www.ebs*i*.co.kr

수능특강 수학영역 **미적분**

정답과 풀이

01 수열의 극한

유제 본문 5~11쪽

1 ① 2 ④ 3 ③ 4 ② 5 6
6 ③ 7 2 8 ②

Level 1 기초 연습 본문 12쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ③ 4 ⑤ 5 ①

Level 2 기본 연습 본문 13쪽

1 ④ 2 ① 3 11 4 ① 5 36

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ⑤ 2 ① 3 ④ 4 29

02 급수

유제 본문 17~23쪽

1 ③ 2 ② 3 1 4 ③ 5 17
6 ③ 7 ④

Level 1 기초 연습 본문 24쪽

1 ① 2 ③ 3 ① 4 ③ 5 ②

Level 2 기본 연습 본문 25쪽

1 ③ 2 ③ 3 ④ 4 ②

Level 3 실력 완성 본문 26쪽

1 3 2 8 3 ④ 4 ①

03 여러 가지 함수의 미분

유제 본문 29~37쪽

1 ④ 2 ② 3 ⑤ 4 ② 5 ③
6 ③ 7 ② 8 ③ 9 ① 10 ②

Level 1 기초 연습 본문 38~39쪽

1 ④ 2 ③ 3 ③ 4 1 5 ④
6 ⑤ 7 2 8 ⑤ 9 ⑤ 10 16

Level 2 기본 연습 본문 40~41쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ② 4 24 5 ④
6 ① 7 ④ 8 6

Level 3 실력 완성 본문 42쪽

1 ① 2 18 3 ④

04 여러 가지 미분법

유제 본문 45~53쪽

1 ④ 2 ① 3 ② 4 ⑤ 5 ④
6 ② 7 ④ 8 ① 9 ② 10 ③

Level 1 기초 연습 본문 54쪽

1 ② 2 ① 3 ③ 4 ② 5 ②

Level 2 기본 연습 본문 55쪽

1 ① 2 ⑤ 3 ④ 4 4

Level 3 실력 완성 본문 56쪽

1 ⑤ 2 ② 3 ⑤

05 도함수의 활용

유제 본문 59~69쪽

1 ④	2 ③	3 ②	4 ①	5 ④
6 4	7 4	8 ④	9 ②	10 ①
11 5				

Level 1 기초 연습 본문 70쪽

1 ④	2 ②	3 ③	4 ③	5 ①

Level 2 기본 연습 본문 71쪽

1 ①	2 ③	3 ⑤	4 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 72쪽

1 4	2 ①	3 ⑤

07 정적분의 활용

유제 본문 89~97쪽

1 ②	2 9	3 ④	4 9	5 ②
6 23	7 ②	8 12		

Level 1 기초 연습 본문 98~99쪽

1 ③	2 ②	3 ①	4 4	5 ②
6 ②	7 9	8 ②	9 ③	10 ②

Level 2 기본 연습 본문 100~101쪽

1 ②	2 ③	3 21	4 ④	5 105
6 ①	7 16	8 ⑤		

Level 3 실력 완성 본문 102쪽

1 ④	2 9	3 5	4 6

06 여러 가지 적분법

유제 본문 75~81쪽

1 14	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 8
6 ⑤	7 ③	8 ⑤		

Level 1 기초 연습 본문 82~83쪽

1 ④	2 ②	3 ①	4 ④	5 7
6 ③	7 ②	8 ①		

Level 2 기본 연습 본문 84~85쪽

1 ③	2 32	3 ①	4 256	5 ②
6 12	7 ⑤	8 ③		

Level 3 실력 완성 본문 86쪽

1 ①	2 ②	3 16

01 수열의 극한

유제 본문 5~11쪽

1 ①	2 ④	3 ③	4 ②	5 6
6 ③	7 2	8 ②		

1 $n\geq 100$일 때,

$a_{100}=100^0+1$

$a_{101}=101^{-1}+1=\dfrac{1}{101}+1$

$a_{102}=102^{-2}+1=\dfrac{1}{102^2}+1$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 1에 수렴한다.

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$

답 ①

2 수열 $\{a_n\}$이 수렴하므로

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=k$ (k는 상수)라 하면

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}=k$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}=k$

그러므로 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n+2=\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}\times\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$에서

$k+2=k\times k$

$k^2-k-2=0$

$(k+1)(k-2)=0$

$k=-1$ 또는 $k=2$

따라서 모든 k의 값의 합은 1이다.

답 ④

3 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+an}-n)$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+an}-n)(\sqrt{n^2+an}+n)}{\sqrt{n^2+an}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an}{\sqrt{n^2+an}+n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a}{\sqrt{1+a\times\dfrac{1}{n}}+1}$

$=\dfrac{a}{2}=3$

따라서 $a=6$

답 ③

4 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}-2n}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-2}{1+\dfrac{1}{n}}$

$=\dfrac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-2}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}$

$=\dfrac{1-2}{1+0}=-1$

답 ②

5 $n+2<(2n+1)a_n<6n+5$에서

$\dfrac{n+2}{2n+1}<a_n<\dfrac{6n+5}{2n+1}$

이때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6n+5}{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6+\dfrac{5}{n}}{2+\dfrac{1}{n}}=\dfrac{6+5\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}=3$

그러므로

$\dfrac{1}{2}\leq\lim\limits_{n\to\infty} a_n\leq 3$

즉, $\dfrac{1}{2}\leq k\leq 3$

따라서 가능한 자연수 k는 1, 2, 3으로 모든 k의 값의 합은 6이다.

답 6

6 $\dfrac{2n+3}{n+1}\leq 2a_n\leq a_n+\dfrac{n+4}{n+1}$이므로

$\dfrac{2n+3}{n+1}\leq 2a_n$에서

$a_n\geq\dfrac{2n+3}{2(n+1)}$ …… ㉠

$2a_n\leq a_n+\dfrac{n+4}{n+1}$에서

$a_n\leq\dfrac{n+4}{n+1}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$\dfrac{2n+3}{2(n+1)}\leq a_n\leq\dfrac{n+4}{n+1}$

이때

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{n}}{2+\dfrac{2}{n}}=\dfrac{2+3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}{2+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}}=1$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+4}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1+4\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=1$$

이므로 $\lim_{n\to\infty}a_n=1$

답 ③

7 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}+4\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2^n}+\frac{1}{6^n}}{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^n}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{3^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\times3^n+1}{\frac{1}{4}\times3^n+\frac{4}{3}\times2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{4}+\frac{4}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{1}{4}+\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

$$=2$$

답 2

8 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 2이고 공비가 3이므로

$a_n=2\times3^{n-1}$

또 $S_n=\frac{2(3^n-1)}{3-1}=3^n-1$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{a_n+a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{2\times3^{n-1}+2\times3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{\frac{2}{3}\times3^n+2\times3^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}+2}$$

$$=\frac{1-\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{8}{3}}$$

$$=\frac{3}{8}$$

답 ②

Level 1 기초 연습

본문 12쪽

1 ①	2 ⑤	3 ③	4 ⑤	5 ①

1 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{\sqrt{4n^2+3n}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{3}{n}}+1}$$

$$=\frac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{3}{n}}+1}=\frac{1}{3}$$

답 ①

2 $$\lim_{n\to\infty}\frac{(1-n)^3+n^3}{n^2+2n+3}=\lim_{n\to\infty}\frac{(-n^3+3n^2-3n+1)+n^3}{n^2+2n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-3n+1}{n^2+2n+3}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}$$

$$=\frac{3-3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=3$$

답 ⑤

3 $$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2+2}-n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n(\sqrt{n^2+2}-n)(\sqrt{n^2+2}+n)}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2+2}+n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}$$

$$=\frac{2}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+1}=1$$

답 ③

4 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+2}\sum_{k=1}^{n}k+\frac{1}{n^3+3}\sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2+2}\times\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^3+3}\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2+2}+\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3+3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}}+\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1+\frac{3}{n^3}}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}+\frac{1}{6}\times\frac{\left(1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}}$$

$$=\frac{1}{2}\times1+\frac{1}{6}\times2=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

답 ⑤

5 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}\times3^{n+1}}{6^{n+1}+5^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{-1}\times2^n\times3\times3^n}{6\times6^n+5^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{-1}\times3}{6+\left(\frac{5}{6}\right)^n}=\frac{2^{-1}\times3}{6+\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

$$=\frac{2^{-1}\times3}{6}=\frac{1}{4}$$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 13쪽

1 ④	2 ①	3 11	4 ①	5 36

1 (i) $p=1$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n+2}{n^3+n+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{4}{n^3}}=0$$

이때 q는 자연수이므로 만족시키지 않는다.

(ii) $p=2$일 때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+2}{n^3+n^2+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{4}{n^3}}=3$$

그러므로 $q=3$

(iii) $p\geq3$일 때

분자의 차수는 $p+1$, 분모의 차수는 p이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^{p+1}+n+2}{n^p+n^3+4}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+\frac{n}{n^p}+\frac{2}{n^p}}{1+\frac{n^3}{n^p}+\frac{4}{n^p}}=\infty$$

이때 q는 자연수이므로 만족시키지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 $p=2$, $q=3$이므로

$p+q=2+3=5$

답 ④

2 $a_n+b_n=c_n$이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=1$

또 $(a_n)^2-(b_n)^2=d_n$이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}d_n=3$

이때 $c_n=a_n+b_n\neq0$이므로

$$\frac{d_n}{c_n}=\frac{(a_n+b_n)(a_n-b_n)}{a_n+b_n}=a_n-b_n$$

두 수열 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$이 모두 수렴하고, 수열 $\{c_n\}$의 극한값이 0이 아니므로

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{c_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}d_n}{\lim\limits_{n\to\infty}c_n}=\frac{3}{1}=3$$

$a_n-b_n=e_n$이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}e_n=3$이므로

$$a_n=\frac{c_n+e_n}{2},\ b_n=\frac{c_n-e_n}{2}$$

두 수열 $\{c_n\}$, $\{e_n\}$이 모두 수렴하므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n+e_n}{2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}c_n+\lim\limits_{n\to\infty}e_n}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{c_n-e_n}{2}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}c_n-\lim\limits_{n\to\infty}e_n}{2}$$

$$=\frac{1-3}{2}=-1$$

따라서 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{2}{-1}=-2$

답 ①

참고

$$\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n)^2-(b_n)^2}{a_n+b_n}=\frac{3}{1}=3\text{이므로}$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)+(a_n-b_n)}{2}=\frac{1+3}{2}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_n+b_n)-(a_n-b_n)}{2}=\frac{1-3}{2}=-1$$

3 조건 (가)에서 수열 $\left\{\frac{f(n)}{n^2+1}\right\}$이 0이 아닌 극한값 2를 가지므로 $f(x)$는 최고차항의 계수가 2인 이차함수이다.

그러므로 $f(x)=2x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하면

조건 (나)에서 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+3)f\left(\frac{1}{n}\right)=3$이므로

$$\lim_{n\to\infty}(2n+3)f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(2n+3)\left\{2\left(\frac{1}{n}\right)^2+a\times\frac{1}{n}+b\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\times\frac{2n+3}{n^2}+a\times\frac{2n+3}{n}+b(2n+3)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{2\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)+a\left(2+\frac{3}{n}\right)+b(2n+3)\right\}$$

$b\neq0$이면 위의 극한값은 존재하지 않으므로 이 극한값이 존재하려면 $b=0$이어야 한다.
이때 위의 식은

$$\lim_{n\to\infty}\left\{2\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)+a\left(2+\frac{3}{n}\right)\right\}$$

$$=2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)+a\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{3}{n}\right)=2a=3$$

그러므로 $a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=2x^2+\frac{3}{2}x$이므로

$f(2)=8+3=11$

답 11

4 $a_n+n<a_{n+1}<a_n+n+1$에서
$n<a_{n+1}-a_n<n+1$이므로

$1<a_2-a_1<2$
$2<a_3-a_2<3$
$3<a_4-a_3<4$
$\vdots$
$n-1<a_n-a_{n-1}<n$

위의 식을 변끼리 더하면

$1+2+3+\cdots+(n-1)<a_n-a_1<2+3+4+\cdots+n$

이때 등차수열의 합을 이용하면

$$\frac{(n-1)\times n}{2}<a_n-1<\frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

$$1+\frac{(n-1)\times n}{2}<a_n<1+\frac{(n-1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{1}{n^2+1}+\frac{(n-1)\times n}{2(n^2+1)}<\frac{a_n}{n^2+1}<\frac{1}{n^2+1}+\frac{(n-1)(n+2)}{2(n^2+1)}$$

한편,

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2+1}+\frac{n(n-1)}{2(n^2+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{2(n^2+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}+\frac{1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{2\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

또

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n^2+1}+\frac{(n-1)(n+2)}{2(n^2+1)}\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(n+2)}{2(n^2+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}+\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)}{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}+\frac{\left(1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\left(1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)}{2\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\right)}$$

$$=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^2+1}=\frac{1}{2}$$

답 ①

5 $$\frac{2^{-n+1}\times k^n+3^n}{4^n+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2n+1}}=\frac{2\times2^{-n}\times k^n+3^n}{4^n+\frac{1}{3}\times9^n}=\frac{2\times\left(\frac{k}{2}\right)^n+3^n}{4^n+\frac{1}{3}\times9^n}$$

$$=\frac{2\times\left(\frac{k}{18}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{4}{9}\right)^n+\frac{1}{3}}$$

이 수열이 수렴하기 위해서는

$-18<k\leq18$

따라서 정수 k는 -17, -16, $\cdots$, 18로 그 개수는 36이다.

답 36

Level 3 실력 완성 본문 14쪽

1 ⑤	2 ①	3 ④	4 29

1 (i) $a=0$일 때

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=0$$

(ii) $a\neq 0$일 때

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+2n}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a+2\times\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}$$

$$=\frac{a+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=a$$

한편, $\lim_{n\to\infty}\frac{f(a_n)-b}{a_n-a}=a+3$에서 $a_n=t$로 놓으면

$n\to\infty$일 때, $t\to a$이므로

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-b}{t-a}=a+3 \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$t\to a$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$에서

$\lim_{t\to a}\{f(t)-b\}=0$

그러므로 $b=\lim_{t\to a}f(t)=f(a)$

이때 $f'(x)=2x+1$이므로 ㉡은

$$\lim_{t\to a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=f'(a)=2a+1=a+3$$

이때 $a=2$이고 $b=f(2)=6$

(i), (ii)에 의하여

$a+b=2+6=8$

답 ⑤

2 직선 OP의 기울기는

$$\frac{n^2-0}{n-0}=n$$

그러므로 직선 OP와 평행한 직선 l_n의 방정식은

$y=nx+k$ (단, k는 상수)

이때 이 직선이 곡선 $y=x^2$과 접해야 하므로 방정식

$x^2=nx+k$, 즉 $x^2-nx-k=0$은 중근을 가져야 한다.

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(-n)^2+4k=0$이므로

$$k=-\frac{n^2}{4}$$

그러므로 구하는 직선 l_n의 방정식은

$$y=nx-\frac{n^2}{4}$$

이때 점 $P(n,\ n^2)$과 직선 $nx-y-\frac{n^2}{4}=0$ 사이의 거리

d_n은

$$d_n=\frac{\left|n^2-n^2-\frac{n^2}{4}\right|}{\sqrt{n^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{n^2}{4\sqrt{n^2+1}}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{d_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{4(n+1)\sqrt{n^2+1}}$$

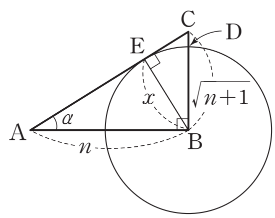
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4\left(1+\frac{1}{n}\right)\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{4\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\times\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$

$$=\frac{1}{4}$$

답 ①

3 중심이 B인 원이 선분 AC와 접하는 점을 E라 하면



$\angle AEB=\frac{\pi}{2}$

$\angle EAB=\alpha$라 하고

$\overline{BE}=x$라 하면

직각삼각형 ABC에서

$$\sin\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

또 직각삼각형 ABE에서

$$\sin\alpha=\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}=\frac{x}{n} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\frac{x}{n}=\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

$$x=\frac{n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

그러므로

$$l_n=\overline{BC}-\overline{BE}$$

$$=\sqrt{n+1}-\frac{n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+n+1}-n)}{\sqrt{n^2+n+1}}$$

이때

$\lim_{n\to\infty}(l_n\times n^a)$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}(\sqrt{n^2+n+1}-n)}{\sqrt{n^2+n+1}}\times n^a\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}}\times n^a\times(\sqrt{n^2+n+1}-n)\right\}$

위의 식에서

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{(\sqrt{n^2+n+1}-n)(\sqrt{n^2+n+1}+n)}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}$

$=\dfrac{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}=\dfrac{1}{2}$

로 수렴한다.

그러므로 극한값 $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}}\times n^a\right)$이 0이 아닌 값으로 수렴하기 위해서는 $a=\dfrac{1}{2}$이어야 하고, 이때 극한값은

$\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}}\times n^{\frac{1}{2}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+n+1}}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}$

$=\dfrac{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}=1$

따라서

$b=\lim_{n\to\infty}\left\{\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}}\times n^{\frac{1}{2}}\times(\sqrt{n^2+n+1}-n)\right\}$

$=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n^2+n+1}}\times n^{\frac{1}{2}}\right)\times\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n+1}-n)$

$=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

이므로

$a+b=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$

답 ④

4 $a_k=\lim_{n\to\infty}\dfrac{k^{n+1}+3^{n+1}}{2\times k^n+2^{2n+1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{k\times k^n+3\times 3^n}{2\times k^n+2\times 4^n}$

분모에 4^n을 포함하고 있으므로 자연수 k는 다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(ⅰ) $0<k<4$일 때

$0<\dfrac{k}{4}<1$이므로

$a_k=\lim_{n\to\infty}\dfrac{k\times\left(\frac{k}{4}\right)^n+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\times\left(\frac{k}{4}\right)^n+2}$

$=\dfrac{k\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{4}\right)^n+3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{k}{4}\right)^n+2}=0$

(ⅱ) $k=4$일 때

$a_4=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4\times 4^n+3\times 3^n}{2\times 4^n+2\times 4^n}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{4+3\times\left(\frac{3}{4}\right)^n}{2+2}$

$=\dfrac{4+3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{4}=1$

(ⅲ) $k>4$일 때

$0<\dfrac{4}{k}<1$이므로

$a_k=\lim_{n\to\infty}\dfrac{k+3\times\left(\frac{3}{k}\right)^n}{2+2\times\left(\frac{4}{k}\right)^n}$

$=\dfrac{k+3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{k}\right)^n}{2+2\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{k}\right)^n}=\dfrac{k}{2}$

따라서

$\sum_{k=1}^{11}a_k=\sum_{k=1}^{3}a_k+a_4+\sum_{k=5}^{11}a_k$

$=0+1+\sum_{k=5}^{11}\dfrac{k}{2}$

$=1+\dfrac{1}{2}(5+6+\cdots+11)$

$=1+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{7\times(5+11)}{2}$

$=29$

답 29

02 급수

유제 본문 17~23쪽

1 ③	2 ②	3 1	4 ③	5 17
6 ③	7 ④			

1 $a_1=2$이므로

$a_1=S_1=\dfrac{a\times1^2+1}{1^2+1}=\dfrac{a+1}{2}=2$에서

$a=3$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{n^2+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{3+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=3$$

따라서 $a+\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3+3=6$

답 ③

2 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$a_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$이므로

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$의 제n항까지의 부분합을 S'_n이라 하면

$b_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$이므로

$$S'_n=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}$$

그러므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}S'_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n=1\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

답 ②

3 수열 $\{S_n\}$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{na_n+\sqrt{4n^2+n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{3}{n}}{a_n+\sqrt{4+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{2+3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{\lim_{n\to\infty}a_n+\lim_{n\to\infty}\sqrt{4+\frac{1}{n}}}$$

$$=\frac{2+3\times0}{0+\sqrt{4+0}}=1$$

답 1

4 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}-\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)$에서 $b_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}-\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}$이라 하고, 이 급수의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$$S_n=\left(\frac{\sqrt{1}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{4}}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n}-\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right)+\left(\frac{\sqrt{n}}{n+1}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}S_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+\frac{2}{n}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}}{1+2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{\sqrt{n}}{n+1}-\dfrac{\sqrt{n+1}}{n+2}\right)=3$에서

$\dfrac{a_n}{2}+b_n=c_n$이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=3$이고

$a_n=2(c_n-b_n)$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}2(c_n-b_n)$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}c_n-2\sum_{n=1}^{\infty}b_n$$
$$=2\times3-2\times\frac{1}{2}=5$$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

답 ③

5 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$에서

$\lim_{n\to\infty}a_n=0$ …… ㉠

$\sum_{n=1}^{\infty}(b_n+2)=3$에서 $b_n+2=c_n$이라 하면 $\sum_{n=1}^{\infty}c_n=3$이고

$\lim_{n\to\infty}c_n=0$ …… ㉡

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n+p)$가 수렴하므로

$2a_n+3b_n+p=d_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}d_n=0$

한편, $d_n=2a_n+3(c_n-2)+p$이므로 ㉠, ㉡에서

$$\lim_{n\to\infty}d_n=\lim_{n\to\infty}(2a_n+3c_n-6+p)$$
$$=2\lim_{n\to\infty}a_n+3\lim_{n\to\infty}c_n-6+p$$
$$=-6+p=0$$

이므로 $p=6$

$$\sum_{n=1}^{\infty}d_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3b_n+6)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}(2a_n+3c_n)$$
$$=2\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}c_n$$
$$=2\times1+3\times3=11$$

따라서 $p=6$, $q=11$이므로

$p+q=17$

답 17

6 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_n+2)=\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n)^2+2a_n\}$ …… ㉠

수열 $\{a_n\}$이 첫째항이 3이고 공비가 $\frac{1}{2}$인 등비수열이므로

$a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=6$

또 $(a_n)^2=9\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$이므로

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{9}{1-\frac{1}{4}}=12$

따라서 ㉠은

$$\sum_{n=1}^{\infty}\{(a_n)^2+2a_n\}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$
$$=12+2\times6$$
$$=24$$

답 ③

7 $a_n=\frac{1}{2^n}\sin\frac{n\pi}{2}$이므로

$a_1=\frac{1}{2}$

$a_2=\frac{1}{2^2}\times0=0$

$a_3=\frac{1}{2^3}\times(-1)=-\frac{1}{2^3}$

$a_4=\frac{1}{2^4}\times0=0$

$a_5=\frac{1}{2^5}\times1=\frac{1}{2^5}$

⋮

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2^3}\right)+\frac{1}{2^5}+\left(-\frac{1}{2^7}\right)+\cdots$$
$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)}=\frac{2}{5}$$

답 ④

Level 1 기초 연습

본문 24쪽

1 ①	2 ③	3 ①	4 ③	5 ②

1 $a_n=\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2-\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)$

$$=\sum_{k=1}^{n}(k^2+2k+1)-\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\{(k^2+2k+1)-(k^2+1)\}$$
$$=2\sum_{k=1}^{n}k=n(n+1)$$

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$의 제$n$항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$이므로

$$S_n=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

답 ①

2 $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=4$이므로

$\lim_{n\to\infty}(3a_n-2b_n)=0$

이때 $3a_n-2b_n=c_n$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}c_n=0$

따라서 $b_n=\frac{3a_n-c_n}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3a_n-c_n}{2}=\frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}a_n-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{3}{2}\times2-\frac{1}{2}\times0=3$$

답 ③

3 $\sum_{n=1}^{\infty}3a_n=6$에서

$3\sum_{n=1}^{\infty}a_n=6$, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2$

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=3$에서 $a_n+b_n=c_n$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=3$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}(c_n-a_n)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_n=3-2=1$$

답 ①

4 $a_n=\frac{1}{2^n}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

$b_n=\frac{1}{3^n}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}$$

또 $a_nb_n=\left(\frac{1}{6}\right)^n$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\times\sum_{n=1}^{\infty}b_n-\sum_{n=1}^{\infty}(a_nb_n)=1\times\frac{1}{2}-\frac{1}{5}=\frac{3}{10}$$

답 ③

5 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{-n}-9^{-n+1}}{2^{-n}+3^{-n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-2n}-3^{-2n+2}}{2^{-n}+3^{-n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^{-n}+3^{-n+1})(2^{-n}-3^{-n+1})}{2^{-n}+3^{-n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}(2^{-n}-3^{-n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}$$

이므로 ㉠은

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=1-\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 25쪽

1 ③ 2 ③ 3 ④ 4 ②

1 $a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

$=\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}$

이때 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{3}{2}$

답 ③

2 $a_n=\dfrac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}-a$라 하면 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 b에 수렴한다.

그러므로

$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}-a\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}-a$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{2}{n^2}}-a$

$=\dfrac{1+3\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+3\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}{1+3\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}+2\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}}-a$

$=1-a=0$

에서 $a=1$

이때

$a_n=\dfrac{n^2+3n+3}{n^2+3n+2}-1=\dfrac{1}{n^2+3n+2}$

$=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$

이므로 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하면

$S_n=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{5}\right)$

$+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\right)$

$=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}$

이때

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{1}{2}$

이므로 $b=\dfrac{1}{2}$

따라서 $a+b=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

답 ③

3 $\sum_{k=1}^{n}\left(b_k+\dfrac{k^2}{n^3}\right)=\dfrac{n}{n+1}$에서

$\sum_{k=1}^{n}b_k+\dfrac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n}{n+1}$

$\sum_{k=1}^{n}b_k+\dfrac{1}{n^3}\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\dfrac{n}{n+1}$

$\sum_{k=1}^{n}b_k=\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{1}{n^3}\times\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$=\dfrac{n}{n+1}-\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$n\to\infty$일 때,

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}-\lim_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}}-\lim_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{6}$

$=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$

따라서

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+3b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+3\sum_{n=1}^{\infty}b_n$

$=2+3\times\dfrac{2}{3}=4$

답 ④

4 수열 $\{a_n\}$이 등비수열이므로 $a_n=ar^{n-1}$이라 하면

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{3^n+4^{n-1}}=2$에서

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{ar^{n-1}}{3^n+4^{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a}{r}\times\left(\dfrac{r}{4}\right)^n}{\left(\dfrac{3}{4}\right)^n+\dfrac{1}{4}}$ ...... ㉠

이 값이 0이 아닌 값을 가지려면 $r=4$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a}{4}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{4}}=\frac{\frac{a}{4}}{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n+\frac{1}{4}}=a=2$$

따라서 $a_n=2\times4^{n-1}$이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\times4^{n-1}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3}$$

답 ②

참고

$-1<\frac{r}{4}<1$이면 ㉠의 극한값은 0

$\frac{r}{4}>1$이면 ㉠은 ∞로 발산

$\frac{r}{4}\le-1$이면 ㉠은 진동

Level 3 실력 완성

본문 26쪽

1 3	2 8	3 ④	4 ①

1 급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$이 수렴하므로 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=S$라 하면

$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=S$

이때

$$S_{n+1}+S_n=2n+a_1-\frac{pn^2+1}{n+1}\quad\cdots\cdots ㉠$$

에서 좌변의 극한은

$$\lim_{n\to\infty}(S_n+S_{n+1})=\lim_{n\to\infty}S_n+\lim_{n\to\infty}S_{n+1}=S+S=2S\quad\cdots\cdots ㉡$$

또 우변의 극한은

$$\lim_{n\to\infty}\left(2n+a_1-\frac{pn^2+1}{n+1}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+a_1)(n+1)-pn^2-1}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\{2n^2+(a_1+2)n+a_1\}-pn^2-1}{n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-p)n^2+(a_1+2)n+a_1-1}{n+1}$$

이 극한값이 존재하려면 $p=2$이어야 한다.

이때 극한값은

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+2)n+a_1-1}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+2)+\frac{a_1-1}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{(a_1+2)+(a_1-1)\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}}$$

$$=a_1+2\quad\cdots\cdots ㉢$$

한편, ㉠에 $n=1$을 대입하면

$S_2+S_1=2+a_1-\frac{2\times1^2+1}{1+1}$

$2a_1+a_2=a_1+\frac{1}{2}$

$a_1+a_2=\frac{1}{2}$

한편, $a_2=-\frac{1}{2}$이므로 $a_1=1$

㉡, ㉢에서

$2S=3$, $S=\frac{3}{2}$

따라서 $p\times\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\times\frac{3}{2}=3$

답 3

2 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3)=5$이므로 $b_n=a_n-3$이라 하면

$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=5$

이때 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}(b_n+3)=\lim_{n\to\infty}b_n+3=0+3=3$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_n-3n+\sum_{k=1}^{n}a_k\right)=\lim_{n\to\infty}\left\{a_n-3n+\sum_{k=1}^{n}(b_k+3)\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n-3n+\sum_{k=1}^{n}b_k+3n\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(a_n+\sum_{k=1}^{n}b_k\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}a_n+\sum_{k=1}^{\infty}b_k$$

$$=3+5=8$$

답 8

3 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 제n항까지의 부분합을 S_n이라 하고,

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$의 제$n$항까지의 부분합을 T_n이라 하면

$T_n = S_n - a_1 + a_{n+1}$

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하므로

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 0$

이때

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} T_n \\ &= \lim_{n\to\infty}(S_n - a_1 + a_{n+1}) \\ &= \lim_{n\to\infty} S_n - a_1 + \lim_{n\to\infty} a_{n+1} \\ &= 3 - a_1\end{aligned}$$

그러므로 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + 2a_{n+1}) = 1$에서

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n + 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = 1$

$3 + 2(3 - a_1) = 1$

따라서 $a_1 = 4$

답 ④

4 삼각형 $A_1B_1C_1$에서

$$\begin{aligned}\overline{B_1C_1} &= \sqrt{\overline{A_1B_1}^2 + \overline{C_1A_1}^2 - 2\times\overline{A_1B_1}\times\overline{C_1A_1}\times\cos\frac{\pi}{3}} \\ &= \sqrt{2^2 + 1^2 - 2\times2\times1\times\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{3}\end{aligned}$$

이때 원 O_1의 반지름의 길이를 r라 하면

$\frac{1}{2}\times\overline{A_1B_1}\times\overline{C_1A_1}\times\sin\frac{\pi}{3}$

$= \frac{1}{2}\times(\overline{A_1B_1} + \overline{B_1C_1} + \overline{C_1A_1})\times r$

에서

$\frac{1}{2}\times2\times1\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}(2 + \sqrt{3} + 1)\times r$

이므로

$$\begin{aligned}r &= \frac{\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} \\ &= \frac{3\sqrt{3}-3}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}l_1 &= 2\times\frac{\sqrt{3}-1}{2}\pi \\ &= (\sqrt{3}-1)\pi\end{aligned}$$

원 O_1에 내접하는 삼각형이 $A_2B_2C_2$이므로 사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}\overline{B_2C_2} &= 2\times\frac{\sqrt{3}-1}{2}\times\sin\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{3-\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

이때 수열 $\{l_n\}$은 등비수열이고,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{B_2C_2}}{\overline{B_1C_1}} &= \frac{\frac{3-\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{aligned}$$

이므로 수열 $\{l_n\}$의 공비는 $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$이다.

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} l_n &= \frac{(\sqrt{3}-1)\pi}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = \frac{2(\sqrt{3}-1)\pi}{3-\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\end{aligned}$$

답 ①

다른 풀이

$\angle A_1 = \frac{\pi}{3}$이고, $\overline{A_1B_1} = 2$, $\overline{C_1A_1} = 1$이므로

$\angle C_1 = \frac{\pi}{2}$

이때 $\overline{B_1C_1} = \sqrt{3}$

또 위에서 $r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

이때 삼각형 $A_2B_2C_2$에서 $\angle C_2 = \frac{\pi}{2}$이므로

$$\begin{aligned}\overline{A_2B_2} &= 2\times r = 2\times\frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ &= \sqrt{3}-1\end{aligned}$$

그러므로 수열 $\{l_n\}$의 공비는

$\frac{\overline{A_2B_2}}{\overline{A_1B_1}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

03 여러 가지 함수의 미분

유제 본문 29~37쪽

1 ④	2 ②	3 ⑤	4 ②	5 ③
6 ③	7 ②	8 ③	9 ①	10 ②

1 $\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{x^2+2x}=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{4}{x+2}\right)$ ...... ㉠

이때 $\frac{e^{4x}-1}{4x}$에서 $4x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}=\lim_{t\to0}\frac{e^t-1}{t}=1$$

또 $\lim_{x\to0}\frac{4}{x+2}=\frac{\lim_{x\to0}4}{\lim_{x\to0}x+\lim_{x\to0}2}=2$

따라서 ㉠은

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\frac{4}{x+2}\right)=\lim_{x\to0}\frac{e^{4x}-1}{4x}\times\lim_{x\to0}\frac{4}{x+2}$$
$$=1\times2=2$$

답 ④

2 $\lim_{x\to0}\frac{\ln(x^2+3x+1)}{3x^2+6x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2+3x)}{3x^2+6x}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x^2+3x)}{x^2+3x}\times\frac{x^2+3x}{3x^2+6x}\right\}$ ...... ㉠

이때 $\frac{\ln(1+x^2+3x)}{x^2+3x}$에서 $x^2+3x=t$로 놓으면 $x\to0$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2+3x)}{x^2+3x}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

또

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x}{3x^2+6x}=\lim_{x\to0}\frac{x+3}{3x+6}=\frac{\lim_{x\to0}x+\lim_{x\to0}3}{3\lim_{x\to0}x+\lim_{x\to0}6}=\frac{1}{2}$$

따라서 ㉠은

$\lim_{x\to0}\left\{\frac{\ln(1+x^2+3x)}{x^2+3x}\times\frac{x^2+3x}{3x^2+6x}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x^2+3x)}{x^2+3x}\times\lim_{x\to0}\frac{x^2+3x}{3x^2+6x}$

$=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

답 ②

3 $f(x)=\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x$이므로

$f'(x)=\frac{1}{2x}$

그러므로

$\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{f'(k)}=\sum_{k=1}^{10}2k=2\sum_{k=1}^{10}k$

$=2\times\frac{10(10+1)}{2}=110$

또

$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a-3h)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\frac{f(a-3h)-f(a)}{-h}\right\}$

$=\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+3\lim_{h\to0}\frac{f(a-3h)-f(a)}{-3h}$

$=f'(a)+3f'(a)$

$=4f'(a)$

$=4\times\frac{1}{2a}=\frac{2}{a}$

따라서 $\frac{2}{a}=110$이므로

$a=\frac{1}{55}$

답 ⑤

4 $f(x)=\ln2\times\ln x\times\log_4 x+(\ln x)^2$

$=\ln2\times\ln x\times\frac{\ln x}{\ln4}+(\ln x)^2$

$=\ln2\times\ln x\times\frac{\ln x}{2\ln2}+(\ln x)^2$

$=\frac{3}{2}\times\ln x\times\ln x$

이므로

$f'(x)=\frac{3}{2}\times(\ln x)'\times\ln x+\frac{3}{2}\times\ln x\times(\ln x)'$

$=\frac{3}{x}\times\ln x$

따라서 $f'(e)=\frac{3}{e}$

답 ②

5 $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$에서

$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$

이때 $0<\alpha<\frac{3}{2}\pi$이고 $\sin\alpha<0$이므로 $\cos\alpha<0$

그러므로

$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$

따라서

$$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\alpha\cos\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\sin\frac{\pi}{3}$$
$$=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\times\frac{1}{2}-\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=\frac{3-\sqrt{6}}{6}$$

답 ③

6 $2\cos\alpha=\sin\alpha$이고, 이때 $\cos\alpha\neq0$이므로 양변을 $\cos\alpha$로 나누면

$2=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, 즉 $\tan\alpha=2$

한편, $\tan(\alpha+\beta)=3$이므로

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{2+\tan\beta}{1-2\tan\beta}=3$$

$2+\tan\beta=3-6\tan\beta$, $7\tan\beta=1$

따라서 $\tan\beta=\frac{1}{7}$

답 ③

7 $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{(e^{2x}-1)(x+2)}$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\sin(x^2+2x)}{x^2+2x}\times\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{x^2+2x}{2x(x+2)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(x^2+2x)}{x^2+2x}\times\frac{1}{\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}}\times\frac{1}{2}$$
$$=1\times\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

답 ②

8 $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$이므로

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\tan^2\theta-\sin^2\theta}{\theta^k}=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^2\theta\times(1-\cos^2\theta)}{\theta^k\cos^2\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^4\theta}{\theta^k\cos^2\theta}=a$$

에서 $k>4$이면 발산하고 $k<4$이면 0으로 수렴한다.

이때 a는 0이 아닌 상수이므로 $k=4$이고, 극한값은

$$a=\lim_{\theta\to0}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\times\frac{1}{\cos^2\theta}\right\}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^4\times\lim_{\theta\to0}\left(\frac{1}{\cos\theta}\right)^2=1$$

따라서 $k+a=4+1=5$

답 ③

다른 풀이

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\tan^2\theta-\sin^2\theta}{\theta^k}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{(\tan\theta-\sin\theta)(\tan\theta+\sin\theta)}{\theta^k}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때 이 극한값이 0이 아닌 상수이어야 한다.

한편, $\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1$이므로

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta+\sin\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}+\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta}{\theta}$$
$$=1+1=2$$

또 자연수 l에 대하여

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^l}=\lim_{\theta\to0}\frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\sin\theta}{\theta^l}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta\times(1-\cos\theta)}{\theta^l\cos\theta}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin\theta\times(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta^l\cos\theta\times(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^3\theta}{\theta^l\cos\theta\times(1+\cos\theta)}$$

이 극한값이 0이 아닌 상수이어야 하므로 $l=3$이어야 한다.

이때

$$\lim_{\theta\to0}\frac{\sin^3\theta}{\theta^3\cos\theta\times(1+\cos\theta)}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^3\times\lim_{\theta\to0}\frac{1}{\cos\theta\times(1+\cos\theta)}$$
$$=1^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

따라서 $k=l+1$이고 $l=3$이므로 ㉠에서 $k=4$이고, 극한값은

$$a=\lim_{\theta\to0}\frac{(\tan\theta-\sin\theta)(\tan\theta+\sin\theta)}{\theta^4}$$
$$=\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta+\sin\theta}{\theta}\times\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta-\sin\theta}{\theta^3}$$
$$=2\times\frac{1}{2}=1$$

이므로

$k+a=4+1=5$

9 $f(\pi)=-1$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)+1}{x-\pi}=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+\lim_{x\to\pi}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$$
$$=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'(\pi)$$

한편, $f'(x)=-\sin x+\cos x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'(\pi)$

$=\left(-\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}\right)+(-\sin\pi+\cos\pi)$

$=(-1+0)+\{-0+(-1)\}$

$=-2$

답 ①

10 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-a}{x-\frac{\pi}{4}}=b$에서 $x\to\frac{\pi}{4}$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

한편, 두 함수 $y=x$, $y=\cos x$는 연속함수이므로 함수 $y=x\cos x$는 연속함수이다.

그러므로 $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\{f(x)-a\}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-a=0$에서

$a=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$

이때 주어진 식은

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-a}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이때 $f'(x)=\cos x-x\sin x$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi=b$

따라서

$a+b=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}$

답 ②

Level 1 기초 연습 본문 38~39쪽

1 ④	2 ③	3 ③	4 1	5 ④
6 ⑤	7 2	8 ⑤	9 ⑤	10 16

1 $\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}+e^{-x}-2}{2x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{(e^{2x}-1)+(e^{-x}-1)}{2x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{2x}$

$=\lim_{x\to0}\frac{e^{2x}-1}{2x}+\lim_{x\to0}\left\{\frac{e^{-x}-1}{-x}\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$=1+\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$

답 ④

2 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{e^{2x}-1}$

$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{f(x)}{\ln(1+3x)}\times\frac{\ln(1+3x)}{3x}\times\frac{3x}{e^{2x}-1}\right\}$

$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\ln(1+3x)}\times\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+3x)}{3x}$

$\times\lim_{x\to0}\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\times\frac{3}{2}\right)$

$=2\times1\times\left(1\times\frac{3}{2}\right)$

$=3$

답 ③

3 $f(x)=(x-1)^2e^x$에서

$f'(x)=2(x-1)e^x+(x-1)^2e^x$

$=\{2(x-1)+(x-1)^2\}e^x$

$=\{(2x-2)+(x^2-2x+1)\}e^x$

$=(x^2-1)e^x$

따라서 $f'(2)=(2^2-1)e^2=3e^2$

답 ③

4 $f(x)=x^2\ln x$라 하면 $f(1)=0$이므로 주어진 식은

$\lim_{x\to1}\frac{x^2\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{x^2\ln x-0}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$

이때

$f'(x)=2x\ln x+x^2\times\frac{1}{x}=2x\ln x+x$

$=x(2\ln x+1)$

따라서 $f'(1)=1\times(0+1)=1$

답 1

다른 풀이

$x-1=t$로 놓으면 $x\to1$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2\ln x}{x-1}=\lim_{t\to0}\frac{(1+t)^2\ln(1+t)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}(1+t)^2\times\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}$$
$$=1^2\times1=1$$

5 곡선 $y=\ln x$와 직선 $y=n$이 만나는 점 P_n의 x좌표는 $\ln x=n$에서 $x=e^n$

$y=\ln x$에서 $y'=\dfrac{1}{x}$이므로

$f(n)=\dfrac{1}{e^n}=\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$

$0<\dfrac{1}{e}<1$이므로 등비급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(n)$은 수렴한다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f(n)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$

답 ④

6 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$에서

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha=1-\dfrac{1}{9}=\dfrac{8}{9}$

$\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$에서 $\cos\alpha<0$이므로 $\cos\alpha=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\sin\beta=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$에서 $\cos^2\beta=1-\sin^2\beta=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$

$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$에서 $\cos\beta>0$이므로

$\cos\beta=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

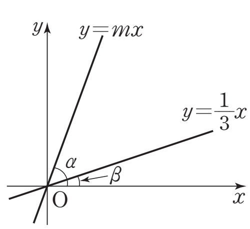
따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}-\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\times\frac{\sqrt{6}}{3}$$
$$=\frac{\sqrt{3}}{9}+\frac{4\sqrt{3}}{9}=\frac{5\sqrt{3}}{9}$$

답 ⑤

7



두 직선 $y=mx$, $y=\dfrac{1}{3}x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\alpha>\beta$이고

$\tan\alpha=m$, $\tan\beta=\dfrac{1}{3}$

두 직선이 이루는 예각의 크기가 $\dfrac{\pi}{4}$이므로

$\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{4}$

삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$
$$=\frac{m-\frac{1}{3}}{1+m\times\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{3m-1}{3+m}$$

이고, $\tan(\alpha-\beta)=\tan\dfrac{\pi}{4}=1$이므로

$\dfrac{3m-1}{3+m}=1$에서

$3m-1=3+m$, $2m=4$

따라서 $m=2$

답 2

8 $x-\dfrac{\pi}{2}=t$로 놓으면 $x\to\dfrac{\pi}{2}$일 때 $t\to0$이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2x-\pi)}{x-\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{\sin2t}{t}$$
$$=\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin2t}{2t}\times2\right)$$
$$=1\times2=2$$

답 ⑤

9 $$\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x+\tan(2x)^2}{\ln(1+2x^2)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan^2x+\tan(2x)^2}{x^2}\times\frac{x^2}{\ln(1+2x^2)}\right\}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan^2x+\tan(2x)^2}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\frac{\tan^2x}{x^2}+\frac{\tan(2x)^2}{x^2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^2+\lim_{x\to0}\left(\frac{\tan4x^2}{4x^2}\times4\right)$$
$$=1^2+1\times4=5$$

이고,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\ln(1+2x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2}\times 2}$$

$$=\frac{1}{\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\ln(1+2x^2)}{2x^2}\times 2\right\}}$$

$$=\frac{1}{1\times 2}=\frac{1}{2}$$

따라서 ㉠에서

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x+\tan(2x)^2}{\ln(1+2x^2)}=5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

답 ⑤

10 $f(x)=a\sin x\cos x+b$라 하면

점 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}+b$$

$$=a\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{2}+b$$

$$=\frac{\sqrt{3}a}{4}+b$$

즉, $\frac{\sqrt{3}a}{4}+b=\frac{1}{2}$에서

$\sqrt{3}a+4b=2$ ······ ㉠

한편,

$$f'(x)=a\cos x\times\cos x+a\sin x\times(-\sin x)$$

$$=a(\cos^2 x-\sin^2 x)$$

이고, 점 $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$에서의 접선의 기울기가 $\sqrt{3}$이므로

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=a\left(\cos^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=a\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}$$

$$=a\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right)=-\frac{a}{2}$$

즉, $-\frac{a}{2}=\sqrt{3}$에서

$a=-2\sqrt{3}$ ······ ㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$\sqrt{3}\times(-2\sqrt{3})+4b=2$

$4b=8$에서 $b=2$

따라서 $a^2+b^2=(-2\sqrt{3})^2+2^2=16$

답 16

Level 2 기본 연습

본문 40~41쪽

1 ⑤	2 ②	3 ②	4 24	5 ④
6 ①	7 ④	8 6		

1 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$x=0$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 0-}f(x)=\lim_{x\to 0+}f(x)=f(0)$이어야 하므로

$\frac{1}{3}(1-a)=0$에서 $a=1$

함수 $f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$$

이어야 한다. 이때

$$\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{3}\times\frac{e^{2x}-1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0-}\left(\frac{1}{3}\times\frac{e^{2x}-1}{2x}\times 2\right)$$

$$=\frac{1}{3}\times 1\times 2=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln(1+bx)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0+}\left\{\frac{\ln(1+bx)}{bx}\times b\right\}$$

$$=1\times b=b$$

이므로 $b=\frac{2}{3}$

따라서 $f'(0)=\frac{2}{3}$이므로

$$(a+b)\times f'(0)=\left(1+\frac{2}{3}\right)\times\frac{2}{3}$$

$$=\frac{5}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{10}{9}$$

답 ⑤

2 $2\ln x=t$, 즉 $\ln x=\frac{t}{2}$에서 $x=e^{\frac{t}{2}}$이므로

점 A의 좌표는 $(e^{\frac{t}{2}}, t)$

$\ln x=2t$에서 $x=e^{2t}$이므로

점 B의 좌표는 $(e^{2t}, 2t)$

그러므로 직선 AB의 기울기 $f(t)$는

$$f(t)=\frac{2t-t}{e^{2t}-e^{\frac{t}{2}}}=\frac{t}{e^{2t}-e^{\frac{t}{2}}}$$

이때

$$\lim_{t\to0+}\frac{e^{2t}-e^{\frac{t}{2}}}{t}=\lim_{t\to0+}\frac{(e^{2t}-1)-(e^{\frac{t}{2}}-1)}{t}$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{e^{2t}-1}{t}-\frac{e^{\frac{t}{2}}-1}{t}\right)$$
$$=\lim_{t\to0+}\left(\frac{e^{2t}-1}{2t}\times2\right)-\lim_{t\to0+}\left(\frac{e^{\frac{t}{2}}-1}{\frac{t}{2}}\times\frac{1}{2}\right)$$
$$=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

이므로

$$\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}\frac{t}{e^{2t}-e^{\frac{t}{2}}}$$
$$=\lim_{t\to0+}\frac{1}{\frac{e^{2t}-e^{\frac{t}{2}}}{t}}$$
$$=\frac{1}{\lim_{t\to0+}\frac{e^{2t}-e^{\frac{t}{2}}}{t}}=\frac{2}{3}$$

답 ②

3 $\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=b$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

함수 $f(x)$가 연속함수이므로 $\lim_{x\to2}\{f(x)-4\}=0$에서

$f(2)=\lim_{x\to2}f(x)=4$

$f(x)=(2^x+a)\log_4 x$에서

$f(2)=(4+a)\log_4 2=\frac{4+a}{2}=4$

$4+a=8$, $a=4$

즉, $f(x)=(2^x+4)\log_4 x$

이때

$$\lim_{x\to2}\frac{f(x)-4}{x^2-4}=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{(x-2)(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\frac{1}{x+2}\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\times\lim_{x\to2}\frac{1}{x+2}$$
$$=\frac{f'(2)}{4}=b \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이고,

$$f'(x)=2^x\ln 2\times\log_4 x+(2^x+4)\times\frac{1}{x\ln 4}$$
$$=2^x\ln 2\times\frac{\ln x}{2\ln 2}+(2^x+4)\times\frac{1}{2x\ln 2}$$
$$=2^{x-1}\ln x+\frac{1}{2\ln 2}\times\frac{2^x+4}{x}$$

이므로

$$f'(2)=2\times\ln 2+\frac{1}{2\ln 2}\times\frac{8}{2}$$
$$=2\ln 2+\frac{2}{\ln 2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

따라서 ㉠, ㉡을 이용하면

$$ab=4\times\frac{f'(2)}{4}=f'(2)$$
$$=2\ln 2+\frac{2}{\ln 2}$$

답 ②

4 조건 (가)에서 $\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{x-2}=0$이고 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

함수 $g(x)$는 연속함수이므로

$g(2)=\lim_{x\to2}g(x)=0$

또 함수 $g(x)$는 미분가능하므로 미분계수의 정의에 의하여

$\lim_{x\to2}\frac{g(x)}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$이므로

$g'(2)=0$

$g(x)=f(x)e^x$에서 $x=2$를 대입하면

$g(2)=f(2)\times e^2=0$이므로 $f(2)=0$

$g'(x)=f'(x)e^x+f(x)e^x$에서 $x=2$를 대입하면

$g'(2)=f'(2)\times e^2+f(2)\times e^2=f'(2)\times e^2=0$이므로

$f'(2)=0$

즉, $f(2)=f'(2)=0$이므로

$f(x)=a(x-2)^2$ (a는 0이 아닌 상수) $\cdots\cdots$ ㉠

로 놓을 수 있다. 조건 (나)에서

$$\lim_{x\to0}\frac{g(2x)-f(2x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)e^{2x}-f(2x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{f(2x)(e^{2x}-1)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0}f(2x)\times\lim_{x\to0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x}\times2\right)$$
$$=2f(0)$$

즉, $2f(0)=12$에서 $f(0)=6$

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=4a=6$에서

$a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}(x-2)^2$이므로

$f(6)=\frac{3}{2}\times4^2=24$

답 24

5 $f(x)=-x^2+5x-4$라 하면 $f'(x)=-2x+5$

점 A의 x좌표를 t라 하면 점 A에서의 접선의 기울기가 -1이므로 $f'(t)=-1$에서

$-2t+5=-1$, $t=3$

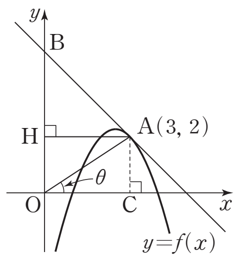
$f(3)=2$이므로 점 A의 좌표는 $(3, 2)$이다.

$\angle AOC=\theta$라 하면 $\tan\theta=\frac{2}{3}$

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H라 하면 점 A에서의 접선의 기울기가 -1이므로 $\angle BAH=\frac{\pi}{4}$

이때 $\angle OAH=\angle AOC=\theta$이므로

삼각함수의 덧셈정리에 의하여



$\tan\alpha$

$=\tan(\angle OAB)$

$=\tan(\angle BAH+\angle OAH)$

$=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$

$=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\theta}{1-\tan\frac{\pi}{4}\times\tan\theta}$

$=\dfrac{1+\frac{2}{3}}{1-1\times\frac{2}{3}}=5$

한편, $\tan\beta=\dfrac{\overline{OC}}{\overline{AC}}=\dfrac{3}{2}$

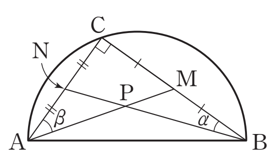
따라서 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

$=\dfrac{5-\frac{3}{2}}{1+5\times\frac{3}{2}}=\dfrac{7}{17}$

답 ④

6 반원에 대한 원주각의 크기는 직각이므로



$\angle ACB=\frac{\pi}{2}$

직각삼각형 CNB에서

$\angle CBN=\alpha$라 하면 $\tan\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4}$이므로

$\overline{BC}=4a$ $(a>0)$으로 놓으면

$\overline{CN}=\sqrt{2}a$

$\overline{BN}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{CN}^2}=\sqrt{16a^2+2a^2}$

$=\sqrt{18a^2}=3\sqrt{2}a$

$\sin\alpha=\dfrac{\overline{CN}}{\overline{BN}}=\dfrac{\sqrt{2}a}{3\sqrt{2}a}=\dfrac{1}{3}$

$\cos\alpha=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{BN}}=\dfrac{4a}{3\sqrt{2}a}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

직각삼각형 CAM에서

$\overline{AC}=2\overline{CN}=2\sqrt{2}a$, $\overline{CM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=2a$이므로

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AC}^2+\overline{CM}^2}=\sqrt{(2\sqrt{2}a)^2+(2a)^2}$

$=\sqrt{12a^2}=2\sqrt{3}a$

$\angle CAM=\beta$라 하면

$\sin\beta=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{AM}}=\dfrac{2a}{2\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\cos\beta=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AM}}=\dfrac{2\sqrt{2}a}{2\sqrt{3}a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

한편,

$\angle APB=\pi-(\angle PAB+\angle PBA)$

$=\pi-\{(\angle CAB-\beta)+(\angle CBA-\alpha)\}$

$=\pi-\{(\angle CAB+\angle CBA)-(\alpha+\beta)\}$

$=\pi-\left\{\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right\}$

$=\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)$

따라서 삼각함수의 성질과 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\sin(\angle APB)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+(\alpha+\beta)\right)=\cos(\alpha+\beta)$

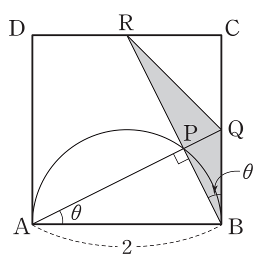
$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{\sqrt{6}}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$

답 ①

7



삼각형 ABQ에서 $\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{AB}}=\tan\theta$이므로

$\overline{BQ}=2\tan\theta$

$\angle APB=\frac{\pi}{2}$에서 $\angle PBC=\theta$이고,

삼각형 BCR에서 $\frac{\overline{BC}}{\overline{BR}}=\cos\theta$이므로

$\overline{BR}=\frac{2}{\cos\theta}$

그러므로 삼각형 BQR의 넓이 $S(\theta)$는

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BR}\times\overline{BQ}\times\sin(\angle QBR)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\cos\theta}\times2\tan\theta\times\sin\theta$$
$$=2\tan^2\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{S(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to0+}\left(2\times\frac{\tan^2\theta}{\theta^2}\right)$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\left\{2\times\left(\frac{\tan\theta}{\theta}\right)^2\right\}$$
$$=2\times1^2=2$$

답 ④

8 $f(x)=x\sin x$에서

$f'(x)=\sin x+x\cos x$

함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)$이어야 한다.

이때

$$\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0-}\frac{a(1-\cos x)}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{a(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0-}\frac{a(1-\cos^2 x)}{x^2(1+\cos x)}$$
$$=\lim_{x\to0-}\left\{a\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\frac{1}{1+\cos x}\right\}$$
$$=a\times1^2\times\frac{1}{1+1}=\frac{a}{2}$$

$$\lim_{x\to0+}g(x)=\lim_{x\to0+}\frac{f'(x)}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\frac{\sin x+x\cos x}{x}$$
$$=\lim_{x\to0+}\left(\frac{\sin x}{x}+\cos x\right)$$
$$=1+1=2$$

$g(0)=b$이므로 $\frac{a}{2}=2=b$에서

$a=4$, $b=2$

따라서 $a+b=6$

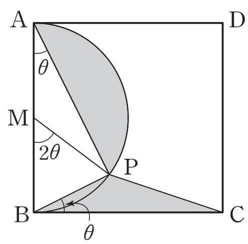
답 6

Level 3 실력 완성

본문 42쪽

1 ① **2** 18 **3** ④

1



선분 AB의 중점을 M이라 하면 $\angle PMB=2\theta$이므로

부채꼴 AMP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1^2\times(\pi-2\theta)=\frac{\pi}{2}-\theta$

삼각형 AMP의 넓이는

$\frac{1}{2}\times1\times1\times\sin(\pi-2\theta)=\frac{\sin2\theta}{2}$

즉, $f(\theta)=\frac{\pi}{2}-\theta-\frac{\sin2\theta}{2}$

한편, $\angle ABP=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 $\angle PBC=\theta$이고,

삼각형 ABP에서 $\overline{BP}=2\sin\theta$이므로

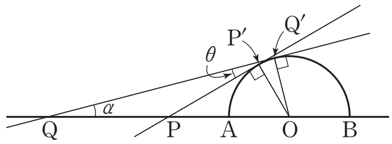
$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{BP}\times\overline{BC}\times\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\times2\sin\theta\times2\times\sin\theta$$
$$=2\sin^2\theta$$

따라서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{g(\theta)}{\theta\times\left\{\frac{\pi}{2}-f(\theta)\right\}}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta}{\theta\times\left(\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta}{\theta^2\times\left(1+\frac{\sin2\theta}{2\theta}\right)}$$
$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{2\sin^2\theta}{\theta^2}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{1}{1+\frac{\sin2\theta}{2\theta}}$$
$$=2\times\frac{1}{1+1}=1$$

답 ①

2 그림과 같이 선분 AB의 중점을 O라 하고, 점 P를 지나는 직선과 반원이 접하는 점을 P′, 점 Q를 지나는 직선과 반원이 접하는 점을 Q′이라 하자.



$\overline{AB}=2r$라 하면 선분 AB를 1 : 3으로 외분하는 점이 P이므로 $\overline{AP}=r$이고, 선분 AB를 3 : 5로 외분하는 점이 Q이므로 $\overline{AQ}=3r$이다.

$\sin(\angle P'PO)=\frac{r}{2r}=\frac{1}{2}$이므로

$\angle P'PO=\frac{\pi}{6}$

또 $\angle Q'QO=\alpha$라 하면

$\sin\alpha=\frac{r}{4r}=\frac{1}{4}$

이때 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$이므로

$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$=\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$

따라서 $\theta=\frac{\pi}{6}-\alpha$이므로

$\sin\theta=\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$

$=\sin\frac{\pi}{6}\times\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{6}\times\sin\alpha$

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{4}$

$=\frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{8}$

따라서 $m=15$, $n=3$이므로

$m+n=15+3=18$

답 18

3 (ⅰ) 삼각형 POB에서

$\overline{OP}=\tan\theta$

삼각형 CRO에서 $\overline{OR}=\tan\theta$, $\angle CRO=\theta$이므로

$\overline{OC}=\tan\theta\sin\theta$

$f(\theta)$는 부채꼴 ROP의 넓이에서 삼각형 CRO의 넓이를 뺀 것과 같으므로

$f(\theta)$

$=\frac{1}{2}\times\tan^2\theta\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$-\frac{1}{2}\times\overline{OR}\times\overline{OC}\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{1}{2}\times\tan^2\theta\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$-\frac{1}{2}\times\tan\theta\times\tan\theta\sin\theta\times\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\frac{\tan^2\theta}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta\right)$

(ⅱ) $\overline{CE}=\overline{AC}=\overline{OA}-\overline{OC}$

$=1-\tan\theta\sin\theta$

삼각형 PCD에서

$\overline{CD}=\overline{PC}\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=(\overline{OP}-\overline{OC})\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=(\tan\theta-\tan\theta\sin\theta)\times\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$=\tan\theta\times(1-\sin\theta)\times\frac{1}{\tan\theta}$

$=1-\sin\theta$

이므로

$\overline{DE}=\overline{CE}-\overline{CD}$

$=(1-\tan\theta\sin\theta)-(1-\sin\theta)$

$=\sin\theta\times(1-\tan\theta)$

즉,

$g(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times\overline{OC}$

$=\frac{1}{2}\times\sin\theta\times(1-\tan\theta)\times\tan\theta\sin\theta$

$=\frac{\sin^2\theta\tan\theta\times(1-\tan\theta)}{2}$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$$\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times f(\theta)}{g(\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\frac{\tan^2\theta}{2}\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta\right)}{\frac{\sin^2\theta\tan\theta\times(1-\tan\theta)}{2}}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\theta\times\tan\theta\times\left(\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta\right)}{\sin^2\theta\times(1-\tan\theta)}$$

$$=\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\tan\theta}{\theta}}{\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}}\times\lim_{\theta\to0+}\frac{\frac{\pi}{2}-\theta-\sin\theta\cos\theta}{1-\tan\theta}$$

$=1\times\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

답 ④

04 여러 가지 미분법

유제 본문 45~53쪽

1 ④	2 ①	3 ②	4 ⑤	5 ④
6 ②	7 ④	8 ①	9 ②	10 ③

1 함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{1\times(x^2+1)-(x-1)\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{(x^2+1)-(2x^2-2x)}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$$

이므로

$$f'(1)=\frac{-1^2+2\times1+1}{(1^2+1)^2}=\frac{1}{2}$$

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{1}{2}$이다.

답 ④

2 $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-a}{x-\frac{\pi}{4}}=b$에서 $x\to\dfrac{\pi}{4}$일 때 (분모)$\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 연속이므로

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\{f(x)-a\}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)-a=0$$

$$a=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\frac{\pi}{4}}{\tan\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8}$$

이때 미분계수의 정의에 의하여

$$b=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-a}{x-\frac{\pi}{4}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{f(x)-f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{x-\frac{\pi}{4}}=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

이고, $f(x)=\dfrac{x}{\tan x+\cot x}$에서

$$f'(x)=\frac{1\times(\tan x+\cot x)-x\times(\sec^2 x-\csc^2 x)}{(\tan x+\cot x)^2}$$
$$=\frac{(\tan x+\cot x)-x(\sec^2 x-\csc^2 x)}{(\tan x+\cot x)^2}$$

이므로

$$b=f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
$$=\frac{\left(\tan\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4}\left(\sec^2\frac{\pi}{4}-\csc^2\frac{\pi}{4}\right)}{\left(\tan\frac{\pi}{4}+\cot\frac{\pi}{4}\right)^2}$$
$$=\frac{1}{2}$$

따라서 $a=\dfrac{\pi}{8}$, $b=\dfrac{1}{2}$이므로

$$\frac{b}{a}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{8}}=\frac{4}{\pi}$$

답 ①

3 $\{\ln(1+x^2)\}'=\dfrac{(1+x^2)'}{1+x^2}=\dfrac{2x}{1+x^2}$이므로

$$f'(x)=(x)'\times\ln(1+x^2)+x\times\{\ln(1+x^2)\}'$$
$$=\ln(1+x^2)+x\times\frac{2x}{1+x^2}$$
$$=\ln(1+x^2)+\frac{2x^2}{1+x^2}$$

따라서 $f'(1)=\ln 2+\dfrac{2}{2}=1+\ln 2$

답 ②

4 $f(x)=\sin ax$에서 $f'(x)=a\cos ax$이므로

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-a}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{a\cos ax-a}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{(-a)\times\frac{1-\cos ax}{x^2}\right\}$$
$$=-a\times\lim_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{x^2}\quad\cdots\cdots ㉠$$

이때

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos ax)(1+\cos ax)}{x^2(1+\cos ax)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 ax}{x^2(1+\cos ax)}$$
$$=\lim_{x\to0}\left\{\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)^2\times a^2\right\}\times\lim_{x\to0}\frac{1}{1+\cos ax}$$
$$=1^2\times a^2\times\frac{1}{2}=\frac{a^2}{2}$$

이므로 ㉠에서

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)-a}{x^2}=-a\times\lim_{x\to0}\frac{1-\cos ax}{x^2}$$
$$=-a\times\frac{a^2}{2}$$
$$=-\frac{a^3}{2}=-4$$

즉, $a^3=8$에서 a가 실수이므로 $a=2$

따라서 $f(x)=\sin 2x$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{2}{3}\pi$$
$$=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ⑤

5 $x=1-e^{-t}$에서 $\frac{dx}{dt}=-(-e^{-t})=e^{-t}$,

$y=e^{2t}+1$에서 $\frac{dy}{dt}=e^{2t}\times(2t)'=2e^{2t}$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{2e^{2t}}{e^{-t}}$$
$$=2e^{3t}\qquad\cdots\cdots ㉠$$

따라서 $t=\ln 2$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $t=\ln 2$를 대입한 값과 같으므로

$2e^{3\ln 2}=2e^{\ln 2^3}=2\times2^3=16$

답 ④

6 $x=\ln\sqrt{t}=\ln t^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln t$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2t}$,

$y=\frac{1}{2}t^2-at$에서 $\frac{dy}{dt}=t-a$이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t-a}{\frac{1}{2t}}$$
$$=2t(t-a)=2t^2-2at\qquad\cdots\cdots ㉠$$

$t=3$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $t=3$을 대입한 값과 같으므로

$2\times3^2-2\times a\times3=18-6a=6$

$6a=12$

따라서 $a=2$

답 ②

7 $x\ln y+2x=6$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\ln y+\frac{x}{y}\times\frac{dy}{dx}+2=0$$
$$\frac{x}{y}\times\frac{dy}{dx}=-(2+\ln y)$$
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y(2+\ln y)}{x}\ (\text{단, } x\neq0)\qquad\cdots\cdots ㉠$$

따라서 곡선 위의 점 $(2,\ e)$에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $x=2,\ y=e$를 대입한 값과 같고, 직선 $y=mx$가 이 접선과 평행하므로

$$m=-\frac{e\times(2+1)}{2}=-\frac{3}{2}e$$

답 ④

8 $\cos(x+y)+\sin(x-y)=1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$-\sin(x+y)\times\left(1+\frac{dy}{dx}\right)+\cos(x-y)\times\left(1-\frac{dy}{dx}\right)=0$$
$$\{\cos(x-y)+\sin(x+y)\}\frac{dy}{dx}$$
$$=\cos(x-y)-\sin(x+y)$$
$$\frac{dy}{dx}=\frac{\cos(x-y)-\sin(x+y)}{\cos(x-y)+\sin(x+y)}$$
$$(\text{단, } \cos(x-y)+\sin(x+y)\neq0)\qquad\cdots\cdots ㉠$$

따라서 곡선 위의 점 $\left(\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $x=\pi,\ y=\frac{\pi}{2}$를 대입한 값과 같으므로

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3}{2}\pi}{\cos\frac{\pi}{2}+\sin\frac{3}{2}\pi}=\frac{0-(-1)}{0+(-1)}=-1$$

답 ①

9 $f(x)=xe^{-x}$에서

$$f'(x)=1\times e^{-x}+x\times(-e^{-x})$$
$$=(1-x)e^{-x}$$
$$f''(x)=(-1)\times e^{-x}+(1-x)\times(-e^{-x})$$
$$=(x-2)e^{-x}$$

따라서 $f''(1)=(1-2)e^{-1}=-\frac{1}{e}$

답 ②

10 함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(g(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$ ...... ㉠

한편, $f'(x)=2+\sin x$이고

$g(\pi)=\frac{\pi}{2}$에서 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\pi$이므로

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2+\sin\frac{\pi}{2}$

$=3$

따라서 ㉠에 $x=\pi$를 대입하면

$g'(\pi)=\frac{1}{f'(g(\pi))}=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{3}$

답 ③

Level 1 기초 연습 본문 54쪽

1 ②	2 ①	3 ③	4 ②	5 ②

1 $f'(x)=\frac{e^x\times x^2-(e^x-1)\times 2x}{x^4}$

$=\frac{(x-2)e^x+2}{x^3}$

따라서 $f'(2)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$

답 ②

2 $y=\sqrt[3]{x^2+4}=(x^2+4)^{\frac{1}{3}}$이므로

$y'=\frac{1}{3}(x^2+4)^{-\frac{2}{3}}\times 2x$

$=\frac{2}{3}x(x^2+4)^{-\frac{2}{3}}$

$=\frac{2}{3}x\times\frac{1}{\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}$

$=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+4)^2}}$

따라서 곡선 위의 점 (2, 2)에서의 접선의 기울기는

$\frac{2\times 2}{3\sqrt[3]{(2^2+4)^2}}=\frac{4}{3\times\sqrt[3]{64}}=\frac{4}{3\times 4}$

$=\frac{1}{3}$

답 ①

다른 풀이

$y=\sqrt[3]{x^2+4}=(x^2+4)^{\frac{1}{3}}$에서 양변을 세제곱하면

$y^3=x^2+4$

양변을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\frac{dy}{dx}=2x$

즉, $\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{3y^2}$ (단, $y\neq 0$) ...... ㉠

따라서 곡선 위의 점 (2, 2)에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $x=2$, $y=2$를 대입한 값과 같으므로

$\frac{2\times 2}{3\times 2^2}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

3 $x=e^t\cos t$에서

$\frac{dx}{dt}=e^t\times\cos t+e^t\times(-\sin t)$

$=e^t(\cos t-\sin t)$

$y=e^t\sin t$에서

$\frac{dy}{dt}=e^t\times\sin t+e^t\times\cos t$

$=e^t(\cos t+\sin t)$

이므로

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{e^t(\cos t+\sin t)}{e^t(\cos t-\sin t)}$

$=\frac{\cos t+\sin t}{\cos t-\sin t}$ (단, $\cos t-\sin t\neq 0$) ...... ㉠

$t=a$에 대응하는 점에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $t=a$를 대입한 값과 같고, 그 값이 -1이므로

$\frac{\cos a+\sin a}{\cos a-\sin a}=-1$에서

$\cos a+\sin a=-(\cos a-\sin a)$

$\cos a=0$

$0<t<\pi$이므로

$a=\frac{\pi}{2}$

답 ③

4 점 $(b, 2)$가 곡선 $y^3-xy=a$ 위의 점이므로

$8-2b=a$

$a+2b=8$ ...... ㉠

$y^3-xy=a$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3y^2\frac{dy}{dx}-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=0$

$(3y^2-x)\frac{dy}{dx}=y$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{3y^2-x}$ (단, $3y^2-x\neq 0$) ...... ㉡

곡선 위의 점 $(b, 2)$에서의 접선의 기울기는 ㉡에 $x=b$, $y=2$를 대입한 값과 같고, 이 값이 $\frac{1}{3}$이므로

$\frac{2}{12-b}=\frac{1}{3}$에서 $b=6$

$b=6$을 ㉠에 대입하면

$a=-4$

따라서 $a+b=-4+6=2$

답 ②

5 함수 $g(x)$가 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(g(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$ …… ㉠

한편, $g(2)=1$이므로

$f(1)=2$

$$f'(x)=2^{\ln x}\times\ln 2\times\frac{1}{x}+1$$
$$=\frac{2^{\ln x}\times\ln 2}{x}+1$$

이므로

$f'(1)=1+\ln 2$

따라서 ㉠에 $x=2$를 대입하면

$$g'(2)=\frac{1}{f'(g(2))}$$
$$=\frac{1}{f'(1)}$$
$$=\frac{1}{1+\ln 2}$$

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 55쪽

1 ①	2 ⑤	3 ④	4 4

1 $\ln\sqrt{x}=\ln x^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln x$에서

$f(x)=\frac{\ln\sqrt{x}}{x}=\frac{\ln x}{2x}$이므로

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{2x}\right)'$$
$$=\frac{\frac{1}{x}\times 2x-\ln x\times 2}{(2x)^2}$$
$$=\frac{1-\ln x}{2x^2}$$

미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\sqrt{e}+h)-f(\sqrt{e})}{h}=f'(\sqrt{e})$$
$$=\frac{1-\ln\sqrt{e}}{2\times(\sqrt{e})^2}$$
$$=\frac{1}{4e}$$

이고, $f(e)=\frac{\ln\sqrt{e}}{e}=\frac{1}{2e}$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(\sqrt{e}+h)-f(\sqrt{e})}{h}=kf(e)$에서

$\frac{1}{4e}=k\times\frac{1}{2e}$

따라서 $k=\frac{1}{2}$

답 ①

2 $g(x)=\frac{1}{1+e^x}$에서

$$g'(x)=\frac{0\times(1+e^x)-1\times e^x}{(1+e^x)^2}$$
$$=-\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$h(x)=g(f(x))$라 하면

$h'(x)=g'(f(x))f'(x)$

따라서 곡선 $y=h(x)$ 위의 점 $(1, h(1))$에서의 접선의 기울기는

$$h'(1)=g'(f(1))f'(1)$$
$$=g'(\ln 2)\times 3$$
$$=-\frac{e^{\ln 2}}{(1+e^{\ln 2})^2}\times 3$$
$$=-\frac{2}{(1+2)^2}\times 3$$
$$=-\frac{2}{9}\times 3$$
$$=-\frac{2}{3}$$

답 ⑤

3 $x=t-\sin t$에서 $\frac{dx}{dt}=1-\cos t$,

$y=1-\cos t$에서 $\frac{dy}{dt}=\sin t$

이므로

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$=\frac{\sin t}{1-\cos t}$ (단, $1-\cos t\neq 0$) …… ㉠

$t=\alpha$에 대응하는 점 P에서의 접선의 기울기는

㉠에 $t=\alpha$를 대입한 값과 같으므로

$p=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$t=2\pi-\alpha$에 대응하는 점 Q에서의 접선의 기울기는

㉠에 $t=2\pi-\alpha$를 대입한 값과 같으므로

$q=\frac{\sin(2\pi-\alpha)}{1-\cos(2\pi-\alpha)}$

$=\frac{-\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$

$pq=-3$이므로

$\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\times\left(-\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}\right)=-3$

$\frac{\sin^2\alpha}{(1-\cos\alpha)^2}=3$

$\sin^2\alpha=3(\cos^2\alpha-2\cos\alpha+1)$

$1-\cos^2\alpha=3\cos^2\alpha-6\cos\alpha+3$

$2\cos^2\alpha-3\cos\alpha+1=0$

$(2\cos\alpha-1)(\cos\alpha-1)=0$

$\cos\alpha\neq 1$이므로

$\cos\alpha=\frac{1}{2}$

$0<\alpha<\pi$이므로 $\alpha=\frac{\pi}{3}$

$\alpha=\frac{\pi}{3}$일 때,

$\mathrm{P}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{5}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

따라서 선분 PQ의 길이는

$\left(\frac{5}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$

답 ④

4 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

$f(g(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$ …… ㉠

$g(1)=a$라 하면

$f(a)=1$

즉, $4\sin^2 a=1$에서

$\sin^2 a=\frac{1}{4}$

$0<x<\frac{\pi}{2}$에서 $\sin x>0$이므로

$\sin a=\frac{1}{2}$

$a=\frac{\pi}{6}$

즉, $g(1)=\frac{\pi}{6}$

한편, $f(x)=4\sin^2 x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$에서

$f'(x)=4\times 2\sin x\times\cos x$

$=8\sin x\cos x$

㉠에 $x=1$을 대입하면

$f'(g(1))g'(1)=1$

즉, $f'\left(\frac{\pi}{6}\right)g'(1)=1$이고,

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=8\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}$

$=8\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

$=2\sqrt{3}$

이므로

$g'(1)=\frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{3}}$

$=\frac{\sqrt{3}}{6}$

따라서

$\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{\{g(1+h)-g(1)\}-\{g(1-h)-g(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}-\lim_{h\to 0}\frac{g(1-h)-g(1)}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{g(1+h)-g(1)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}$

$=g'(1)+g'(1)$

$=2g'(1)$

$=2\times\frac{\sqrt{3}}{6}$

$=\frac{\sqrt{3}}{3}$

에서 $p=3$, $q=1$이므로

$p+q=3+1=4$

답 4

Level 3 실력 완성 본문 56쪽

1 ⑤　2 ②　3 ⑤

1 조건 (가)에서 $\lim_{x\to\ln 2}\frac{f(x)-5}{x-\ln 2}=8$이고, $x\to\ln 2$일 때 (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.
이때 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
$f(\ln 2)=\lim_{x\to\ln 2}f(x)=5$
따라서 미분계수의 정의에 의하여

$$\lim_{x\to\ln 2}\frac{f(x)-5}{x-\ln 2}=\lim_{x\to\ln 2}\frac{f(x)-f(\ln 2)}{x-\ln 2}$$
$$=f'(\ln 2)=8$$

조건 (나)에서

$$\sqrt{4+\{g(x)\}^2}=\frac{f(x)}{e^x} \quad \cdots\cdots ㉠$$

이므로 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$\frac{2g(x)g'(x)}{2\sqrt{4+\{g(x)\}^2}}=\frac{f'(x)e^x-f(x)e^x}{e^{2x}}$$
$$\frac{g(x)g'(x)}{\sqrt{4+\{g(x)\}^2}}=\frac{f'(x)-f(x)}{e^x} \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에 $x=\ln 2$를 대입하면

$$\sqrt{4+\{g(\ln 2)\}^2}=\frac{f(\ln 2)}{e^{\ln 2}}=\frac{5}{2}$$

$\sqrt{4+\{g(\ln 2)\}^2}=\frac{5}{2}$의 양변을 제곱하면

$$4+\{g(\ln 2)\}^2=\frac{25}{4}$$
$$\{g(\ln 2)\}^2=\frac{9}{4}$$

모든 양수 x에 대하여 $g(x)>0$이므로

$$g(\ln 2)=\frac{3}{2}$$

㉡에 $x=\ln 2$를 대입하면

$$\frac{g(\ln 2)g'(\ln 2)}{\sqrt{4+\{g(\ln 2)\}^2}}=\frac{f'(\ln 2)-f(\ln 2)}{2}$$

즉, $\frac{\frac{3}{2}g'(\ln 2)}{\sqrt{4+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=\frac{3}{2}$에서

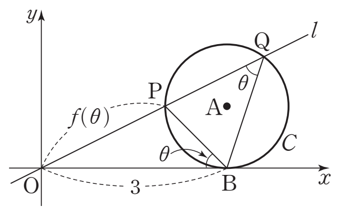
$$g'(\ln 2)=\frac{5}{2}$$

한편, $h(x)=f(x)g(x)$에서
$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
따라서

$$h'(\ln 2)=f'(\ln 2)g(\ln 2)+f(\ln 2)g'(\ln 2)$$
$$=8\times\frac{3}{2}+5\times\frac{5}{2}=\frac{49}{2}$$

답 ⑤

2 원 C가 점 A$(3, 1)$을 중심으로 하고 x축에 접하므로 원 C의 반지름의 길이는 1이고, 점 B의 좌표는 $(3, 0)$이다.
원의 접선과 현이 이루는 각의 성질에 의하여
$\angle\text{OBP}=\angle\text{BQO}=\theta$



원 C는 삼각형 BQP의 외접원이므로 사인법칙에 의하여
$\frac{\overline{\text{BP}}}{\sin\theta}=2$에서 $\overline{\text{BP}}=2\sin\theta$
삼각형 POB에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\text{OP}}^2=\overline{\text{OB}}^2+\overline{\text{BP}}^2-2\times\overline{\text{OB}}\times\overline{\text{BP}}\times\cos\theta$$
$$=3^2+(2\sin\theta)^2-2\times3\times2\sin\theta\times\cos\theta$$
$$=4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9$$

이므로

$$f(\theta)=\overline{\text{OP}}=\sqrt{4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9}$$

이고,

$$f'(\theta)=\frac{8\sin\theta\cos\theta-12(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{2\sqrt{4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9}}$$
$$=\frac{4\sin\theta\cos\theta-6(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{\sqrt{4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9}}$$

따라서

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}-6\left(\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{4\sin^2\frac{\pi}{4}-12\times\sin\frac{\pi}{4}\times\cos\frac{\pi}{4}+9}}$$
$$=\frac{4\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-6\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{4\times\frac{1}{2}-12\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+9}}$$
$$=\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

답 ②

다른 풀이

$f(\theta)=\sqrt{4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9}$에서

$\{f(\theta)\}^2=4\sin^2\theta-12\sin\theta\cos\theta+9$ …… ㉠

㉠에 $\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$\left\{f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right\}^2=4\times\frac{1}{2}-12\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+9$

$=2-6+9=5$

$f(\theta)>0$이므로

$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{5}$

㉠의 양변을 θ에 대하여 미분하면

$2f(\theta)f'(\theta)$

$=8\sin\theta\cos\theta-12(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$ …… ㉡

㉡에 $\theta=\frac{\pi}{4}$를 대입하면

$2\times\sqrt{5}\times f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=8\times\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}-12\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$

$2\times\sqrt{5}\times f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4$

따라서 $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

3 조건 (가)에 의하여

$f(x)=(x-1)^2(x-a)$ (a는 상수)라 하면

$f'(x)=2(x-1)(x-a)+(x-1)^2$

$=3x^2-2(a+2)x+2a+1$

조건 (나)에 의하여 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge 0$이어야 하므로 이차방정식 $3x^2-2(a+2)x+2a+1=0$의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=(a+2)^2-3(2a+1)\le 0$

$a^2-2a+1\le 0$

$(a-1)^2\le 0$

즉, $a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^3$이고, $x>1$에서 $f(x)>0$이므로

$\ln f(x)=\ln(x-1)^3$

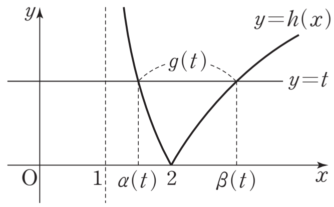
$=3\ln(x-1)$

$h(x)=|\ln f(x)|$라 하면

$h(x)=|3\ln(x-1)|$

$=\begin{cases}-3\ln(x-1) & (1<x<2)\\ 3\ln(x-1) & (x\ge 2)\end{cases}$

이고, 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=t$는 그림과 같다.



양수 t에 대하여 방정식 $h(x)=t$를 만족시키는 실수 x를 $\alpha(t)$, $\beta(t)$ ($\alpha(t)<\beta(t)$)라 하자.

(i) $-3\ln(x-1)=t$에서

$\ln(x-1)=-\frac{t}{3}$

$x=e^{-\frac{t}{3}}+1$

즉, $\alpha(t)=e^{-\frac{t}{3}}+1$

(ii) $3\ln(x-1)=t$에서

$\ln(x-1)=\frac{t}{3}$

$x=e^{\frac{t}{3}}+1$

즉, $\beta(t)=e^{\frac{t}{3}}+1$

(i), (ii)에서

$g(t)=\beta(t)-\alpha(t)$

$=e^{\frac{t}{3}}-e^{-\frac{t}{3}}$

$g'(t)=\frac{1}{3}e^{\frac{t}{3}}+\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}$

$=\frac{1}{3}(e^{\frac{t}{3}}+e^{-\frac{t}{3}})$

따라서

$g'(3\ln 2)=\frac{1}{3}(e^{\ln 2}+e^{-\ln 2})$

$=\frac{1}{3}\left(2+\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{1}{3}\times\frac{5}{2}$

$=\frac{5}{6}$

답 ⑤

05 도함수의 활용

유제 본문 59~69쪽

1 ④	2 ③	3 ②	4 ①	5 ④
6 4	7 4	8 ④	9 ②	10 ①
11 5				

1 $y=\tan x$에서 $y'=\sec^2 x$

곡선 $y=\tan x$ 위의 점 $(t, \tan t)$ $\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$에서의 접선의 방정식은

$y-\tan t=\sec^2 t\times(x-t)$ ⋯⋯ ㉠

직선 $y=2x+a$의 기울기가 2이므로

$\sec^2 t=2$에서 $\cos^2 t=\frac{1}{2}$

$0<t<\frac{\pi}{2}$에서 $\cos t>0$이므로

$\cos t=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $t=\frac{\pi}{4}$

$t=\frac{\pi}{4}$를 ㉠에 대입하면

$y-1=2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$, $y=2x+1-\frac{\pi}{2}$

따라서 $a=1-\frac{\pi}{2}$

답 ④

2 $x^2-xy+2y^2=8$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2x-\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+4y\frac{dy}{dx}=0$

$(-x+4y)\frac{dy}{dx}=-2x+y$

$\frac{dy}{dx}=\frac{-2x+y}{-x+4y}$ (단, $-x+4y\neq0$) ⋯⋯ ㉠

곡선 위의 점 $(2, 2)$에서의 접선의 기울기는 ㉠에 $x=2$, $y=2$를 대입한 값과 같으므로

$\frac{-2\times2+2}{-2+4\times2}=-\frac{1}{3}$

즉, 구하는 접선의 방정식은

$y-2=-\frac{1}{3}(x-2)$, $y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$

따라서 직선 $y=-\frac{1}{3}x+\frac{8}{3}$, 즉 $x+3y-8=0$과 원점 사이의 거리는

$\frac{|-8|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

답 ③

3 $f(x)=(x^2+ax+a)e^x$에서

$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+a)e^x$

$=\{x^2+(a+2)x+2a\}e^x$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하기 위해서는

$f'(x)\geq0$이어야 하고, $e^x>0$이므로

$x^2+(a+2)x+2a\geq0$이어야 한다.

이차방정식 $x^2+(a+2)x+2a=0$의 판별식을 D라 하면

$D=(a+2)^2-8a=(a-2)^2\leq0$

따라서 $a=2$

답 ②

4 $f(x)=a\sin\pi x+\cos\pi x$에서

$f'(x)=a\pi\cos\pi x-\pi\sin\pi x$

함수 $f(x)$가 $x=\frac{1}{3}$에서 극값을 가지므로

$f'\left(\frac{1}{3}\right)=a\pi\cos\frac{\pi}{3}-\pi\sin\frac{\pi}{3}=\pi\left(\frac{a}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$에서

$a=\sqrt{3}$

즉, $f(x)=\sqrt{3}\sin\pi x+\cos\pi x$이고,

$f'(x)=\pi(\sqrt{3}\cos\pi x-\sin\pi x)$

$f'(x)=0$에서 $\sqrt{3}\cos\pi x=\sin\pi x$

$\cos\pi x=0$이면 위 등식이 성립하지 않는다. 즉,

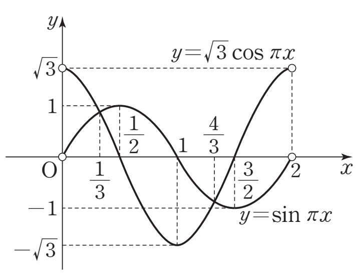
$\cos\pi x\neq0$이므로 위 식의 양변을 $\cos\pi x$로 나누면

$\tan\pi x=\sqrt{3}$

$0<x<2$에서 $0<\pi x<2\pi$이므로

$\pi x=\frac{\pi}{3}$ 또는 $\pi x=\frac{4}{3}\pi$

따라서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=\frac{4}{3}$



$0<x<2$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	(2)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	극대	↘	극소	↗	

따라서 함수 $f(x)$는 $x=\frac{4}{3}$에서 극소이고, 극솟값은

$$f\left(\frac{4}{3}\right)=\sqrt{3}\sin\frac{4}{3}\pi+\cos\frac{4}{3}\pi$$
$$=\sqrt{3}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$$

답 ①

5 $f(x)=2e^{2x}-e^{-x}+\frac{1}{2}$에서

$f'(x)=4e^{2x}+e^{-x}$

$$f''(x)=8e^{2x}-e^{-x}=\frac{8e^{3x}-1}{e^x}$$
$$=\frac{(2e^x-1)(4e^{2x}+2e^x+1)}{e^x}$$

$f''(x)=0$에서

$2e^x-1=0$, $e^x=\frac{1}{2}$, $x=-\ln 2$

$x<-\ln 2$에서 $f''(x)<0$, $x>-\ln 2$에서 $f''(x)>0$이고

$f(-\ln 2)=2e^{-2\ln 2}-e^{\ln 2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-2+\frac{1}{2}=-1$

이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(-\ln 2, -1)$이다.

따라서 $a=-\ln 2$, $b=-1$이므로

$ab=-\ln 2\times(-1)=\ln 2$

답 ④

6 $f(x)=\frac{ax}{x^2+1}$에서

$$f'(x)=\frac{a(x^2+1)-ax\times 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{-a(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2ax(x^2+1)^2+a(x^2-1)\times 2(x^2+1)\times 2x}{(x^2+1)^4}$$
$$=\frac{-2ax(x^2+1)+4ax(x^2-1)}{(x^2+1)^3}$$
$$=\frac{2ax(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$a>0$이므로 $f''(x)=0$에서

$x(x^2-3)=0$

$x>0$이므로 $x^2-3=0$, $x=\sqrt{3}$

$0<x<\sqrt{3}$에서 $f''(x)<0$이고, $x>\sqrt{3}$에서 $f''(x)>0$이므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$이다.

$$f'(\sqrt{3})=\frac{-a\times(3-1)}{(3+1)^2}=-\frac{a}{8}$$

이고, 곡선 $y=f(x)$의 변곡점에서의 접선의 기울기가 $-\frac{1}{2}$

이므로 $-\frac{a}{8}=-\frac{1}{2}$

따라서 $a=4$

답 4

7 $f(x)=x(\ln ax)^2$에서

$$f'(x)=(\ln ax)^2+x\times 2\ln ax\times\frac{a}{ax}$$
$$=(\ln ax)^2+2\ln ax$$

$$f''(x)=2\ln ax\times\frac{a}{ax}+2\times\frac{a}{ax}$$
$$=\frac{2}{x}\ln ax+\frac{2}{x}$$

주어진 조건에서 함수 $y=f''(x)$가 연속함수이므로 사잇값 정리에 의하여 $f''(1)=0$

$f''(1)=2\ln a+2=0$

$\ln a=-1$에서 $a=\frac{1}{e}$

따라서

$$f(x)=x\left(\ln\frac{x}{e}\right)^2=x(\ln x-1)^2$$

$$f'(x)=\left(\ln\frac{x}{e}\right)^2+2\ln\frac{x}{e}$$
$$=(\ln x-1)^2+2(\ln x-1)$$
$$=(\ln x-1)(\ln x+1)$$

$\frac{1}{e^2}<x<e$에서 $-2<\ln x<1$이므로

$f'(x)=0$에서 $\ln x=-1$, $x=\frac{1}{e}$

닫힌구간 $\left[\frac{1}{e^2}, e\right]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\frac{1}{e^2}$	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	e
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{9}{e^2}$	↗	극대	↘	0

$f\left(\frac{1}{e^2}\right)=\frac{1}{e^2}\times(-2-1)^2=\frac{9}{e^2}$, $f(e)=e\times(1-1)^2=0$

이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{1}{e}$에서 극대이면서 최대이고, 최댓값은

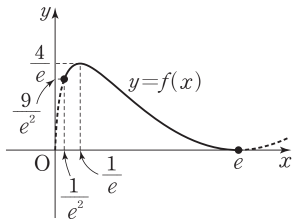
$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\times(-1-1)^2=\frac{4}{e}$

따라서 구하는 상수 k의 값은 4이다.

답 4

참고

닫힌구간 $\left[\frac{1}{e^2}, e\right]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



8 $f(x)=x\ln x-3x$라 하면

$f'(x)=\ln x+1-3=\ln x-2$

$f'(x)=0$에서 $x=e^2$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e^2	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=e^2$에서 극소이면서 최소이므로

함수 $f(x)$의 최솟값은

$f(e^2)=e^2\times\ln e^2-3e^2=-e^2$

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq k$이려면 k는 $f(x)$의 최솟값보다 작거나 같아야 하고, 함수 $f(x)$의 최솟값이 $-e^2$이므로

$k\leq -e^2$

따라서 k의 최댓값은 $-e^2$이다.

답 ④

9 $x>0$에서 $f(x)=g(x)$, 즉 $e^x=kx^2$에서 $\frac{e^x}{x^2}=k$

$h(x)=\frac{e^x}{x^2}$이라 하면 $x>0$에서 방정식 $f(x)=g(x)$의 실근이 존재하기 위해서는 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재해야 한다.

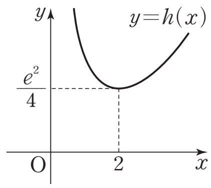
$h'(x)=\frac{e^x\times x^2-e^x\times 2x}{x^4}=\frac{(x-2)e^x}{x^3}$

$x>0$이므로 $h'(x)=0$에서 $x=2$

$x>0$에서 함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		↘	극소	↗

함수 $h(x)$는 $x=2$에서 극소이면서 최소이므로 함수 $h(x)$의 최솟값은 $h(2)=\frac{e^2}{4}$이고,



$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x}{x^2}=\infty$, $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^2}=\infty$이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같다.

따라서 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점이 존재하기 위해서는 $k\geq\frac{e^2}{4}$이어야 하므로 k의 최솟값은 $\frac{e^2}{4}$이다.

답 ②

10 $x=2t+\frac{1}{t}$, $y=t-\frac{2}{t}$에서

$\frac{dx}{dt}=2-\frac{1}{t^2}$, $\frac{dy}{dt}=1+\frac{2}{t^2}$

$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{2}{t^3}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=-\frac{4}{t^3}$

이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{t^3}\right)^2+\left(-\frac{4}{t^3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{20}{t^6}}=\frac{2\sqrt{5}}{t^3}$$

따라서 시각 $t=2$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\frac{2\sqrt{5}}{2^3}=\frac{\sqrt{5}}{4}$

답 ①

11 $x=1-\cos 2t$에서 $\frac{dx}{dt}=2\sin 2t$,

$y=\frac{1}{2}\sin 2t$에서 $\frac{dy}{dt}=\cos 2t$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(2\sin 2t)^2+(\cos 2t)^2}$$

$$=\sqrt{4\sin^2 2t+\cos^2 2t}$$

$$=\sqrt{4\sin^2 2t+(1-\sin^2 2t)}$$

$$=\sqrt{3\sin^2 2t+1}$$

$0\leq\sin^2 2t\leq 1$이므로

점 P의 속력은 $\sin^2 2t=1$인 시각 t에서 최대이고, 최댓값은
$M=\sqrt{3+1}=2$
점 P의 속력은 $\sin^2 2t=0$인 시각 t에서 최소이고, 최솟값은
$m=\sqrt{0+1}=1$
따라서 $M^2+m^2=2^2+1^2=5$

답 5

Level 1 기초 연습

본문 70쪽

1 ④	2 ②	3 ③	4 ③	5 ①

1 $f(x)=\frac{1}{x}$이라 하면 $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\left(t, \frac{1}{t}\right)$ $(t>0)$에서의 접선 l의 방정식은

$y-\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}(x-t)$

$y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}$ …… ㉠

직선 l이 직선 $y=\frac{1}{4}x$와 수직이므로 직선 l의 기울기는 -4이다.

$-\frac{1}{t^2}=-4,\ t^2=\frac{1}{4}$

$t>0$이므로 $t=\frac{1}{2}$

$t=\frac{1}{2}$을 ㉠에 대입하면 $y=-4x+4$

따라서 직선 l의 x절편은 1이다.

답 ④

2 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+ax+\ln x$라 하면

함수 $f(x)$의 정의역은 $\{x|x>0\}$이고,

$f'(x)=x+a+\frac{1}{x}$

$f''(x)=1-\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$

$f''(x)=0$에서 $x^2=1$

$x>0$이므로 $x=1$

$x=1$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 음에서 양으로 바뀌므로 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 좌표는 $(1,\ f(1))$이다.

변곡점이 x축 위에 있으므로 $f(1)=0$에서

$\frac{1}{2}+a=0$

따라서 $a=-\frac{1}{2}$

답 ②

3 $f(x)=x+2\cos x$에서 $f'(x)=1-2\sin x$

$f'(x)=0$에서 $\sin x=\frac{1}{2}$

$0\le x\le\pi$에서 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	…	$\frac{\pi}{6}$	…	$\frac{5}{6}\pi$	…	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↗	극대	↘	극소	↗	$\pi-2$

$f(0)=2,\ f(\pi)=\pi-2$

$f(0)>f(\pi)$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{\pi}{6}$에서 극대이면서 최대이고, 함수 $f(x)$는 $x=\frac{5}{6}\pi$에서 극소이면서 최소이다.

그러므로

$M=f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

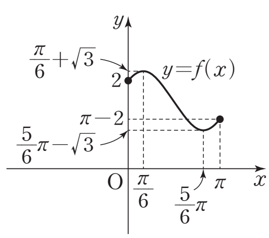
$m=f\left(\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{5}{6}\pi+2\cos\frac{5}{6}\pi=\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}$

따라서 $M+m=\left(\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\right)+\left(\frac{5}{6}\pi-\sqrt{3}\right)=\pi$

답 ③

참고

닫힌구간 $[0, \pi]$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



4 방정식 $(x+2)^2e^{-x}=k$에서 $f(x)=(x+2)^2e^{-x}$이라 하면

$f'(x)=2(x+2)e^{-x}-(x+2)^2e^{-x}=-x(x+2)e^{-x}$

모든 실수 x에 대하여 $e^{-x}>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

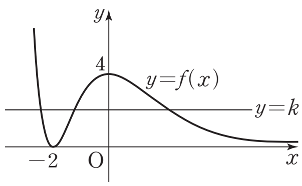
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}=0$에서 $x+2=t$로 놓으면

$x\to\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)^2e^{-x}=\lim\limits_{t\to\infty}t^2e^{-t+2}=e^2\times\lim\limits_{t\to\infty}t^2e^{-t}=0$

또 $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)^2e^{-x}=\infty$이고, $f(-2)=0$, $f(0)=4$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



주어진 방정식이 서로 다른 세 실근을 갖기 위해서는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이어야 하므로 이를 만족시키는 실수 k의 값의 범위는

$0<k<4$

따라서 가능한 정수 k의 값은 1, 2, 3으로 그 개수는 3이다.

답 ③

5 $x=\cos t+t\sin t$에서

$\frac{dx}{dt}=-\sin t+(\sin t+t\cos t)=t\cos t$

$y=\sin t-t\cos t$에서

$\frac{dy}{dt}=\cos t-(\cos t-t\sin t)=t\sin t$

이므로 시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(t\cos t)^2+(t\sin t)^2}$$
$$=\sqrt{t^2\cos^2 t+t^2\sin^2 t}$$
$$=\sqrt{t^2(\cos^2 t+\sin^2 t)}=t$$

따라서 점 P의 속력이 π가 되는 시각은 $t=\pi$이므로 이때 점 P의 위치는

$x=\cos\pi+\pi\sin\pi=-1$, $y=\sin\pi-\pi\cos\pi=\pi$

즉, 점 P$(-1, \pi)$이므로 직선 OP의 기울기는

$\frac{\pi-0}{-1-0}=-\pi$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 71쪽

1 ①　2 ③　3 ⑤　4 ⑤

1 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=4$에서 함수의 극한의 성질에 의하여

$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이면 (분자)$\to0$이어야 한다.

이때 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim\limits_{x\to1}f(x)=f(1)=0$이고,

$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=4$

한편, 함수 $g(x)$는 함수 $f(x)$의 역함수이므로

$f(1)=0$에서 $g(0)=1$이고,

$f(g(x))=x$

이 식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(g(x))g'(x)=1$

위 식에 $x=0$을 대입하면

$f'(g(0))g'(0)=1$, $f'(1)g'(0)=1$

$g'(0)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$

따라서 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(0, g(0))$, 즉 $(0, 1)$에서의 접선의 방정식은

$y-1=g'(0)(x-0)$, $y=\frac{1}{4}x+1$

이때 $a=\frac{1}{4}$, $b=1$이므로

$a+b=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

답 ①

2 $f(x)=\ln(4+a\sin x)$에서

$f'(x)=\frac{a\cos x}{4+a\sin x}$

$0<a<4$이므로 $0\le x\le2\pi$에서

$4+a\sin x>0$

즉, $f'(x)=0$에서 $\cos x=0$이므로

$x=\frac{\pi}{2}$ 또는 $x=\frac{3}{2}\pi$

$0\le x\le2\pi$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$2\ln 2$	↗	극대	↘	극소	↗	$2\ln 2$

$f(0)=f(2\pi)=2\ln 2>0$이므로 함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}\pi$에서 극소이면서 최소이고, 최솟값은

$f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\ln\left(4+a\sin\frac{3}{2}\pi\right)$

$=\ln(4-a)$

함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하고

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)>f(0)=f(2\pi)>0$이므로 $f\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0$이어야 한다.

$\ln(4-a)=0$에서

$a=3$

즉, $f(x)=\ln(4+3\sin x)$

$f'(x)=\frac{3\cos x}{4+3\sin x}$에서

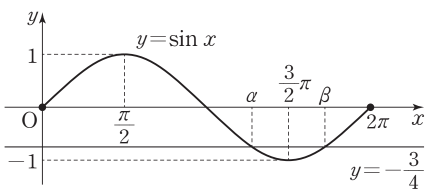
$f''(x)=\frac{-3\sin x\times(4+3\sin x)-3\cos x\times 3\cos x}{(4+3\sin x)^2}$

$=\frac{-12\sin x-9}{(4+3\sin x)^2}$

$f''(x)=0$에서

$\sin x=-\frac{3}{4}$

$0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=\sin x$와 직선 $y=-\frac{3}{4}$이 그림과 같이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 점의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 $x=\alpha$, $x=\beta$ 좌우에서 함수 $f''(x)$의 부호가 각각 바뀌므로 두 점 $(\alpha, f(\alpha))$, $(\beta, f(\beta))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

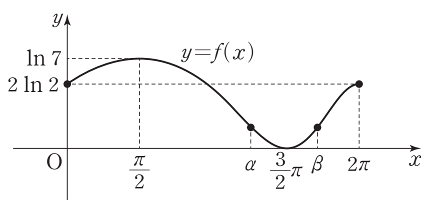


따라서 $0\le x\le 2\pi$에서 곡선 $y=f(x)$의 변곡점의 개수는 2이다.

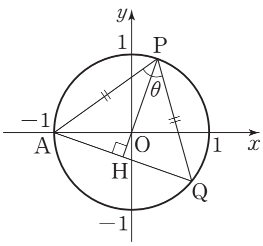
답 ③

참고

$0\le x\le 2\pi$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



3 점 P가 제1사분면의 점이므로 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$



삼각형 AQP는 $\overline{PA}=\overline{PQ}$인 이등변삼각형이므로 점 P에서 선분 AQ에 내린 수선의 발을 H라 하면 원의 중심 O를 지나는 직선 PH는 선분 AQ를 수직이등분하고, 이때 두 삼각형 APH, QPH는 서로 합동이다.

즉, $\angle APH=\angle QPH=\frac{\theta}{2}$

삼각형 AOP는 $\overline{OP}=\overline{OA}=1$인 이등변삼각형이므로

$\angle OAP=\angle OPA=\frac{\theta}{2}$이고,

$\angle AOP=\pi-(\angle OAP+\angle OPA)$

$=\boxed{\pi-\theta}$

삼각형 AOP에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{PA}^2=\overline{OA}^2+\overline{OP}^2-2\times\overline{OA}\times\overline{OP}\times\cos(\pi-\theta)$

$=1+1-2\times1\times1\times(-\cos\theta)$

$=\boxed{2(1+\cos\theta)}$ ⋯⋯ ㉠

삼각형 AQP의 넓이를 $S(\theta)$라 하면

$S(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{PA}\times\overline{PQ}\times\sin(\angle APQ)$

$=\frac{1}{2}\times\overline{PA}^2\times\sin(\angle APQ)$

$=\frac{1}{2}\times\boxed{2(1+\cos\theta)}\times\sin\theta$

$=(1+\cos\theta)\sin\theta$

$S'(\theta)=-\sin\theta\times\sin\theta+(1+\cos\theta)\times\cos\theta$

$=-\sin^2\theta+\cos\theta+\cos^2\theta$

$=-(1-\cos^2\theta)+\cos\theta+\cos^2\theta$

$=2\cos^2\theta+\cos\theta-1$

$=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$이므로 $0<\cos\theta<1$이고

$S'(\theta)=0$에서 $\cos\theta=\frac{1}{2}$, $\theta=\frac{\pi}{3}$

$\theta=\frac{\pi}{3}$의 좌우에서 $S'(\theta)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로

$S(\theta)$는 $\theta=\boxed{\frac{\pi}{3}}$에서 극대이자 최대이다.

따라서 $S(\theta)$의 최댓값은

$S\left(\frac{\pi}{3}\right)=\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\times\sin\frac{\pi}{3}$

$=\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$

이때 $f(\theta)=\pi-\theta$, $g(\theta)=2(1+\cos\theta)$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$이고,

$f(\alpha)=f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$

$g(\alpha)=g\left(\frac{\pi}{3}\right)=2\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)=2\left(1+\frac{1}{2}\right)=3$

따라서 $f(\alpha)\times g(\alpha)=\frac{2}{3}\pi\times 3=2\pi$

답 ⑤

4 $x=\ln 2t$, $y=\frac{1}{t}$에서 $\frac{dx}{dt}=\frac{2}{2t}=\frac{1}{t}$, $\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{t^2}$이므로

시각 t에서의 점 P의 속력은

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2+\left(-\frac{1}{t^2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}}=\frac{\sqrt{t^2+1}}{t^2}$$

점 P의 속력이 $\sqrt{2}$가 되는 시각을 $t=a$ $(a>0)$이라 하면

$\frac{\sqrt{a^2+1}}{a^2}=\sqrt{2}$, $\sqrt{a^2+1}=\sqrt{2}a^2$

양변을 제곱하여 정리하면

$2a^4-a^2-1=0$, $(2a^2+1)(a^2-1)=0$

$a>0$이므로 $a=1$

한편, $\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{1}{t^2}$, $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{2}{t^3}$이므로 시각 t에서의 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{1}{t^2}\right)^2+\left(\frac{2}{t^3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{t^4}+\frac{4}{t^6}}=\frac{\sqrt{t^2+4}}{t^3}$$

따라서 시각 $t=1$에서의 점 P의 가속도의 크기는

$\frac{\sqrt{1^2+4}}{1^3}=\sqrt{5}$

답 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 72쪽

1 4　**2** ①　**3** ⑤

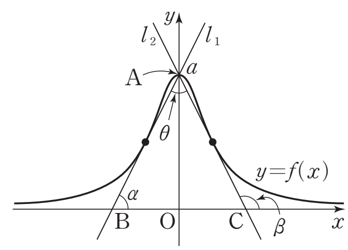
1 $f(x)=\frac{a}{x^2+1}$라 하면

$f'(x)=\frac{-a\times 2x}{(x^2+1)^2}=-\frac{2ax}{(x^2+1)^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=0$이고, $x=0$의 좌우에서 $f'(x)$의 부호가 양에서 음으로 바뀌므로 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극대이면서 최대이고, 극댓값은 $f(0)=a$이다.

모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 y축에 대하여 대칭이고,

$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



점 A$(0, a)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선 중 기울기가 양수인 직선을 l_1, 기울기가 음수인 직선을 l_2라 하고, 두 직선 l_1, l_2가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라 하면 $\beta-\alpha=\theta$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t, f(t))$ $(t\neq 0)$에서의 접선의 방정식은

$y-\frac{a}{t^2+1}=-\frac{2at}{(t^2+1)^2}(x-t)$　…… ㉠

직선 ㉠이 점 A$(0, a)$를 지나므로

$a-\frac{a}{t^2+1}=-\frac{2at}{(t^2+1)^2}\times(-t)$, $\frac{at^2}{t^2+1}=\frac{2at^2}{(t^2+1)^2}$

$a>0$, $t\neq 0$이므로

$1=\frac{2}{t^2+1}$, $t^2=1$, $t=-1$ 또는 $t=1$

그러므로 직선 l_1의 기울기는 $f'(-1)=\frac{a}{2}$

직선 l_2의 기울기는 $f'(1)=-\frac{a}{2}$

즉, $\tan\alpha=\frac{a}{2}$, $\tan\beta=-\frac{a}{2}$

$\theta=\beta-\alpha$이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의하여

$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)$

$$=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{-\frac{a}{2}-\frac{a}{2}}{1+\left(-\frac{a}{2}\right)\times\frac{a}{2}}$$

$$=-\frac{4a}{4-a^2}$$

$\tan\theta=\frac{4}{3}$에서 $-\frac{4a}{4-a^2}=\frac{4}{3}$

$a^2-3a-4=0$, $(a-4)(a+1)=0$

$a>0$이므로 $a=4$

따라서 조건을 만족시키는 상수 a의 값은 4이다.

답 4

2 $f_1(x)=\dfrac{a(x+1)^2}{x^2+1}$, $f_2(x)=x^3+bx^2+cx+d$라 하자.

$$f_1'(x)=\frac{2a(x+1)(x^2+1)-a(x+1)^2\times 2x}{(x^2+1)^2}$$
$$=\frac{-2a(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}$$

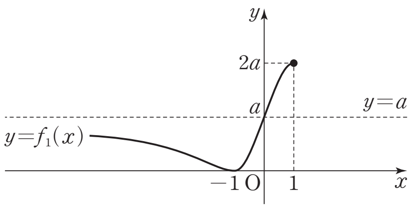
$f_1'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f_1(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_1'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f_1(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

$f_1(-1)=0$, $f_1(1)=2a>0$이고, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f_1(x)=a$이므로

$x\le1$에서 함수 $y=f_1(x)$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $x=1$에서 미분가능해야 한다.

함수 $f(x)$가 $x=1$에서 연속이어야 하므로

$\displaystyle\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$에서

$f_1(1)=f_2(1)$

즉, $f_2(1)=2a$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

또 $\displaystyle\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{f_1(x)-f_1(1)}{x-1}=f_1'(1)=0$

이고, 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$\displaystyle\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{f_2(x)-f_2(1)}{x-1}=0$

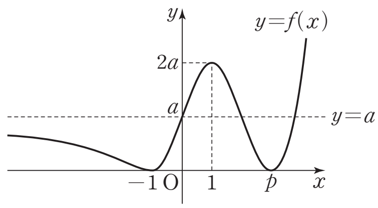
즉, $f_2'(1)=0$

그러므로 삼차함수 $y=f_2(x)$는 $x=1$에서 극대 또는 극소이거나 변곡점을 갖는다.

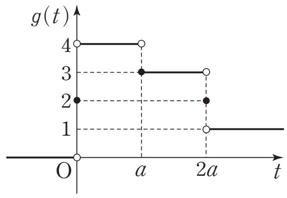
그런데 삼차함수 $y=f_2(x)$가 $x=1$에서 극소이거나 변곡점을 가지면 $x>1$에서 함수 $y=f_2(x)$의 그래프는 x축과 만나지 않는다.

조건 (가)에서 $g(0)=2$, 즉 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축의 교점의 개수가 2이므로 함수 $y=f_2(x)$의 그래프는 $x>1$에서 x축과 접해야 한다.

이때 함수 $y=f_2(x)$의 그래프와 x축과 접하는 점의 x좌표를 p $(p>1)$라 하면 함수 $y=f_2(x)$는 $x=1$에서 극대, $x=p$에서 극소이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같아야 한다.



그러므로 함수 $g(t)$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (나)에서 $\displaystyle\lim_{t\to4-}g(t)-\lim_{t\to4+}g(t)=2$를 만족시키는

경우는 $3-1=2$뿐이므로 $2a=4$, $a=2$

$f_2(x)=(x-p)^2(x-k)$ (k는 상수)로 놓으면

$$f_2'(x)=2(x-p)(x-k)+(x-p)^2$$
$$=(x-p)(3x-2k-p)$$

$f_2'(x)=0$에서 $x=p$ 또는 $x=\dfrac{2k+p}{3}$

$f_2'(1)=0$이고 $p>1$이므로

$\dfrac{2k+p}{3}=1$, $k=\dfrac{3-p}{2}$

즉, $f_2(x)=(x-p)^2\left(x-\dfrac{3-p}{2}\right)$

㉠에 의하여

$$f_2(1)=(1-p)^2\left(1-\frac{3-p}{2}\right)=(p-1)^2\times\frac{p-1}{2}$$
$$=\frac{(p-1)^3}{2}=2a=4$$

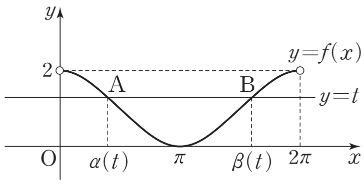
$(p-1)^3=8$에서 $p-1=2$, $p=3$

따라서 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2(x+1)^2}{x^2+1} & (x\le1)\\ x(x-3)^2 & (x>1)\end{cases}$이므로

$f(-a)\times f(a)=f(-2)\times f(2)=\dfrac{2}{5}\times2=\dfrac{4}{5}$

답 ①

3 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=t$의 두 교점 A, B의 x좌표가 각각 $\alpha(t)$, $\beta(t)$이고 곡선 $y=f(x)$가 직선 $x=\pi$에 대하여 대칭이므로 $\alpha(t)+\beta(t)=2\pi$에서

$\beta(t)=2\pi-\alpha(t)$

ㄱ. $f(x)=\cos x+1$에서 $f'(x)=-\sin x$

$\beta(t)=2\pi-\alpha(t)$이므로

$f'(\alpha(t))+f'(\beta(t))$

$=-\sin(\alpha(t))-\sin(\beta(t))$

$=-\sin(\alpha(t))-\sin(2\pi-\alpha(t))$

$=-\sin(\alpha(t))+\sin(\alpha(t))$

$=0$ (참)

ㄴ. $f(\alpha(t))=t$에서 양변을 t에 대하여 미분하면

$f'(\alpha(t))\alpha'(t)=1$

$\alpha'(t)=\dfrac{1}{f'(\alpha(t))}=-\dfrac{1}{\sin(\alpha(t))}$

$f(\beta(t))=t$에서 양변을 t에 대하여 미분하여 정리하면

$\beta'(t)=\dfrac{1}{f'(\beta(t))}=-\dfrac{1}{\sin(\beta(t))}$

이때 $\beta(t)=2\pi-\alpha(t)$이므로

$\beta'(t)=-\dfrac{1}{\sin(\beta(t))}=-\dfrac{1}{\sin(2\pi-\alpha(t))}$

$=\dfrac{1}{\sin(\alpha(t))}$

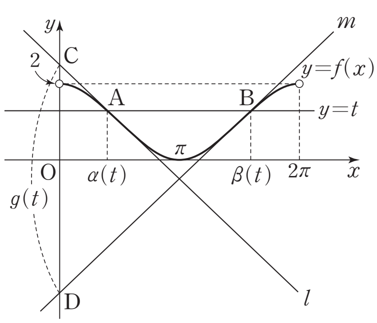
따라서

$\alpha'(t)\times\beta'(t)=-\dfrac{1}{\sin(\alpha(t))}\times\dfrac{1}{\sin(\alpha(t))}$

$=-\dfrac{1}{\sin^2(\alpha(t))}$

$=-\csc^2(\alpha(t))$ (참)

ㄷ.



곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{A}(\alpha(t), t)$에서의 접선의 방정식을 l이라 하면

$l : y-t=f'(\alpha(t))(x-\alpha(t))$ …… ㉠

㉠에 $x=0$을 대입하여 직선 l이 y축과 만나는 점 C의 y좌표를 구하면

$t-f'(\alpha(t))\times\alpha(t)=t+\alpha(t)\sin(\alpha(t))$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{B}(\beta(t), t)$에서의 접선의 방정식을 m이라 하면

$m : y-t=f'(\beta(t))(x-\beta(t))$ …… ㉡

㉡에 $x=0$을 대입하여 직선 m이 y축과 만나는 점 D의 y좌표를 구하면

$t-f'(\beta(t))\times\beta(t)$

$=t-\{-\sin(\beta(t))\}\times\beta(t)$

$=t-(2\pi-\alpha(t))\sin(\alpha(t))$

따라서

$g(t)=\{t+\alpha(t)\sin(\alpha(t))\}$
$\qquad-\{t-(2\pi-\alpha(t))\sin(\alpha(t))\}$

$=2\pi\sin(\alpha(t))$ …… ㉢

한편, $t=\dfrac{1}{2}$일 때, $1+\cos x=\dfrac{1}{2}$, $\cos x=-\dfrac{1}{2}$이고,

$0<x<2\pi$이므로 $x=\dfrac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\dfrac{4}{3}\pi$

즉, $\alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}\pi$ …… ㉣

ㄴ의 풀이 중 $\alpha'(t)=-\dfrac{1}{\sin(\alpha(t))}$에서

$\alpha'\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{\sin\left(\alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)}=-\dfrac{1}{\sin\dfrac{2}{3}\pi}$

$=-\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ …… ㉤

㉢의 양변을 t에 대하여 미분하면

$g'(t)=2\pi\cos(\alpha(t))\times\alpha'(t)$

따라서 위 식에 $t=\dfrac{1}{2}$을 대입하면 ㉣, ㉤에 의하여

$g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\pi\cos\left(\alpha\left(\dfrac{1}{2}\right)\right)\times\alpha'\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$=2\pi\times\cos\dfrac{2}{3}\pi\times\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$=2\pi\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

$=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

06 여러 가지 적분법

유제 본문 75~81쪽

1 14	2 ⑤	3 ③	4 ④	5 8
6 ⑤	7 ③	8 ⑤		

1 $f'(x)=x+x^{\frac{1}{2}}$이므로

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (x+x^{\frac{1}{2}})\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f(1)=\frac{7}{6}+C$이므로

$\frac{7}{6}+C=\frac{11}{6}$에서 $C=\frac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}$이므로

$f(4)=8+\frac{16}{3}+\frac{2}{3}=14$

답 14

2 $$\int_0^1 \frac{16^x-4^x}{4^x+2^x}dx$$
$$=\int_0^1 \frac{(4^x+2^x)(4^x-2^x)}{4^x+2^x}dx$$
$$=\int_0^1 (4^x-2^x)\,dx$$
$$=\left[\frac{4^x}{\ln 4}-\frac{2^x}{\ln 2}\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{4}{\ln 4}-\frac{2}{\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 2}\right)$$
$$=\left(\frac{2}{\ln 2}-\frac{2}{\ln 2}\right)-\left(\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}\right)$$
$$=\frac{1}{2\ln 2}$$

답 ⑤

3 $$f(x)=\int f'(x)\,dx$$
$$=\int (1+2\sin x)\cos x\,dx$$

이때 $1+2\sin x=t$로 놓으면

$2\cos x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int (1+2\sin x)\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int t\,dt$$
$$=\frac{1}{4}t^2+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

즉, $f(x)=\frac{1}{4}(1+2\sin x)^2+C$

이때 $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{4}+C$이므로 $\frac{1}{4}+C=\frac{1}{2}$에서 $C=\frac{1}{4}$

따라서 $f(x)=\frac{1}{4}(1+2\sin x)^2+\frac{1}{4}$이므로

$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}=\frac{5}{2}$

답 ③

4 $$\int_2^{\sqrt{6}} \frac{x^3}{x^4+4}dx=\frac{1}{4}\int_2^{\sqrt{6}} \frac{4x^3}{x^4+4}dx$$
$$=\frac{1}{4}\int_2^{\sqrt{6}} \frac{(x^4+4)'}{x^4+4}dx$$
$$=\frac{1}{4}\Big[\ln|x^4+4|\Big]_2^{\sqrt{6}}$$
$$=\frac{1}{4}\times(\ln 40-\ln 20)$$
$$=\frac{1}{4}\ln 2$$

따라서 $k=2^{\frac{1}{4}}$이므로

$k^{10}=(2^{\frac{1}{4}})^{10}=2^{\frac{5}{2}}=4\sqrt{2}$

답 ④

5 $\int_1^e x\ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=x$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=\frac{1}{2}x^2$이므로

$$\int_1^e x\ln x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{2}x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\left(\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)$$
$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

따라서 $a=\frac{1}{4}$, $b=\frac{1}{4}$이므로

$16(a+b)=16\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=8$

답 8

6 $\int_0^1 9xe^{3x}dx$에서 $u(x)=9x$, $v'(x)=e^{3x}$으로 놓으면

$u'(x)=9$, $v(x)=\frac{1}{3}e^{3x}$이므로

$$\int_0^1 9xe^{3x}dx=\left[3xe^{3x}\right]_0^1-\int_0^1 3e^{3x}dx$$
$$=\left[3xe^{3x}\right]_0^1-\left[e^{3x}\right]_0^1$$
$$=3e^3-(e^3-1)=2e^3+1$$

답 ⑤

7 $f(0)=0$이므로

$$\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{2h}=\frac{1}{2}\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{1}{2}f'(0)$$

또 $f(x)=\int_{2x}^{3x}(t+1)e^t dt$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)=(3x+1)e^{3x}\times3-(2x+1)e^{2x}\times2$$
$$=3(3x+1)e^{3x}-2(2x+1)e^{2x}$$

$f'(0)=3-2=1$

따라서 $\lim_{h\to0}\frac{f(h)}{2h}=\frac{1}{2}f'(0)=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

답 ③

8 $f(x)=2(e^x-1)+\int_0^x f(t)dt$ …… ㉠

이라 하자.

㉠에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=2e^x+f(x)$

따라서 이 식에 $x=0$을 대입하면

$f'(0)=2+0=2$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 82~83쪽

1 ④	2 ②	3 ①	4 ④	5 7
6 ③	7 ②	8 ①		

1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)dx=\left[-\cos x+\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=1-(-1)=2$$

답 ④

2 $\int_0^9(x-\sqrt{x}-1)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-x\right]_0^9$

$$=\frac{1}{2}\times81-\frac{2}{3}\times27-9=\frac{27}{2}$$

답 ②

3 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}dx$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)'}{\sin x+\cos x}dx$$
$$=-\left[\ln|\sin x+\cos x|\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-(-\ln\sqrt{2})$$
$$=\ln\sqrt{2}=\frac{1}{2}\ln 2$$

답 ①

4 $\int_1^e\left(\ln x^3+\frac{1}{x}\right)dx=\int_1^e\left(3\ln x+\frac{1}{x}\right)dx$

$$=3\int_1^e \ln x dx+\int_1^e\frac{1}{x}dx$$

이때 $\int_1^e \ln x dx$에서 $u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int_1^e \ln x dx=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e dx$$
$$=\left[x\ln x\right]_1^e-\left[x\right]_1^e$$
$$=e-(e-1)=1$$

따라서

$$3\int_1^e \ln x dx+\int_1^e\frac{1}{x}dx=3\times1+\left[\ln|x|\right]_1^e$$
$$=3+1=4$$

답 ④

5 $\int_1^3\frac{2}{x^2+4x+3}dx=\int_1^3\frac{2}{(x+1)(x+3)}dx$

$$=\int_1^3\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}\right)dx$$
$$=\left[\ln|x+1|-\ln|x+3|\right]_1^3$$
$$=\left[\ln\left|\frac{x+1}{x+3}\right|\right]_1^3$$
$$=\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{4}{3}$$

따라서 $p=3$, $q=4$이므로

$p+q=3+4=7$

답 7

6 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$이므로

$$f'(x)=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x}$$
$$=\sec^2 x+\csc^2 x$$

즉,

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int(\sec^2 x+\csc^2 x)dx$$
$$=\tan x-\cot x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=C$이므로 $C=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $f(x)=\tan x-\cot x+\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

답 ③

다른 풀이

$f'(x)=\csc^2 x\sec^2 x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \csc^2 x\sec^2 x\,dx$$

$u(x)=\csc^2 x$, $v'(x)=\sec^2 x$로 놓으면

$u'(x)=2\csc x\times(-\csc x\cot x)$, $v(x)=\tan x$이므로

$$f(x)=\tan x\csc^2 x+2\int \csc^2 x\,dx$$
$$=\tan x\csc^2 x-2\cot x+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

이때 $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2-2+C=C$이므로

$C=\frac{\sqrt{3}}{3}$

따라서 $f(x)=\tan x\csc^2 x-2\cot x+\frac{\sqrt{3}}{3}$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4\sqrt{3}}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$$

7 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x+2)\cos 2x\,dx$에서

$u(x)=x+2$, $v'(x)=\cos 2x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(x+2)\cos 2x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(x+2)\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin 2x\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}(x+2)\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}+\left[\frac{1}{4}\cos 2x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$
$$=0+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}$$

답 ②

8 $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 4x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(\sin 4x\times\sin 4x)dx$에서

$u(x)=\sin 4x$, $v'(x)=\sin 4x$로 놓으면

$u'(x)=4\cos 4x$, $v(x)=\boxed{-\frac{1}{4}\cos 4x}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 4x\,dx$$
$$=\left[-\frac{1}{4}\sin 4x\cos 4x\right]_0^{\frac{\pi}{8}}+\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos^2 4x\,dx$$
$$=0+\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos^2 4x\,dx$$

에서 $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 4x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos^2 4x\,dx$

따라서

$$2\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 4x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 4x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 4x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 4x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{8}}\cos^2 4x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}(\sin^2 4x+\cos^2 4x)dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{8}}dx$$
$$=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{8}}=\frac{\pi}{8}$$

이므로 $\int_0^{\frac{\pi}{8}}\sin^2 4x\,dx=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{8}=\boxed{\frac{\pi}{16}}$

즉, $f(x)=-\frac{1}{4}\cos 4x$, $p=\frac{\pi}{16}$이므로

$$f(p)=f\left(\frac{\pi}{16}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{8}$$

답 ①

Level 2 기본 연습 본문 84~85쪽

1 ③	2 32	3 ①	4 256	5 ②
6 12	7 ⑤	8 ③		

1 $f'(x)=\sin^3 x$이므로

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int \sin^3 x\,dx$$
$$=\int(\sin^2 x\times\sin x)dx$$
$$=\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$

이때 $\cos x=t$로 놓으면 $-\sin x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int(t^2-1)\,dt$$
$$=\frac{1}{3}t^3-t+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

즉, $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C$

곡선 $y=f(x)$가 원점을 지나므로

$f(0)=\dfrac{1}{3}-1+C=0$에서 $C=\dfrac{2}{3}$

따라서 $f(x)=\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+\dfrac{2}{3}$이므로

$k=f(\pi)=\dfrac{1}{3}\times(-1)^3-(-1)+\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

답 ③

2 $\displaystyle\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{-2}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx$

이때 $\displaystyle\int_{-2}^{0} f(x)\,dx$에서 $x=-t$로 놓으면

$x=-2$일 때 $t=2$, $x=0$일 때 $t=0$이고,

$1=-\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int_{-2}^{0} f(x)\,dx=-\int_{2}^{0} f(-t)\,dt=\int_{0}^{2} f(-t)\,dt$$

따라서

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\int_{0}^{2} f(-x)\,dx+\int_{0}^{2} f(x)\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}\{f(-x)+f(x)\}\,dx$$
$$=\int_{0}^{2}\cos\frac{\pi x}{8}\,dx$$
$$=\left[\frac{8}{\pi}\sin\frac{\pi x}{8}\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{8}{\pi}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$$

즉, $k=4\sqrt{2}$이므로 $k^2=(4\sqrt{2})^2=32$

답 32

3 $\dfrac{d}{dx}\{xf(x)\}=xf'(x)+f(x)$이므로

$xf(x)=\displaystyle\int 4x^3\ln x\,dx$

$\displaystyle\int 4x^3\ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=4x^3$으로 놓으면

$u'(x)=\dfrac{1}{x}$, $v(x)=x^4$이므로

$$\int 4x^3\ln x\,dx=x^4\ln x-\int x^3\,dx$$
$$=x^4\ln x-\frac{1}{4}x^4+C \text{ (단, } C\text{는 적분상수)}$$

즉, $xf(x)=x^4\ln x-\dfrac{1}{4}x^4+C$

이 식에 $x=1$을 대입하면

$f(1)=-\dfrac{1}{4}+C=-\dfrac{1}{4}$이므로 $C=0$

따라서 $f(x)=x^3\ln x-\dfrac{1}{4}x^3$이므로

$f(e)=e^3-\dfrac{1}{4}e^3=\dfrac{3}{4}e^3$

답 ①

4 $\tan g(t)$는 점 P에서의 접선의 기울기이므로

$f'(x)=2^x\ln 2$에서 $\tan g(t)=2^t\ln 2$

즉, $\displaystyle\int_{0}^{2} t\tan g(t)\,dt=\ln 2\int_{0}^{2} t2^t\,dt$

이때 $\displaystyle\int_{0}^{2} t2^t\,dt$에서 $u(t)=t$, $v'(t)=2^t$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=\dfrac{2^t}{\ln 2}$이므로

$$\int_{0}^{2} t2^t\,dt=\left[\frac{t2^t}{\ln 2}\right]_{0}^{2}-\frac{1}{\ln 2}\int_{0}^{2} 2^t\,dt$$
$$=\left[\frac{t2^t}{\ln 2}\right]_{0}^{2}-\frac{1}{\ln 2}\left[\frac{2^t}{\ln 2}\right]_{0}^{2}$$
$$=\frac{8}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 2}\times\frac{3}{\ln 2}$$
$$=\frac{8\ln 2-3}{(\ln 2)^2}$$

따라서

$$\int_{0}^{2} t\tan g(t)\,dt=\ln 2\times\frac{8\ln 2-3}{(\ln 2)^2}$$
$$=\frac{8\ln 2-3}{\ln 2}=\frac{\ln 256-3}{\ln 2}$$

이므로 $k=256$

답 256

5 $f'(x)=-a\sin\left(bx+\dfrac{\pi}{3}\right)\times b$

$=-ab\sin\left(bx+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$f''(x)=-ab\cos\left(bx+\dfrac{\pi}{3}\right)\times b$

$=-ab^2\cos\left(bx+\dfrac{\pi}{3}\right)$

이때 $f(0)=\dfrac{a}{2}$이므로 $f(0)=1$에서 $a=2$

$f''(0)=-\dfrac{ab^2}{2}$, $b>0$이므로 $f''(0)=-4$에서 $b=2$

즉, $f(x)=2\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$

따라서 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$에서

$2x+\dfrac{\pi}{3}=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=\dfrac{\pi}{3}$, $x=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t=\pi$이고,

$2=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx=2\times\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\cos t\,dt$$
$$=\Big[\sin t\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}=0-\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

답 ②

6 $$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec^4 x\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^2 x\times\sec^2 x)\,dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1+\tan^2 x)\sec^2 x\,dx$$

이때 $\tan x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=\dfrac{\pi}{3}$일 때 $t=\sqrt{3}$이고,

$\sec^2 x=\dfrac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos^4 x}dx=\int_0^{\sqrt{3}}(1+t^2)\,dt$$
$$=\left[t+\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\sqrt{3}}$$
$$=2\sqrt{3}$$

따라서 $k=2\sqrt{3}$이므로 $k^2=12$

답 12

7 $\displaystyle\int_0^{\pi} f''(x)\sin 2x\,dx$에서

$u(x)=\sin 2x$, $v'(x)=f''(x)$로 놓으면

$u'(x)=2\cos 2x$, $v(x)=f'(x)$이므로

$$\int_0^{\pi} f''(x)\sin 2x\,dx$$
$$=\Big[f'(x)\sin 2x\Big]_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}f'(x)\cos 2x\,dx$$
$$=-2\int_0^{\pi}f'(x)\cos 2x\,dx$$

또 $\displaystyle\int_0^{\pi}f'(x)\cos 2x\,dx$에서

$u_1(x)=\cos 2x$, $v_1'(x)=f'(x)$로 놓으면

$u_1'(x)=-2\sin 2x$, $v_1(x)=f(x)$이므로

$$\int_0^{\pi}f'(x)\cos 2x\,dx$$
$$=\Big[f(x)\cos 2x\Big]_0^{\pi}+2\int_0^{\pi}f(x)\sin 2x\,dx$$
$$=f(\pi)-f(0)+2\int_0^{\pi}f(x)\sin 2x\,dx$$
$$=f(\pi)-1+2\int_0^{\pi}f(x)\sin 2x\,dx$$

따라서

$$\int_0^{\pi}f''(x)\sin 2x\,dx$$
$$=-2f(\pi)+2-4\int_0^{\pi}f(x)\sin 2x\,dx$$

이므로

$$\int_0^{\pi}\{f''(x)+4f(x)\}\sin 2x\,dx=-2f(\pi)+2$$

즉, $-2f(\pi)+2=-2\pi^2$이므로

$f(\pi)=\pi^2+1$

답 ⑤

8 $\displaystyle f(x)+e^x\int_{\pi}^{x}f(t)e^{-t}dt=\cos 2x$ …… ㉠

㉠에 $x=\pi$를 대입하면 $f(\pi)=1$

또 ㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f'(x)+e^x\int_{\pi}^{x}f(t)e^{-t}dt+e^xf(x)e^{-x}=-2\sin 2x$$

$$f'(x)+e^x\int_{\pi}^{x}f(t)e^{-t}dt+f(x)=-2\sin 2x$$

㉠에서 $\displaystyle e^x\int_{\pi}^{x}f(t)e^{-t}dt+f(x)=\cos 2x$이므로

위의 식에 대입하면

$f'(x)+\cos 2x=-2\sin 2x$

즉, $f'(x)=-\cos 2x-2\sin 2x$이므로

$f(x)=-\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos 2x+C$ (단, C는 적분상수)

$x=\pi$를 대입하면 $f(\pi)=1+C$이므로

$1+C=1$에서 $C=0$

따라서 $f(x)=-\dfrac{1}{2}\sin 2x+\cos 2x$이므로

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right)=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 86쪽

1 ① 2 ② 3 16

1 ㄱ. $f(x)$

$=\cos x-2\int_0^x f(t)\sin(x-t)\,dt$

$=\cos x-2\int_0^x f(t)(\sin x\cos t-\cos x\sin t)\,dt$

$=\cos x-2\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$

$+2\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$

이므로 $f(0)=1$ (참)

ㄴ. $f(x)=\cos x-2\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$

$+2\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)$

$=-\sin x-2\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$

$-2\sin x\times f(x)\cos x$

$-2\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt+2\cos x\times f(x)\sin x$

이므로

$f'(x)=-\sin x-2\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$

$-2\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$ …… ㉠

㉠에 $x=\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$ …… ㉡

또 ㉠에 $x=-\frac{\pi}{2}$를 대입하면

$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)=1+2\int_0^{-\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$

$=1-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(t)\sin t\,dt$ …… ㉢

㉡+㉢에서

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(t)\sin t\,dt$

$=-2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt$

이므로

$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt=-\frac{f'\left(-\frac{\pi}{2}\right)+f'\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}$ (거짓)

ㄷ. $f'(x)=-\sin x-2\cos x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$

$-2\sin x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$

의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f''(x)$

$=-\cos x+2\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$

$-2\cos x\times f(x)\cos x-2\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$

$-2\sin x\times f(x)\sin x$

$=-\cos x+2\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$

$-2\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt$

$-2f(x)(\cos^2 x+\sin^2 x)$

$=-\cos x+2\sin x\int_0^x f(t)\cos t\,dt$

$-2\cos x\int_0^x f(t)\sin t\,dt-2f(x)$

ㄱ에서 $f(0)=1$이므로

$f''(0)=-1-2f(0)=-1-2=-3$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

2 $f(x)>0$, $g(x)>0$이므로

조건 (나)의 식의 양변에 $\frac{1}{f(x)g(x)}$을 곱하면

$\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}=1$

이 식의 양변을 적분하면

$\ln|f(x)|-\ln|g(x)|=x+C$ (단, C는 적분상수)

$\ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=x+C$

이 식에 $x=1$을 대입하면 $\frac{f(1)}{g(1)}=1$이므로

$0=1+C$에서 $C=-1$

즉, $\ln\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right|=x-1$

$f(x)>0$, $g(x)>0$이므로 $\frac{f(x)}{g(x)}=e^{x-1}$

따라서 $\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{e^{x-1}}$이므로

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g(n)}{f(n)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{g(k)}{f(k)}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{e}+\frac{1}{e^2}+\frac{1}{e^3}+\cdots+\frac{1}{e^{n-1}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{e}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{e}}$$

$$=\frac{\frac{1}{e}}{1-\frac{1}{e}}=\frac{1}{e-1}$$

답 ②

다른 풀이

$g(x)>0$이므로 조건 (나)의 식의 양변에 $\frac{1}{\{g(x)\}^2}$을 곱하면

$$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}=\frac{f(x)}{g(x)}$$

즉, $\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'=\frac{f(x)}{g(x)}$

$\frac{f(x)}{g(x)}>0$이고 $\frac{\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}'}{\frac{f(x)}{g(x)}}=1$이므로

이 식의 양변을 적분하면

$\ln\frac{f(x)}{g(x)}=x+C$ (단, C는 적분상수)

$\frac{f(1)}{g(1)}=1$이므로 $C=-1$

$\ln\frac{f(x)}{g(x)}=x-1$에서

$$\frac{f(x)}{g(x)}=e^{x-1}$$

3 $\{f(x)\}^2-xf(x)f'(x)=x^4e^{-x}$에서

$x>0$, $f(x)>0$이므로 양변에 $\frac{1}{f(x)}$을 곱하면

$$f(x)-xf'(x)=\frac{x^4e^{-x}}{f(x)}$$

$$\frac{f(x)-xf'(x)}{x^2}=\frac{x^2e^{-x}}{f(x)}$$

$$\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=-\frac{x^2e^{-x}}{f(x)}$$

그런데 $\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$이므로

$$\frac{d}{dx}\left\{\frac{f(x)}{x}\right\}=-\frac{x^2e^{-x}}{f(x)} \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, $\int_1^2\frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}dx$에서 $2x=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=2$, $x=2$일 때 $t=4$이고,

$2=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_1^2\frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}dx=\int_2^4\frac{8e^t\{f(t)\}^3}{2t^3}dt$$

$$=4\int_2^4 e^t\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}^3dt$$

이때 $\int_2^4 e^t\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}^3dt$에서

$u(t)=\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}^3$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면 ㉠에서

$$u'(t)=3\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}^2\times\left\{-\frac{t^2e^{-t}}{f(t)}\right\}$$

$$=-3f(t)e^{-t}$$

이고, $v(t)=e^t$이므로

$$\int_2^4 e^t\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}^3dt$$

$$=\left[\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}^3e^t\right]_2^4+3\int_2^4 f(t)dt$$

$$=\frac{\{f(4)\}^3e^4}{64}-\frac{\{f(2)\}^3e^2}{8}+3\int_2^4 f(t)dt$$

따라서

$$\int_1^2\frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}dx$$

$$=4\int_2^4 e^t\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}^3dt$$

$$=\frac{e^4}{16}\times\{f(4)\}^3-\frac{e^2}{2}\times\{f(2)\}^3+12\int_2^4 f(t)dt$$

이므로

$$\int_1^2\frac{e^{2x}\{f(2x)\}^3}{x^3}dx-12\int_2^4 f(x)dx$$

$$=\frac{e^4}{16}\times\{f(4)\}^3-\frac{e^2}{2}\times\{f(2)\}^3$$

즉, $m=16$

답 16

07 정적분의 활용

유제 본문 89~97쪽

1 ②	2 9	3 ④	4 9	5 ②
6 23	7 ②	8 12		

1 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\ln 2+\frac{\ln 2\times k}{n}\right)\frac{\ln 2}{n}$

$=\int_{\ln 2}^{2\ln 2} f(x)\,dx=\int_{\ln 2}^{\ln 4} f(x)\,dx$

$=\int_{\ln 2}^{\ln 4} e^x\,dx$

$=\left[e^x\right]_{\ln 2}^{\ln 4}$

$=4-2=2$

답 ②

2 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2n+4k}{n^2+kn+k^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n\times\left(2+\frac{4k}{n}\right)}{n^2\times\left\{1+\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right\}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{2+\frac{4k}{n}}{1+\frac{k}{n}+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$

$=\int_0^1\frac{2+4x}{1+x+x^2}dx$

$=2\int_0^1\frac{1+2x}{1+x+x^2}dx$

$=2\int_0^1\frac{(1+x+x^2)'}{1+x+x^2}dx$

$=2\left[\ln|1+x+x^2|\right]_0^1$

$=2\ln 3=\ln 9$

따라서 $m=9$

답 9

3 $S_1=\int_k^0\frac{1}{x+2}dx=\int_k^0\frac{(x+2)'}{x+2}dx$

$=\left[\ln|x+2|\right]_k^0=\ln 2-\ln(k+2)$

$=\ln\frac{2}{k+2}$

$S_2=\int_0^2\frac{1}{x+2}dx=\int_0^2\frac{(x+2)'}{x+2}dx$

$=\left[\ln|x+2|\right]_0^2=\ln 4-\ln 2$

$=\ln 2$

이때 $S_1 : S_2=2 : 1$에서 $S_1=2S_2$

즉, $\ln\frac{2}{k+2}=2\ln 2$

따라서 $\frac{2}{k+2}=4$에서

$k=-\frac{3}{2}$

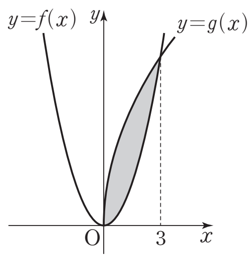
답 ④

4 $x^2=3\sqrt{3x}$에서 $x^4-27x=0$

$x(x^3-27)=x(x-3)(x^2+3x+9)=0$

$x=0$ 또는 $x=3$

즉, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 $x=0$ 또는 $x=3$이고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



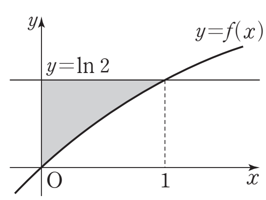
따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^3(3\sqrt{3x}-x^2)\,dx=\left[2\sqrt{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}x^3\right]_0^3$

$=2\sqrt{3}\times3\sqrt{3}-9=9$

답 9

5 곡선 $y=f(x)$는 곡선 $y=\ln x$를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시킨 곡선이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\ln 2$가 만나는 점의 x좌표가 1이므로 구하는 넓이를 S라 하면

$S=1\times\ln 2-\int_0^1 \ln(x+1)\,dx$

$=\ln 2-\int_1^2 \ln x\,dx$

이때 $\int_1^2 \ln x\,dx$에서

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$\int_1^2 \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^2-\int_1^2 dx=\Big[x\ln x\Big]_1^2-\Big[x\Big]_1^2$

$=2\ln 2-1$

따라서

$S=\ln 2-(2\ln 2-1)=1-\ln 2=\ln\frac{e}{2}$

이므로 $k=\frac{e}{2}$

답 ②

다른 풀이

함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하면

$y=\ln(x+1)$에서 $x=\ln(y+1)$

$y+1=e^x$이므로 $g(x)=e^x-1$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)\,dx=\Big[e^x-x\Big]_0^{\ln 2}$

$=2-\ln 2-1=1-\ln 2=\ln\frac{e}{2}$

이므로 $k=\frac{e}{2}$

6 $1\le t\le 4$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{t})^2=\frac{\sqrt{3}}{4}t$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$V=\int_1^4 S(t)\,dt=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_1^4 t\,dt$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_1^4=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\left(8-\frac{1}{2}\right)$

$=\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{15}{2}=\frac{15}{8}\sqrt{3}$

따라서 $p=8$, $q=15$이므로

$p+q=8+15=23$

답 23

7 $f'(x)=\frac{2e^{2x}-2e^{-2x}}{4}=\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}$이므로

$1+\{f'(x)\}^2=1+\left(\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}\right)^2=1+\frac{e^{4x}-2+e^{-4x}}{4}$

$=\frac{e^{4x}+2+e^{-4x}}{4}$

$=\left(\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}\right)^2$

즉, $\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}=\frac{e^{2x}+e^{-2x}}{2}$

따라서 $0\le x\le\ln 2$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이를 l이라 하면

$l=\int_0^{\ln 2}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_0^{\ln 2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx$

$=\Big[\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\Big]_0^{\ln 2}=\left(\frac{1}{4}\times 4-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)$

$=\frac{15}{16}$

답 ②

8 $x=4e^t$에서 $\frac{dx}{dt}=4e^t$, $y=2t-e^{2t}$에서 $\frac{dy}{dt}=2-2e^{2t}$이므로

$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(4e^t)^2+(2-2e^{2t})^2}$

$=\sqrt{4(e^{2t}+1)^2}=2(e^{2t}+1)$

따라서 $t=\ln 2$에서 $t=\ln 4$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$s=\int_{\ln 2}^{\ln 4}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=2\int_{\ln 2}^{\ln 4}(e^{2t}+1)\,dt$

$=2\Big[\frac{1}{2}e^{2t}+t\Big]_{\ln 2}^{\ln 4}=2\times\{(8+2\ln 2)-(2+\ln 2)\}$

$=12+2\ln 2$

즉, $m=12$

답 12

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ③	2 ②	3 ①	4 4	5 ②
6 ②	7 9	8 ②	9 ③	10 ②

1 $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{2}{n^3}}+\sqrt{\frac{3}{n^3}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n^3}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$

$=\int_0^1\sqrt{x}\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$

답 ③

2 $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\frac{1}{n+6}+\cdots+\frac{1}{n+2n}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n}}+\frac{1}{1+\frac{4}{n}}+\frac{1}{1+\frac{6}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{2k}{n}}$

$=\int_0^1\frac{1}{1+2x}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2}{1+2x}dx$

$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{(1+2x)'}{1+2x}dx$

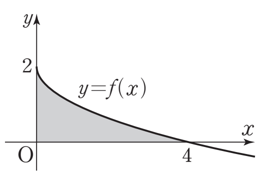
$=\frac{1}{2}\Big[\ln|1+2x|\Big]_0^1$

$=\frac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3}$

따라서 $p=\sqrt{3}$

답 ②

3 곡선 $y=f(x)$가 두 점 $(0,\ 2)$, $(4,\ 0)$을 지나므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

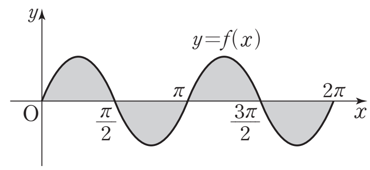
$S=\int_0^4(2-\sqrt{x})\,dx$

$=\left[2x-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$=8-\frac{16}{3}=\frac{8}{3}$

답 ①

4 함수 $f(x)$의 주기가 π이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$\frac{1}{4}S=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

즉, $S=4\times1=4$

답 4

5 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=1$, $y=4$가 제1사분면에서 만나는 점의 x좌표가 각각 $x=1$, $x=\frac{1}{2}$이므로

$\frac{1}{2}\le x\le1$에서 곡선 $y=f(x)$와 두 직선 $y=1$, $x=\frac{1}{2}$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{1}{x^2}-1\right)dx=\left[-\frac{1}{x}-x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$

$=-2-\left(-\frac{5}{2}\right)=\frac{1}{2}$

y축과 직선 $x=\frac{1}{2}$ 및 두 직선 $y=1$, $y=4$로 둘러싸인 직사각형의 넓이는

$\frac{1}{2}\times3=\frac{3}{2}$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\times\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)=4$

답 ②

다른 풀이

제1사분면의 곡선 $y=\frac{1}{x^2}$에서 $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$이므로 제1사분면의 곡선 $x=\frac{1}{\sqrt{y}}$과 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_1^4\frac{1}{\sqrt{y}}dy=\int_1^4 y^{-\frac{1}{2}}dy$

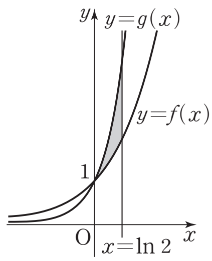
$=\left[2y^{\frac{1}{2}}\right]_1^4$

$=4-2=2$

따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$S=2\times2=4$

6 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $x=\ln 2$는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}-e^x)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-e^x\right]_0^{\ln 2}$$
$$=\left(\frac{1}{2}\times 4-2\right)-\left(\frac{1}{2}-1\right)$$
$$=\frac{1}{2}$$

답 ②

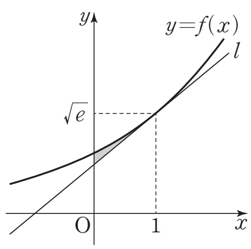
7 $f'(x)=\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}$이므로 점 $(1, \sqrt{e})$에서의 접선의 기울기는

$$f'(1)=\frac{\sqrt{e}}{2}$$

즉, 직선 l의 방정식은

$$y-\sqrt{e}=\frac{\sqrt{e}}{2}(x-1)$$
$$y=\frac{\sqrt{e}}{2}x+\frac{\sqrt{e}}{2}$$

곡선 $y=f(x)$와 직선 l은 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_0^1\left\{e^{\frac{x}{2}}-\left(\frac{\sqrt{e}}{2}x+\frac{\sqrt{e}}{2}\right)\right\}dx$$
$$=\int_0^1\left(e^{\frac{x}{2}}-\frac{\sqrt{e}}{2}x-\frac{\sqrt{e}}{2}\right)dx$$
$$=\left[2e^{\frac{x}{2}}-\frac{\sqrt{e}}{4}x^2-\frac{\sqrt{e}}{2}x\right]_0^1$$
$$=\left(2\sqrt{e}-\frac{\sqrt{e}}{4}-\frac{\sqrt{e}}{2}\right)-2$$
$$=\frac{5}{4}\sqrt{e}-2$$

즉, $p=4$, $q=5$이므로

$$p+q=4+5$$
$$=9$$

답 9

8 $0\le t\le 2$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$$S(t)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{t^2\sqrt{t}}{2}\right)^2=\frac{\pi}{8}t^5$$

따라서 구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^2 S(t)\,dt=\frac{\pi}{8}\int_0^2 t^5\,dt$$
$$=\frac{\pi}{8}\left[\frac{1}{6}t^6\right]_0^2=\frac{\pi}{8}\times\frac{32}{3}$$
$$=\frac{4\pi}{3}$$

답 ②

9 $x=e^t\sin t$에서

$$\frac{dx}{dt}=e^t\sin t+e^t\cos t=e^t(\sin t+\cos t),$$

$y=e^t\cos t$에서

$$\frac{dy}{dt}=e^t\cos t-e^t\sin t=e^t(\cos t-\sin t)\text{이므로}$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$
$$=\sqrt{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2+e^{2t}(\cos t-\sin t)^2}$$
$$=\sqrt{e^{2t}(1+2\sin t\cos t)+e^{2t}(1-2\sin t\cos t)}$$
$$=\sqrt{2e^{2t}}=\sqrt{2}e^t$$

따라서 점 P가 $t=\ln 2$에서 $t=\ln 3$까지 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$
$$=\sqrt{2}\int_{\ln 2}^{\ln 3}e^t\,dt=\sqrt{2}\left[e^t\right]_{\ln 2}^{\ln 3}$$
$$=\sqrt{2}\times(3-2)=\sqrt{2}$$

답 ③

10 $f(x)=\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}$에서 $f'(x)=(x+2)^{\frac{1}{2}}$이므로

$6\le x\le 13$에서 곡선 $y=f(x)$의 길이를 l이라 하면

$$l=\int_6^{13}\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx=\int_6^{13}\sqrt{1+(x+2)}\,dx$$
$$=\int_6^{13}\sqrt{x+3}\,dx=\left[\frac{2}{3}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right]_6^{13}$$
$$=\frac{2}{3}\times\left(16^{\frac{3}{2}}-9^{\frac{3}{2}}\right)$$
$$=\frac{2}{3}\times 37=\frac{74}{3}$$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

1 ②	2 ③	3 21	4 ④	5 105
6 ①	7 16	8 ⑤		

1 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(e^{1+\frac{1}{n}}+2e^{1+\frac{2}{n}}+3e^{1+\frac{3}{n}}+\cdots+ne^{1+\frac{n}{n}})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}e^{1+\frac{1}{n}}+\frac{2}{n}e^{1+\frac{2}{n}}+\frac{3}{n}e^{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{n}{n}e^{1+\frac{n}{n}}\right)$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1 xe^{1+x}dx$

$=e\int_0^1 xe^x dx$

이때 $\int_0^1 xe^x dx$에서 $u(x)=x$, $v'(x)=e^x$으로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=e^x$이므로

$\int_0^1 xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\int_0^1 e^x dx=\Big[xe^x\Big]_0^1-\Big[e^x\Big]_0^1$

$=e-(e-1)=1$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{1+\frac{1}{n}}+2e^{1+\frac{2}{n}}+3e^{1+\frac{3}{n}}+\cdots+ne^{1+\frac{n}{n}}\right)$

$=e\int_0^1 xe^x dx=e\times 1=e$

답 ②

2 $\angle \mathrm{AMP}_k=\frac{k\pi}{n}$이므로 삼각형 AMP_k의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AM}}\times\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{M}}\times\sin\frac{k\pi}{n}=2\sin\frac{k\pi}{n}$

이때 $\overline{\mathrm{AQ}_k}=\frac{3}{4}\overline{\mathrm{AP}_k}$이므로

$S(k)=\frac{3}{4}\times 2\sin\frac{k\pi}{n}=\frac{3}{2}\sin\frac{k\pi}{n}$

따라서

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}S(k)=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{2n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

$=\frac{3}{2}\int_0^1\sin\pi x\,dx$

$=\frac{3}{2}\Big[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\Big]_0^1$

$=\frac{3}{2}\times\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{\pi}\right)=\frac{3}{\pi}$

답 ③

3 $\int_0^1 xf(2x^2+1)dx$에서 $2x^2+1=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=1$, $x=1$일 때 $t=3$이고, $4x=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_0^1 xf(2x^2+1)dx=\frac{1}{4}\int_1^3 f(t)dt$

이때 $f(x)\ge 0$이므로 $\int_1^3 f(t)dt$의 값은 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=1$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

즉, $\int_1^3 f(t)dt=\frac{13}{2}$

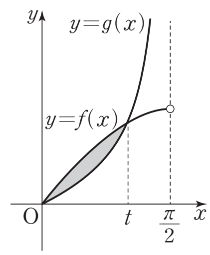
따라서 $\int_0^1 xf(2x^2+1)dx=\frac{1}{4}\times\frac{13}{2}=\frac{13}{8}$

즉, $p=8$, $q=13$이므로

$p+q=8+13=21$

답 21

4 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 그림과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 만나는 점 중 원점이 아닌 점의 x좌표를 t라 하면

$3\sin t=\tan t$

$3\sin t=\frac{\sin t}{\cos t}$

$\sin t\left(3-\frac{1}{\cos t}\right)=0$에서

$\cos t=\frac{1}{3}$ …… ㉠

이때 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이를 S라 하면

$S=\int_0^t(3\sin x-\tan x)dx$

$=3\int_0^t\sin x\,dx-\int_0^t\tan x\,dx$

$=3\int_0^t\sin x\,dx+\int_0^t\frac{(-\sin x)}{\cos x}dx$

$=3\int_0^t\sin x\,dx+\int_0^t\frac{(\cos x)'}{\cos x}dx$

$=3\Big[-\cos x\Big]_0^t+\Big[\ln|\cos x|\Big]_0^t$

$=3(-\cos t+1)+\ln|\cos t|$

㉠에 의하여

$S=3\times\left(-\frac{1}{3}+1\right)+\ln\frac{1}{3}$

$=2+\ln\frac{1}{3}$

$=\ln\frac{e^2}{3}$

답 ④

5 $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}$

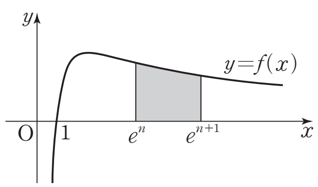
$=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0$에서 $x=e$

$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		↗	극대	↘

$\lim_{x\to 0+}f(x)=-\infty$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



이때 $S(n)=\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{\ln x}{x}dx$

$\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{\ln x}{x}dx$에서 $\ln x=t$로 놓으면

$x=e^n$일 때 $t=n$, $x=e^{n+1}$일 때 $t=n+1$이고,

$\frac{1}{x}=\frac{dt}{dx}$이므로

$\int_{e^n}^{e^{n+1}}\frac{\ln x}{x}dx=\int_n^{n+1}t\,dt=\Big[\frac{1}{2}t^2\Big]_n^{n+1}$

$=\frac{(n+1)^2-n^2}{2}$

$=n+\frac{1}{2}$

따라서 $S(n)=n+\frac{1}{2}$이므로

$\sum_{k=1}^{10}S(2k-1)=\sum_{k=1}^{10}\left(2k-\frac{1}{2}\right)$

$=2\times\frac{10\times 11}{2}-10\times\frac{1}{2}$

$=110-5=105$

답 105

6 $f(-x)=-f(x)$이므로 곡선 $y=f(x)$는 원점에 대하여 대칭이다.

또

$f'(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}+xe^{-\frac{x^2}{2}}\times(-x)$

$=e^{-\frac{x^2}{2}}\times(1-x^2)$

이므로 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

$x\geq 0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	극대	↘

$f''(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}\times(-x)\times(1-x^2)+e^{-\frac{x^2}{2}}\times(-2x)$

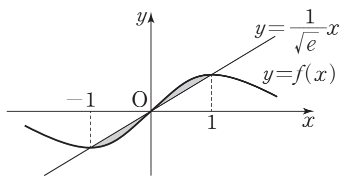
$=x(x^2-3)e^{-\frac{x^2}{2}}$

에서 $0<x<1$일 때 $f''(x)<0$이므로 곡선 $y=f(x)$는 위로 볼록하다.

또 $xe^{-\frac{x^2}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}x$에서 $x\left(e^{-\frac{x^2}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right)=0$이므로

$x=0$ 또는 $x=1$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=\frac{1}{\sqrt{e}}x$는 그림과 같다.



구하는 넓이를 S라 하면

$\frac{1}{2}S=\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{\sqrt{e}}$

이때 $\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx$에서 $\frac{x^2}{2}=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=0$, $x=1$일 때 $t=\frac{1}{2}$이고, $x=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^1 xe^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t}dt=\Big[-e^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{\sqrt{e}}+1$$

따라서 $\frac{1}{2}S=\left(-\frac{1}{\sqrt{e}}+1\right)-\frac{1}{2\sqrt{e}}=1-\frac{3}{2\sqrt{e}}$에서

$S=2-\frac{3}{\sqrt{e}}$이므로 $p=2$

답 ①

7 $0\le t\le 1$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$를 포함하고 x축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$라 하면

$S(t)=(e^t-t)^2=e^{2t}-2te^t+t^2$

구하는 입체도형의 부피를 V라 하면

$$V=\int_0^1 S(t)dt=\int_0^1 (e^{2t}-2te^t+t^2)dt$$
$$=\int_0^1 (e^{2t}+t^2)dt-2\int_0^1 te^t dt$$

이때 $\int_0^1 te^t dt$에서 $u(t)=t$, $v'(t)=e^t$으로 놓으면

$u'(t)=1$, $v(t)=e^t$이므로

$$\int_0^1 te^t dt=\Big[te^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t dt=\Big[te^t\Big]_0^1-\Big[e^t\Big]_0^1$$
$$=e-(e-1)=1$$

따라서

$$V=\int_0^1 (e^{2t}+t^2)dt-2$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2t}+\frac{1}{3}t^3\right]_0^1-2$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-2$$
$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{13}{6}$$

이므로 $p=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{13}{6}$

즉, $6(p-q)=6\times\left\{\frac{1}{2}-\left(-\frac{13}{6}\right)\right\}=3+13=16$

답 16

8 $x=\frac{1}{2}e^{2t}-kt$에서 $\frac{dx}{dt}=e^{2t}-k$,

$y=2\sqrt{k}e^t$에서 $\frac{dy}{dt}=2\sqrt{k}e^t$이므로

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(e^{2t}-k)^2+(2\sqrt{k}e^t)^2}$$
$$=\sqrt{(e^{2t}+k)^2}$$
$$=e^{2t}+k$$

따라서 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P가 움직인 거리를 s라 하면

$$s=\int_1^2 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt$$
$$=\int_1^2 (e^{2t}+k)dt$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2t}+kt\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{1}{2}e^4+2k\right)-\left(\frac{1}{2}e^2+k\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^2+k$$

즉, $\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^2+k=\frac{1}{2}e^4$에서

$k=\frac{1}{2}e^2$

답 ⑤

Level 3 실력 완성

본문 102쪽

1 ④	2 9	3 5	4 6

1
$$\frac{\sqrt[n]{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)\times\cdots\times(n+n)}}{n}$$
$$=\sqrt[n]{\frac{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)\times\cdots\times(n+n)}{n^n}}$$
$$=\sqrt[n]{\frac{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)\times\cdots\times(n+n)}{n\times n\times n\times\cdots\times n}}$$
$$=\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)\times\left(1+\frac{2}{n}\right)\times\left(1+\frac{3}{n}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{n}{n}\right)}$$

이므로

$$\ln\frac{\sqrt[n]{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)\times\cdots\times(n+n)}}{n}$$
$$=\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$

이때

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)\times\cdots\times(n+n)}}{n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{3}{n}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{n}{n}\right)\right\}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 \ln(1+x)dx$$
$$=\int_1^2 \ln x\,dx$$

$u(x)=\ln x$, $v'(x)=1$로 놓으면

$u'(x)=\frac{1}{x}$, $v(x)=x$이므로

$$\int_1^2 \ln x\,dx=\Big[x\ln x\Big]_1^2-\int_1^2 dx$$
$$=\Big[x\ln x\Big]_1^2-\Big[x\Big]_1^2$$
$$=2\ln 2-1=\ln\frac{4}{e}$$

따라서

$$\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sqrt[n]{(n+1)\times(n+2)\times(n+3)\times\cdots\times(n+n)}}{n}$$
$$=\ln\frac{4}{e}$$

답 ④

2 $x\sin x=\frac{1}{2}x$에서 $x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0$

$x=0$ 또는 $\sin x=\frac{1}{2}$

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{6}$

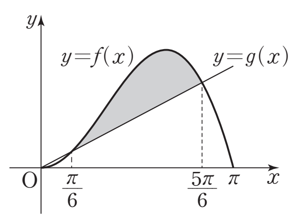
즉, $0\le x\le\pi$에서 곡선 $y=x\sin x$와 직선 $y=\frac{1}{2}x$가 만나는 점의 x좌표는

$x=0$ 또는 $x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5\pi}{6}$

또 $x\sin x\ge\frac{1}{2}x$에서 $x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\ge 0$

$\sin x\ge\frac{1}{2}$에서 $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{5\pi}{6}$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\left(x\sin x-\frac{1}{2}x\right)dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}x\sin x\,dx-\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{1}{2}x\,dx$$

이때 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}x\sin x\,dx$에서

$u(x)=x$, $v'(x)=\sin x$로 놓으면

$u'(x)=1$, $v(x)=-\cos x$이므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}x\sin x\,dx=\Big[-x\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\cos x\,dx$$
$$=\Big[-x\cos x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}+\Big[\sin x\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}$$
$$=\left(\frac{5\sqrt{3}\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}\pi}{12}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$$

또 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{1}{2}x\,dx$의 값은 직선 $y=\frac{1}{2}x$와 x축 및 두 직선 $x=\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{5\pi}{6}$로 둘러싸인 사다리꼴의 넓이와 같으므로

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{1}{2}x\,dx=\frac{1}{2}\times\left(\frac{\pi}{12}+\frac{5\pi}{12}\right)\times\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi^2}{6}$$

따라서 $S=\frac{\sqrt{3}\pi}{2}-\frac{\pi^2}{6}$이므로 $p=\frac{1}{2}$, $q=-\frac{1}{6}$

즉, $\frac{p^2}{q^2}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\left(-\frac{1}{6}\right)^2}=9$

답 9

3 $f'(x)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{3+x}-\frac{1}{3-x}\right)$

$$=-\frac{x}{(3+x)(3-x)}$$

$f'(x)=0$에서 $x=0$

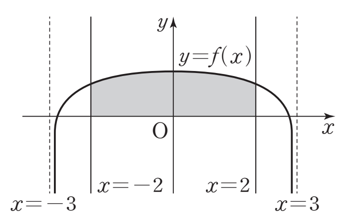
$-3<x<3$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(-3)	$\cdots$	0	$\cdots$	(3)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		↗	극대	↘	

$\lim_{x\to-3+}f(x)=-\infty$, $\lim_{x\to 3-}f(x)=-\infty$이고,

$f(x)=0$에서 $x=-2\sqrt{2}$ 또는 $x=2\sqrt{2}$

또 $f(-x)=f(x)$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 구하는 넓이를 S라 하면

$$\frac{1}{2}S=\int_0^2 \frac{\ln(3+x)+\ln(3-x)}{2}dx$$

$$S=\int_0^2 \{\ln(3+x)+\ln(3-x)\}dx$$

$$=\int_0^2 \ln(3+x)dx+\int_0^2 \ln(3-x)dx$$

이때 $\int_0^2 \ln(3+x)dx$에서 $3+x=t$로 놓으면

$x=0$일 때 $t=3$, $x=2$일 때 $t=5$이고,

$1=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_0^2 \ln(3+x)dx=\int_3^5 \ln t\,dt$$

또 $\int_0^2 \ln(3-x)dx$에서 $3-x=s$로 놓으면

$x=0$일 때 $s=3$, $x=2$일 때 $s=1$이고,

$-1=\frac{ds}{dx}$이므로

$$\int_0^2 \ln(3-x)dx=-\int_3^1 \ln s\,ds$$

$$=\int_1^3 \ln s\,ds$$

따라서

$$S=\int_3^5 \ln t\,dt+\int_1^3 \ln s\,ds$$

$$=\int_3^5 \ln t\,dt+\int_1^3 \ln t\,dt$$

$$=\int_1^5 \ln t\,dt$$

$u(t)=\ln t$, $v'(t)=1$로 놓으면

$u'(t)=\frac{1}{t}$, $v(t)=t$이므로

$$\int_1^5 \ln t\,dt=\Big[t\ln t\Big]_1^5-\int_1^5 dt$$

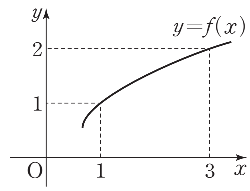
$$=\Big[t\ln t\Big]_1^5-\Big[t\Big]_1^5$$

$$=5\ln 5-4$$

이므로 $m=5$

답 5

4 함수 $y=f(x)$의 그래프가 좌표평면의 두 점 $(1,\ 1)$, $(3,\ 2)$를 지나고, $f'(x)>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 그림과 같다.



(i) $\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx$에서 $\sqrt{x}=t$로 놓으면

$x=1$일 때 $t=1$, $x=9$일 때 $t=3$이고,

$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{dt}{dx}$, $\frac{1}{2t}=\frac{dt}{dx}$이므로

$$\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx=\int_1^3 2tf'(t)dt$$

이때 $\int_1^3 2tf'(t)dt$에서

$u(t)=2t$, $v'(t)=f'(t)$로 놓으면

$u'(t)=2$, $v(t)=f(t)$이므로

$$\int_1^3 2tf'(t)dt=\Big[2tf(t)\Big]_1^3-2\int_1^3 f(t)dt$$

$$=6f(3)-2f(1)-2\int_1^3 f(t)dt$$

조건 (가)에서 $f(1)=1$, $f(3)=2$이고,

조건 (나)에서 $\int_1^3 f(x)dx=\frac{7}{2}$이므로

$$\int_1^3 2tf'(t)dt=6\times2-2\times1-2\times\frac{7}{2}=3$$

즉, $\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx=3$

(ii) $\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$에서 $\sqrt{x}=s$로 놓으면

$x=1$일 때 $s=1$, $x=4$일 때 $s=2$이고,

$\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{ds}{dx}$이므로

$$\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=\int_1^2 2g(s)ds$$

이때 $\int_1^2 g(s)ds$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 y축 및 두 직선 $y=1$, $y=2$로 둘러싸인 부분의 넓이이므로

$$\int_1^2 g(s)ds=3\times2-1\times1-\frac{7}{2}=\frac{3}{2}$$

즉, $\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=2\times\frac{3}{2}=3$

(i), (ii)에서

$$\int_1^9 f'(\sqrt{x})dx+\int_1^4 \frac{g(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=3+3=6$$

답 6