은 $\frac{1}{4}$ 등으로 표시한다. 이 경우 입력 1비트당 출력 비트의 수가 2, 3, 혹은 4비트인 셈이다. 오류정정능력을 높이기 위해서는 부호율이 작아져야 하는데, 이 점도 중요한 설계 이슈이다. 수신기는 디지털 복조 후에 송신 데이터 sequence를 결정하고 이를 복호하여 원하는 송신 데이터를 추출한다. 현재 가

장 널리 알려져 있는 복호방식은 Viterbi Algorithm이다. 이는 ML관점에서 최적이라고 증명되었고, 블록부호보다 처리가 간단하여 많은 디지털 모뎀 (디지털 위성통신, 디지털 이동통신)에서 이를 사용하고 있는 실정이다.

블록 부호의 복호 방식은 부호화방식에 따라 달라지는데, 대표적으로 Hamming 부호, BCH 부호, Reed-Muller 부호, Reed-Solomon 부호 등이 있으며, 이들의 복호방식에 관한 꾸준한 발전이 이루어져 이제는 많이 실제로 사용되고 있다. BCH부호의 특별한 경우에 해당하는 Reed-Solomon부호는 deep space satellite communication modem에 길쌈부호와 연결하여 강력한 오류 정정 능력을 갖춘 직렬연쇄부호로 구성되어 태양계 탐사 위성체에서 각종 사진 자료를 전송하는 데 이용되고 있으며, 또한 compact disc에 응용되어 고전음악과 rock음악을 망라하여 충실도 높은 저장/재생에 이용되고 있다. 향후, 음악뿐만 아니라 영화 등의 영상정보와 기타 문자 데이터를 기록할 DVD 등에도 이용하기 위하여 연구/개발 중에 있으며, 수신 신뢰도를 향상시키기 위하여 디지털 라디오 방송과 TV 방송에도 적용되어 연구/개발되고 있다. 문제는 이들의 부호화/복호화 과정을 이해하기 위해서는 꽤 복잡해 보이는 대수학적인 개념을 먼저 이해해야 한다. 그 이유는, 한 블록의 부호어를 가지고 덧셈과 뺄셈 그리고 곱셈과 나눗셈 등을 수행 가능해야 하기 때문이며, 대수학적 기초 개념은 이러한 연산이 정의되는 유한집합에 대한 개념을 이해하는 것으로부터 출발한다. Hamming code는 데이터 전송에서 오류전송을 할 수 있는 능력을 가지고 있는 코드이다. 패리트 비트를 이용하면 홀수개의 오류($0 \rightarrow 1$ or $1 \rightarrow 0$)을 확인만 할 수 있다.

data bits(m)과 데이터 비트를 전송하기 위해 요구되는 중복비트의 수(n)의 관계는 $2^n \geq m+n+1$이다. n의 값은 전송되는 데이터 단위의 원래 길이인 m의 값을 넣음으로써 결정할 수 있다.

- 출처 : http://hackerjm.cafe24.com/board/zero/view.php?id=tip&no=57

예시답안

풀어보기 1

이 정보기는 최대 2 개의 숫자를 잘못 전달할 수 있고 1 의 개수가 짝수 개 또는 홀수 개인지의 여부와 일치해야 하므로 여섯 자리 모두 정상적으로 송신한 경우와 여섯 자리 중 두 자리를 잘못 송신한 경우에 정보를 수신한다. 여섯 자리 모두 정상적으로 송신한 사건을 A, 여섯 자리 중 두 자리를 잘못 송신한 사건을 B, 정보를 수신하는 사건을 E라 하면

$$P(A\cap E)={}_6C_0 0.1^0\times 0.9^6=0.9^6$$

$$P(B\cap E)={}_6C_2\, 0.1^2\times 0.9^4=0.15\times 0.9^4$$

그러므로 $P(E)=P(A\cap E)+P(B\cap E)=0.9^6+0.15\times 0.9^4$

따라서 구하는 확률은

$$P(A|E)=\frac{P(A\cap E)}{P(E)}=\frac{0.9^6}{0.9^6+0.15\times 0.9^4}=\frac{27}{32}$$

풀어보기 2

$f(x)=ax+\ln(x^2+4)$ 에서 $f'(x)=a+\dfrac{2x}{x^2+4}=\dfrac{ax^2+2x+4a}{x^2+4}$

$f'(x)\geqq 0$ 이려면 $x^2+4>0$ 이므로 $ax^2+2x+4a\geqq 0$ 이어야 한다.

$$\therefore\ a>0 \text{ 이고 } D\leqq 0$$

$D/4=1-4a^2\leqq 0$ 에서 $(2a-1)(2a+1)\geqq 0$, $a\leqq -\dfrac{1}{2}, a\geqq \dfrac{1}{2}$

따라서 $a\geqq \dfrac{1}{2}$ 이고 a의 최솟값은 $\dfrac{1}{2}$

논제 1-1

데이터가 수신된 경우는 다음의 네 가지 경우가 있다.
(세 번째가 패리티 비트 부분)

1) OOO 2) OXX 3) XOX 4) XXO

각각의 확률은 다음과 같다.

1) $(1-p)^3$ 2) $(1-p)p^2$ 3) $(1-p)p^2$ 4) $p^2(1-p)$

따라서, 데이터가 수신되었을 때 데이터에 오류가 있을 확률은, 위 네 가지 경우에서 2), 3), 4) 세 가지 경우가 차지하는 비율이다. 즉, 구하고자 하는 확률은

$\dfrac{3p^2(1-p)}{(1-p)(4p^2-2p+1)}=\dfrac{3p^2}{4p^2-2p+1}$ 가 된다.

논제 1-2 패리티 비트를 고려하지 않는 <방법2>에 따라 수신된 데이터에 오류가 있을 확률은 $1-(1-p)^2$이다. [문제 1-1]에서 <방법1>에 따라 구한 확률과 이 확률을 비교해 보면 다음과 같다.

$$\frac{3p^2}{4p^2-2p+1}-[1-(1-p)^2]=\frac{2p(2p-1)(1-p)^2}{4p^2-2p+1}$$

따라서, p값에 따라 패리티 검사의 효과를 다음과 같이 설명할 수 있다.

1) $p=\frac{1}{2}$ 일 때는 패리티 비트를 사용하든 안 하든 두 확률의 차이가 없고, $p>\frac{1}{2}$ 일 때는 <방법1>에 따라 구한 확률이 <방법2>에 따라 구한 확률보다 크므로 패리티 검사를 하지 않는 것이 낫다. 즉, $p \geqq \frac{1}{2}$일 때는 패리티 검사의 효과가 없다.

2) $p<\frac{1}{2}$ 일 때는 <방법2>에 따라 구한 확률이 <방법1>에 따라 구한 확률보다 크므로 패리티 검사를 하는 것이 낫다.

논제 2-1 전체 시스템의 이득은 다음과 같은 논리적 전개 과정을 통해 구할 수 있다.

1) X가 입력되어 최종 출력이 Y일 경우 피드백에 의해 입력으로 되돌아가는 크기를 B라고 하면,

$B:Y=a:1-a$의 비례식이 만족되어 다음의 식이 성립한다.

$$B=\frac{a}{1-a}Y$$

2) 음의 피드백이므로 증폭기로 입력되는 신호의 세기는 $X-B=X-\frac{a}{1-a}Y$이다.

3) 따라서 증폭기에서 출력되는 신호의 세기는 $G(X-\frac{a}{1-a}Y)$이다.

4) 최종 출력은 증폭기 출력에 $1-a$를 곱한 값이므로 다음과 같은 식이 성립한다.

$$Y=G(1-a)(X-\frac{a}{1-a}Y)=G(1-a)X-aGY$$

$$\therefore Y=\frac{(1-a)G}{1+aG}X$$

5) 제시문 (다)에 주어진 정의에 의해, 전체 시스템의 이득은 $\frac{(1-a)G}{1+aG}$이다.

논제 2-2

(1) 제시문 (다)에 의하면 신호 왜곡이란 '입력 신호 X의 변화에 따른 이득의 상대적인 차이'이므로, 왜곡의 정도를 평가하기 위해 X에 따른 이득의 최댓값과 최솟값 사이의 비율을 사용하면 된다.

(2) 주어진 증폭기 이득은 $G(X)=\dfrac{X+CG_0}{X+C}=1+\dfrac{C(G_0-1)}{X+C}$ 로서 X의 단조감소함수 이므로, G는 $X\to+0$에서 최대, $X\to\infty$에서 최소가 된다.

(3) 따라서 피드백이 없는 경우 왜곡의 정도는 $\dfrac{G(X\to+0)}{G(X\to\infty)}=\dfrac{G_0}{1}=G_0$ 이다.

(4) 전체 시스템의 이득을 H라 하면, 피드백이 있는 경우 [2-1]에서 얻어진 결과에 의해 $H=\dfrac{(1-a)G}{1+aG}=\dfrac{1-a}{\dfrac{1}{G}+a}$ 이므로 G의 단조 증가 함수이다. 그러므로 H는 G가 최대일 때(즉, $X\to+0$일 때) 최대, G가 최소일 때(즉, $X\to\infty$일 때) 최소가 된다.

(5) 위의 결과에 의해 피드백이 있는 경우 왜곡의 정도는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{H(X\to+0)}{H(X\to\infty)}=\frac{H(G\to G_0)}{H(G\to1)}=\frac{1+a}{\dfrac{1}{G_0}+a}=G_0\frac{1+a}{1+aG_0}$$

(6) $G_0>1$일 경우 항상 $G_0>G_0\dfrac{1+a}{1+aG_0}$ 이므로 피드백이 있는 경우, 피드백이 없는 경우에 비해 신호 왜곡 현상이 줄어드는 것을 알 수 있다.

25 한국외국어대학교 수시2-1

제 시 문

자연수에 대한 기수법(記數法)으로 우리는 진법을 사용한다. 인류의 역사를 살펴보면 12진법, 60진법을 사용했던 적이 있고 컴퓨터 프로그래밍에서는 2진법, 16진법 등이 유용하게 쓰이기도 한다. 자연수의 기수법에서 어떤 진법을 사용하느냐에 따라 같은 수가 다르게 표현된다. 진법을 이용한 기수법의 특징은 어떤 수를 하나의 단위로 정하고 이 수의 거듭제곱을 이용하여 자연수를 나타내는 것이다. 이러한 방법을 이용하면 큰 수를 표시하는 데 편리하다.

p진법에서는 p개의 숫자 $0, 1, 2, \cdots, p-1$을 사용하여 자연수를 표현한다. 맨 오른쪽 자리의 단위는 $p^0(=1)$이며, 수의 자리가 왼쪽으로 하나씩 올라감에 따라 자리의 단위가 p배씩 커지게 된다. 어떤 자연수 N이, $0, 1, 2, \cdots, p-1$ 중의 한 값을 가지는 $a_i(i=0, 1, \cdots, n)$에 대하여

$$N = a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot p^1 + a_0 \cdot p^0 \text{ (단, } a_n \neq 0)$$

을 만족하면, N을 p진법으로 $a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_{0_{(p)}}$로 표기한다. 여기서 (p)는 p진법으로 나타낸 수임을 의미하는데, 10진법은 가장 많이 사용되므로 (10)을 생략한다. 예를 들어, 10진법의 수 427을 5진법으로 나타내면,

$$427 = 3 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 0 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0$$

이므로 $3202_{(5)}$가 된다.

p^{-1}의 거듭제곱을 이용하면 양의 실수도 자연수의 기수법인 p진법을 확장해 나타낼 수 있다. 양의 실수를 표현할 때 진법과 더불어 사용하는 것이 소수표기법이다. 소수점 왼쪽은 양의 실수의 자연수 부분을 나타내며, 소수점 오른쪽은 0과 1 사이의 수를 나타낸다. 소수점 아래 첫 번째 자리의 단위는 p^{-1}이며, 수의 자리가 오른쪽으로 하나씩 내려갈 때마다 자리의 단위가 p배씩 작아지게 된다. 가령, 194.7603은

$1 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2} + 0 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4}$을 의미한다.

이제 0과 1 사이의 실수를 p진법으로 표현하는 문제를 생각해 보자. 예를 들면, $\frac{3}{8}$은 10진법으로 0.375인데, 이는 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다. $\frac{3}{8}$이 10진법으로 표현되어 $0.b_1 b_2 b_3 b_4 \cdots$라 하자. 즉, b_n은 $0 \le b_n < 10$ $(n=1,2,\cdots)$을 만족하는 정수이고,

$$\frac{3}{8} = b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + b_3 \cdot 10^{-3} + b_4 \cdot 10^{-4} + \cdots$$

(1)이 성립한다고 하자. 식 (1)의 양변에 10을 곱하면

$$3 + \frac{3}{4} = b_1 + b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots$$

(2)가 된다. 이 때 b_1은 10보다 작으며 음이 아닌 정수이고,

$$0 \le b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots < 1$$

(3)이 성립한다. 따라서 식 (2)의 양변을 비교하면 $b_1 = 3$이고

$$\frac{3}{4} = b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots$$

(4)가 된다. 이제 식 (4)에 대하여 위의 과정을 반복하면 $b_2 = 7$, $b_3 = 5$, $b_4 = b_5 = \cdots = 0$을 얻는다.

[3]

3-1. <제시문 C>의 식 (3)이 성립하는 이유를 논리적으로 설명하시오.

3-2. <제시문 C>를 참고하여 $\frac{3}{5}$을 4진법으로 나타내시오.

제시문 분석

- **자연수의 기수법인 진법 제시**

  자연수를 p진법으로 표현하는 과정을 10진법의 예를 통해 제시하고 있다.

- **자연수의 p진법을 양의 실수로 확장**

  자연수의 p진법을 확장하여 양의 실수도 p^{-1}의 거듭제곱을 이용하여 p진법으로 나타낼 수 있음을 생각하게 한다. 이를 위해 0과 1 사이의 실수를 예를 통해 설명하고 있다.

논제 분석

- **주어진 부등식이 성립함을 주어진 조건을 이용하여 논리적으로 설명할 수 있는가?**

주어진 b_n이 $0 \le b_n < 10 \quad (n=1,2,\cdots)$을 만족하는 정수라는 조건을 이용하여 $b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots$ 의 값을 생각해보면 무한등비급수의 계산이 필요함을 알 수 있고, $b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots$ 의 범위를 구해볼 수 있다. 단, $n \ge 2$인 모든 b_n에 대하여 $b_n = 9$가 되는 상황은 모순이 발생하므로 제외시켜야 할 것이다.

- **0과 1 사이의 실수인 $\frac{3}{5}$을 4진법으로 나타낼 수 있는가?**

제시문에서 주어진 내용을 구체적인 상황에 잘 적용할 수 있는지를 묻고 있다. 교육과정 상에는 자연수의 기수법으로서 진법을 지도하고 있지만 이를 확장하여 양의 실수도 진법으로 나타낼 수 있음을 보여주며 주어진 제시문의 논리적인 절차를 따라 0과 1사이의 실수를 p진법으로 나타낼 수 있는지를 확인하고자 한다. 제시문의 $\frac{3}{8}$을 10진법으로 표현하는 과정을 순차적으로 살펴본다면 $\frac{3}{5}$도 4진법으로 나타낼 수 있을 것이다.

배경지식 쌓기

- **무한등비급수**

㉠ 첫째항이 a, 공비가 r 인 무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 얻은 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \ (단,\ a \ne 0)$$

을 무한등비급수라고 한다.

㉡ 무한등비급수의 수렴과 발산

· $|r| < 1$일 때에만 수렴하고, 합이 존재한다. 합을 S라 하면

$$S = \frac{a}{1-r} \qquad 곧, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}$$

· $|r| \ge 1$ 일 때에는 발산한다.

풀 어 보 기

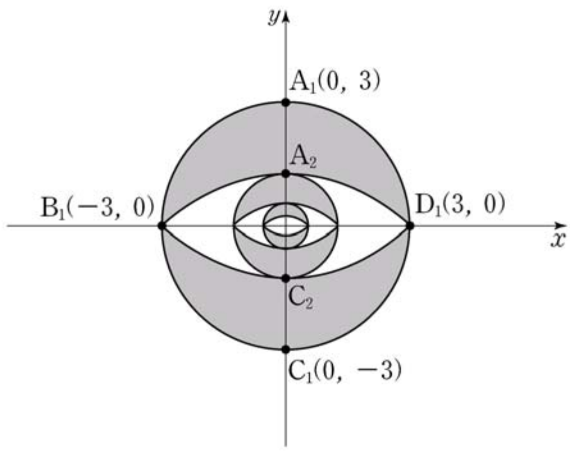
1. 그림과 같이 원점을 중심으로 하고, 반지름의 길이가 3인 원 O_1을 그리고, 원 O_1이 좌표축과 만나는 네 점을 각각 $A_1(0,3)$, $B_1(-3,0)$, $C_1(0,-3)$, $D_1(3,0)$이라 하자. 두 점 B_1, D_1을 모두 지나고 두 점 A_1, C_1을 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_1의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_2, A_2라 하자.

호 $B_1A_1D_1$과 호 $B_1A_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_1, 호 $B_1C_1D_1$과 호 $B_1C_2D_1$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_1이라 하자.

선분 A_2C_2를 지름으로 하는 원 O_2를 그리고, 원 O_2가 x축과 만나는 두 점을 각각 B_2, D_2라 하자. 두 점 B_2, D_2를 모두 지나고 두 점 A_2, C_2를 각각 중심으로 하는 두 원이 원 O_2의 내부에서 y축과 만나는 점을 각각 C_3, A_3이라 하자.

호 $B_2A_2D_2$와 $B_2A_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_2, 호 $B_2C_2D_2$와 $B_2C_3D_2$로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 호 $B_nA_nD_n$ 과 호 $B_nA_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 S_n, 호 $B_nC_nD_n$과 호 $B_nC_{n+1}D_n$으로 둘러싸인 도형의 넓이를 T_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)$의 값은? [2010 수능]

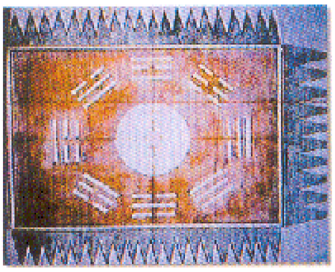


개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

- **태극기 속의 이진법** : 우리나라 태극기의 네 귀퉁이에는 건(하늘), 곤(땅), 감(달), 이(해), 네 개의 괘가 그려져 있어, 2진법의 구조로 볼 수 있다. 실제 3개의 효를 배열하여 만들 수 있는 경우는 모두 8가지로, 초기의 태극기에는 8괘가 모두 포함돼 있었다. 긴 막대기 양(—)과 짧은 막대기 음(--)에 각각 1과 0을 대응시키면 8괘를 이진법의 수로 표현할 수 있다.



<역사적 의미의 태극기>
http://www.kale.com.ne.kr/life-311-1.htm

- **바코드의 활용** : 가늘고 굵은 검은 막대기로 나타내며, 상품을 만든 국가번호, 회사 번호, 제품번호를 숫자 및 기호로 표현한 것이다. 이진법의 원리로 스캐너로 빨리 읽어 들일 수 있도록 고안된 것으로 하나의 문자는 5개의 검은 바와 네 개의 흰 바로서 구성되는 데, 이중 세 개는 넓은 폭을 가지고, 6개는 좁은 폭을 가지며, 넓은 폭은 '1'로 좁은 폭은 '0'으로 해독된다.

기본 수	패턴	기본 수	패턴
1	100100001	5	100110000
2	001100001	6	001110000
3	101100000	7	000100101
4	000110001	8	100100100

100100001　　001100001　　101100000　　001100100

예시답안

풀어보기 1

원 O_1의 반지름의 길이는 3이고 부채꼴 $A_1B_1D_1$의 반지름의 길이는

$\overline{A_1B_1}=\overline{A_1C_2}=3\sqrt{2}$ ……………………………… ㉠

이므로

$$T_1=S_1$$

$$=\frac{1}{2}\times(\text{원 }O_1\text{의 넓이})-\{(\text{부채꼴 }B_1C_1D_1\text{의 넓이})-(\text{삼각형 }B_1C_1D_1\text{의 넓이})\}$$

$$=\frac{1}{2}\times3^2\pi-\left\{\frac{1}{4}\times(3\sqrt{2})^2\pi-\frac{1}{2}\cdot(3\sqrt{2})^2\right\}$$

$$=9$$

$\therefore\ S_1+T_1=18$

한편, $\overline{C_2C_1}=\overline{A_1C_1}-\overline{A_1C_2}=6-3\sqrt{2}$ ($\because$ ㉠)

$$\therefore \overline{A_2C_2}=\overline{A_1C_1}-2\times\overline{C_2C_1}$$

$$=6-2(6-3\sqrt{2})$$

$$=6\sqrt{2}-6$$

따라서, 원 O_2의 반지름의 길이는

$$\frac{1}{2}\overline{A_2C_2}=\frac{1}{2}\times(6\sqrt{2}-6)=3\sqrt{2}-3$$

두 원 O_1과 O_2의 반지름의 길이의 비가

$\frac{3\sqrt{2}-3}{3}=\sqrt{2}-1$이므로 수열 $\{S_n+T_n\}$은 공비가 $(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$인 등비수열이다.

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{\infty}(S_n+T_n)=\frac{18}{1-(3-2\sqrt{2})}$$

$$=\frac{18}{2\sqrt{2}-2}$$

$$=\frac{9}{\sqrt{2}-1}$$

$$=9(\sqrt{2}+1)$$

논제 3-1 b_n은 $0\le b_n<10$ $(n=1,2,\cdots)$을 만족하는 정수이므로

$$0\le b_2\cdot10^{-1}+b_3\cdot10^{-2}+b_4\cdot10^{-3}+\cdots\ \le 9\cdot10^{-1}+9\cdot10^{-2}+9\cdot10^{-3}+\cdots=1$$

그런데 모든 $n=2,3,4,\cdots$에 대하여 $b_n=9$라면

$b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots = 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \cdots = 1$이므로

식 (2)에서 $3 + \frac{3}{4} = b_1 + b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots = b_1 + 1$ 이다. $b_n + 1$이 정수이므로 $3 + \frac{3}{4}$이 정수가 되어 모순이다.

그러므로 $b_n \neq 9$인 b_n이 존재하므로 $b_1 + b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots \neq 1$이다.

$\therefore 0 \leq b_2 \cdot 10^{-1} + b_3 \cdot 10^{-2} + b_4 \cdot 10^{-3} + \cdots < 1$

논제 3-2 $\frac{3}{5}$이 4진법으로 표현되어 $0.b_1b_2b_3b_4\cdots$라 하자. 즉, b_n은 $0 \leq b_n < 4$ $(n = 1, 2, \cdots)$을 만족하는 정수이고,

$$\frac{3}{5} = b_1 \cdot 4^{-1} + b_2 \cdot 4^{-2} + b_3 \cdot 4^{-3} + b_4 \cdot 4^{-4} + \cdots \qquad (1)$$

가 성립한다고 하자. 식 (1)의 양변에 4을 곱하면

$$2 + \frac{2}{5} = b_1 + b_2 \cdot 4^{-1} + b_3 \cdot 4^{-2} + b_4 \cdot 4^{-3} + \cdots \qquad (2)$$

이 된다. 이 때 b_1은 4보다 작으며 음이 아닌 정수이고

$$0 \leq b_2 \cdot 4^{-1} + b_3 \cdot 4^{-2} + b_4 \cdot 4^{-3} + \cdots < 1 \qquad (3)$$

가 성립한다. 따라서 식 (2)의 양변을 비교하면 $b_1 = 2$이고

$$\frac{2}{5} = b_2 \cdot 4^{-1} + b_3 \cdot 4^{-2} + b_4 \cdot 4^{-3} + \cdots \qquad (4)$$

가 된다. 이제 식 (4)의 양변에 4를 곱하면

$$1 + \frac{3}{5} = b_2 + b_3 \cdot 4^{-1} + b_4 \cdot 4^{-2} + b_5 \cdot 4^{-3} + \cdots \qquad (5)$$

이 된다. 이 때 b_2은 4보다 작으며 음이 아닌 정수이고

$$0 \leq b_3 \cdot 4^{-1} + b_4 \cdot 4^{-2} + b_5 \cdot 4^{-3} + \cdots < 1 \qquad (6)$$

가 성립한다. 따라서 식 (5)의 양변을 비교하면 $b_2 = 1$이고

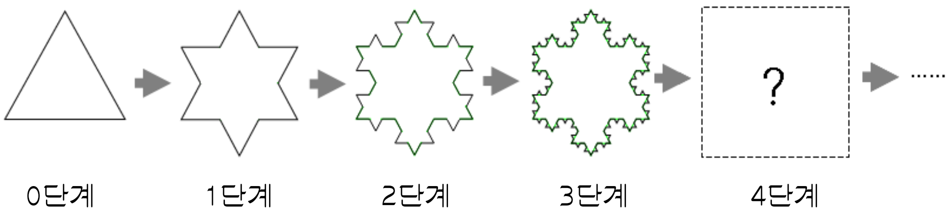
$$\frac{3}{5} = b_3 \cdot 4^{-1} + b_4 \cdot 4^{-2} + b_5 \cdot 4^{-3} + \cdots \qquad (7)$$

가 된다. 이제 식 (7)에 대하여 위의 과정을 반복하면 $b_3 = 2$, $b_4 = 1$ $b_5 = 2$, $b_6 = 1 \cdots$을 얻는다. 따라서 $\frac{3}{5} = 0.212121\cdots_{(4)}$이다.

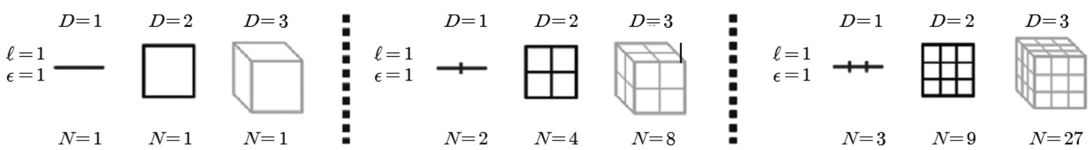
26 한국외국어대학교 수시2-2

제 시 문

(A) 프랙탈(fractal) 곡선은 반복적으로 자기유사성을 형성하는 기하학적 형태를 일컫는다. 아래 그림은 프랙탈의 하나인 코흐(Koch) 폐곡선의 단계별 모습을 보여주고 있다. 이 폐곡선은 각 변의 길이가 1인 정삼각형을 시작으로 매 단계에서 각 선분을 3등분(等分)한 후 가운데 부분이 정삼각형의 형태로 튀어나오면서 점차 눈송이 모양으로 변화한다.



(B) 아래 그림은 유클리드 공간에서 단위 길이(=1)로 구성된 각 도형을 각 차원에 대해 ℓ등분했을 때의 모습이다. 예를 들어, 2등분의 경우($\ell=2$) 1차원 선분은 길이 1/2인 2개의 선분으로 나뉘며, 2차원 정사각형은 각 변의 길이가 1/2인 4(=2^2)개의 정사각형으로 나뉜다. 마찬가지로 3차원 정육면체는 각 변의 길이가 1/2로 이루어진 정육면체 8(=2^3)개로 분할된다.



이와 같이, 유클리드 공간에서 D차원 도형을 각 차원에 대해 ℓ등분하면, 각 변의 길이가 $\epsilon(=1/\ell)$인 동일한 도형 N개로 나뉘며, 이때 $N=N(\ell)=\ell^D$ 또는 $N=N(\epsilon)=(1/\epsilon)^D$로 표현된다. 이를 바꾸어 생각하면, 균일하게 분할된 D차원 도형에 대해 $D=\dfrac{\log N(\ell)}{\log \ell}=\dfrac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$임을 알 수 있다. 자연수를 포함한 실수 영역으로 차원 D를 확장하면 $D=\lim\limits_{\epsilon\to 0}\dfrac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}=\lim\limits_{\ell\to\infty}\dfrac{\log N(\ell)}{\log(\ell)}$과 같이 정의할 수 있다.

[1] (A)의 그림에서 물음표(?)로 표시된 4단계에 나타날 폐곡선의 길이를 파악하는 과정을 기술하시오.

[2] (B)를 활용하여 코흐 폐곡선의 차원을 제시하시오.

[3] ∞단계에서의 코흐 폐곡선 길이와 폐곡선으로 둘러싸인 면적에 대해 기술하시오.

제시문 분석

- **프랙탈(fractal)**

프랙탈이란 전체를 부분 부분으로 나누었을 때 부분 안에 전체의 모습을 갖는 무한 단계에서의 기하학적 도형이다. 이런 프랙탈 도형 중에서 대표적인 Koch폐곡선을 소개하고 있다.

- **하우스도르프(Hausdorff)차원**

차원의 개념을 새롭게 정의한 프랙탈 차원 즉, 하우스도르프차원에 대해 소개하고 있다. 유클리드 공간에서 D차원 도형을 각 차원에 대해 ℓ등분할 때, 각 변의 길이가 $\epsilon(=1/\ell)$인 도형 N개로 나뉘어 지면

$$D=\frac{\log N(\ell)}{\log \ell}=\frac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}$$

로 차원을 정의한다.

논제 분석

- **새로운 차원의 정의에 따라 코흐폐곡선의 차원을 구할 수 있는가?**

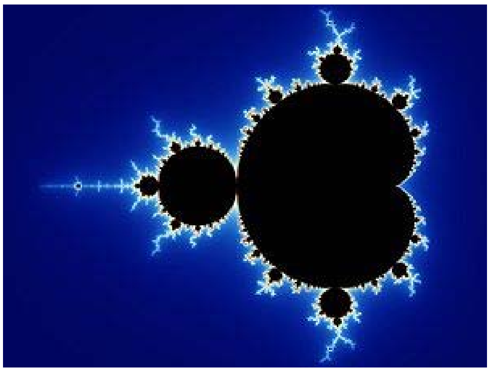
각 변의 길이를 3등분$(\epsilon=\frac{1}{3})$하면 삼각형은 4개로 나누어진다.

- **코흐폐곡선의 넓이를 구할 수 있는가?**

선분의 길이를 3등분하였을 때 선분이 늘어나는 규칙성을 알면 코흐곡선의 넓이를 등비급수의 합으로 표현할 수 있다.

배경지식 쌓기

- **프랙탈** : 프랙탈이란 전체를 부분 부분으로 나누었을 때 부분 안에 전체의 모습을 갖는 무한 단계에서의 기하학적 도형이다. 오른쪽 그림은 프랙탈의 대표적인 도형인 만델브로트 집합이며 어떤 조그만 조각도 전체와 닮아있다.

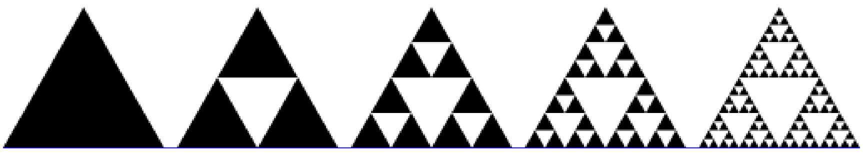


-그림 출처 : Wikipedia

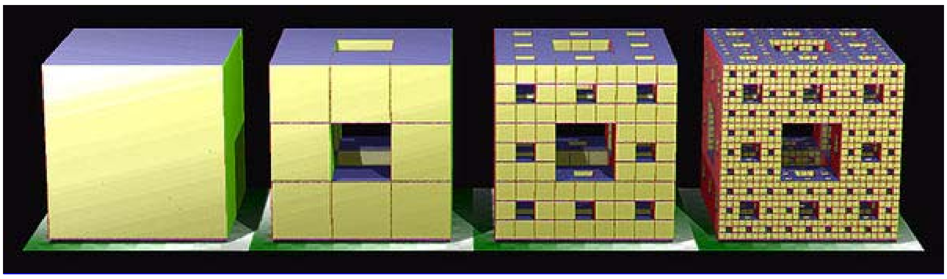
- **프랙탈 도형의 예**

㉠ **칸토어 집합** : 처음 구간 [0,1]을 3등분하여 가운데 부분을 버린다. 그리고 남아있는 두 구간을 각각 3등분하여 가운데 부분을 버린다. 이와 같은 과정을 계속해서 얻어지는 아래 그림과 같은 도형을 칸토어 집합이라고 한다.

㉡ **시어핀스키 삼각형** : 정삼각형의 각 변의 중점을 연결하여 작은 정삼각형을 만들고 가운데 있는 정삼각형을 버린다. 남아 있는 정삼각형의 중점을 연결하여 새로운 정삼각형을 만들고 또다시 가운데 있는 삼각형을 버린다. 이와 같은 과정을 계속하면 아래와 같은 도형을 얻고 이를 시어핀스키 삼각형이라 한다.

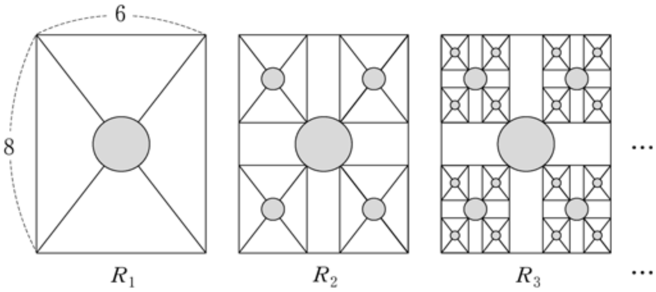


㉢ **멩거 스폰지** : 정육면체의 각 변을 3등분하여 27개의 정육면체로 나누고 중앙의 정육면체와 함께 처음 정육면체의 각 면의 중앙에 있는 정육면체를 빼낸다. 이 과정을 계속하면 아래와 같은 도형을 얻는다.



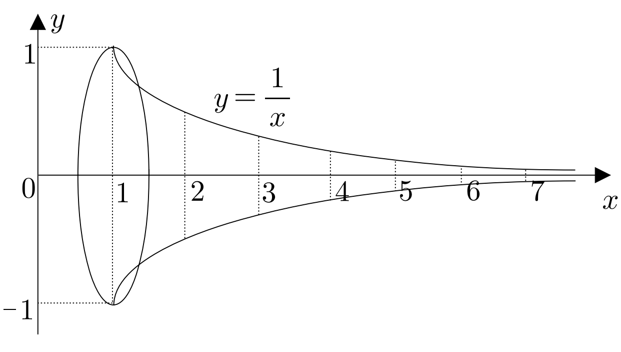
풀 어 보 기

1. 아래와 같이 가로의 길이가 6이고 세로의 길이가 8인 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_1이라 하자. 그림 R_1에서 직사각형의 각 꼭짓점으로 부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_2라 하자. 그림 R_2에 있는 합동인 4개의 직사각형 각각에서 각 꼭짓점으로부터 대각선과 원의 교점까지의 선분을 각각 대각선으로 하는 4개의 직사각형을 그린 후, 새로 그려진 직사각형 내부에 두 대각선의 교점을 중심으로 하고, 새로 그려진 직사각형 가로 길이의 $\frac{1}{3}$을 지름으로 하는 원을 그려서 얻은 그림을 R_3이라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 그림 R_n에 있는 모든 원의 넓이의 합을 S_n이라 할 때, $\lim_{n\to\infty} S_n$의 값은?(단, 모든 직사각형의 가로와 세로는 각각 서로 평행하다.)



2. 제시문 (B)에서 정의된 프랙탈 차원의 정의를 이용하여 칸토어 집합, 시어핀스키 삼각형, 멩거 스폰지의 차원을 각각 구하여라.

3. 곡선 $y=\frac{1}{x}$ $(x \geq 1)$을 x축의 둘레로 회전시켜서 생긴 회전체를 **토리첼리의 트럼펫**(아래 그림 참조)이라 하는데 이 트럼펫은 부피는 유한이나 겉넓이가 무한인 모순된 입체이다. 이를 설명하여 보아라.[13)]



13) 인하대 논술자료집 참조

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

• **프랙탈(Fractal)**

프랙탈은 자기닮음과 소수차원을 그 특성으로 갖는 1975년 만델브로트(Benoit Mandelbrot 1924~)가 소개한 기하학이다. 고전적 기하학은 점, 선, 삼각형, 평면, 원, 구 등의 도형을 사용한다. 그는 유클리드기하학이 규칙적, 불규칙적인 자연현상을 설명하는 데 한계가 있다는 것을 인식하고 자연을 모델링하는 새로운 도구로서 프랙탈을 소개하며 “구름은 구가 아니고, 산은 원뿔이 아니며, 해안선은 원이 아니다. 여러 가지 자연의 패턴은 불규칙적이다. 자연은 고도로 복잡하고, 복잡한 정도는 모두 다르다.”라고 했다.

유클리드 기하학은 직선과 단순한 곡선으로 구성된 인간이 건설한 구축물들을 설명하는 데는 유용하게 이용되지만 무수히 많은 자연의 정경들(해안선의 길이, 산과 숲의 모습, 구름의 모양)은 2300년 전에 발견된 유클리드 기하학의 어떤 모습과도 일치하지 않는다. 그러나 자연의 형태들을 좀 더 미시적으로 가까이서 보면 이들의 불규칙한 모습에서 새로운 기하학의 문을 여는 특징들이 숨겨져 있다.

예를 들어 쪼개진 바위 조각은 자신이 떨어져 나온 산의 모양과 닮아있다. 나뭇가지들은 큰 줄기에서 작은 가지로 갈라질 때 원래 줄기의 모습과 유사한 모양을 가진다. 고사리와 같은 양치식물의 잎이나 브루콜리 같은 식물들도 전체에서 한 조각을 때어내어도 원래의 모양과 유사한 형태를 유지한다. 이러한 특징들은 강의 줄기나 지류에서도 발견되며 신체의 동맥과 정맥의 세부구조도 자기반복적인 특징을 가진다.

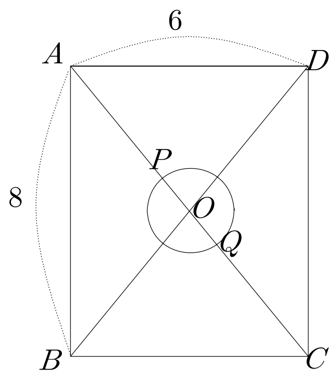
만데브로트는 1975년 자연속의 이러한 불규칙하고 단계별 조각조각들이 서로 닮은 구조를 갖는 특징을 라틴어 ‘Fractus(부서진)’에서 따온 'Fractal'이란 용어를 창조하였다. 그는 “전체를 부분으로 나누었을 때 그 부분들 각각이 전체를 축소해 놓은 것 같은 불규칙하거나 파편화된 기하학적 현상”으로 정의하고 있다.

프랙탈의 발견은 자연계의 구조적 불규칙성을 기술하고 분석할 수 있는 새로운 수학적 언어를 발견한 것이며 혼돈과 무질서속의 질서를 표현할 수 있게 된 것이다.

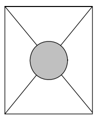
예시답안

풀어보기 1

1.



$\overline{AC}=10$, $\overline{PQ}=2$ 이므로 $\overline{AP}=\dfrac{1}{2}(10-2)=4$

따라서,  모양의 닮은 도형들을 크기순으로 나열할 때, 인접하는 두 도형의 닮음비는 $10:4=5:2$ 이고, 넓이의 비는 $25:4$ 이다.

R_1 에 있는 원의 넓이는 π 이고, 닮은꼴의 원의 개수는 크기순으로

$$1,\ 4,\ 4^2,\ 4^3,\cdots$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\pi+4\times\frac{4}{25}\pi+4^2\times\left(\frac{4}{25}\right)^2\pi+4^3\times\left(\frac{4}{25}\right)^3\pi+\cdots=\frac{\pi}{1-\dfrac{16}{25}}=\frac{25}{9}\pi$$

풀어보기 2

① 칸도어 집합

선분의 길이를 $\epsilon=\dfrac{1}{3}$ 로 하면 선분은 $N=2$ 조각으로 나뉘므로 칸토어 집합의 차원은 $D=\dfrac{\log N(\ell)}{\log \ell}=\dfrac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)}=\dfrac{\log 2}{\log 3}\approx 0.6309\cdots$

② 시어핀스키 삼각형

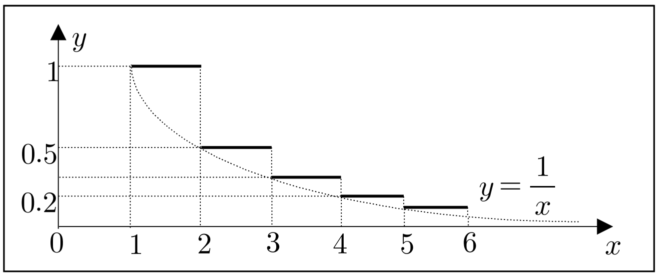
선분의 길이를 $\epsilon=\dfrac{1}{2}$ 로 하면 $N=3$조각으로 나뉘므로 차원은 $\dfrac{\log 3}{\log 2}\approx 1.58\cdots$

③ 멩거 스폰지

선분의 길이를 $\epsilon=\dfrac{1}{3}$ 로 하면 $N=20$ 조각으로 나뉘므로 차원은 $\dfrac{\log 20}{\log 3}\approx 2.7268\cdots$

풀어보기 3 다음과 같이 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 1, & 1 \le x < 2, \\ \dfrac{1}{2}, & 2 \le x < 3, \\ \dfrac{1}{3}, & 3 \le x < 4, \\ \vdots & \vdots \\ \dfrac{1}{n}, & n \le x < n+1, \end{cases}$$



를 x축에 대해여 회전한 입체를 생각하자. 각 수평선분(그림 참고)이 회전하여 만드는 겉넓이는 대응하는 토리첼리의 트럼펫의 곡선부분이 회전하여 만든 겉넓이보다 작다. 그러나 각 수평선분이 회전하여 만든 도형의 부피는 대응하는 토리첼리의 트럼펫의 곡선부분이 회전하여 만든 도형의 부피보다 크다. 이를 수식으로 나타내면

$$\text{트럼펫의 겉넓이} > \sum_{n=1}^{\infty} 2\pi\left(\frac{1}{n}\right)\times 1 = 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty$$

$$\text{트럼펫의 부피} < \sum_{n=1}^{\infty} \pi\left(\frac{1}{n}\right)^2\times 1 = \pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^3}{6}$$

따라서 트럼펫의 겉넓이는 무한이고 부피는 유한이다.

논제 1 n 단계의 코흐곡선의 둘레의 길이를 L_n이라 하면

$$L_1 = 3\times 4\times\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right),\ L_2 = 3\times 4\times\left(4\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right) = 3\left(\frac{4}{3}\right)^2,\ \cdots$$

이므로 4 단계의 코흐곡선의 둘레의 길이 L_4는

$$L_4 = 3\left(\frac{4}{3}\right)^4$$

논제 2 선분의 길이를 $\epsilon = \dfrac{1}{3}$로 하면 삼각형은 $N=4$조각으로 나뉘므로 코흐 폐곡선의 차원은 $D=\dfrac{\log N(\ell)}{\log \ell} = \dfrac{\log N(\epsilon)}{\log(1/\epsilon)} = \dfrac{\log 4}{\log 3}$가 된다.

논제 3 n 단계의 코흐곡선의 둘레의 길이를 L_n이라 하면 $L_n = 3\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} L_n = \infty$$

n 단계의 코흐곡선의 넓이를 S_n 이라 하면 $S_0=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 이다.

1단계 도형의 넓이는 S_0 에 길이가 $\dfrac{1}{3}$ 인 정삼각형 3개의 넓이의 합이므로

$$S_1=S_1+3\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 4^0$$

2단계 도형의 넓이 S_2는 S_1에 길이가 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$인 정삼각형 3×4개의 넓이의 합이므로

$$S_2=S_1+\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{9}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times3\times4=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^2 4^0+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^4 4^1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$n-1$ 단계의 코흐곡선의 넓이 S_{n-1} 은

$$\begin{aligned}S_{n-1}&=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^4 4+\left(\frac{1}{3}\right)^6 4^2+\left(\frac{1}{3}\right)^8 4^3+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{2(n-1)} 4^{n-2}\right\}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\frac{\frac{1}{9}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}{1-\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}\left(1-\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right)\end{aligned}$$

이므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_{n-1}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{20}=\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (유한)이다. 즉, 둘레는 무한이고 넓이는 처음 정삼각형 넓이의 $\dfrac{8}{5}$배인 유한인 곡선이 나온다.

27 한양대학교 예시

제 시 문

(가) 실수 a를 포함하는 열린구간에서 정의되는 함수 f 의 $x=a$에서의 미분계수는 다음과 같이 정의된다.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(나) 실수 a를 포함하는 열린구간에서 정의되는 함수 f 의 $x=a$에서의 미분계수는 다음과 같이 정의된다.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

(다) 함수 f는 닫힌구간 $[a,b]$ 에서 연속이고 열린구간 (a,b)에서 미분 가능하다.

① $x\in(a,b)$ 이고 $f'(x)=0$ 인 x 들의 $f(x)$ 값들.

② $f(a)$ 와 $f(b)$.

③ 위의 ①, ②의 값들 중 제일 큰 것.

[1] 제시문 (가)와 (나)의 미분계수의 정의는 동일한 것인지 아닌지 답하고 설명하시오.

[2] 제시문 (다)-③의 값이 $[a,b]$ 에서 f 의 최댓값임을 미분계수의 정의를 고려하여 설명하시오.

[3] 제시문 (다)를 이용해 함수의 최댓값을 계산하고자 할 때 어떤 어려움이 있을 수 있겠는가? 단, 계산에 필요한 시간은 충분히 주어졌다고 가정하자.

제시문 분석

• **순간변화율(미분계수)의 정의**

제시문 (가)와 (나)는 변화율(미분계수)을 정의하는 2가지 표현법을 제시하고 있다. 도함수를 도입할 때 대부분의 교과서에서 2가지 표현법을 모두 소개하고 있으며 수능유형에서도 많이 다루고 있어 학생들이 이미 알고 있는 기본개념이다.

• **함수의 최댓값**

제시문 (다)는 닫힌구간에서 연속이고 열린구간에서 미분가능 한 함수의 최댓값을 구하는 내용을 제시하고 있다. 교과서에서 기본예제 문제로 많이 다루고 있어 제시문 파악에는 별로 어렵지 않는 내용이다.

논제 분석

• **순간변화율(미분계수)의 두 가지 정의를 정확하게 이해하고 있으며 두 가지 정의가 같은 개념임을 설명할 수 있는가?**

치환을 통하여 (가)식에서 (나)식을, (나)식에서 (가)식을 구할 수 있다.

• **(a, b) 구간에서 미분가능하고 $[a, b]$ 에서 연속인 함수에서 닫힌구간 양 끝 점에서의 함숫값 또는 극댓값중의 하나가 최댓값임을 증명할 수 있는가?**

열린구간 (a, b) 사이의 한 점 z 에서 최댓값을 가진다고 가정하면 임의의 점 c 가 z 값 좌, 우에서 가까이 갈 때 z 에서의 미분계수는 항상 $f'(z)=0$ 이 되고, 또한 양 끝 점의 함숫값 중의 하나가 최댓값이 될 수 있다는 사실을 고려하여 최댓값이 존재할 수 있는 모든 경우를 찾는다.

• **논제(2)를 이용하여 최댓값을 구하려고 할 때 어떤 어려움이 있을 수 있는가?**

최댓값을 구하기 어렵다는 것을 논제(2)에서 제시된 $f'(z)=0$ 의 해를 구하기 어렵다는 것으로 바꾸어 생각해 본다.

배경지식 쌓기

• **연속함수의 최대-최소 정리**

$y=f(x)$ 가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면, $f(x)$ 는 최댓값, 최솟값을 항상 갖는다. (Weierstrass) $f(x)$가 닫힌구간 $[a, b]$ 에서 연속이면 $f(x)$는 구간 $[a, b]$ 의 적당한 점에서 최댓값과 최솟값을 갖는다.

- **구간에서의 미분 가능**

함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 미분가능하다는 것은 구간 (a,b) 안의 임의의 점에서 미분 가능함을 뜻한다. 즉, 임의의 점 $x_0 \in (a,b)$에 대하여 극한값

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

이 존재함을 뜻한다.

이에 대하여 함수 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 미분 가능하다는 것은 함수 $f(x)$가 열린구간 (a,b)에서 미분 가능하고, 양 끝점 a,b에 대하여는 극한값

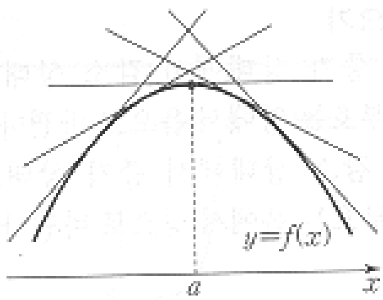
$$\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}, \quad \lim_{h \to -0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$$

가 각각 존재할 때를 말한다.

여기서 $\lim_{h \to +0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$를 a에서의 $f(x)$의 우미분계수, $\lim_{h \to -0} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}$를 b에서의 좌미분계수라고 한다. 이 때, $f(x)$는 a에서 우미분 가능, b에서 좌미분 가능이라고 한다. 함수 $f(x)$가 a,b 사이의 임의의 점 x_0에서 좌미분 가능하고 동시에 우미분 가능하며 이들 좌·우미분계수가 같은 것이다.

- **극댓값과 극솟값**

미분 가능한 함수$f(x)$에 대하여 $f'(a)=0$이고 x가 증가하면서 $x=a$를 지날 때 $f'(x)$ 의 부호가 양에서 음으로 변한다면, $x=a$의 좌우에서 접선의 기울기가 양에서 0을 거쳐 음으로 바뀐다는 뜻이다. 따라서 $x=a$의 근방에서 접선을 그려보면 다음 그림과 같은 모양을 얻는다.



풀 어 보 기

1. 함수 $y=\dfrac{\ln x}{x}$가 최댓값을 가질 때의 x의 값은? [1998 수능]

2. 어떤 사건이 일어날 확률이 p일 때, 이 사건에 대한 불확실 정도를 나타내는 값, 즉 엔트로피 S를 다음과 같이 정의한다.

$$S=-k\{p\ln p+(1-p)\ln(1-p)\} \quad (k\text{는 양의 상수})$$

이 때, 엔트로피 S가 최대가 되는 p의 값은? [2005년 12월 전국연합학력평가]

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료 [14)]

• 최대와 최소의 문제

17세기 미적분학의 발달에 원동력이 되었던 문제 가운데 많은 것이 최대 최소 문제였다. 이러한 문제는 대포의 최대사거리를 구하는 것과 같은 물리학의 연구과정에서 자주 파생되었다. 갈릴레오는 대포를 수평면에 대하여 45°로 발사했을 때 포탄이 가장 멀리 날아감을 증명했다. 그는 발사각도에 따라 포탄이 최고로 얼마까지 올라갈 수 있는가를 계산하는 공식도 발견하였다. 17세기의 또 다른 문제는 태양과 행성사이의 최대거리와 최소거리를 구하는 것이었다. 페르마와 데카르트도 또 다른 형태의 최대 최소 문제에 대하여 연구하였다. 이러한 문제에 대한 페르마의 업적 가운데 정점을 이루는 것은 최소시간의 원리이며, 이것은 나중에 해밀튼에 의하여 (물리학에서 가장 영향력 있는 기본개념 가운데 하나인) 최소작용의 원리로 일반화되었다.

• 미분 가능이고 연속인 함수의 중요한 성질들

우리가 연속함수에 대하여 공부하는 까닭은 그것이 수학과 그 응용분야에서 쓰임새가 많기 때문이다. 모든 연속함수는 어떤 미분 가능한 함수의 도함수가 된다. 때문에 도함수에 관한 정보를 가지고 원래 함수를 찾아내는 기술은 미적분학을 통하여 우리가 얻게 되는 커다란 능력 가운데 하나이다. 거기에는 연속인 함수의 중요한 성질, 즉 연속함수의 최대-최소정리(배경지식 쌓기)와 중간값 정리가 기본이 된다. 중간값의 정리는 로올의 정리를 증명하기 위하여 필요하다.

㉠ **(중간값정리)** $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(a) \neq f(b)$이면 $f(a)$와 $f(b)$사이의 임의의 k값에 대하여 $f(c)=k$ $(a<c<b)$를 만족시키는 c가 적어도 하나 존재한다. 이를 다르게 표현하면 $f(x)$가 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속이면 $f(x)$는 닫힌구간 (a,b)에서 f(a), f(b) 사이의 모든 값을 갖는다.

미적분학에서 평균값 정리와 일반화된 평균값 정리보다 더 영향력 있는 정리는 없다. 이 정리는 그 내용이 너무나 쉽기 때문에, 처음에는 이 정리의 결과들이 별로 중요하지 않다고 생각할지도 모른다. 그러나 1차 근사식에서 오차의 한계를 추정하는데 이 정리가 필요하다. 함수의 증감에 대한 1차 도함수 판정법도 이 정리의 결과고, 구간에서 도함수가 0인 함수는 상수함수뿐이라는 사실도 평균값 정리의 결과인데 이 사실은 적분을 계산할 때 쓰인다. 평균값의 정리는 그의 특수한 형태인 로올의 정리로부터 유도된다. 평균값 정리는 현에 대한 로올의 정리라고도 한다.

---

14) Calculus and Analytic Geometry THOMAS / FINNEY 著
미분적분학과 해석기하학 박을룡, 김영원, 고성은 譯

㉡ **(로올의 정리)** 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$가 (a,b)의 모든 점에서 미분가능하다고 하자. 이때 $f(a)=f(b)$ 이면 a와 b 사이에 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 적어도 하나 존재한다.

㉢ **(평균값 정리)** 닫힌구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $y=f(x)$가 구간의 내부 (a,b)에 있는 모든 점에서 미분가능하면 a와 b 사이에 다음을 만족하는 c가 적어도 한 개 존재한다.

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

예시답안

풀어보기 1

$y=\frac{\ln x}{x}$ 를 x에 대하여 미분하면

$$y'=\frac{(\ln x)'x-\ln x\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

$x=e$에서 $y'=0$, $0<x<e$일 때 $y'>0$, $x>e$ 일 때 $y'<0$ 이므로

$x=e$에서 극대인 동시에 최댓값 $\frac{1}{e}$을 가진다.

풀어보기 2

$S=-k\{p\ln p+(1-p)\ln(1-p)\}$

$S'=-k\{\ln p+1-\ln(1-p)-1\}=-k\ln\frac{p}{1-p}$

$S'=0$에서 $\frac{p}{1-p}=1$이 되어야 하므로 $p=\frac{1}{2}$

또한 p의 범위는 로그의 진수의 조건에서 $0<p<1$이다.

$0<p<\frac{1}{2}$ 일 때 $S'>0$, $\frac{1}{2}<p<1$일 때 $S'<0$ 이다.

따라서 S는 $p=\frac{1}{2}$에서 극댓값인 동시에 최댓값 $-k\ln\frac{1}{2}$을 갖는다.

논제 1 제시문 (가)의 정의에서 $a+h=x$라 하면 $h\to 0$ 일 때, $x\to a$가 된다.

그러므로 $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$이다. 또한 제시문 [나]의 정의에서 $x-a=h$라 하면 [가]식이 얻어지므로 두 가지의 정의는 동일한 것이다.

논제 2 $f(z)$ 가 $[a,b]$ 에서의 최댓값이라고 하자.

(i) $z \in (a,b)$ 라면 함수 f 는 $c < z$ 인 임의의 c 에 대해

$$\frac{f(z)-f(c)}{z-c} \geq 0$$

이므로

$$f'(z) = \lim_{c \to z^-} \frac{f(c)-f(z)}{c-z} = \lim_{c \to z^-} \frac{f(z)-f(c)}{z-c} \geq 0$$

가 성립한다. 마찬가지로,

$$f'(z) = \lim_{d \to z^+} \frac{f(d)-f(z)}{d-z} \leq 0$$

가 성립한다. 따라서 $f'(z)=0$ 이 성립하므로 z 는 $f'(x)=0$ 인 x 들 중 하나이다.

(ii) $z=a$ 또는 $z=b$ 일 가능성도 있으므로 $f'(x)=0$ 인 x 이외에 $f(a)$ 와 $f(b)$ 까지 고려하면 이들 가운데 하나가 최댓값이 된다.

논제 3 다음의 두 가지 경우에는 (다)의 방법을 실행할 수 없다.

(i) 함수의 근을 구하는 일반적인 방법은 알려져 있지 않기 때문에 도함수의 $f'(x)=0$ 인 x 를 구할 수 없는 경우가 있을 수 있다.

(ii) $f'(x)=0$ 을 만족하는 x 가 무한히 많은 경우에는 이들의 함수 값을 구하여 비교하지 못할 수도 있다.

28 한양대학교 수시

제 시 문

(가) 희섭이는 친구들과 콘 모양의 아이스크림을 나누어 먹기 위해 칼로 아이스크림을 여러 가지 다른 각도로 잘라보았다. 그랬더니 그 단면의 테두리 모양이 원, 타원, 포물선 및 쌍곡선의 일부 모양이 됨을 관찰하였다. 이것들을 모두 변수 x, y에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있는데, 이 때 그 이차방정식의 꼴로 나타낼 수 있는 곡선을 **이차곡선**이라 한다.

(나) 최근 컴퓨터와 인터넷의 급속한 발달로 인해 안전한 전자상거래의 필요성이 대두되고 있다. 그래서 더 안전한 암호시스템을 위하여 삼차곡선이 이용되고 있다. 여기서 **삼차곡선**이란 x, y에 대한 삼차방정식의 꼴로 나타낼 수 있는 곡선을 말한다. 삼차곡선은 대수적, 기하적인 측면에서 좋은 구조를 가지고 있으며, 삼차곡선의 성질들을 활용한 차세대 암호 시스템 구현이 수학자, 암호학자 등에 의하여 이루어지고 있다.

(다) 희섭이는 학교에서 피타고라스의 정리를 공부하고 나서 선생님께 다음과 같은 질문을 하였다. "직각삼각형의 세 변의 길이 a, b, c가 모두 자연수인 직각삼각형은 무수히 많이 있을까요?" 선생님은 이 문제가 기원전 피타고라스학파에 의해 이미 연구가 되었으며, 이러한 자연수 세 쌍 (a,b,c)를 피타고라스의 세 쌍이라고 부른다는 것을 알려주었다. 그리고 피타고라스의 세 쌍을 찾는 문제는 단위원 위의 유리수 좌표를 갖는 점을 구하는 문제와 같다는 것을 설명해 주었다. 이처럼 곡선 위의 점 P의 좌표 (x,y)에서 x, y가 모두 유리수 일 때, 점 P를 이 곡선의 **유리수점**이라고 부른다.

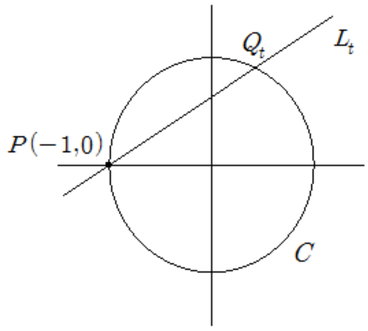
(라) C를 이차곡선 또는 삼차곡선이라고 하자. 희섭이는 단위원의 경우처럼 곡선 C의 유리수점도 무수히 많을 것이라고 추측하고, 이들을 구하기 위한 다음과 같은 알고리즘을 제안하였다.

(단계 1) 곡선 C의 한 유리수점 P를 고른다.

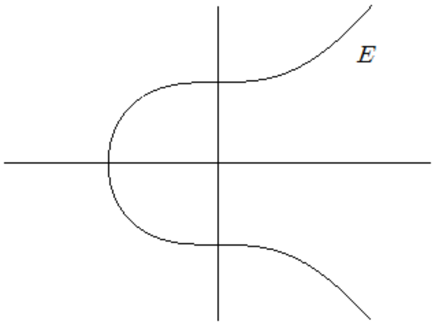
(단계 2) P를 지나며 기울기가 유리수 t인 직선 L_t를 생각한다.

(단계 3) 직선 L_t와 곡선 C의 교점들 중 P와 다른 유리수점 하나를 Q_t라 한다.

(단계 4) 기울기 t를 달리해가며 교점 Q_t를 구해나가면 무수히 많은 유리수점을 얻을 수 있다.([그림 1]은 곡선 C가 단위원이고 P가 $(-1,0)$인 경우이다.)



[그림 1]



[그림 2]

[1] 제시문 (라)에서 희섭이가 제안한 알고리즘을 실행하는 데는 몇 가지 문제점이 있을 수 있다. 곡선 $C_1 : x^2+y^2=3$, $C_2 : x^2+\sqrt{2}\,y^2=1$, $C_3 : x^3+y^3=1$을 예로 들어, 알고리즘에 단계별로 어떠한 문제점이 있을 수 있는지 지적하고, 곡선 C가 어떠한 조건을 만족할 때 알고리즘이 끝까지 실행될 수 있는지 논하시오.

[2] [그림2]에 나와 있는 삼차곡선 $E : y^2=x^3+17$을 생각하자. 희섭이는 알고리즘에 제시된 방법을 응용하여, E의 두 유리수점 $(-2,3)$과 $(-1,4)$로부터 유리수점 $(4,9)$를 얻었다. 또한 E의 한 유리수점 $(-2,-3)$으로부터 유리수점 $(8,-23)$을 얻었다. 희섭이가 어떻게 해서 이러한 유리수점들을 얻게 되었는지 그 과정을 논하시오. 이를 토대로 E의 한 유리수점 P가 주어져 있을 때, 오직 P만으로 P와 다른 유리수점을 얻기 위해 어떠한 방법들이 있는지 논하시오.

제시문 분석

제시문 (가)와 제시문 (나)에서 이차곡선의 종류와 삼차곡선을 설명하였고, 제시문 (다)에서 곡선 위의 유리수점에 대하여 정의하였다. 이차곡선과 삼차곡선에서 곡선 위의 한 유리수점을 고른 후 기울기가 유리수인 직선과의 교점을 구하는 방법을 통해 곡선 위에 무수히 많은 유리수점을 구할 수 있는 알고리즘을 제시문 (라)에서 제시하였다.

논제 분석

- 제시문 (라)에서 제시한 알고리즘으로 주어진 이차곡선과 삼차곡선에서 유리수 점을 구하였을 때 생기는 오류를 찾고, 알고리즘이 끝까지 실행될 수 있는 방법에 대한 논의를 요구하고 있다. 유리수의 정의인 $x=\frac{a}{b}$, $y=\frac{c}{d}$ (단, a와 b, c와 d는 서로소인 정수)와 수의 성질을 이용하여 주어진 이차곡선과 삼차곡선을 정리하면 모순이 생기는 것을 보임으로써 주어진 알고리즘에 오류가 있음을 설명할 수 있다. 또한, 오류를 찾는 과정에서 주어진 알고리즘을 끝까지 실행하려면 곡선 위에 유리수점이 무수히 많이 존재해야 함을 알 수 있다.

- 삼차곡선 $y^2=x^3+17$ 위의 두 유리수점이 주어졌을 때 다른 유리수점을 찾는 과정과 곡선 위의 한 유리수점이 주어졌을 때 다른 유리수점을 찾는 과정을 설명할 것을 요구하고 있다. 삼차곡선 위의 두 점을 지나는 직선의 방정식과 삼차곡선을 연립하여 유리수점을 찾고, 한 점에서의 접선의 방정식을 구하여 삼차곡선과 연립하여 곡선 위의 다른 유리수점을 찾을 수 있다. 이를 일반화 하면 곡선 위에 한 유리수점이 주어졌을 때 그 점을 지나는 직선의 방정식을 이용하여 다른 유리수점을 구할 수 있다.

배경지식 쌓기

- **유리수의 정의**

정수의 비로 나타낼 수 있는 수. 정수와 분수가 있으며, 소수로 나타내면 유한소수나 순환소수가 된다.

유리수의 집합을 Q, 정수의 집합을 Z라 할 때 $Q=\left\{\frac{m}{n} \mid m, n \in Z,\ n \neq 0\right\}$

- **좌표평면에서 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 지나는 직선의 방정식**

$$x_1 \neq x_2 \text{일 때, } y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$x_1 = x_2 \text{일 때, } x=x_1$$

- **곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식**

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

풀 어 보 기

1. $\sqrt{3}$ 이 무리수임을 증명하여라.

2. 좌표평면 위의 점 $P(x,y)$ 를 x, y 모두 유리수이면 유리수점, 모두 정수이면 정수점이라 부르기로 한다. 다음의 명제 중 옳은 것을 모두 고르면?

ㄱ. 원점을 지나는 직선 중 정확히 두 개의 정수점만 지나는 것이 무한히 많이 있다.
ㄴ. 원점을 지나는 직선 중 원점 이외에는 어떠한 유리수점도 지나지 않는 것이 무한히 많이 있다.
ㄷ. 원점을 중심으로 하는 원 중 무한히 많은 유리수점을 지나는 것이 무한히 많이 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ ④ ㄱ,ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

3. 곡선 $y=x^3+ax^2+b$는 점 $(1,3)$ 을 지나고, 이 점에서의 접선의 방정식이 $y=-2x+5$ 라고 할 때, 상수 a, b 의 값을 구하여라.

개요 짜기

답안 작성

읽기 자료

• 페르마의 마지막 정리(Fermat's last theorem)

'n 이 2보다 큰 자연수일 때, 방정식 $x^n + y^n = z^n$ 을 만족하는 양의 정수 x, y, z 는 존재하지 않는다.'

이것이 페르마의 마지막 정리(Fermat's last theorem)의 내용이다. 페르마(Pierre de Fermat) 는 자기가 발견한 것들을 발표하지 않고 다른 사람과 주고받은 편지에 쓰거나, 책의 여백에 적어 놓곤 했다. 페르마가 죽은 뒤 그의 아들이 부친의 업적을 정리해 발표했는데 이 내용은 디오판토스(Diophantos) 의 책 '산술(Arithmetica)'의 여백에 적혀 있었다고 한다. 페르마는 이 내용을 1630년경에 썼다고 알려져 있다. 이 정리 옆에는 또 "나는 정말 놀라운 증명 방법을 발견했다. 하지만 이 여백이 좁아서 증명을 쓸 수가 없다."라고 적혀 있었다. 페르마가 이런 식으로 써 놓은 다른 것들은 모두 옳다는 것이 밝혀졌지만 이 '정리'만은 오래도록 증명되지 못했다. 그래서 이것이 '페르마의 마지막 정리(Fermat's last theorem)'라고 불리게 된 것이다.

하지만 페르마 자신도 '놀라운 증명 방법'에 오류가 있다는 것을 나중에 깨달았던 것 같다. 왜냐하면 다른 모든 발견에 대해서는 주고받은 편지에 '이 문제를 풀어보라'는 식으로 써 놓았기 때문이다. 그런데 이 문제에 대해서는 n 이 3 또는 4일 때에 대해서만 언급이 있을 뿐 일반적인 n 에 대한 정리는 다시는 언급되지 않았다.

1894년까지, 페르마의 마지막 정리는 증명된다고 해도 별 쓸모가 없는 순전히 호기심을 불러일으키는 문제일 뿐이었다. 그러나 1894년, 이 문제가 타원함수에 대한 어떤 문제와 관계가 있다는 것이 밝혀졌고 엄청나게 많은 다른 문제들을 풀 수 있는 출발점이 되었다. 페르마의 마지막 정리를 증명하는 것은 곧 20세기 수학에 한 획을 긋는 역사적인 일이었던 것이다.

간략하게 이 페르마의 마지막 정리에 대해 사람들이 어떤 노력을 해서 어떤 발전이 있었는지 알아보자. 페르마 자신은 '직각삼각형의 넓이는 제곱수가 될 수 없다' 즉, x, y, z가 정수일 때 $x^2 + y^2 = z^2$ 이면, $\frac{xy}{2}$는 제곱수가 될 수 없다는 것을 증명했다(페르마가 남긴 글 중 증명이라고는 이것 하나뿐이다). 이것을 사용하면 n이 4일 경우는 증명이 된다. 그리고 나면, n이 홀수인 소수일 경우만을 증명하면 된다는 것이 밝혀진다. 1753년, 오일러(Leonhard Euler)는 자신이 페르마의 마지막 정리를 증명했다고 주장했으나 그 증명에는 오류가 있었다. 제르맹(Sophie Germain) 은 페르마의 마지막 정리를 두 경우, 즉

(1) x, y, z 중 어느 것도 n의 배수가 아닐 때

(2) x, y, z 중 하나만이 n의 배수일 때

로 나눌 수 있다는 것을 밝히고 100 이하의 n에 대해 경우 (1)을 증명했다. 르장드르(Legendre) 는 제르맹의 방법을 확장하여 197 이하의 n에 대해 경우 (1)을 증명했다.

1825년, 디리클레(Dirichlet) 가 $n=5$에 대해 경우 (2)를 증명함으로써 $n=5$인 경우의 페르마의 마지막 정리를 증명했다. 또한, 1832년에 $n=14$인 경우의 페르마의 마지막 정리를 증명했다. 1839년, 라메(Lamé)가 $n=7$인 경우를 증명했다. 그 증명은 너무나 복잡해서 무슨 새로운 접근을 하지 않는 한 더 큰 n에 대해 증명하는 것은 불가능할 것으로 보였다. 1847년, 라메는 페르마의 마지막 정리를 증명했다고 파리 아카데미에 밝혔으나 쿠머(Kummer)에 의해 37, 59, 67 등의 특수한 경우에는 그 증명을 적용할 수 없다는 것이 밝혀졌다. 그 뒤 쿠머(Kummer), 미리마노프(Mirimanoff), 비퍼리히(Wieferich), 푸르트뱅글러(Furtwängler), 판디버(Vandiver) 등이 이 특수한 경우들을 하나씩 증명해냈다. 그러나 1915년 옌센(Jensen)에 의해 이런 특수한 경우들은 무한히 존재한다는 것이 밝혀졌다. 그래도 쿠머가 사용했던 방법은 이후 계속 적용되었고, 컴퓨터의 도움을 받아 1993년까지 n이 40,000 이하인 경우는 페르마의 마지막 정리가 참이라는 것이 밝혀졌다.

1983년, 폴팅즈(Gerd Faltings) 는, $n>2$일 때 $x^2+y^2=z^2$인 정수는 많아 봐야 유한개라는, 크게 발전된 결과를 내놓았다. 그러나 그 '유한개'라는 것이 모든 n에 대해 0이 된다는 결과는 아무래도 나올 것 같지 않았다.

마침내, 프린스턴 대학의 와일즈(Andrew Wiles)가 1993년 6월 21일, 22일, 23일에 영국 아이잭 뉴턴 연구소에서 강의하면서 페르마의 마지막 정리를 증명했다. 그러나 12월 4일, 와일즈는 증명에 문제가 있다며 발표를 철회했고, 이듬해인 1994년 테일러(Richard Taylor)와 함께 그 문제를 해결하려고 시도했다. 그리고 1994년 10월 6일, 와일즈는 세 명의 다른 수학자에게 전해의 증명보다 더 간단해진 새로운 증명을 보내 왔고, 페르마의 마지막 정리는 증명되었다.

1908년, 파울 볼프스켄(Paul Wolfsken)의 유지에 따라 괴팅엔 왕립과학원은 2007년 9월 13일을 기한으로 페르마의 마지막 정리를 증명하는 사람에게 10만 마르크의 상금을 걸었다. 이것은 페르마의 마지막 정리에 수많은 사람이 달려들어 잘못된 증명을 쏟아내게 하는 한편, 대중에게 이 문제를 널리 알리는 계기가 되었다. 1997년 6월 27일, 와일즈는 이 상금을 받았다.

－ 출처 : 수학사랑

예시답안

풀어보기 1

$\sqrt{3}$ 이 유리수라고 가정하자. 즉, $\sqrt{3}=\frac{a}{b}$(a, b는 서로 소인 자연수)의 꼴로 나타낼 수 있다. 양변을 제곱한 다음 분모를 양변에 곱하면 $3b^2=a^2$ 이 되고, a 는 3 의 배수이다. $a=3k$(k 는 자연수)라 두면 $b^2=3k^2$ 이 되고 b 도 3 의 배수이다. 이것은 a 와 b 가 서로 소라는 사실에 모순이다. 따라서 $\sqrt{3}$ 은 무리수이다.

풀어보기 2

ㄱ. 원점을 지나는 직선이 정수점 (m,n) $(m\neq 0,\ n\neq 0)$ 을 지나면 직선의 방정식은 $y=\frac{n}{m}x$ 이 되고, 임의의 정수 k 에 대하여 정수점 (km,kn) 도 지나게 된다. 따라서 문항 ㄱ은 옳지 않다.

ㄴ. 원점을 지나는 직선 중 기울기가 무리수인 것은 원점 이외의 유리수점을 지날 수 없다. 따라서 문항 ㄴ은 옳다.

ㄷ. n이 정수일 때 $x=\frac{n^2-1}{n^2+1}$, $y=\frac{2n}{n^2+1}$이라 하면 $x^2+y^2=1$이 되어 원점을 중심으로 하는 단위 원주상에 있게 된다. 따라서 $x^2+y^2=1$ 은 무한히 많은 유리수점을 지난다. r 을 유리수라고 하고 (x,y)를 $x^2+y^2=1$의 유리수점이라고 하면 $(rx,\ ry)$는 $x^2+y^2=r^2$ 의 유리수점이 된다. 따라서 문항 ㄷ은 옳다.

풀어보기 3

$f(x)=x^3+ax^2+b$ 라 놓으면 $f'(x)=3x^2+2ax$ 이고, $f(x)$ 는 $(1,3)$ 을 지나므로 $f(1)=1+a+b=3$ 이다. 또한, $(1,3)$ 에서의 접선의 기울기가 -2 이므로 $f'(1)=3+2a=-2$ 이다. 따라서, $a=-\frac{5}{2}$, $b=\frac{9}{2}$ 이다.

논제 1

곡선 $C_1: x^2+y^2=3$ 이 유리수점

$$x=\frac{a}{b},\ y=\frac{c}{d}\ \text{(단, } a\text{와 } b,\ c\text{와 } d\text{ 는 서로소인 정수)}$$

를 가진다고 하자. 즉 $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{c}{d}\right)^2=3$ 이면 $(ad)^2+(bc)^2=3(bd)^2$ 이 되고 ad, bc, bd를 각각 p, q, r 라 하면 위 식은

$$p^2+q^2=3r^2$$

을 만족하는 0 이 아닌 정수 p, q, r 이 존재하는가? 하는 문제로 바뀐다.

그런데 임의의 정수를 제곱하여 4 로 나누면 나머지는 0 또는 1 밖에 없다. 따라서 $3r^2$ 을 4 로 나누면 나머지는 0 또는 3 이고, p^2+q^2 을 4 로 나눈 나머지는 0 또는 2 이다. 그런데 두 값이 같으려면 좌 우변 모두 4 로 나눈 나머지는 0 이 되어야 하므로 r 은 짝수가 되어야 하고 동시에 p 와 q도 짝수가 되어야 한다. 그러나 이것은 a와 b, c 와 d 는 서로소라는 사실에 모순이다. 즉, 곡선 $C_1: x^2+y^2=3$ 은 유리수점을 가지지 않는다. 따라서 알고리즘의 (단계 1)을 실행할 수 없다.

곡선 $C_2: x^2+\sqrt{2}\,y^2=1$는 유리수점이 두 점 $(1,0), (-1,0)$ 밖에 존재하지 않는다. 왜냐하면 $y\neq 0$이 아닌 유리수점 (x,y)가 존재한다고 하면

$$\sqrt{2}\,y^2=1-x^2$$

에서 좌변은 무리수이고 우변은 유리수가 되어 모순이 나온다. 즉, 기울기가 유리수인 직선 위의 모든 점이 유리수점은 아니라서 직선과 곡선의 또 다른 교점이 꼭 유리수점이 된다는 보장은 없다. 따라서 알고리즘의 (단계 3)에서 문제점이 생긴다.

곡선 $C_3: x^3+y^3=1$는 유리수점이 $(0,1), (1,0)$뿐이고 나머지들은 모두 유리수점이 아니다. 왜냐하면, 곡선 $C_3: x^3+y^3=1$가 $(0,1), (1,0)$이외의 유리수점을 가진다고 하자. 즉

$$x=\frac{a}{b},\ y=\frac{c}{d}\ (\text{단, } a\text{와 } b,\ c\text{ 와 } d\text{ 는 서로소인 0 이 아닌 정수})$$

인 x, y가 존재한다고 하면 $\left(\frac{a}{b}\right)^3+\left(\frac{c}{d}\right)^3=1$이고 이것을 정리하면

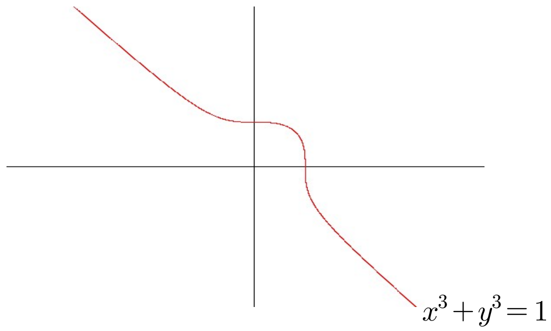
$$(ad)^3+(bc)^3=(bd)^3\ (\text{단, } ad, bc, bd\text{ 는 0 이 아닌 정수})$$

가 된다. 이것은 ‘페르마의 마지막 정리’에 모순이다. 그러므로 유리수점은 존재하지 않는다.

[페르마의 마지막 정리]

$n>2$인 임의의 자연수 n에 대해 $x^n+y^n=z^n$을 만족하는 0 이 아닌 정수해 x, y, z 는 존재하지 않는다.

따라서 (단계 1)에서 (단계 3)까지를 수행하더라도 무수히 많은 유리수점을 찾을 수는 없다.



이러한 알고리즘을 끝까지 실행하려면 곡선 C 위에 유리수점이 무수히 많이 존재해야 한다.(예를 들어 원인 경우는 반지름이 (유리수)^{2}꼴이 되어야 한다.)

논제 2 두 점 $(-2, 3)$, $(-1, 4)$을 지나는 직선 L : $y=x+5$와 곡선 E : $y^2=x^3+17$의 교점을 구하면

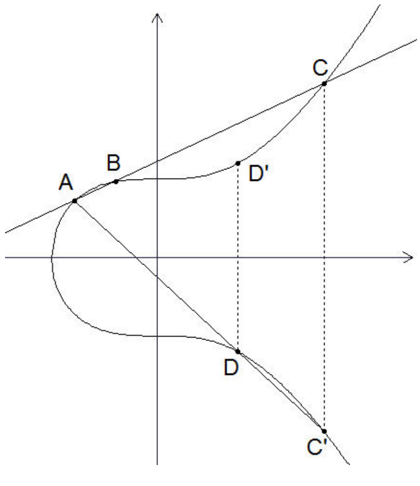
$(x+5)^2=x^3+17 \Rightarrow x^3-x^2-10x-8=0 \Rightarrow (x-4)(x+1)(x+2)=0$이므로

$x=4,\ -1,\ -2$이다. 그러므로 두 유리수점 $(-2, 3)$과 $(-1, 4)$로부터 유리수점 $(4, 9)$을 얻을 수 있다.

곡선 E 위의 점 $(-2, -3)$에서 접선 L은 $y=\frac{dy}{dx}_{(-2,\ -3)}(x+2)-3 \Rightarrow y=-2x-7$이다. 곡선 E와 접선 L의 교점을 구하면

$(-2x-7)^2=x^3+17 \Rightarrow x^3-4x^2-28x-32=0 \Rightarrow (x-8)(x+2)^2=0$이므로

$x=8,\ -2$이다. 그러므로 유리수점 $(-2,\ -3)$에서 유리수점 $(8, -23)$을 얻을 수 있다.



E의 두 유리수점을 각각 A와 B라 하자. 이 때, 두 점 A, B를 지나는 직선이 곡선 E와 만나는 점을 C라 하면 점 C도 유리수점이다. 점 C를 x축에 대칭이동시킨 점을 C'라 하면 C'도 유리수점이다. 같은 방법으로 두 점 A, C'을 지나는 직선이 곡선 E와 만나는 점을 D라 하고 이 점을 x축에 대칭이동시킨 점을 D'이라 하면 D와 D'도 유리수점이다. 이와 같은 방법을 계속하면 곡선 E 위의 유리수점을 얻을 수 있다.

만들어 주신 분들

기 획

이 종 수	부산광역시교육청	교 육 정 책 국 장
노 민 구	부산광역시교육청	중 등 교 육 과 장
김 대 성	부산광역시교육청	중등교육과 장학담당장학관
이 호 종	부산광역시교육청	중등교육과 장학사

집필위원

강 진 희	만 덕 고 등 학 교
김 기 현	부 산 동 고 등 학 교
김 정 수	만 덕 고 등 학 교
김 현 미	낙 동 고 등 학 교
박 수 정	부산서여자고등학교
박 재 희	부산과학고등학교
박 철 호	부산백양고등학교
신 동 연	구 덕 고 등 학 교
오 정 임	부산장안고등학교
원 태 경	사 상 고 등 학 교
정 순 진	금명여자고등학교
최 기 원	신 정 고 등 학 교

수리논술 나침반 II

발 행 일	2010. 2. 25.
편집 · 발행	부산광역시교육청

이 책자는 부산광역시대학진학지원센터 홈페이지에서 파일을 다운받아 사용할 수 있습니다.
홈페이지주소 http://jinhak.pen.go.kr/(대학별고사/논·구술·면접 기출문제)