* 위 문제는 오르비클래스 신동훈샘이 수험생을 위해 직접 만든 것입니다.

[EBS수능특강 p.15 **신유형** 변형]

1. 두 이차정사각행렬 A, B가 $A^2 = E$, $B^2 = B$를 만족시킬 때, <보기>에서 항상 옳은 것을 모두 고른 것은?(단, E는 단위행렬이다.) [1)]

ㄱ. 행렬 B가 역행렬을 가지면 $B = E$이다.
ㄴ. 행렬 A의 모든 성분의 합이 1이면, 행렬 $(A-E)^{2013}$의 모든 성분의 합은 -2^{2012}이다.
ㄷ. $(E-ABA)^2 = E-ABA$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.15 **신유형** 변형]

2. 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A가 $A^2 = 3A$를 만족시킨다. 모든 자연수 n에 대하여 행렬 $(A-E)^n$을 $(A-E)^n = a_nA + (-1)^nE$ (단, $a_1 = 1$) 와 같이 나타낼 때, a_{10}을 구하여라.[2)]

3. 영행렬이 아닌 이차정사각행렬 A가 $A^2 = 3A$를 만족시킨다.

다음은 모든 자연수 n에 대하여 행렬 $(A-E)^n$을

$$(A-E)^n = a_n A + (-1)^n E$$

와 같이 나타낼 때, 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하는 과정이다. (단, E는 단위행렬이다.)

> 자연수 n에 대하여
>
> $$\begin{aligned}(A-E)^{n+1} &= \{a_n A + (-1)^n E\}(A-E) \\ &= a_n A^2 - a_n A + (-1)^n A + (-1)^{n+1} E\end{aligned}$$
>
> 이고, $A^2 = 3A$이므로
>
> $$(A-E)^{n+1} = (2a_n + \boxed{\text{(가)}})A + (-1)^{n+1}E$$
>
> 이다. 그러므로
>
> $$a_{n+1} = 2a_n + \boxed{\text{(가)}} \quad \cdots\cdots \text{㉠}$$
>
> 이다. 따라서 2이상인 자연수 n에 대하여
>
> $$a_n + a_{n+1} = 2(a_{n-1} + a_n)$$
>
> 이다. 또한 $a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$이므로 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_n + a_{n+1} = \boxed{\text{(나)}} \quad \cdots\cdots \text{㉡이다.}$$
>
> ㉠과 ㉡에 의해 $3a_n + (-1)^n = \boxed{\text{(나)}}$ 이다.
>
> 따라서 $a_n = \dfrac{\boxed{\text{(나)}} + (-1)^{n+1}}{3}$ 이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n), g(n)$이라 할 때, $f(9) \times g(5)$의 값은? 3)

[3점] [2014학년도 예비시행]

① -32 ② -16 ③ 8 ④ 16 ⑤ 32

[EBS수능특강 p.23 변형]

4. 영행렬이 아닌 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여

$$A+B=2E,\ A^2=3A$$

일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.)4)

보 기

ㄱ. $B^2=B+2E$

ㄴ. 행렬 $A-2E$의 역행렬이 존재한다.

ㄷ. 모든 자연수 n에 대하여 행렬 $(A-B)^n$의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.23 변형]

5. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$가 성립하기 위한 충분조건인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)5)

ㄱ. $A^2+AB+BA+B^2=O$

ㄴ. $A^2+2BA+AB+2B^2=E$

ㄷ. $(A-B)^2=B$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ

④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.23 변형]

6. 역행렬을 갖는 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=BA$가 성립하기 위한 충분조건인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)[6]

[보 기]

ㄱ. $2AB-A^2=E$

ㄴ. $2BA-B^2=A$

ㄷ. $A^2+2AB+2BA+4B^2=E$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.28 신유형 변형]

7. 13 이하의 자연수 n에 대하여 행렬 A_n을

$$A_n=\begin{pmatrix} \sqrt{2}\,cos\,\frac{n}{4}\pi & 1-\cos\frac{n}{4}\pi \\ 1 & -1+\cos\frac{n}{4}\pi \end{pmatrix}$$

라 하자. x, y에 대한 연립일차방정식 $A_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$을 만족시키는 순서쌍 $(x,\ y)$의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{k=1}^{13} f(k)$의 값은?[7]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

[EBS수능특강 p.29 변형]

8. 이차정사각행렬 A에 대하여 $A^3=O$일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)[8]

보 기

ㄱ. 행렬 $A=0$이다.

ㄴ. 행렬 $A^2=0$이다.

ㄷ. 행렬 A^2+E의 역행렬이 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ ⑤ ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.29 신유형 변형]

9. 역행렬이 존재하는 두 이차정사각행렬 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 행렬 $BA^{200}B^{-1}$의 모든 성분의 합은? (단, E는 단위행렬이다.)[9]

(가) $B^2=E$

(나) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}B=(A^2B^{-1})^{-1}$

① -97 ② -98 ③ -99
④ 97 ⑤ 98

[EBS수능특강 p.29 변형]

10. 두 이차정사각행렬 A, B에 대하여 $AB=E$, $A^2-A+E=O$가 성립할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, E는 단위행렬이고, O는 영행렬이다.)[10]

ㄱ. $A+B=E$
ㄴ. $B^2=B-E$
ㄷ. $A^{100}+B^{100}=-E$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.37 신유형 변형]

11. 한 꼭짓점에서 자기 자신으로 가는 변이 없고, 두 꼭짓점 사이에 많아야 한 개의 변이 있는 그래프 G의 꼭짓점을 A, B, C, D, E, F 라 하자. 그래프 G의 각 꼭짓점 사이의 연결 관계를 나타내는 행렬을 M이라 할 때, 두 행렬 M과 M^2은 다음과 같다.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

행렬 M

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{E} & \mathrm{F} \end{array} \\ \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{C} \\ \mathrm{D} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{F} \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & c & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & d \end{pmatrix} \end{array}$$

행렬 M^2

이 때, $a+b+c+d$의 값은?[11]

① 4　② 5　③ 6　④ 7　⑤ 8

[EBS수능특강 p.40 변형] 2013학년도 6평 유사

12. 2보다 큰 자연수 n에 대하여 $(-2)^{n-1}$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n이라 할 때,

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{q}{p}$이다. 이 때, $p+q$의 값을 구하시오.12)

[2013학년도 6월 평가원]

2 보다 큰 자연수 n 에 대하여 $(-3)^{n-1}$ 의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 의 값은? 13)

① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{5}{12}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[EBS수능특강 p.40 변형]

13. 실수 a의 n 제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(a,n)$이라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?(단, n은 2이상의 자연수이다.)14)

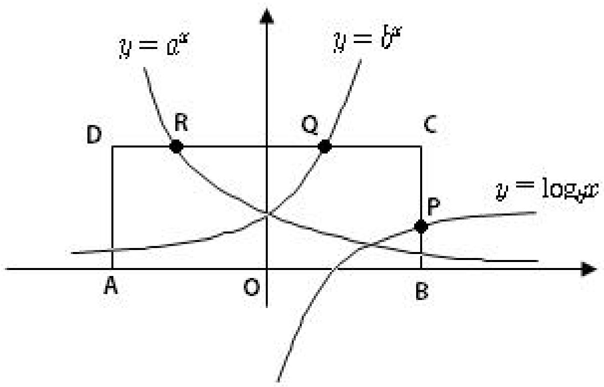
보 기

ㄱ. $f(a,2n)=0$이면 $a<0$이다.
ㄴ. $f(a+2,2n)=f(a,2n-1)$을 만족시키는 실수 a의 값이 존재한다.
ㄷ. $a<0$이면 $f(a,n+1)<f(a^2,n)$이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.59 변형]

14. 두 지수함수 $y=a^x$, $y=b^x$ 의 그래프가 그림과 같다. $A(-2,0)$, $B(2,0)$, $C(2,2)$, $D(-2,2)$를 꼭짓점으로 하는 직사각형 $ABCD$가 있다. $0<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$, $b>\sqrt{2}$ 인 두 실수 a, b에 대하여 함수 $y=\log_b x$의 그래프가 변 BC와 만나는 점을 P, 함수 $y=b^x$의 그래프가 변CD와 만나는 점을 Q, 함수 $y=a^x$의 그래프와 변CD와 만나는 점을 R이라 하자. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? 15)



ㄱ. $ab=1$이면 $\overline{CQ}=\overline{DR}$ 이다.
ㄴ. $ab<1$이면 $\overline{CP}<\overline{DR}$ 이다.
ㄷ. $ab>1$이면 $\overline{OP}>\overline{OR}$ 이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.59 변형] 2013학년도 6평 변형

15. 양수 a에 대하여 다음 조건을 만족시키는 가장 작은 자연수 n^a의 값을 $f(n)$이라 하자.

두 점 $(0,2)$, (a, n^a)를 지나는 직선의 기울기는 2보다 크거나 같다.

예를 들어 $f(3)=5$이다. $\sum_{n=2}^{30} f(n)$의 값을 구하시오. 16)

[EBS수능특강 p.70 변형]

16. 양의 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=\log x-[\log x]$라 할 때, 부등식 $f(n)< f\left(\frac{1}{2}\right)$를 만족하는 1000 미만의 자연수 n의 개수를 구하시오. 17)

[EBS수능특강 p.71 변형]

17. 양수 x에 대하여 $\log x$의 가수를 $f(x)$라 하자. a, b가 두 자리의 자연수일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?18)

[보 기]

ㄱ. $a<b<c$이면 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}>\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$이다.

ㄴ. $f(a^3)=f(a)$이면 $f(a^2)=0$이다.

ㄷ. $f(ab)=0$이면 $f(a)=0$ 또는 $f(b)=0$이다.

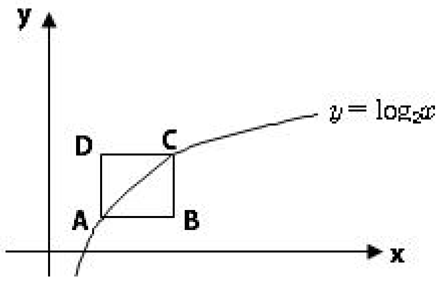
① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ,ㄷ ⑤ ㄱ,ㄴ,ㄷ

[EBS수능특강 p.80 변형] 2014예비시행 변형

18. 정의역이 $x \ge 1$이고 함숫값이 $\log x$ 의 지표인 함수를 $f(x)$ 라 하자. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=\frac{x}{n}-2$ 가 만나는 점의 개수가 2 가 되도록 하는 자연수 n 의 최솟값을 구하시오.19)

[EBS수능특강 p.83 신유형 변형]

19. 오른쪽 그림과 같이 정사각형 $ABCD$의 두 꼭짓점 A, C가 곡선 $y=\log_2 x$ 위에 있다. 정사각형 $ABCD$의 한 변의 길이를 a라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은?20)



▌보 기▌

ㄱ. 한 변이 x축 위에 있는 정사각형이 존재한다.
ㄴ. $a=2$인 정사각형은 1개 존재한다.
ㄷ. 제 1사분면 영역 안에 $a>1$인 정사각형이 있다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

[EBS수능특강 p.83 신유형 변형]

20. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=\log_2 x$의 점 $(n,\ \log_2 n)$과 곡선 $y=2^x$의 점 $(\log_2 n,\ n)$을 잇는 선분에 있는 점 중에서 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수를 a_n이라 하자. 이때 $\sum_{n=1}^{2013} a_n$의 값은?[21]

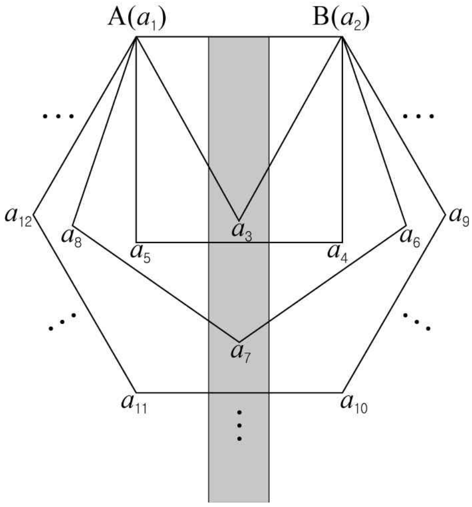
① 2000 ② 2003 ③ 2006 ④ 2009 ⑤ 2012

[EBS수능특강 p.108 변형]

21. 자연수 n에 대하여 $P(0,\ 4n)$을 지나는 직선과 원 $x^2+y^2=25n^2$이 만나서 생기는 선분 중 길이가 정수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f(n^2+n)} = \frac{b}{a}$라 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.(단, $a,\ b$는 서로소인 자연수이다.)[22]

[EBS수능특강 p.108 변형]

22. 그림과 같이 선분 AB를 한 변으로 하는 정n각형을 차례로 그린다. 등차수열 $\{a_k\}$에 대하여 선분 AB의 양 끝점에 각각 a_1, a_2를 대응시키고, 정삼각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 꼭짓점에 a_3, 정사각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 두 꼭짓점에 a_4, a_5를 대응시킨다. 이와 같은 과정을 계속하여 정n각형의 꼭짓점 중 점 A, B를 제외한 꼭짓점에 시계방향으로 a_k를 대응시키자. $a_1+a_2+a_3=3$, $a_2+a_5+a_6+a_7=28$일 때, 어두운 부분에 배열된 숫자들 중 정십삼각형의 꼭짓점에 대응되는 수를 구하시오.[23] [4점]



23. 실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)=2x-1$에 대하여 $\{a_n\}$을

$$a_1=3,\ a_{n+1}=(f\circ f\circ f)(a_n)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

으로 정의할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}\frac{1}{\log_2(a_k-1)\log_2(a_{k+1}-1)}=\frac{q}{p}$이다. 이 때, $p+q$의 값을 구하시오.[24]

[EBS수능특강 p.121 신유형 변형]

24. 자연수 n에 대하여 상용로그 $\log 2^n$의 지표를 a_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n = \begin{cases} 2 & (a_{n+1} > a_n) \\ 0 & (a_{n+1} = a_n) \end{cases} (n = 1, 2, 3 \cdots)$$

으로 정의한다. $\sum_{k=1}^{200} b_k$의 값은?

(단, $\log 2 = 0.3010$ 이다.)[25]

[EBS수능특강 p.118 변형] 2013학년도 수능 유사

25. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 4$이고, $a_{n+1} = n \cdot 2^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k}$ $(n \geq 1)$ 을 만족시킬 때, a_7을 구하시오. [26]

[EBS수능특강 p.135 신유형 변형]

26. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

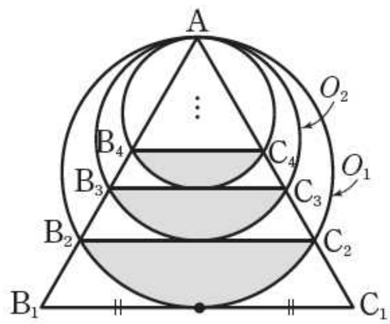
(가) $0 < a_n < \pi$

(나) $a_{n+1} \neq \dfrac{a_n}{2}$이고 $\cos 2a_{n+1} = \cos a_n$이다.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{q}{p}\pi$일 때, $10p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[27]

[EBS수능특강 p.146]

27. 그림과 같이 한 변의 길이가 $2\sqrt{3}$인 정삼각형 $\mathrm{AB_1C_1}$이 있다. 점 A를 지나고 선분 $\mathrm{B_1C_1}$의 중점에서 선분 $\mathrm{B_1C_1}$과 접하는 원 O_1이 두 선분 $\mathrm{AB_1}$, $\mathrm{AC_1}$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{C_2}$라 하자. 또, 점 A를 지나고 선분 $\mathrm{B_2C_2}$의 중점에서 선분 $\mathrm{B_2C_2}$와 접하는 원 O_2가 두 선분 $\mathrm{AB_2}$, $\mathrm{AC_2}$와 만나는 점을 각각 $\mathrm{B_3}$, $\mathrm{C_3}$이라 하자. 같은 방법으로 원 O_n과 점 B_{n+1}, C_{n+1}을 정해나갈 때, 원 O_n의 내부와 사다리꼴 $\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n\mathrm{C}_{n+1}\mathrm{B}_{n+1}$의 내부의 공통 부분의 넓이를 S_n이라 하자. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} S_n = \dfrac{p\pi - q\sqrt{3}}{7}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 자연수이다.)[28]



* EBS 수능특강 신유형, 고난도 변형문제 강좌를 수강하고자 하는 사람은 오르비클래스에 접속하세요.
* 수1, 수2, 적통, 기벡 각 약점 및 고난도 주제를 정리하고 하는 사람은 오르비클래스 신동훈샘의 "킬러문항 집중탐구 강좌"를 추천합니다. http://class.orbi.kr/group/3/info

---

1) 정답 : ⑤

ㄱ. $B^2 = B$ 의 양변에 B^{-1} 을 곱하면 $B^{-1}B^2 = B^{-1}B$ $\therefore B = E$ (참)

ㄴ. 조건 (가)에서 $A^2 = E$ 이므로

$(A-E)^2 = A^2 - 2A + E = -2(A-E) = E - 2A + E$

$(A-E)^3 = (A-E)^2(A-E) = -2(A-E)(A-E)2(A-E)^2 = (-2)^2(A-E)$

$(A-E)^4 = (A-E)^3(A-E) = (-2)^2(A-E)(A-E) = (-2)^2(A-E)^2 = (-2)^3(A-E)$

$\vdots$

$(A-E)^{2013} = (-2)^{2013}(A-E) = 2^{2012}(A-E)$

이때, 조건에서 행렬 A의 모든 성분의 합이 1이고, 단위행렬E의 모든 성분의 합은 2이므로 행렬 $A-E$의 모든 성분의 합은 $1-2=-1$이다.

따라서 행렬 $(A-E)^{2013}$의 모든 성분의 합은 -2^{2012}이다.

ㄷ. $(E-ABA)^2 = E - 2ABA + (ABA)^2$

이 때, $(ABA)^2 = (ABA)(ABA) = ABA^2BA = ABEBA = AB^2A = ABA$ 이므로

$(E-ABA)^2 = E - 2ABA + ABA = E - ABA$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

2) 정답 : 341

자연수 n에 대하여

$(A-E)^{n+1} = \left\{a_nA + (-1)^nE\right\}(A-E) = a_nA^2 - a_nA + (-1)^nA + (-1)^{n+1}E$이고, $A^2 = 3A$이므로

$(A-E)^{n+1} = \left\{2a_n + (-1)^n\right\}A + (-1)^{n+1}E$이다.

그러므로 $a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$ 이다.

양변을 2^{n+1}으로 나누면 $\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \dfrac{a_n}{2^n} + \dfrac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ 이므로

$$\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^k}{2^{k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{\left(-\frac{1}{4}\right)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore a_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3}$$

$$\therefore a_{10} = 341$$

3) 정답 : ①

자연수 n 에 대하여

$(A-E)^{n+1} = \left\{a_nA + (-1)^nE\right\}(A-E)$

$= a_nA^2 - a_nA + (-1)^nA + (-1)^{n+1}E$

$= 3a_nA - a_nA + (-1)^nA + (-1)^{n+1}E \; (\because A^2 = 3A)$

$= \left(2a_n + \boxed{(-1)^n}\right)A + (-1)^{n+1}E$

$= a_{n+1}A + (-1)^{n+1}E$

이다. 그러므로 $a_{n+1} = 2a_n + \boxed{(-1)^n}$ …… ㉠

이다. 따라서 2 이상인 자연수 n 에 대하여

$a_n + a_{n+1} = 2(a_{n-1} + a_n)$ 이다.

또한 $a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$ 이므로 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 은 초항이 2, 공비가 2 인 등비수열이다.

따라서 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n + a_{n+1} = \boxed{2^n}$ …… ㉡

이다. ㉠ 과 ㉡ 에 의해 $3a_n + (-1)^n = \boxed{2^n}$

이다. 따라서 $a_n = \dfrac{\boxed{2^n} + (-1)^{n+1}}{3}$ 이다.

4) 답 ⑤

ㄱ. $A+B=2E$에서 $A=2E-B$

$A^2 = 3A$에서 $(2E-B)^2 = 3(2E-B)$, $B^2 - B - 2E = 0$

$\therefore B^2 = B + 2E$ (참)

ㄴ. $A^2 - 3A = 0$ 에서 $(A-2E)(A-E) = 2E$

$\therefore (A-2E)^{-1} = \dfrac{1}{2}(A-E)$ (참)

ㄷ. $A - B = A - (2E - A) = 2(A-E)$

위 (ㄴ)에서 $(A-E)^{-1} = \dfrac{1}{2}(A-2E)$ 이므로 $(A-B)$의 역행렬은 존재한다.

따라서 $(A-B)^n$의 역행렬 존재. (참)

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

5) [정답] ⑤

ㄱ. (거짓) $A^2 + AB + BA + B^2 = O \Leftrightarrow (A+B)^2 = O$

(반례) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$이라 하면 $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = O$ 이 성립하지만

$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore AB \neq BA$

따라서 충분조건이 아니다.

ㄴ. (참) . $A^2 + 2BA + AB + 2B^2 = E$ 을 정리하면 $(A+2B)(A+B) = E$

즉, 행렬 $A+B$는 행렬 $A+2B$의 역행렬이므로 $(A+B)(A+2B) = (A+2B)(A+B)$

$\therefore AB = BA$ 따라서 충분조건이다.

ㄷ. (참) $(A-B)^2 = B$에서 양변의 오른쪽에 $(A-B)$를 곱하면 $(A-B)^3 = B(A-B)$

$(A-B)^2 = B$에서 양변의 왼쪽에 $(A-B)$를 곱하면 $(A-B)^3 = (A-B)B$ 이다.

따라서 $B(A-B) = (A-B)B$ 이므로 $AB = BA$ 이다.

6) [정답] ②

ㄱ. (참) $2AB - A^2 = E$ 에서 $A(2B-A) = E$ 이므로 $A(2B-A) = (2B-A)A = E$ 이다. (아래 참고 내용)

따라서 $2AB - A^2 = 2BA - A^2$ 이므로 $AB = BA$

<참고> $AX=E$ 이면 $\det(AX)=\det(A)\det(X)=1$ 이므로 A^{-1} 존재한다.

따라서 $AX=E$ 의 양변에 A^{-1}를 곱하면 $X=A^{-1}$

$\therefore XA=A^{-1}A=AX=E$

ㄴ.(참) $2BA-B^2=A$ 의 양변의 오른쪽에 A^{-1} 를 각각 곱하면

$2B-B^2A^{-1}=E$

$B(2E-BA^{-1})=E$

따라서 $B(2E-BA^{-1})=(2E-BA^{-1})B=E$

$2B-B^2A^{-1}=2B-BA^{-1}B$

$\therefore B^2A^{-1}=BA^{-1}B$

$\therefore BA^{-1}=A^{-1}B$ 이므로 $AB=BA$

ㄷ. (거짓) $A^2+2AB+2AB+4B^2=E \quad \Leftrightarrow (A+2B)^2=E$

$(A+2B)^2=E$ 으로부터 $AB=BA$를 도출하는 것은 불가능.

즉, $(A+2B)^2=E$ 이라고 해서 $AB=BA$ 이라는 보장은 없다. 따라서 반례 존재.

(반례) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$이라 하면 $(A+2B)^2=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}=E$가 성립하지만

$AB=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$

$BA=\left\{\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\right\}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}$

$\therefore AB\neq BA$

그러므로 $AB=BA$ 가 성립하기 위한 충분조건인 것은 ㄱ, ㄴ 이다.

7) 답 ③

행렬 $A_n=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\,cos\frac{n}{4}\pi & 1-\cos\frac{n}{4}\pi\\ 1 & -1+\cos\frac{n}{4}\pi\end{pmatrix}$에서

$\det(A)=\left(\sqrt{2}\,cos\frac{n}{4}\pi\right)\left(-1+\cos\frac{n}{4}\pi\right)-\left(1-\cos\frac{n}{4}\pi\right)\cdot 1=\sqrt{2}\,cos^2\frac{n}{4}\pi-(\sqrt{2}-1)\cos\frac{n}{4}\pi-1$

$=\left(\sqrt{2}\,cos\frac{n}{4}\pi+1\right)\left(\cos\frac{n}{4}\pi-1\right)$

$\det(A)=0$ 인 경우에는 연립일차방정식 $A_n\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$이 나타내는 두 직선이 평행하므로 연립일차방정식의 해는 존재하지 않는다.

한편, $\det(A)\neq 0$인 경우에는 행렬 A_n의 역행렬이 존재하므로 연립일차방정식은 오직 한 쌍의 해를 갖는다.

(i) $\det(A)=0$인 경우

$\cos\frac{n}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 또는 $\cos\frac{n}{4}\pi=1$

$\cos\frac{n}{4}\pi=-\frac{1}{\sqrt{2}}$에서 $\frac{n\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, 2\pi+\frac{3\pi}{4}, 2\pi+\frac{5\pi}{4}$ 이므로 $f(3)=f(5)=f(11)=f(13)=0$

$\cos\frac{n}{4}\pi=1$에서 $\frac{n\pi}{4}=2\pi$ 이므로 $f(8)=0$

(ii) $\det(A)\neq 0$인 경우

$\cos\frac{n}{4}\pi \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ 이고 $\cos\frac{n}{4}\pi \neq 1$

$\therefore f(1)=f(2)=f(4)=f(6)=f(7)=f(9)=f(10)=f(12)=1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\sum_{k=1}^{13} f(k)=8$

8) 답 ⑤

$\det(A^3)=\{\det(A)\}^3=0$이므로 $\det(A)=ad-bc=0$

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$라 두면 $ad-bc=0$ 이므로 케일리-해밀턴 정리에 의해 $A^2=(a+d)A \quad \cdots$①

$O=A^3=(a+d)A^2=(a+d)^2 A$

$\therefore a+d=0$ 또는 $A=O$

ㄱ. $A^3=O$ 이면 $a+d=0$ 이거나 $A=O$이다.

그런데 $a+d=0$인 경우, $A\neq O$이어도 된다. (거짓)

ㄴ. $a+d=0$인 경우, ①식에 대입하면 $A^2=O$ 성립

$A=O$인 경우, 항상 $A^2=O$ (참)

ㄷ. $A^3=O$에서 $A^4=O$이므로

$A^4-E=-E \Leftrightarrow (A^2+E)(A^2-E)=-E$

$\Leftrightarrow (A^2+E)(E-A^2)=E$

$\therefore (A^2+E)^{-1}=E-A^2$

따라서 행렬 A^2+E의 역행렬이 존재한다. (참)

따라서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

9) 답 ②

조건 (가)에서 $B^2=E$이므로 $B^{-1}=B \cdots$ ㉠

한편, $(A^2B^{-1})^{-1}=B(A^2)^{-1}$이므로 조건 (나)에서 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}B=B(A^2)^{-1} \cdots$ ㉡

㉡의 양변의 오른쪽에 B^{-1}를 각각 곱하여 정리하면

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=B(A^2)^{-1}B^{-1}=(BA^2B^{-1})^{-1}$

그런데 $BA^2B^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$BA^{200}B^{-1}=(BA^2B^{-1})^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{100}$ 이다.

그런데, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -n & 0 \end{pmatrix}$ 이고,

$BA^{200}B=(BA^2B^{-1})^{100}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}$ 이므로

행렬 $BA^{200}B^{-1}$의 모든 성분의 합은 -98

10) [정답] ⑤

ㄱ. (참) $A^2-A+E=O$의 양변의 오른쪽에 B를 각각 곱하면

$A^2B-AB+B=O$

이때, $AB=E$이므로 $A-E+B=O$ $\therefore A+B=E$

ㄴ.(참) $A = E - B$ 이므로 $A^2 - A + E = E - 2B + B^2 - E + B + E = 0$

$B^2 - B + E = O$ 이므로 $B^2 = B - E$

ㄷ. (참) $A^2 - A + E = O$의 양변에 $(A + E)$를 곱하면

$(A + E)(A^2 - A + E) = O$

$A^3 = -E, \quad A^6 = E$

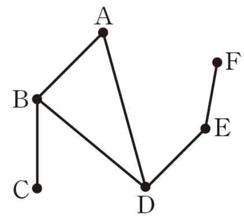
마찬가지로 $B^2 - B + E = O$ 이므로 $B^3 = -E, \quad B^6 = E$

$A^{100} + B^{100} = -A - B = -E$

11) 답 ③

행렬 M^2 의 $(5,\ 5)$ 성분이 2 이므로 꼭짓점 E 에 연결된 변의 개수가 2 이다.

따라서 행렬 M 의 제 5 행의 모든 성분의 합은 2 이므로 $a = 1$ 이다.



또한, 꼭짓점 B 에 연결된 변의 개수가 3 이므로 $b = 3$

꼭짓점 C 에 연결된 변의 개수가 1 이므로 $c = 1$

꼭짓점 F 에 연결된 변의 개수가 1 이므로 $d = 1$

$\therefore a + b + c + d = 1 + 3 + 1 + 1 = 6$

12) 정답 : 25

n	$(-2)^{n-1}$	a_n
3	4	1
4	-8	0
5	16	1
6	-32	0

$\therefore a_{2k+1} = 1,\ a_{2k} = 0$

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \cdots \quad = \frac{1}{3^3} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{27} \times \frac{9}{8} = \frac{1}{24}$ 이므로 $p + q = 25$

13) ①

$n \geq 3$ 에서 $(-3)^{\frac{n-1}{n}} = (-3) \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{-3}}$ 이 실수이므로$n = 2k + 1$ 일 때, $a_n = 1$

$n = 2k + 2$ 일 때, $a_n = 0$ (단, k 는 자연수)

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{6}$

14) 답 ⑤

임의의 실수 a에 대하여 a의 n제곱근 중 실수인 것의 개수는 다음과 같다. ($x^n = a$의 실근의 개수)

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n이 짝수	2	1	0
n이 홀수	1	1	1

ㄱ. $2n$은 짝수이므로 $f(a,2n)=0$이면 $a<0$이다.

ㄴ. $2n-1$은 홀수이므로 임의의 실수 a에 대하여 $f(a,2n-1)=1$
즉, $f(a+2,2n)=1$이어야 하므로 $a+2=0$ $\therefore a=-2$

ㄷ. (ⅰ) n이 홀수일 때, $f(a,n+1)=0$, $f(a^2,n)=1$ 이므로 $f(a,n+1)<f(a^2,n)$ 성립
(ⅱ) n이 짝수일 때, $f(a,n+1)=1$, $f(a^2,n)=2$이므로 $f(a,n+1)<f(a^2,n)$ 성립

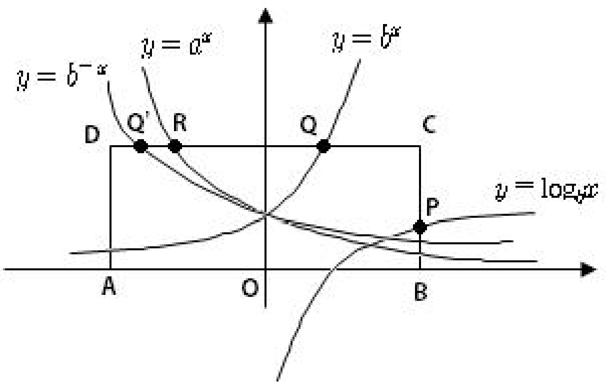
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

15) [정답] ③

ㄱ. $b=\dfrac{1}{a}$ 이므로 $b^x=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x=a^{-x}$

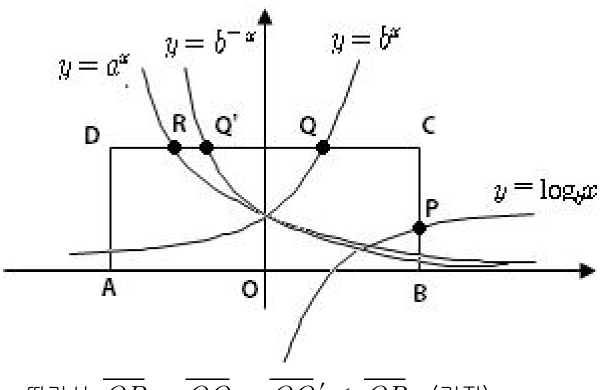
따라서 $y=b^x$ 와 $y=a^x$은 y축 대칭이므로 $\overline{CQ}=\overline{DR}$ (참)

ㄴ. $ab<1$ 이므로 $0<a<\dfrac{1}{b}<1$ 이므로 $y=b^{-x}$ 그래프는 아래와 같다.



따라서 $\overline{CP}=\overline{CQ}=\overline{DQ'}<\overline{DR}$ (참)

ㄷ. $ab>1$ 이므로 $1>a>\dfrac{1}{b}$ 이므로 $y=b^{-x}$ 그래프는 아래와 같다.



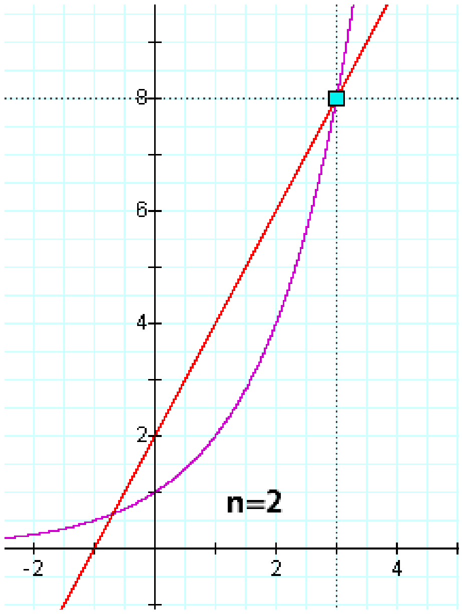
따라서 $\overline{OP}=\overline{OQ}=\overline{OQ}'<\overline{OR}$ (거짓)

16) 정답 : 99

$\dfrac{n^a-2}{a-0}\geq 2$ 이므로 $n^a\geq 2a+2$

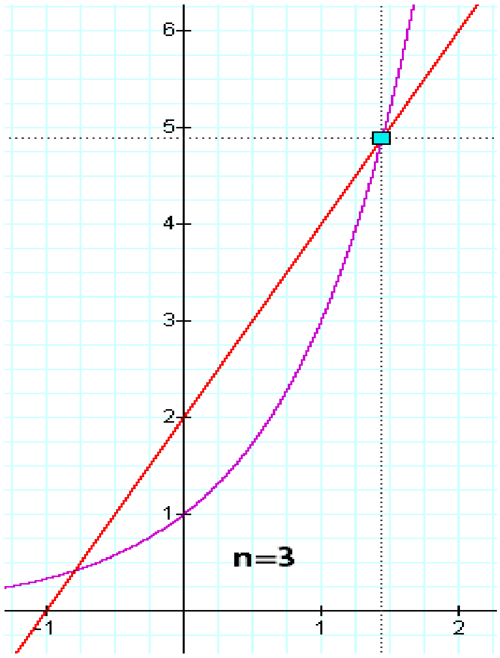
두 함수 $y=n^x$, $y=2x+2$에서 밑 n이 커지면 두 함수의 교점의 y좌표는 점점 작아진다.

$n=2$일 때, $2^a\geq 2(a+1)$ $\therefore a\geq 3$, $2^a\geq 8$ 이므로 $f(2)=8$

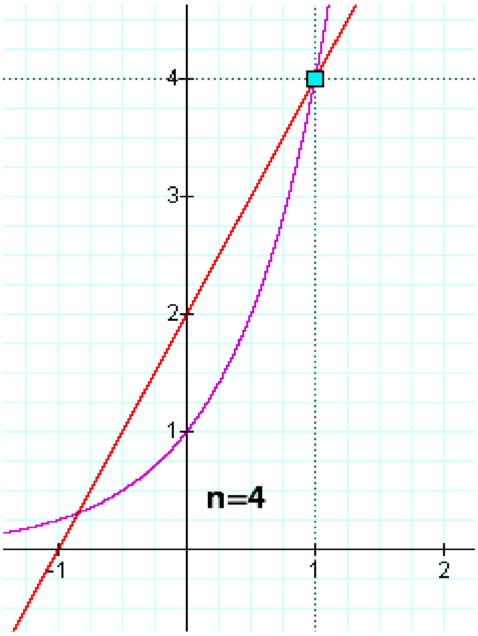


$n=3$일 때,

$3^a \geq 2(a+1)$ 에서 $a=\dfrac{3}{2}$이면 우변 $3^{\frac{3}{2}}=3\sqrt{3}=5.4$, 좌변 $=2\left(\dfrac{3}{2}+1\right)=5$ 이므로 $f(3)=5$



$n=4$일 때, $4^a=2^{2a} \geq 2(a+1)$ $\therefore a \geq 1$, $4^a \geq 4$ 이므로 $f(4)=4$



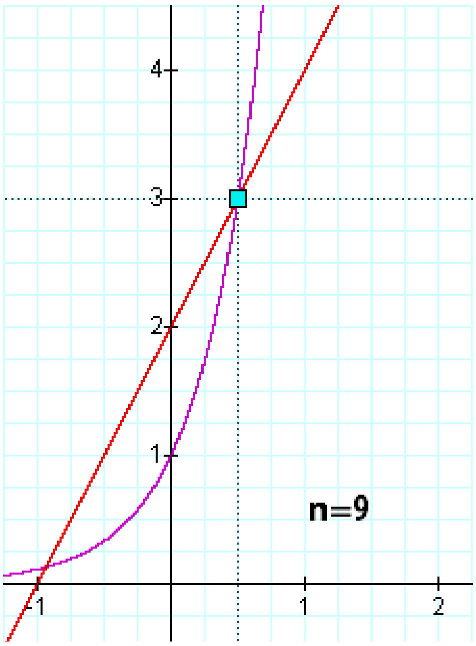
n커지면 $n^x = 2(x+1)$의 근 x과 $y = n^x$ 값 모두 작아진다.

이 때, $y = 2(x+1)$에서 $y = 3$일 때, $x = \frac{1}{2}$

교점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ 일 때 부등식 $n^{\frac{1}{2}} \geq 2a+2 = 3$ 의 해집합은 $n \geq 9$

$\therefore f(4) = \cdots = f(8) = 4$

$f(9) = f(10) = \cdots = f(30) = 3$



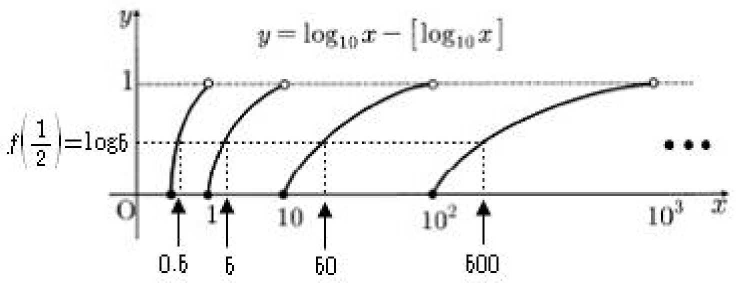
$$\sum_{n=2}^{30} f(n) = 8+5+4\times 5+3\times 22 = 99$$

17) [정답] 444

$f\left(\frac{1}{2}\right)$은 $\log\frac{1}{2}$의 가수이므로

$\log\frac{1}{2} = -\log 2 = -1 + (1 - \log 2) = -1 + \log\frac{10}{2} = -1 + \log 5$ 에서 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \log 5$

상용로그의 가수 그래프 : $y = \log_{10}x - [\log_{10}x]$



$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log 5$와 가수가 같으므로 숫자배열이 같은 수를 찾으면 $0.5,\ 5,\ 50,\ 500, \cdots$이다.

이때 가수가 $\log 5$보다 작은 수들은

① 한 자리수 : $1,\ 2,\ 3,\ 4$

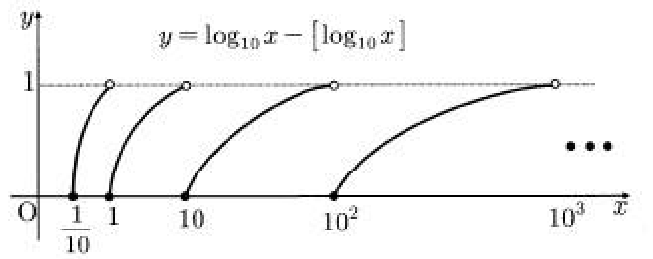
② 두 자리수 : $10,\ 11,\ 12,\ \cdots, 49$

③ 세 자리수 : $100,\ 101, 102,\ \cdots, 499$

따라서 구하는 개수는 $4 + 40 + 400 = 444$개다.

18) [정답] ③

ㄱ. 상용로그의 가수 그래프 : $y = \log_{10}x - [\log_{10}x]$



함수 $f(x)$는 위로 볼록하므로 $a < b < c$이면 $\frac{f(a) - f(b)}{a - b} > \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$이다.(참)

ㄴ. 상용로그의 가수가 같으므로 두 자연수 a, a^3은 숫자배열이 같다.

세제곱해서 숫자배열이 같은 두자리 자연수는 10뿐이다. $\therefore a = 10$

따라서 $\log a^2 = \log 10^2$이므로 $f(a^2) = 0$이다. (참)

ㄷ. $f(ab) = 0$ 이면 $ab = 10^n$ 이다.

두 수의 곱이 10의 거듭제곱꼴이라고 해서, a 또는 b가 10의 거듭제곱꼴이라고 볼수는 없다. (거짓)

(반례) $a = 20,\ b = 50$일 때, $ab = 10^3$이므로 $\log ab = \log 10^3 = 3$에서 $f(ab) = 0$이지만

$f(a) = \log 2 \neq 0,\ f(b) = \log 5 \neq 0$(거짓)

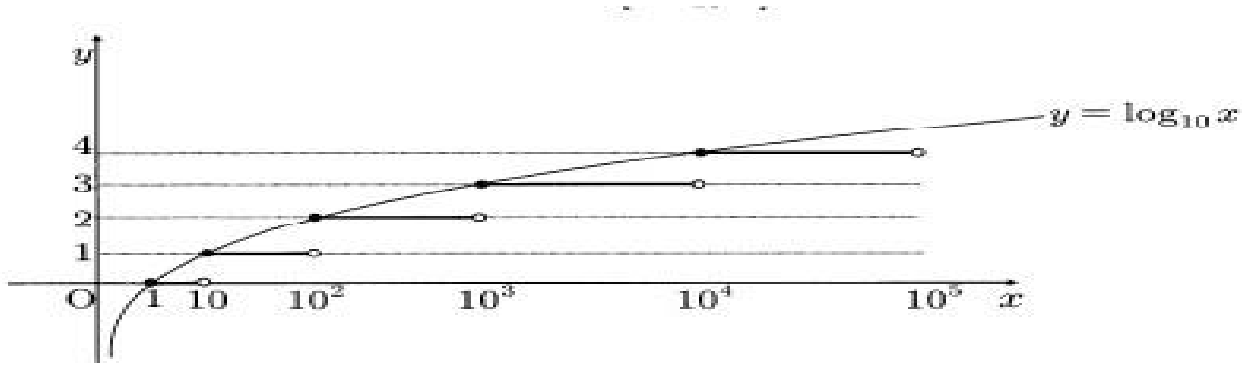
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

19) 정답: ⑤

$f(x) = [\log x]$

$[\log x] = k$ (k는 정수) 라 하면, $k \le \log x < k+1$ $\qquad \therefore 10^k \le x < 10^{k+1}$

$f(x) = [\log x]$, $y = \dfrac{x}{n} - 2$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



자연수 n의 최소일 때, 직선의 기울기 $\dfrac{1}{n}$은 최대가 된다.

직선 $y = \dfrac{x}{n} - 2$ 이 $(10,\ 1)$ 을 지날 때부터 $(10,\ 0)$ 을 지나기 전까지 $y = f(x)$ 와 교점이 2 가 된다.

지나는 점의 좌표	기울기 $\dfrac{1}{n}$	n
$(10,\ 1)$	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{10}{3}$
$(10,\ 0)$	$\dfrac{1}{5}$	5
$(100,2)$	$\dfrac{1}{25}$	25

따라서 교점의 개수가 2개가 되도록 하는 자연수 n의 최솟값은 4이다.

20) 답 ③

점 A의 x좌표를 t라 하면 정사각형 $ABCD$의 각 꼭짓점의 좌표는

$A(t,\ \log_2 t)$, $B(t+a,\ \log_2 t)$, $C(t+a,\ \log_2(t+a))$, $D(t, \log_2(t+a))$

이때, 정사각형의 한 변의 길이가 a이므로

$\log_2(t+a) - \log_2 t = a$,

$\log_2\left(1 + \dfrac{a}{t}\right) = a$

$2^a = 1 + \dfrac{a}{t}$ $\qquad \therefore t = \dfrac{a}{2^a - 1}$

ㄱ. $\log_2 t = 0$ 일 때, $t = 1$, 이때 $a = 1$

따라서 $t = 1$일 때 두 꼭짓점 A, B가 x축 위에 있으므로 한 변이 x축 위에 있는 정사각형이 존재한다.

ㄴ. $a = 2$일 때, $t = \dfrac{2}{2^2 - 1} = \dfrac{2}{3}$

따라서 $a = 2$인 정사각형은 1개 존재한다.

ㄷ. $t = \dfrac{a}{2^a - 1}$ 에서 $a > 1$이면 $2^a - 1 > a$이므로 $2^t = \dfrac{a}{2^a - 1} < 1$ $\qquad \therefore t < 1$

따라서 $a > 1$인 정사각형은 제1사분면 영역 안에 있지 않다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

21) 정답 ②

$(n,\ \log_2 n)$과 $(\log_2 n,\ n)$을 잇는 직선의 방정식은 $y=-x+n-\log_2 n$

따라서 선분 위의 점 중 $x,\ y$좌표가 모두 정수인 점은 $\log_2 n$이 정수일 때이므로 $n=2^k$ 일 때이다.

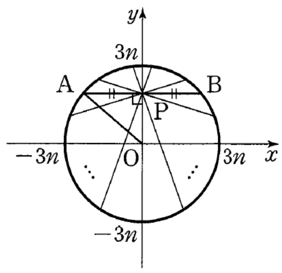
즉, $n=2^k$일 때, $a_n=2^k-k+1$이고 $n\neq 2^k$일 때, $a_n=0$이다. (k는 음이 아닌 정수)

선분에 있는 점의 개수 a_n은 $\log_2 n \le x \le n$ 즉 $k \le x \le 2^k$에 있는 정수 x의 개수와 같으므로 $a_n=2^k-k+1$

$1 \le n \le 2011$일 때 $0 \le k \le 10$이므로

$$\sum_{n=1}^{2013} a_n=\sum_{k=0}^{10}\left(2^k-k+1\right)=\frac{2^{11}-1}{2-1}-\frac{10\times 11}{2}+11=2003$$

22) 답 : 9



점 $P(0, 4n)$을 지나는 직선이 원과 만나는 점을 A, B라 하자.
현 AB의 길이는 원의 지름일 때 최대이고, 이때의 현 AB의 길이는 $\overline{AB}=5n$ 현 AB의 길이는 원의 지름과 수직으로 만날 때, 최소이고, 이때의 현 AB의 길이는 $\overline{AB}=3n$

$\therefore 6n \le \overline{AB} \le 10n$

한편, 점 P를 중심으로 현 AB를 회전시키면 $6n$과 $10n$사이의 모든 실수를 길이로 하는 현이 2번씩 나타나므로 현의 길이가 $6n, 10n$인 것이 각각 1개, 현의 길이가 $6n+1, 6n+2, \cdots, 10n-1$인 것이 각각 2개이다.

따라서 자연수 n에 대하여 길이가 정수인 현 AB의 개수는 $2+2\{10n-1-6n\}=8n$(개)

즉, $f(n)=8n$이므로 $f(n^2+n)=8(n^2+n)=8n(n+1)$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f(n^2+n)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{8n(n+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{8}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{8}$$

$\therefore a+b=8+1=9$

23) 정답 123

등차수열 $\{a_k\}$의 공차를 d라 하면 $3a_1+3d=3,\ 4a_1+16d=28$

$a_1=-1,\ d=2$이고, $a_n=-1+2(n-1)=2n-3$

어두운 영역에 배열된 수열 $a_3,\ a_7,\ a_{15},\ a_{27}\ \cdots$을 $\{a_{b_k}\}$라 하면

$$b_k=3+\sum_{l=1}^{k-1}4l=2k(k-1)+3\text{이고}$$

a_3	a_7	a_{15}	a_{27}	$\cdots$	a_k
3각형	5각형	7각형	9각형	$\cdots$	13각형

정십삼각형에서 어두운 부분에 대응되는 항은 $k=6$일 때이고, 이 때 $b_k = 2 \cdot 6 \cdot 5 + 3 = 63$

따라서 $a_{63} = 2 \times 63 - 3 = 123$

24) 답 121

$$a_{n+1} = (f \circ f \circ f)(a_n) = f(f(f(a_n))) = f(f(2a_n - 1))$$
$$= f(4a_n - 3) = 8a_n - 7$$

$a_{n+1} = 8a_n - 7$을 변형하면 $a_{n+1} - 1 = 8(a_n - 1)$

수열 $\{a_n - 1\}$이 공비가 8인 등비수열이므로

$$a_n - 1 = (a_1 - 1) \cdot 8^{n-1} = 2 \cdot 8^{n-1} = 2^{3n-2}$$

$$\therefore a_n = 2^{3n-2} + 1$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{\log_2(a_k - 1)\log_2(a_{k+1} - 1)} = \sum_{k=1}^{30} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$$
$$= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{30}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left\{\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{88} - \frac{1}{91}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{91}\right) = \frac{30}{91}$$

25) 정답 : 120

$$b_{200} = \begin{cases} 2 & (a_{201} > a_{200}) \\ 0 & (a_{201} = a_{200}) \end{cases}$$

$\log 2^{201}$의 지표가 a_{201} 이고, $\log 2^{201} = 201 \times \log 2 = 201 \times 0.3010 = 60.5010$ 이므로

2^{201}은 61자리의 자연수이다.

$1 \leqq k \leqq 60$ 인 모든 자연수 k에 대하여 2^n 이 k자리의 수이고, 2^{n+1}이 $k+1$자리의 수인 자연수 n이 반드시 하나씩 대응한다.

따라서 $a_{n+1} > a_n$ 을 만족하는 자연수 n의 개수는 60이므로 $b_n = 1$을 만족하는 자연수 n의 개수는 60이고, 나머지 n에 대해서는 $b_n = 0$이다.

$$\therefore \sum_{k=1}^{200} b_k = 60 \times 2 = 120$$

26)

$$a_n = \begin{cases} 4 & (n=1) \\ n(2^{n-1}+1) & (n \geq 2) \end{cases}, \quad a_7 = 455$$

27) 답 32

$\lim_{n\to\infty} a_n = A$ 라 하면 $\cos 2A = \cos A$ $\quad \therefore 2A = 2\pi - A$ $\quad \therefore A = \frac{2\pi}{3}$

$\therefore 10p + q = 30 + 2 = 32$

[별해]

$0 < a_n < \pi$, $0 < 2a_{n+1} < 2\pi\,(\because 0 < a_{n+1} < \pi)$이고 $2a_{n+1} \neq a_n$이므로

$\cos 2a_{n+1} = \cos a_n \Leftrightarrow 2a_{n+1} = 2\pi - a_n$

$\therefore a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \pi$

이때, $a_{n+1} - \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2\pi}{3}\right)$이므로

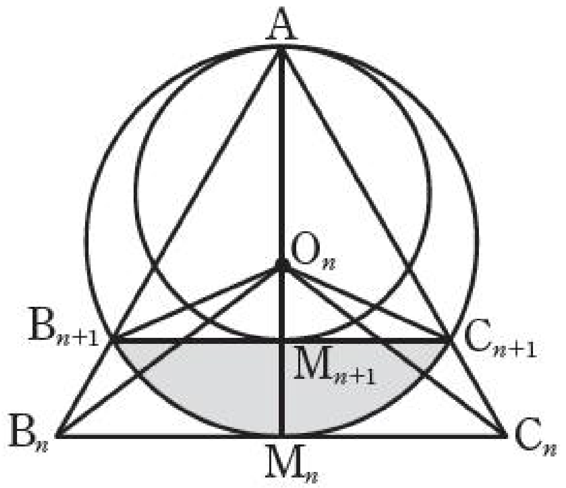
수열 $\left\{a_n - \frac{2\pi}{3}\right\}$는 첫째항이 $a_1 - \frac{2\pi}{3}$, 공비가 $-\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

따라서 $a_n - \frac{2\pi}{3} = \left(a_1 - \frac{2\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$이므로 $a_n = \left(a_1 - \frac{2\pi}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2\frac{\pi}{3}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ 이므로 $\therefore 10p + q = 30 + 2 = 32$

28) 답 21

선분 B_nC_n의 중점을 M_n이라 하고, n번째 그린 원의 중심을 O_n이라 하자.



$\overline{AM_1} = 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3$이므로 $\frac{1}{2} \times \overline{AM_1} = \frac{3}{2}$이다.

정삼각형 $AB_{n+1}C_{n+1}$은 원 O_n에 내접하므로 $\angle B_{n+1}O_nC_{n+1} = \frac{2}{3}\pi$,

① $S_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{16}$

② 무한등비급수의 공비 = $\left(\frac{\overline{AM_2}}{\overline{AM_1}}\right)^2 = \left(\frac{\overline{AO_1} + \overline{O_1M_2}}{3}\right)^2 = \left(\frac{\frac{3}{2} + \frac{3}{4}}{3}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\frac{12\pi - 9\sqrt{3}}{16}}{1 - \frac{9}{16}} = \frac{12\pi - 9\sqrt{3}}{7}$$

$\therefore p + q = 12 + 9 = 21$