www.ebs*i*.co.kr

수능특강 수학영역 **수학 Ⅱ**

정답과 풀이

01 함수의 극한

유제 본문 5~11쪽

1 ③ 2 ④ 3 ① 4 6 5 ④
6 ② 7 ③ 8 2

Level 1 기초 연습 본문 12쪽

1 ④ 2 2 3 ③ 4 ① 5 ①

Level 2 기본 연습 본문 13~14쪽

1 ① 2 ③ 3 ③ 4 ④ 5 ②
6 ⑤ 7 20 8 ④

Level 3 실력 완성 본문 15쪽

1 ① 2 ② 3 ③

02 함수의 연속

유제 본문 19~23쪽

1 ④ 2 5 3 ② 4 ③ 5 ④

Level 1 기초 연습 본문 24쪽

1 ④ 2 ② 3 ③ 4 ②

Level 2 기본 연습 본문 25~26쪽

1 ③ 2 ④ 3 ④ 4 3 5 ④
6 ③ 7 9 8 3

Level 3 실력 완성 본문 27쪽

1 ④ 2 ② 3 ①

03 미분계수와 도함수

유제 본문 31~37쪽

1 ② 2 ③ 3 ② 4 3 5 ③
6 990 7 ④ 8 ①

Level 1 기초 연습 본문 38~39쪽

1 ④ 2 ③ 3 ② 4 ① 5 ⑤
6 21 7 ② 8 ① 9 ④ 10 ①

Level 2 기본 연습 본문 40~41쪽

1 ⑤ 2 ① 3 ② 4 ④ 5 ③
6 ⑤ 7 17 8 ③

Level 3 실력 완성 본문 42~43쪽

1 ⑤ 2 ④ 3 ④ 4 10 5 ④
6 ③

04 도함수의 활용 (1)

유제 본문 47~53쪽

1 ③ 2 ② 3 ③ 4 ⑤ 5 ⑤
6 ② 7 ⑤

Level 1 기초 연습 본문 54쪽

1 ③ 2 ④ 3 ① 4 ②

Level 2 기본 연습 본문 55~56쪽

1 ③ 2 ④ 3 23 4 ④ 5 21
6 ① 7 ④ 8 20

Level 3 실력 완성 본문 57쪽

1 191 2 ⑤ 3 ②

05 도함수의 활용 (2)

유제 본문 61~65쪽

1 16　2 ③　3 ②　4 ④　5 ⑤
6 ①

Level 1 기초 연습 본문 66쪽

1 ③　2 ④　3 ⑤　4 ③

Level 2 기본 연습 본문 67~68쪽

1 ⑤　2 ③　3 ④　4 ④　5 ⑤
6 ③　7 ③　8 70

Level 3 실력 완성 본문 69쪽

1 ⑤　2 ⑤　3 75

06 부정적분과 정적분

유제 본문 73~81쪽

1 ④　2 ③　3 ②　4 ④　5 ①
6 ④　7 ②　8 ③　9 ③　10 ①

Level 1 기초 연습 본문 82~83쪽

1 ①　2 ③　3 ④　4 ①　5 ⑤
6 ⑤　7 ②　8 ⑤　9 ①　10 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 84~85쪽

1 ②　2 ②　3 ③　4 ③　5 ④
6 ④　7 ③　8 ④

Level 3 실력 완성 본문 86쪽

1 ①　2 ③　3 ①

07 정적분의 활용

유제 본문 89~97쪽

1 ④　2 ⑤　3 24　4 ①　5 ②
6 8　7 ④　8 10

Level 1 기초 연습 본문 98~99쪽

1 ③　2 ④　3 ⑤　4 ②　5 ③
6 ②　7 ④　8 ②　9 ④

Level 2 기본 연습 본문 100~101쪽

1 ③　2 ③　3 ④　4 ④　5 ②
6 ③　7 ②　8 ⑤

Level 3 실력 완성 본문 102쪽

1 ②　2 ③　3 ③

01 함수의 극한

유제 본문 5~11쪽

1 ③	2 ④	3 ①	4 6	5 ④
6 ②	7 ③	8 2		

1 $\lim_{x \to 2-} f(x) = \lim_{x \to 2-} (ax-3) = 2a-3$

$\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+} (-x+a) = -2+a$

$3\lim_{x \to 2-} f(x) - 4\lim_{x \to 2+} f(x) = 2$에서

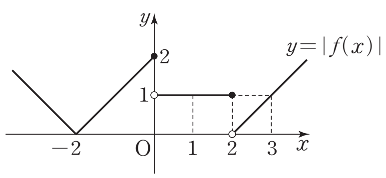
$3(2a-3)-4(-2+a)=2$

$6a-9+8-4a=2$, $2a=3$

따라서 $a=\frac{3}{2}$

답 ③

2 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



함수 $y=|f(x)|$의 그래프에서

$\lim_{x \to 0-} |f(x)| = 2$

$\lim_{x \to 1-} |f(x)| = 1$, $\lim_{x \to 1+} |f(x)| = 1$이므로

$\lim_{x \to 1} |f(x)| = 1$

$|f(2)| = 1$

따라서

$\lim_{x \to 0-} |f(x)| + \lim_{x \to 1} |f(x)| + |f(2)|$

$=2+1+1=4$

답 ④

3 $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-1} = \frac{2+2}{2-1} = 4$

$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} (x^2+x) = 2^2+2=6$

따라서

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x^2+1)g(x)}{4f(x)-3x} = \frac{\lim_{x \to 2}(x^2+1) \times \lim_{x \to 2} g(x)}{4\lim_{x \to 2} f(x) - 3\lim_{x \to 2} x}$$

$$= \frac{(2^2+1)\times 6}{4\times 4 - 3\times 2}$$

$$= \frac{30}{10} = 3$$

답 ①

4 조건 (나)에서 $\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x(x-2)} = 1$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{g(x)}{x(x-2)} \times (x-2) \right\}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x(x-2)} \times \lim_{x \to 0} (x-2)$$

$$= 1 \times (-2) = -2$$

조건 (가)에서 $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 8$이므로

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x^2+5f(x)}{x^2-3xg(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{2x^2+5f(x)}{x^2}}{\frac{x^2-3xg(x)}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2+\frac{5f(x)}{x^2}}{1-\frac{3g(x)}{x}}$$

$$= \frac{2+5\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}}{1-3\lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}}$$

$$= \frac{2+5\times 8}{1-3\times(-2)} = 6$$

답 6

5 $\lim_{x \to -1} \frac{1-\sqrt{3x^2-2}}{x^3+1}$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{(1-\sqrt{3x^2-2})(1+\sqrt{3x^2-2})}{(x^3+1)(1+\sqrt{3x^2-2})}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{1-(3x^2-2)}{(x^3+1)(1+\sqrt{3x^2-2})}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-3(x+1)(x-1)}{(x+1)(x^2-x+1)(1+\sqrt{3x^2-2})}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{-3(x-1)}{(x^2-x+1)(1+\sqrt{3x^2-2})}$$

$$= \frac{-3\times(-2)}{3\times 2} = 1$$

답 ④

6 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{x^2-4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)$

$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2}{x^2-4}\times\frac{2-x}{2x}\right)$

$=\lim_{x\to 2}\left\{\frac{x^2}{(x+2)(x-2)}\times\frac{-(x-2)}{2x}\right\}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{-x}{2(x+2)}$

$=\frac{-2}{2\times 4}=-\frac{1}{4}$

답 ②

7 $\lim_{x\to 2}\frac{ax-2a}{x^2-x+b}=3$에서

$x\to 2$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}(x^2-x+b)=4-2+b=0$에서

$b=-2$이므로

$\lim_{x\to 2}\frac{ax-2a}{x^2-x+b}=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{x^2-x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{a(x-2)}{(x+1)(x-2)}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{a}{x+1}=\frac{a}{3}$

따라서 $\frac{a}{3}=3$에서 $a=9$이므로

$a+b=9+(-2)=7$

답 ③

8 모든 양수 x에 대하여 $x^2(x+1)>0$이므로

주어진 부등식의 각 변을 $x^2(x+1)$로 나누면

$\frac{2x^3-3}{x^2(x+1)}\le\frac{f(x)}{x^2}\le\frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}$

이때 $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3}{x^2(x+1)}=2$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{x^2(x+1)}=2$이므로 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^2}=2$

따라서

$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)+4x^2}{3x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{f(x)}{x^2}+4}{3-\frac{1}{x}}$

$=\frac{2+4}{3-0}=2$

답 2

Level 1 기초 연습				본문 12쪽
1 ④	2 2	3 ③	4 ①	5 ①

1 $f(x)=\begin{cases}x+1 & (x\le a)\\ 3x^2-x & (x>a)\end{cases}$에서

$\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)$이어야 하므로

$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(x+1)=a+1$

$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(3x^2-x)=3a^2-a$

에서 $a+1=3a^2-a$

$3a^2-2a-1=0$, $(3a+1)(a-1)=0$

$a=-\frac{1}{3}$ 또는 $a=1$

따라서 구하는 모든 실수 a의 값의 합은

$-\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$

답 ④

2 $\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{20}{x+3}=\frac{20}{5}=4$

$\lim_{x\to 2}g(x)=\lim_{x\to 2}\sqrt{4x+1}=\sqrt{9}=3$

따라서

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)+2g(x)}{2f(x)-g(x)}=\frac{\lim_{x\to 2}f(x)+2\lim_{x\to 2}g(x)}{2\lim_{x\to 2}f(x)-\lim_{x\to 2}g(x)}$

$=\frac{4+2\times 3}{2\times 4-3}=2$

답 2

3 $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x^2+16}-5}{x-3}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{(\sqrt{x^2+16}-5)(\sqrt{x^2+16}+5)}{(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+16-25}{(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(\sqrt{x^2+16}+5)}$

$=\lim_{x\to 3}\frac{x+3}{\sqrt{x^2+16}+5}$

$=\frac{3+3}{\sqrt{25}+5}=\frac{3}{5}$

답 ③

4 $\lim_{x \to -1} \frac{x^2-4x-5}{2x^2+ax+4}=b$에서

$x \to -1$일 때 (분자) $\to 0$이고 0이 아닌 극한값이 존재하므로 (분모) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x \to -1}(2x^2+ax+4)=2-a+4=0$에서

$a=6$이므로

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-4x-5}{2x^2+ax+4}=\lim_{x \to -1} \frac{x^2-4x-5}{2x^2+6x+4}$$
$$=\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)(x-5)}{2(x+1)(x+2)}$$
$$=\lim_{x \to -1} \frac{x-5}{2(x+2)}$$
$$=\frac{-6}{2\times 1}=-3$$

따라서 $b=-3$이므로

$a+b=6+(-3)=3$

답 ①

5 $f(x)$는 다항함수이므로 $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)-x^2}{x+1}=3$에서

$f(x)-x^2=3x+a$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(x)=x^2+3x+a$이므로 $\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{f(x)}=2$에서

$$\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{f(x)}=\lim_{x \to 1} \frac{x+1}{x^2+3x+a}=\frac{2}{4+a}$$

즉, $\frac{2}{4+a}=2$이므로

$8+2a=2$, $a=-3$

따라서 $f(x)=x^2+3x-3$이므로

$f(-1)=1-3-3=-5$

답 ①

Level 2 기본 연습

본문 13~14쪽

1 ①	2 ③	3 ③	4 ④	5 ②
6 ⑤	7 20	8 ④		

1 $f(x)=\begin{cases} -x+4a & (x\le 0) \\ 2x+3 & (x>0) \end{cases}$,

$g(x)=f(x)\{f(-x)+a\}$에서

$\lim_{x \to 0} g(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0+} g(x)$이어야 한다.

$t=-x$라 하면 $x \to 0-$일 때 $t \to 0+$이므로

$$\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0-} f(x)\{f(-x)+a\}$$
$$=\lim_{x \to 0-} f(x)\times\lim_{x \to 0-}\{f(-x)+a\}$$
$$=\lim_{x \to 0-} f(x)\times\{\lim_{x \to 0-} f(-x)+a\}$$
$$=\lim_{x \to 0-} f(x)\times\{\lim_{t \to 0+} f(t)+a\}$$
$$=4a\times(3+a)$$
$$=4a^2+12a$$

$t=-x$라 하면 $x \to 0+$일 때 $t \to 0-$이므로

$$\lim_{x \to 0+} g(x)=\lim_{x \to 0+} f(x)\{f(-x)+a\}$$
$$=\lim_{x \to 0+} f(x)\times\lim_{x \to 0+}\{f(-x)+a\}$$
$$=\lim_{x \to 0+} f(x)\times\{\lim_{x \to 0+} f(-x)+a\}$$
$$=\lim_{x \to 0+} f(x)\times\{\lim_{t \to 0-} f(t)+a\}$$
$$=3\times(4a+a)$$
$$=15a$$

즉, $4a^2+12a=15a$에서

$4a^2-3a=0$, $a(4a-3)=0$

$a=0$ 또는 $a=\frac{3}{4}$

따라서 구하는 양수 a의 값은 $\frac{3}{4}$이다.

답 ①

다른 풀이

$f(x)=\begin{cases} -x+4a & (x\le 0) \\ 2x+3 & (x>0) \end{cases}$에서

$f(-x)=\begin{cases} -2x+3 & (x<0) \\ x+4a & (x\ge 0) \end{cases}$

$g(x)=f(x)\{f(-x)+a\}$에서

$\lim_{x \to 0} g(x)$의 값이 존재하려면

$\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0+} g(x)$이어야 한다.

$$\lim_{x \to 0-} g(x)=\lim_{x \to 0-} f(x)\{f(-x)+a\}$$
$$=\lim_{x \to 0-} (-x+4a)(-2x+3+a)$$
$$=4a(3+a)$$
$$=4a^2+12a$$

$$\lim_{x \to 0+} g(x)=\lim_{x \to 0+} f(x)\{f(-x)+a\}$$
$$=\lim_{x \to 0+} (2x+3)(x+4a+a)$$
$$=3\times 5a$$
$$=15a$$

즉, $4a^2+12a=15a$에서

$4a^2-3a=0$, $a(4a-3)=0$

$a=0$ 또는 $a=\frac{3}{4}$

따라서 구하는 양수 a의 값은 $\frac{3}{4}$이다.

2 ㄱ. $\lim_{x\to a}f(x)$와 $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$의 값이 각각 존재하므로

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\beta$ (α, β는 실수)라 하면

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}$$
$$=\alpha\beta$$

$$\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}g(x)$$
$$=\alpha+\alpha\beta$$

따라서 $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$의 값이 존재한다. (참)

ㄴ. [반례] $f(x)=x-a$, $g(x)=\frac{1}{x-a}$로 놓으면

$\lim_{x\to a}f(x)=0$, $\lim_{x\to a}f(x)g(x)=\lim_{x\to a}1=1$

이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

그러나 $\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\frac{1}{x-a}$의 값은 존재하지 않는다.

(거짓)

ㄷ. $\lim_{x\to a}f(x)$의 값이 존재하므로

$\lim_{x\to a}f(x)=\alpha$ (α는 실수)라 하고

$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$로 놓으면

$\lim_{x\to a}h(x)=\infty$, 즉 $\lim_{x\to a}\frac{1}{h(x)}=0$이므로

$$\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\times\frac{g(x)}{f(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to a}\left\{f(x)\times\frac{1}{h(x)}\right\}$$
$$=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}\frac{1}{h(x)}$$
$$=\alpha\times0=0$$

따라서 $\lim_{x\to a}g(x)=0$이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

3 $f(a)=\lim_{x\to a}\frac{x^2-3x-a^2+3a}{x^2+ax-2a^2}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x+a-3)}{(x-a)(x+2a)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{x+a-3}{x+2a}$$
$$=\frac{a+a-3}{a+2a}=\frac{2a-3}{3a}$$

따라서 $f(a)=\frac{2}{3}-\frac{1}{a}$이므로

$1\le a\le3$에서 함수 $f(a)$는

$a=3$일 때 최대이고 최댓값은 $\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$,

$a=1$일 때 최소이고 최솟값은 $\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$

따라서 구하는 최댓값과 최솟값의 합은

$\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=0$

답 ③

4 $\lim_{x\to1}\frac{5x^2-2x+13}{(x+3)(x-a)}=b$에서

(i) $a\ne1$일 때,

$$\lim_{x\to1}\frac{5x^2-2x+13}{(x+3)(x-a)}=\frac{16}{4(1-a)}$$
$$=\frac{4}{1-a}$$

즉, $\frac{4}{1-a}=b$이므로 $(1-a)b=4$

a, b는 정수이므로

$1-a=4$, $b=1$ 또는 $1-a=2$, $b=2$ 또는

$1-a=1$, $b=4$ 또는 $1-a=-1$, $b=-4$ 또는

$1-a=-2$, $b=-2$ 또는 $1-a=-4$, $b=-1$

따라서 구하는 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)는

$(-3, 1)$, $(-1, 2)$, $(0, 4)$, $(2, -4)$, $(3, -2)$,

$(5, -1)$이고, 그 개수는 6이다.

(ii) $a=1$일 때,

$\lim_{x\to1}\frac{5x^2-2x+13}{(x+3)(x-a)}=\lim_{x\to1}\frac{5x^2-2x+13}{(x+3)(x-1)}$에서

$x\to1$일 때 (분모) $\to0$이지만 (분자) $\to16$이므로 극한값이 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족시키는 정수 a, b가 존재하지 않는다.

(i), (ii)에서 구하는 정수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는 6이다.

답 ④

5 $\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}+ax}{\sqrt{9x^2+4x+1}-3x}=\frac{1}{2}$에서

$t=-x$라 하면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+3}+ax}{\sqrt{9x^2+4x+1}-3x}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{t^2+3}-at}{\sqrt{9t^2-4t+1}+3t}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{t^2}}-a}{\sqrt{9-\frac{4}{t}+\frac{1}{t^2}}+3}$$
$$=\frac{1-a}{3+3}=\frac{1-a}{6}$$

즉, $\frac{1-a}{6}=\frac{1}{2}$이므로 $1-a=3$

따라서 $a=-2$

답 ②

6 $\sqrt{4x^2-2x+1}\le f(x)\le\sqrt{4x^2-2x+5}$에서

$2x-\sqrt{4x^2-2x+5}\le 2x-f(x)\le 2x-\sqrt{4x^2-2x+1}$

이때

$$\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2-2x+5})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-\sqrt{4x^2-2x+5})(2x+\sqrt{4x^2-2x+5})}{2x+\sqrt{4x^2-2x+5}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-5}{2x+\sqrt{4x^2-2x+5}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{5}{x}}{2+\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{5}{x^2}}}$$
$$=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(2x-\sqrt{4x^2-2x+1})$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x-\sqrt{4x^2-2x+1})(2x+\sqrt{4x^2-2x+1})}{2x+\sqrt{4x^2-2x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{2x+\sqrt{4x^2-2x+1}}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{2+\sqrt{4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}}$$
$$=\frac{2}{2+2}=\frac{1}{2}$$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$$\lim_{x\to\infty}\{2x-f(x)\}=\frac{1}{2}$$

답 ⑤

7 $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(2x)+8x^3}{4x^2+1}=3$에서

$t=-2x$로 놓으면 $x\to-\infty$일 때 $t\to\infty$이므로

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(2x)+8x^3}{4x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(2x)-(-2x)^3}{(-2x)^2+1}$$
$$=\lim_{t\to\infty}\frac{f(-t)-t^3}{t^2+1}=3$$

이때 $f(-t)-t^3$은 최고차항의 계수가 3인 이차함수이어야 하므로

$f(-t)-t^3=3t^2+at+b$ (a, b는 상수)

로 놓으면 $f(-t)=t^3+3t^2+at+b$

즉, $f(x)=-x^3+3x^2-ax+b$

한편, $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2+2x}=4$에서

$x\to0$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}(-x^3+3x^2-ax+b)=b$에서

$b=0$이므로 $f(x)=-x^3+3x^2-ax$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2+2x}=\lim_{x\to0}\frac{x(-x^2+3x-a)}{x(x+2)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{-x^2+3x-a}{x+2}$$
$$=-\frac{a}{2}$$

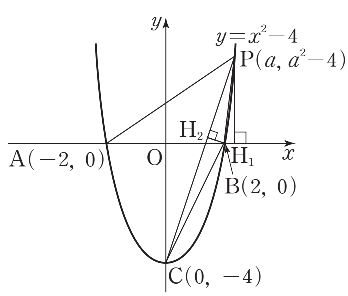
즉, $-\frac{a}{2}=4$이므로 $a=-8$

따라서 $f(x)=-x^3+3x^2+8x$이므로

$f(2)=-8+12+16=20$

답 20

8



두 점 A, B는 곡선 $y=x^2-4$가 x축과 만나는 점이므로
$x^2-4=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
$A(-2, 0)$, $B(2, 0)$
점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H_1이라 하면
$H_1(a, 0)$
이때 $a>2$이므로 삼각형 PAB의 넓이 $S(a)$는

$$S(a)=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{PH_1}$$
$$=\frac{1}{2}\times4\times(a^2-4)=2(a^2-4)$$

점 C는 곡선 $y=x^2-4$가 y축과 만나는 점이므로
$C(0, -4)$
점 B에서 선분 PC에 내린 수선의 발을 H_2라 하면
두 점 $P(a, a^2-4)$, $C(0, -4)$를 지나는 직선 PC의 방정식은 $y=ax-4$, 즉 $ax-y-4=0$이므로
점 $B(2, 0)$과 직선 $ax-y-4=0$ 사이의 거리는

$$\overline{BH_2}=\frac{|2a-4|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=\frac{2(a-2)}{\sqrt{a^2+1}}$$
$$\overline{PC}=\sqrt{a^2+(a^2-4+4)^2}=\sqrt{a^2(a^2+1)}=a\sqrt{a^2+1}$$

삼각형 PCB의 넓이 $T(a)$는

$$T(a)=\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{BH_2}$$
$$=\frac{1}{2}\times a\sqrt{a^2+1}\times\frac{2(a-2)}{\sqrt{a^2+1}}$$
$$=a(a-2)$$

따라서

$$\lim_{a\to2+}\frac{S(a)}{T(a)}=\lim_{a\to2+}\frac{2(a^2-4)}{a(a-2)}$$
$$=\lim_{a\to2+}\frac{2(a-2)(a+2)}{a(a-2)}$$
$$=\lim_{a\to2+}\frac{2(a+2)}{a}=\frac{2\times(2+2)}{2}=4$$

답 ④

Level 3 실력 완성 본문 15쪽

1 ① 2 ② 3 ③

1 $t=x+1$이라 하면 $x\to0$일 때 $t\to1$이므로

$$\lim_{x\to0}f(x+1)=\lim_{t\to1}f(t)$$
$$=\lim_{t\to1}(t^2-t)=0$$

조건 (가)에서 $\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x+1)}=2$
$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to0}g(x)=0$이고 $g(x)$는 다항함수이므로
$g(0)=0$
이차함수 $g(x)$를
$g(x)=x(ax+b)$ ($a\neq0$, a, b는 상수)
로 놓으면

$$\lim_{x\to0}\frac{g(x)}{f(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x(ax+b)}{(x+1)^2-(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{x(ax+b)}{x(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{ax+b}{x+1}=b$$

에서 $b=2$이므로
$g(x)=x(ax+2)$
$s=1-x$라 하면 $x\to-1+$일 때 $s\to2-$이므로

$$\lim_{x\to-1+}f(1-x)=\lim_{s\to2-}f(s)$$
$$=\lim_{s\to2-}(s^2-s)=2$$
$$\lim_{x\to-1+}f(1-x)g(x)=2\times g(-1)=2(a-2)$$

$u=x+1$이라 하면 $x\to1+$일 때 $u\to2+$이므로

$$\lim_{x\to1+}f(x+1)=\lim_{u\to2+}f(u)$$
$$=\lim_{u\to2+}(u^2+u)=6$$
$$\lim_{x\to1+}f(x+1)g(x)=6\times g(1)=6(a+2)$$

조건 (나)에 의하여
$2(a-2)=6(a+2)$, $4a=-16$
$a=-4$
따라서
$g(x)=x(-4x+2)=-4x^2+2x$
이므로
$g(1)=-4+2=-2$

답 ①

2 조건 (가)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}$의 값이 존재하고 $x\to0$일 때 (분모)$\to0$이므로 (분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로
$f(0)=0$
조건 (나)에서 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫이 $g(x)$이고 나머지가 4이므로
$f(x)=(x-2)g(x)+4$ …… ㉠

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차다항식이므로 몫 $g(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차다항식이다.
㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면 $f(0)=0$이므로
$f(0)=-2g(0)+4=0$, $g(0)=2$
즉, $g(x)=x^2+ax+2$ (a는 상수)로 놓을 수 있다.
한편, $\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)-4\}g(x)}{x^2-4}=4$이고
㉠에서 $f(x)-4=(x-2)g(x)$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2}\frac{\{f(x)-4\}g(x)}{x^2-4}&=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)\{g(x)\}^2}{(x-2)(x+2)}\\&=\lim_{x\to 2}\frac{\{g(x)\}^2}{x+2}\\&=\frac{\{g(2)\}^2}{4}\end{aligned}$$

즉, $\frac{\{g(2)\}^2}{4}=4$이므로 $\{g(2)\}^2=16$
$g(2)=-4$ 또는 $g(2)=4$
(i) $g(2)=-4$일 때,
$g(2)=4+2a+2=-4$에서 $a=-5$
$g(x)=x^2-5x+2$이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-2)(x^2-5x+2)+4\\&=x^3-7x^2+12x\end{aligned}$$

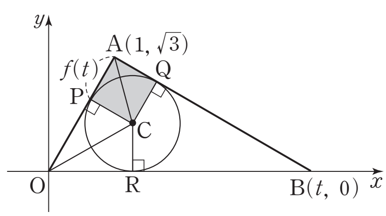
$f(1)=1-7+12=6$
(ii) $g(2)=4$일 때,
$g(2)=4+2a+2=4$에서 $a=-1$
$g(x)=x^2-x+2$이므로 ㉠에서

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-2)(x^2-x+2)+4\\&=x^3-3x^2+4x\end{aligned}$$

$f(1)=1-3+4=2$
(i), (ii)에서 구하는 $f(1)$의 최댓값은 6이다.

답 ②

3



삼각형 AOB에 내접하는 원의 반지름의 길이를 $r(t)$라 하고, 이 원이 변 OB와 접하는 점을 R, $\overline{AP}=f(t)$라 하면
$\overline{OA}=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$
$\overline{OP}=\overline{OA}-\overline{AP}=2-f(t)$
점 A의 좌표가 $(1, \sqrt{3})$이므로 $\angle AOR=60^\circ$이고
$\angle CPO=\angle CRO=90^\circ$인 두 직각삼각형 CPO, CRO는 서로 합동이므로
$\angle POC=\frac{1}{2}\times\angle POR=\frac{1}{2}\times 60^\circ=30^\circ$
$\overline{PC}=r(t)=\overline{OP}\times\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}\{2-f(t)\}$
$\angle APC=\angle AQC=90^\circ$인 두 직각삼각형 APC, AQC는 서로 합동이므로 사각형 APCQ의 넓이 $S(t)$는

$$\begin{aligned}S(t)&=2\times\left(\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{AP}\right)\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\{2-f(t)\}f(t)\end{aligned}$$

한편, 삼각형 AOB의 넓이는
$\frac{1}{2}\times t\times\sqrt{3}=\frac{1}{2}\times r(t)\times(\overline{AO}+\overline{OB}+\overline{AB})$
이므로
$\sqrt{3}t=r(t)\{2+t+\sqrt{(t-1)^2+(-\sqrt{3})^2}\}$
$\sqrt{3}t=\frac{\sqrt{3}}{3}\{2-f(t)\}(2+t+\sqrt{t^2-2t+4})$
$2-f(t)=\frac{3t}{t+2+\sqrt{t^2-2t+4}}$
$f(t)=2-\frac{3t}{t+2+\sqrt{t^2-2t+4}}$

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}f(t)&=\lim_{t\to\infty}\left(2-\frac{3t}{t+2+\sqrt{t^2-2t+4}}\right)\\&=\lim_{t\to\infty}\left(2-\frac{3}{1+\frac{2}{t}+\sqrt{1-\frac{2}{t}+\frac{4}{t^2}}}\right)\\&=2-\frac{3}{1+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}S(t)&=\frac{\sqrt{3}}{3}\lim_{t\to\infty}\{2-f(t)\}f(t)\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\lim_{t\to\infty}\{2-f(t)\}\times\lim_{t\to\infty}f(t)\\&=\frac{\sqrt{3}}{3}\times\left(2-\frac{1}{2}\right)\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

답 ③

02 함수의 연속

유제				본문 19~23쪽
1 ④	2 5	3 ②	4 ③	5 ④

1 함수 $f(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

이다.

$a=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$

답 ④

2 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이려면

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a+} f(x)=f(a)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to a-} f(x)=\lim_{x\to a-}(x^2-4)=a^2-4$

$\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a+}(4x+1)=4a+1$

$f(a)=4a+1$

이므로

$a^2-4=4a+1$

$a^2-4a-5=0,\ (a+1)(a-5)=0$

$a>0$이므로 $a=5$

답 5

3 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

이어야 한다.

$\lim_{x\to 1-} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1-}(-x)(x^2+k)=-1\times(1+k)$

$\lim_{x\to 1+} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1+}(2x+1)(x^2+k)=3\times(1+k)$

$f(1)g(1)=3\times(1+k)$

이므로

$-(1+k)=3(1+k),\ 4(1+k)=0$

따라서 $k=-1$

답 ②

4 함수 $\frac{1}{g(x)}$이 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=2$에서도 연속이고, 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq 0$이어야 한다.

(i) 함수 $\frac{1}{g(x)}$이 $x=2$에서 연속이려면

$\lim_{x\to 2-}\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{g(2)}$

이어야 한다.

$\lim_{x\to 2-}\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to 2-}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{f(2)}$

$\lim_{x\to 2+}\frac{1}{g(x)}=\lim_{x\to 2+}\frac{1}{f(x-2)}=\frac{1}{f(0)}$

$\frac{1}{g(2)}=\frac{1}{6}$

이므로

$\frac{1}{f(2)}=\frac{1}{f(0)}=\frac{1}{6}$

$f(2)=f(0)=6$

최고차항의 계수가 자연수인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$f(x)-6=kx(x-2)$ (k는 자연수)

로 놓을 수 있으므로

$f(x)=kx(x-2)+6=k(x-1)^2-k+6$

(ii) 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\neq 0$이어야 하므로

$x<2$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x)=k(x-1)^2-k+6>0$, 즉 $k<6$

$x>2$인 모든 실수 x에 대하여

$f(x-2)=k(x-3)^2-k+6>0$, 즉 $k<6$

따라서 $k<6$에서 자연수 k의 값은 1, 2, 3, 4, 5이다.

(i), (ii)에서 $f(4)=8k+6$이고 $f(4)$의 최댓값은 $k=5$일 때

$8\times5+6=46$

답 ③

5 $f(x)=x^3+x-12$라 하면 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$f(-1)=-1+(-1)-12=-14<0$

$f(0)=0+0-12=-12<0$

$f(1)=1+1-12=-10<0$

$f(2)=8+2-12=-2<0$

$f(3)=27+3-12=18>0$

$f(4)=64+4-12=56>0$

따라서 $f(2)f(3)<0$이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $f(x)=0$은 열린구간 $(2, 3)$에서 실근 α를 갖는다.

답 ④

Level 1 기초 연습 본문 24쪽

1 ④ 2 ② 3 ③ 4 ②

1 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=3$에서도 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 3} f(x)=f(3)$
따라서
$\lim_{x\to 3}\{3f(x)-2\}=3\lim_{x\to 3} f(x)-2=3f(3)-2=6$
이므로 $f(3)=\frac{8}{3}$

답 ④

2 $\lim_{x\to 1-} f(x)=1$, $\lim_{x\to 1+} f(x)=1$에서 $\lim_{x\to 1} f(x)=1$이고, $f(1)=0$이므로 $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$이다.
즉, 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 불연속이다.
$\lim_{x\to 3-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 3+} f(x)=0$에서
$\lim_{x\to 3-} f(x)\neq \lim_{x\to 3+} f(x)$이므로 $\lim_{x\to 3} f(x)$의 값이 존재하지 않는다.
즉, 함수 $f(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.
한편, 주어진 함수 $y=f(x)$의 그래프에서 함수 $f(x)$가 열린구간 $(0, 1)$과 열린구간 $(1, 3)$과 열린구간 $(3, 5)$에서 연속임을 알 수 있다.
따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$ $(0<a<5)$에서 불연속인 모든 실수 a의 값은 1, 3이고, 그 개수는 2이다.

답 ②

3 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$
이때
$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(3x+a)=3+a$
$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2-a)=1-a$
$f(1)=1-a$
이므로
$3+a=1-a$, $a=-1$
따라서 $f(x)=\begin{cases} 3x-1 & (x<1) \\ x^2+1 & (x\geq 1)\end{cases}$이므로
$f(2)=4+1=5$

답 ③

4 $f(x)=x^2-6x+a$라 하면 곡선 $y=f(x)$는 직선 $x=3$에 대하여 대칭이고, 함수 $f(x)$는 닫힌구간 $[0, 2]$에서 연속이다.
닫힌구간 $[0, 2]$에서 함수 $f(x)$는 감소하므로 x에 대한 방정식 $f(x)=0$이 열린구간 $(0, 2)$에서 오직 하나의 실근을 가지려면 $f(0)f(2)<0$이어야 한다.
$f(0)=a$
$f(2)=4-12+a=a-8$
이므로
$f(0)f(2)=a(a-8)<0$
따라서 $0<a<8$이므로 구하는 정수 a의 최댓값은 7이다.

답 ②

Level 2 기본 연습 본문 25~26쪽

1 ③ 2 ④ 3 ④ 4 3 5 ④
6 ③ 7 9 8 3

1 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.
즉, $\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$
따라서
$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-1)f(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)f(x)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}(x+1)f(x)$$
$$=2f(1)=24$$
이므로 $f(1)=12$

답 ③

2 함수 $f(x)$가 $x=k$에서 연속이면 $\lim_{x\to k-} f(x)=f(k)$이므로
$f(k)-\lim_{x\to k-} f(x)=0$
함수 $f(x)$는 $x=1$, $x=4$, $x=5$에서 연속이고, $x=2$, $x=3$에서 불연속이므로
$f(2)-\lim_{x\to 2-} f(x)=1-1=0$
$f(3)-\lim_{x\to 3-} f(x)=2-1=1$
따라서
$$\sum_{k=1}^{5}\left\{f(k)-\lim_{x\to k-} f(x)\right\}=0+0+1+0+0=1$$

답 ④

3 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=2$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 2-} f(x)=\lim_{x\to 2+} f(x)=f(2)$

$x\neq 2$일 때, $f(x)=\frac{(x+a)|x-2|}{x-2}$

이때

$$\lim_{x\to 2-}\frac{(x+a)|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{-(x+a)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}(-x-a)=-2-a$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{(x+a)|x-2|}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{(x+a)(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}(x+a)=2+a$$

이므로

$-2-a=2+a$, $a=-2$

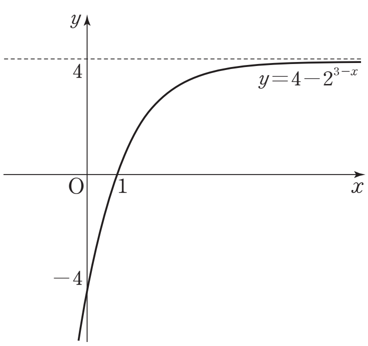
이때 $(x-2)f(x)=(x-2)|x-2|$의 양변에 $x=4$를 대입하면

$2f(4)=2\times 2$

따라서 $f(4)=2$

답 ④

4 함수 $y=4-2^{3-x}$의 그래프는 그림과 같다.



곡선 $y=4-2^{3-x}$의 점근선의 방정식은 $y=4$이므로 모든 실수 x에 대하여 $4-2^{3-x}<4$이다.

이때 $4-2^{3-x}\geq 3$에서

$2^{3-x}\leq 1$, $2^{3-x}\leq 2^0$

밑이 1보다 크므로

$3-x\leq 0$, $x\geq 3$

즉, $x\geq 3$에서 $3\leq 4-2^{3-x}<4$이므로 $f(x)=3$이다.

$2\leq 4-2^{3-x}<3$에서

$1<2^{3-x}\leq 2$

밑이 1보다 크므로

$0<3-x\leq 1$, $2\leq x<3$

즉, $2\leq x<3$에서 $2\leq 4-2^{3-x}<3$이므로 $f(x)=2$이다.

따라서 함수 $f(x)$는 구간 $(3, \infty)$에서 연속이므로 함수 $f(x)$가 구간 (a, ∞)에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 최솟값은 3이다.

답 3

5 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1+} f(x)=f(1)$

이때

$\lim_{x\to 1-} f(x)=\lim_{x\to 1-}(x+a)=1+a$

$\lim_{x\to 1+} f(x)=\lim_{x\to 1+}(x^2+bx)=1+b$

$f(1)=1+b$

이므로

$1+a=1+b$, $a=b$ …… ㉠

조건 (가)에 의하여 $f(2)=f(0)$이므로

$4+2b=a$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

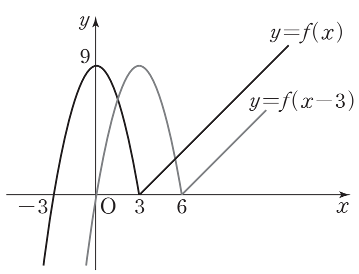
$a=-4$, $b=-4$

따라서 $f(x)=\begin{cases} x-4 & (0\leq x<1) \\ x^2-4x & (1\leq x\leq 2) \end{cases}$이므로

$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}-4=-\frac{7}{2}$

답 ④

6 함수 $y=f(x-3)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이므로 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x-3)$의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $f(x)$, $f(x-3)$은 각각 실수 전체의 집합에서 연속이므로 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이려면 $x=a$에서 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to a-} g(x)=\lim_{x\to a+} g(x)=g(a)$

(i) $a<3$일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a-} g(x)&=\lim_{x\to a-} f(x)\\&=\lim_{x\to a-} (9-x^2)\\&=9-a^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to a+} g(x)&=\lim_{x\to a+} f(x-3)\\&=\lim_{x\to a+} \{9-(x-3)^2\}\\&=-a^2+6a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g(a)&=f(a-3)\\&=9-(a-3)^2\\&=-a^2+6a\end{aligned}$$

이므로

$9-a^2=-a^2+6a$

$a<3$이므로 $a=\frac{3}{2}$

(ii) $a=3$일 때,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3-} g(x)&=\lim_{x\to 3-} f(x)\\&=\lim_{x\to 3-} (9-x^2)\\&=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3+} g(x)&=\lim_{x\to 3+} f(x-3)\\&=\lim_{x\to 3+} \{9-(x-3)^2\}\\&=9\end{aligned}$$

에서 $\lim_{x\to 3} g(x)$의 값이 존재하지 않으므로 함수 $g(x)$는 $x=3$에서 불연속이다.

(i), (ii)에서 구하는 a의 값은 $\frac{3}{2}$이다.

답 ③

7 함수 $f(x)g(x)$가 $x=1$에서 연속이므로

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=f(1)g(1)$

이다.

$\lim_{x\to 1} f(x)g(x)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}$

$f(1)g(1)=3f(1)$

이므로

$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=3f(1)$ ⋯⋯ ㉠

$x\to 1$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 1} f(x)=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(1)=0$

$f(x)=(x-1)(x-a)$ (a는 상수)라 하면

㉠에서 $\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-a)}{x-1}=0$

$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-a)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x-a)=1-a=0$

이므로 $a=1$

따라서 $f(x)=(x-1)^2$이므로

$f(4)=9$

답 9

8 $g(x)=f(x)-kx$라 하면 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이다.

조건을 만족시키는 모든 함수 $f(x)$에 대하여 x에 대한 방정식 $g(x)=0$이 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 가지려면 사잇값의 정리에 의하여 $g(1)g(2)<0$이어야 한다.

$g(1)=f(1)-k=4-k$

$g(2)=f(2)-2k=-1-2k$

이므로

$g(1)g(2)=(4-k)(-1-2k)<0$에서

$(k-4)(2k+1)<0$

$-\frac{1}{2}<k<4$

$k\geq 4$일 때, $f(x)=-5x+9$이면 $f(x)=kx$에서

$-5x+9=kx$, 즉 $x=\frac{9}{k+5}\leq 1$

이므로 방정식 $f(x)=kx$는 열린구간 $(1, 2)$에서 실근을 갖지 않는다.

따라서 정수 k의 최댓값은 3이다.

답 3

Level 3 실력 완성 본문 27쪽

1 ④ 2 ② 3 ①

1 원 $(x-t)^2+y^2=4$는 점 $(t,\ 0)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2이다.

두 직선 $3x+4y-8=0$, $4x-3y+6=0$은 서로 수직이고 점 $(0,\ 2)$에서 만난다.

(i) [그림 1]과 같이 원 $(x-t)^2+y^2=4$가 직선 $4x-3y+6=0$에 접하는 경우

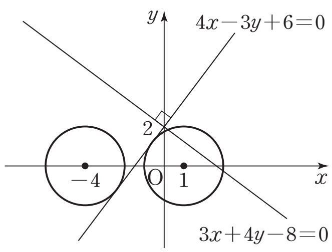
원의 중심 $(t,\ 0)$과 직선 $4x-3y+6=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|4t-0+6|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=2$$

$|4t+6|=10$

$4t+6=10$ 또는 $4t+6=-10$

$t=1$ 또는 $t=-4$



[그림 1]

(ii) [그림 2]와 같이 원 $(x-t)^2+y^2=4$가 직선 $3x+4y-8=0$에 접하는 경우

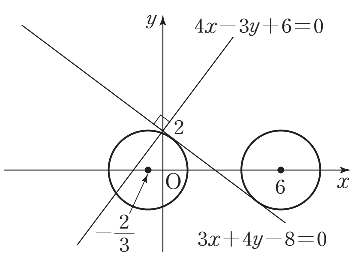
원의 중심 $(t,\ 0)$과 직선 $3x+4y-8=0$ 사이의 거리가 2이므로

$$\frac{|3t+0-8|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$|3t-8|=10$

$3t-8=10$ 또는 $3t-8=-10$

$t=6$ 또는 $t=-\frac{2}{3}$

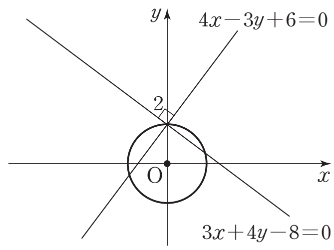


[그림 2]

(iii) [그림 3]과 같이 원 $(x-t)^2+y^2=4$가 점 $(0,\ 2)$를 지나는 경우

$t^2+4=4$

$t=0$

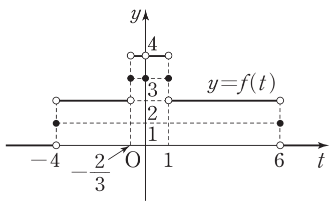


[그림 3]

(i), (ii), (iii)에 의하여 함수 $f(t)$는

$$f(t)=\begin{cases} 0 & (t<-4 \text{ 또는 } t>6) \\ 1 & (t=-4 \text{ 또는 } t=6) \\ 2 & \left(-4<t<-\frac{2}{3} \text{ 또는 } 1<t<6\right) \\ 3 & \left(t=-\frac{2}{3} \text{ 또는 } t=0 \text{ 또는 } t=1\right) \\ 4 & \left(-\frac{2}{3}<t<0 \text{ 또는 } 0<t<1\right) \end{cases}$$

이므로 함수 $y=f(t)$의 그래프는 [그림 4]와 같다.



[그림 4]

따라서 함수 $f(t)$가 $t=a$에서 불연속인 모든 실수 a의 값은 -4, $-\frac{2}{3}$, 0, 1, 6이고, 그 개수는 5이다.

답 ④

2 $f(2)=2$라 가정하면

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{3-f(x)}{x-f(2)}=4$에서 $x \to 2$일 때 (분모) $\to 0$이고 극한값이 존재하므로 (분자) $\to 0$이어야 한다.

$\lim\limits_{x\to 2}\{3-f(x)\}=3-\lim\limits_{x\to 2}f(x)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=3$

그런데 $f(2)\neq\lim\limits_{x\to 2}f(x)$이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

즉, $f(2)\neq 2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3-f(x)}{x-f(2)}=\frac{3-\lim\limits_{x\to 2}f(x)}{\lim\limits_{x\to 2}x-f(2)}$$

$$=\frac{3-\lim\limits_{x\to 2}f(x)}{2-f(2)}=4$$

에서

$3-\lim_{x\to 2}f(x)=8-4f(2)$

조건 (나)에서 $f(2)=\lim_{x\to 2}f(x)$이므로

$3-f(2)=8-4f(2)$

따라서 $f(2)=\frac{5}{3}$

답 ②

3 ㄱ. $\lim_{x\to 0-}g(x)=\lim_{x\to 0-}\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

$=\frac{\lim_{x\to 0-}f(x)+\lim_{x\to 0+}f(x)}{2}$

$=\frac{-1+0}{2}=-\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 0+}g(x)=\lim_{x\to 0+}\frac{f(x)+f(-x)}{2}$

$=\frac{\lim_{x\to 0+}f(x)+\lim_{x\to 0-}f(x)}{2}$

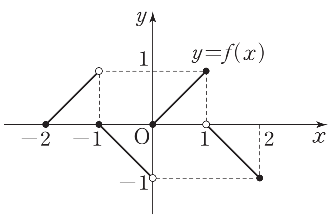
$=\frac{0+(-1)}{2}=-\frac{1}{2}$

$g(0)=\frac{f(0)+f(0)}{2}=0$

이므로 $\lim_{x\to 0}g(x)\neq g(0)$

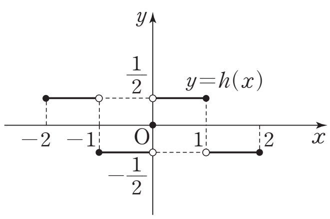
따라서 함수 $g(x)$는 $x=0$에서 불연속이다. (거짓)

ㄴ. 함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같다.



[그림 1]

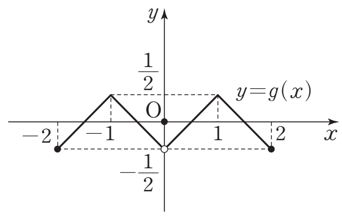
함수 $y=-f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=h(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

[그림 2]에서 $-2<a<0$인 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{x\to a+}h(x)=h(a)$이다. (참)

ㄷ. 함수 $y=f(-x)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 것이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 [그림 3]과 같다.



[그림 3]

함수 $g(x)$는 $x=0$에서만 불연속이고, 함수 $h(x)$는 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서만 불연속이다.

(i) $\lim_{x\to -1-}\{g(x)+k\}h(x)=\left(\frac{1}{2}+k\right)\times\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to -1+}\{g(x)+k\}h(x)=\left(\frac{1}{2}+k\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\{g(-1)+k\}h(-1)=\left(\frac{1}{2}+k\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

이므로

$\left(\frac{1}{2}+k\right)\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}+k\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$k=-\frac{1}{2}$

즉, $k=-\frac{1}{2}$일 때 함수 $\{g(x)+k\}h(x)$는 $x=-1$에서 연속이다.

(ii) $\lim_{x\to 0-}\{g(x)+k\}h(x)=\left(-\frac{1}{2}+k\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\lim_{x\to 0+}\{g(x)+k\}h(x)=\left(-\frac{1}{2}+k\right)\times\frac{1}{2}$

$\{g(0)+k\}h(0)=0$

이므로

$\left(-\frac{1}{2}+k\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}+k\right)\times\frac{1}{2}=0$

$k=\frac{1}{2}$

즉, $k=\frac{1}{2}$일 때 함수 $\{g(x)+k\}h(x)$는 $x=0$에서 연속이다.

(iii) $\lim_{x\to 1-}\{g(x)+k\}h(x)=\left(\frac{1}{2}+k\right)\times\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1+}\{g(x)+k\}h(x)=\left(\frac{1}{2}+k\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\{g(1)+k\}h(1)=\left(\frac{1}{2}+k\right)\times\frac{1}{2}$

이므로

$\left(\frac{1}{2}+k\right)\times\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}+k\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$

$k=-\frac{1}{2}$

즉, $k=-\frac{1}{2}$일 때 함수 $\{g(x)+k\}h(x)$는 $x=1$에서 연속이다.

(i), (ii), (iii)에서 함수 $\{g(x)+k\}h(x)$는

$k=-\frac{1}{2}$이면 $x=0$에서만 불연속,

$k=\frac{1}{2}$이면 $x=-1$, $x=1$에서만 불연속,

$k\neq-\frac{1}{2}$, $k\neq\frac{1}{2}$이면 $x=-1$, $x=0$, $x=1$에서만 불연속이다.

따라서 함수 $\{g(x)+k\}h(x)$가 $x=b$ $(-2<b<2)$에서 불연속인 실수 b의 개수가 1이 되도록 하는 양수 k의 값은 존재하지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄴ뿐이다.

답 ①

03 미분계수와 도함수

유제 본문 31~37쪽

1 ②	2 ③	3 ②	4 3	5 ③
6 990	7 ④	8 ①		

1 $f(x)=x^2+ax$에서 x의 값이 1에서 3까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{(9+3a)-(1+a)}{2}=4+a$$

이고

$$\begin{aligned}f'(1)&=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{x^2+ax-(1+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x^2-1)+a(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1}(x+1+a)=2+a\end{aligned}$$

$4+a=af'(1)$에서

$4+a=a(2+a)$, $a^2+a-4=0$

이차방정식 $a^2+a-4=0$의 판별식을 D라 하면

$D=1^2-4\times1\times(-4)=17>0$이므로 이 방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -1이다.

답 ②

2 $$\begin{aligned}&\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)\}^2-x^2}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\frac{\{f(x)+x\}\{f(x)-x\}}{x-2}\\&=\lim_{x\to2}\left[\{f(x)+x\}\times\frac{f(x)-2-(x-2)}{x-2}\right]\\&=\lim_{x\to2}\left[\{f(x)+x\}\times\left\{\frac{f(x)-2}{x-2}-1\right\}\right]\\&=\lim_{x\to2}\{f(x)+x\}\times\lim_{x\to2}\left\{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-1\right\}\\&=\{f(2)+2\}\times\{f'(2)-1\}\\&=(2+2)\times(3-1)=8\end{aligned}$$

답 ③

3 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=1$에서도 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1+}f(x)=f(1)$

이때

$\lim_{x\to1-}f(x)=\lim_{x\to1-}(ax^2+2)=a+2$

$\lim_{x\to1+}f(x)=\lim_{x\to1+}a^2x=a^2$

$f(1)=a+2$

이므로 $a+2=a^2$

$a^2-a-2=0$, $(a+1)(a-2)=0$

$a=-1$ 또는 $a=2$ ...... ㉠

그런데 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하지 않으므로

$\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\neq\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$이어야 한다.

이때

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1-}\frac{(ax^2+2)-(a+2)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}\frac{a(x-1)(x+1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1-}a(x+1)=2a\end{aligned}$$

$f(1)=a+2=a^2$이므로

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}&=\lim_{x\to1+}\frac{a^2x-a^2}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}\frac{a^2(x-1)}{x-1}\\&=\lim_{x\to1+}a^2=a^2\end{aligned}$$

따라서 $2a\neq a^2$이므로

$a\neq0$이고 $a\neq2$ ...... ㉡

㉠, ㉡에서 $a=-1$

답 ②

4 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로 $g(x)$는 $x=0$과 $x=2$에서도 미분가능하다.

(i) 함수 $g(x)$가 $\lim_{x\to0-}g(x)=\lim_{x\to0+}g(x)=g(0)=1$을 만족시키므로 $x=0$에서 연속이다.

함수 $g(x)$가 $x=0$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}$

이때

$\lim_{x\to0-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to0-}\frac{1-1}{x}=0$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}&=\lim_{x\to0+}\frac{(x^3+ax^2+bx+1)-1}{x}\\&=\lim_{x\to0+}(x^2+ax+b)=b\end{aligned}$$

이므로 $b=0$

(ii) 함수 $g(x)$가 $x=2$에서 연속이므로

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2+}g(x)=g(2)$

이때

$\lim_{x\to2-}g(x)=\lim_{x\to2-}(x^3+ax^2+1)=8+4a+1=4a+9$

$\lim_{x\to2+}g(x)=\lim_{x\to2+}c=c$

$g(2)=c$

이므로 $c=4a+9$ ...... ㉠

함수 $g(x)$가 $x=2$에서 미분가능하므로

$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$

이때

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2-}\frac{(x^3+ax^2+1)-c}{x-2}\\&=\lim_{x\to2-}\frac{x^3+ax^2-(4a+8)}{x-2}\\&=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)\{x^2+(a+2)x+2a+4\}}{x-2}\\&=\lim_{x\to2-}\{x^2+(a+2)x+2a+4\}\\&=4a+12\end{aligned}$$

$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{c-c}{x-2}=0$

이므로 $4a+12=0$, $a=-3$

㉠에서 $c=4\times(-3)+9=-3$

(i), (ii)에서 $f(x)=x^3-3x^2+1$이므로

$f(1)\times g(3)=(1-3+1)\times(-3)=3$

답 3

5 다항함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(x, f(x))$에서의 접선의 기울기가 $3x^2-4x-2$이므로 $f'(x)=3x^2-4x-2$

$$\begin{aligned}&\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{h}\\&=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times(-2)\right\}\\&=-2\lim_{h\to0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\\&=-2f'(1)=-2\times(3-4-2)=6\end{aligned}$$

답 ③

6 $f(x)=x^{2n}$에서

$f'(x)=2nx^{2n-1}$이므로 $f'(1)=2n$

$g(x)=x^{n+2}$에서
$g'(x)=(n+2)x^{n+1}$이므로 $g'(1)=n+2$

$$\sum_{n=1}^{10} f'(1)g'(1)=\sum_{n=1}^{10} 2n(n+2)=2\sum_{n=1}^{10} n^2+4\sum_{n=1}^{10} n$$
$$=2\times\frac{10\times11\times21}{6}+4\times\frac{10\times11}{2}$$
$$=770+220=990$$

답 990

7 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x$에서 $f'(x)=x^2+2x-2$
함수 $f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$는
$f'(a)=a^2+2a-2$
함수 $f(x)$의 $x=2a$에서의 미분계수 $f'(2a)$는
$f'(2a)=4a^2+4a-2$
이때 $f'(a)+f'(2a)=28$이므로
$a^2+2a-2+4a^2+4a-2=28$
$5a^2+6a-32=0$
$(5a+16)(a-2)=0$
$a>0$이므로 $a=2$

답 ④

8 $f(x)=(x-1)(x^3+ax^2+2)$에서
$f'(x)=(x^3+ax^2+2)+(x-1)(3x^2+2ax)$
$f'(2)=2$에서
$(8+4a+2)+(12+4a)=2$, $8a=-20$
$a=-\frac{5}{2}$
따라서 $f'(x)=\left(x^3-\frac{5}{2}x^2+2\right)+(x-1)(3x^2-5x)$이므로
$f'(1)=1-\frac{5}{2}+2=\frac{1}{2}$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 38~39쪽

1 ④	2 ③	3 ②	4 ①	5 ⑤
6 21	7 ②	8 ①	9 ④	10 ①

1 $f(x)=x^3+x^2+1$에서 x의 값이 -1에서 2까지 변할 때의 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은
$$\frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)}=\frac{(8+4+1)-(-1+1+1)}{3}=4$$

답 ④

2 점 $(2, 3)$은 함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점이므로
$f(2)=3$
함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 점 $(2, 3)$에서의 접선의 기울기가 4이므로
$f'(2)=4$
따라서
$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{f(x)-3}=\lim_{x\to2}\left\{\frac{x-2}{f(x)-f(2)}\times(x+2)\right\}$$
$$=\lim_{x\to2}\left\{\frac{1}{\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}\times(x+2)\right\}$$
$$=\frac{1}{\lim_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}}\times\lim_{x\to2}(x+2)$$
$$=\frac{1}{f'(2)}\times4=1$$

답 ③

3 $\lim_{x\to-1}\frac{2f(x)-3}{x^2+x}=f(-1)$에서
$x\to-1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to-1}\{2f(x)-3\}=0$에서 $f(x)$는 다항함수이므로
$2f(-1)-3=0$, $f(-1)=\frac{3}{2}$
$$\lim_{x\to-1}\frac{2f(x)-3}{x^2+x}=\lim_{x\to-1}\frac{2\{f(x)-f(-1)\}}{x(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to-1}\left\{\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}\times\frac{2}{x}\right\}$$
$$=\lim_{x\to-1}\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\times\lim_{x\to-1}\frac{2}{x}$$
$$=f'(-1)\times\frac{2}{-1}$$
$$=-2f'(-1)$$
이므로 $-2f'(-1)=f(-1)$, $-2f'(-1)=\frac{3}{2}$
따라서 $f'(-1)=-\frac{3}{4}$

답 ②

4 $f(x)=\begin{cases}-(x-a)(2x-1) & (x\le a)\\ (x-a)(2x-1) & (x>a)\end{cases}$
함수 $f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로
$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

이때

$$\lim_{x\to a-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a-}\frac{-(x-a)(2x-1)-0}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a-}\{-(2x-1)\}$$
$$=-2a+1$$

$$\lim_{x\to a+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a+}\frac{(x-a)(2x-1)-0}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a+}(2x-1)$$
$$=2a-1$$

이므로 $-2a+1=2a-1$, $a=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=\left|x-\frac{1}{2}\right|(2x-1)$이므로

$f(1)=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

답 ①

5 함수 $f(x)$가 $x=3$에서 미분가능하므로 $x=3$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3+}f(x)=f(3)$

이때

$\lim_{x\to3-}f(x)=\lim_{x\to3-}(ax+b)=3a+b$

$\lim_{x\to3+}f(x)=\lim_{x\to3+}(x^2-2x)=9-6=3$

$f(3)=3a+b$

이므로 $3a+b=3$, $b=-3a+3$ …… ㉠

함수 $f(x)$는 $x=3$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

이때

$$\lim_{x\to3-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3-}\frac{(ax+b)-(3a+b)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3-}\frac{a(x-3)}{x-3}=a$$

$f(3)=3a+b=3$이므로

$$\lim_{x\to3+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to3+}\frac{(x^2-2x)-3}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}\frac{(x-3)(x+1)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to3+}(x+1)=4$$

즉, $a=4$

㉠에서 $b=-12+3=-9$

따라서 $f(x)=\begin{cases}4x-9 & (x\le3)\\ x^2-2x & (x>3)\end{cases}$이므로

$f(2)=8-9=-1$

답 ⑤

6 $$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(x+h)-f(x)\}-\{f(x-h)-f(x)\}}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h}$$
$$=f'(x)+f'(x)=2f'(x)$$

이므로

$2f'(x)=x^2f'(2)-6$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$2f'(2)=4f'(2)-6$, $f'(2)=3$

즉, $2f'(x)=3x^2-6$

따라서 $f'(x)=\frac{3}{2}x^2-3$이므로

$f'(4)=\frac{3}{2}\times16-3=21$

답 21

7 $f(x)=\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{3}x^3+5$이므로 $f'(x)=2x^3+x^2$

$f'(a)+f'(2)=19$에서

$(2a^3+a^2)+(16+4)=19$

$2a^3+a^2+1=0$, $(a+1)(2a^2-a+1)=0$

이때 이차방정식 $2a^2-a+1=0$을 만족시키는 실수 a의 값은 존재하지 않으므로 $a=-1$

답 ②

8 삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수와 상수항이 모두 1이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ (a, b는 상수)

로 놓으면

$f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(1)=0$에서 $3+2a+b=0$

$2a+b=-3$ …… ㉠

$f'(2)=5$에서 $12+4a+b=5$

$4a+b=-7$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-2$, $b=1$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2+x+1$이므로

$f(1)=1-2+1+1=1$

답 ①

9 $$\lim_{h\to0}\frac{f(2h)-f(-h)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{\{f(2h)-f(0)\}-\{f(-h)-f(0)\}}{h}$$

$=2\lim_{h\to 0}\frac{f(2h)-f(0)}{2h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(-h)-f(0)}{-h}$
$=2f'(0)+f'(0)=3f'(0)$

이므로 $3f'(0)=2$, $f'(0)=\frac{2}{3}$

$f(x)=(ax^2+1)(x^3+ax+1)$에서

$f'(x)=2ax(x^3+ax+1)+(ax^2+1)(3x^2+a)$

이므로

$f'(0)=0\times1+1\times a=a$

따라서 $a=\frac{2}{3}$

답 ④

10 $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=a$에서 $x\to2$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로 (분자)$\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 2}\{f(x)-3\}=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(2)-3=0$, $f(2)=3$

$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=f'(2)=a$

다항식 $f(x)$를 $(x-2)^2$으로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지가 $5x+b$이므로

$f(x)=(x-2)^2Q(x)+5x+b$

$f(x)=(x^2-4x+4)Q(x)+5x+b$ ······ ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f(2)=10+b$, $3=10+b$에서 $b=-7$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x)=(2x-4)Q(x)+(x^2-4x+4)Q'(x)+5$ ······ ㉡

㉡의 양변에 $x=2$를 대입하면

$f'(2)=5$, $a=5$

따라서 $a+b=5+(-7)=-2$

답 ①

Level 2 기본 연습 본문 40~41쪽

1 ⑤	2 ①	3 ②	4 ④	5 ③
6 ⑤	7 17	8 ③		

1 $\lim_{x\to 0}\{f(x)-x\}\neq0$, 즉 $\lim_{x\to 0}f(x)\neq0$이면

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2x^2}{f(x)-x}=\frac{f(0)}{f(0)}=1$이 되어 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 $\lim_{x\to 0}f(x)=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로

$f(0)=0$

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+2x^2}{f(x)-x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{x}+2x}{\frac{f(x)}{x}-1}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}+2x}{\frac{f(x)-f(0)}{x-0}-1}$

$=\frac{f'(0)+0}{f'(0)-1}=\frac{f'(0)}{f'(0)-1}$

이므로 $\frac{f'(0)}{f'(0)-1}=3$에서

$3f'(0)-3=f'(0)$, $2f'(0)=3$

따라서 $f'(0)=\frac{3}{2}$

답 ⑤

2 $(x-2)f'(x)=3f(x)-2x^2+x$의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=3f(2)-8+2$, $f(2)=2$

$x\neq2$일 때, $f'(x)=\frac{3f(x)-2x^2+x}{x-2}$

다항함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$는 다항함수이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다. 따라서 $x=2$에서도 연속이므로

$f'(2)=\lim_{x\to 2}f'(x)$

가 성립한다.

$f'(2)=\lim_{x\to 2}f'(x)$

$=\lim_{x\to 2}\frac{3f(x)-2x^2+x}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\frac{3\{f(x)-2\}-(2x^2-x-6)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}\left[\frac{3\{f(x)-f(2)\}}{x-2}-\frac{(2x+3)(x-2)}{x-2}\right]$

$=3\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}-\lim_{x\to 2}(2x+3)$

$=3f'(2)-7$

따라서 $f'(2)=\frac{7}{2}$

답 ①

3 ㄱ. $\lim_{x\to 2-}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2-}\frac{x|x-2|-0}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}\frac{x(2-x)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2-}(-x)=-2$

$$\lim_{x\to2+}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{x|x-2|-0}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}\frac{x(x-2)}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to2+}x=2$$

따라서 $\lim_{x\to2-}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}\neq\lim_{x\to2+}\frac{xf(x)-2f(2)}{x-2}$

이므로 함수 $xf(x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. $\lim_{x\to2}\frac{f(4-x)f(x)-\{f(2)\}^2}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{|4-x-2|\times|x-2|-0}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}\frac{|x-2|^2}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)^2}{x-2}$

$=\lim_{x\to2}(x-2)=0$

따라서 함수 $f(4-x)f(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

ㄷ. $\lim_{x\to2-}\frac{f(x)f(-x)-f(2)f(-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{|x-2|\times|x+2|-0}{x-2}$

$=\lim_{x\to2-}\frac{-(x^2-4)}{x-2}$

$=-\lim_{x\to2-}(x+2)=-4$

$\lim_{x\to2+}\frac{f(x)f(-x)-f(2)f(-2)}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{|x-2|\times|x+2|-0}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}\frac{x^2-4}{x-2}$

$=\lim_{x\to2+}(x+2)=4$

따라서

$\lim_{x\to2-}\frac{f(x)f(-x)-f(2)f(-2)}{x-2}$

$\neq\lim_{x\to2+}\frac{f(x)f(-x)-f(2)f(-2)}{x-2}$

이므로 함수 $f(x)f(-x)$는 $x=2$에서 미분가능하지 않다.

이상에서 $x=2$에서 미분가능한 함수는 ㄴ뿐이다.

답 ②

4 함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로 $x=1$에서 연속이다.

즉, $\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1+}g(x)=g(1)$

이때

$$\lim_{x\to1-}g(x)=\lim_{x\to1-}af(x)$$
$$=a\times(1^2-1)=0$$

$$\lim_{x\to1+}g(x)=\lim_{x\to1+}(x^2+bx-3)f(x)$$
$$=(1+b-3)\times(-1+2)=b-2$$

$g(1)=af(1)=a\times(1^2-1)=0$

이므로 $b-2=0$, $b=2$

함수 $g(x)$가 $x=1$에서 미분가능하므로

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$

이때

$$\lim_{x\to1-}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1-}\frac{af(x)-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}\frac{a(x^2-1)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1-}a(x+1)=2a$$

$$\lim_{x\to1+}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2+bx-3)f(x)-0}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x^2+2x-3)(-x+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}\frac{(x-1)(x+3)(-x+2)}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to1+}(x+3)(-x+2)$$
$$=4\times1=4$$

이므로 $2a=4$, $a=2$

따라서 $a+b=2+2=4$

답 ④

5 $f(x+y)=f(x)+f(y)+x^2y+xy^2-xy$의 양변에 $x=0$, $y=0$을 대입하면

$f(0)=f(0)+f(0)+0$에서 $f(0)=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(x)+f(h)+x^2h+xh^2-xh-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(h)+x^2h+xh^2-xh}{h}$$
$$=\lim_{h\to0}\left\{\frac{f(h)}{h}+x^2+xh-x\right\}$$
$$=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}+\lim_{h\to0}(x^2+xh-x)$$
$$=f'(0)+x^2-x$$

$f'(2)=3$에서

$f'(2)=f'(0)+4-2=3$, $f'(0)=1$

따라서 $f'(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$이므로

함수 $f'(x)$의 최솟값은 $\frac{3}{4}$이다.

답 ③

6 삼차함수 $f(x)$를
$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ($a\neq0$, a, b, c, d는 상수)
로 놓으면 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$
조건 (가)에서 $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=6$
$x\to0$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to0}f(x)=0$이고 $f(x)$는 다항함수이므로
$f(0)=0$에서 $d=0$
$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$이므로
$f'(0)=6$에서 $c=6$
$f'(x)=3ax^2+2bx+6$
조건 (나)에서 함수 $y=f'(x)$의 그래프는 점 $(1, 0)$에서
x축에 접하므로
$f'(x)=3a(x-1)^2=3ax^2-6ax+3a$
$b=-3a$, $6=3a$에서 $a=2$, $b=-6$
따라서 $f(x)=2x^3-6x^2+6x$이므로
$f(1)=2-6+6=2$

답 ⑤

7 조건 (가)에서 삼차방정식 $f(x)-(2x-1)=0$의 세 실근이 각각 -1, 0, 2이므로
$f(x)-(2x-1)=a(x+1)x(x-2)$ ($a\neq0$, a는 상수)
로 놓으면
$f(x)=a(x+1)x(x-2)+(2x-1)$
조건 (나)에서 $f(1)=-3$이므로
$-2a+1=-3$, $a=2$
$f(x)=2(x+1)x(x-2)+(2x-1)$
$f'(x)=2\{x(x-2)+(x+1)(x-2)+(x+1)x\}+2$
따라서
$f(2)+f'(2)=3+14=17$

답 17

8 $\lim_{x\to1}\frac{g(x)-f(1)}{x^3-1}=2$에서
$x\to1$일 때 (분모)$\to0$이고 극한값이 존재하므로
(분자)$\to0$이어야 한다.
즉, $\lim_{x\to1}\{g(x)-f(1)\}=0$이고 $g(x)$는 다항함수이므로
$g(1)-f(1)=0$, $g(1)=f(1)$

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-f(1)}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\left\{\frac{g(x)-g(1)}{x-1}\times\frac{1}{x^2+x+1}\right\}=\frac{1}{3}g'(1)$$

이므로 $\frac{1}{3}g'(1)=2$에서 $g'(1)=6$
$g(x)=(ax^2-2ax+2)f(x)$의 양변에 $x=1$을 대입하면
$g(1)=(-a+2)f(1)$
$f(1)=g(1)\neq0$이므로
$1=-a+2$, $a=1$
$g(x)=(x^2-2x+2)f(x)$이므로
$g'(x)=(2x-2)f(x)+(x^2-2x+2)f'(x)$의 양변에
$x=1$을 대입하면
$g'(1)=0+f'(1)=6$에서 $f'(1)=6$
따라서 $a+f'(1)=1+6=7$

답 ③

Level 3 실력 완성

본문 42~43쪽

1 ⑤ **2** ④ **3** ④ **4** 10 **5** ④
6 ③

1 ㄱ. 실수 t ($t\neq a$)에 대하여

$$g(t)=\frac{f(t)-f(a)}{t-a}=\frac{(t^2-2t+2)-(a^2-2a+2)}{t-a}=\frac{(t-a)(t+a)-2(t-a)}{t-a}=t+a-2$$

이고, $g(a)=2a-2$이므로
모든 실수 t에 대하여 $g(t)=t+a-2$
이때 $t>2-a$이면
$g(t)=t+a-2>(2-a)+a-2=0$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 $g(t)=t+a-2$이므로
$g(b)=b+a-2$
$g(b)=0$에서 $a=2-b$
$b>a$이므로 $b>2-b$, $2b>2$
따라서 $b>1$ (참)

ㄷ. ㄱ에서 $g(t)=t+a-2$이므로
$g(b)=b+a-2$
$f'(x)=2x-2$이므로 $f'(c)=2c-2$
$g(b)=f'(c)$에서 $b+a-2=2c-2$
따라서 $2c=a+b$, $c=\frac{a+b}{2}$ (참)

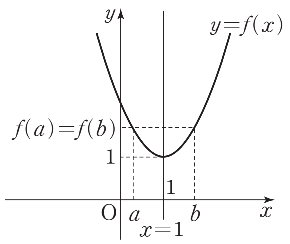
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

다른 풀이

ㄴ. 실수 t $(t\neq a)$에 대하여 $g(t)=\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}$이므로

$g(b)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$이면 $f(a)=f(b)$이다.



이때 함수 $f(x)=(x-1)^2+1$의 그래프가 직선 $x=1$에 대하여 대칭이고 $b>a$이므로 $f(a)=f(b)$이려면 $a<1$이고 $b>1$이어야 한다. (참)

2 조건 (가)에서 $x\neq 0$일 때 $f(x)>0$이고, $f(0)=0$이므로

$x<0$일 때,

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}<0$에서 $\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{f(x)}{x}\leq 0$

$x>0$일 때,

$\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)}{x}>0$에서 $\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{f(x)}{x}\geq 0$

이때 함수 $f(x)$는 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$, 즉 $f'(0)=0$

$g(0)=3$이므로 조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여

$g(x)-g(0)\leq 2x+f(x)$

(i) $x<0$일 때,

$\dfrac{2x+f(x)}{x}\leq\dfrac{g(x)-g(0)}{x}$

함수 $f(x)$는 미분가능하고 $f'(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{2x+f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0-}\left\{2+\dfrac{f(x)}{x}\right\}=2+f'(0)=2$

함수 $g(x)$는 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 0-}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$2\leq g'(0)$

(ii) $x>0$일 때,

$\dfrac{g(x)-g(0)}{x}\leq\dfrac{2x+f(x)}{x}$

함수 $f(x)$는 미분가능하고 $f'(0)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{2x+f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0+}\left\{2+\dfrac{f(x)}{x}\right\}=2+f'(0)=2$

함수 $g(x)$는 미분가능하므로

$\lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0)$

따라서 함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$g'(0)\leq 2$

(i), (ii)에서 $g'(0)=2$

답 ④

3 $g(x)=x^3+(2-a)x^2+(1-2a)x-a$에서

$g(a)=a^3+(2-a)a^2+(1-2a)a-a=0$

이므로

$g(x)=(x-a)(x^2+2x+1)$

$=(x-a)(x+1)^2$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고 함수 $|g(x)|=(x+1)^2|x-a|$는 $x<a$인 모든 실수 x와 $x>a$인 모든 실수 x에서 미분가능하므로 함수 $f(x)|g(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 $x=a$에서 미분가능하여야 한다.

$\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{f(x)|g(x)|-f(a)|g(a)|}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{(x-5)(x+1)^2|x-a|-0}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a-}\dfrac{(x-5)(x+1)^2(a-x)}{x-a}$

$=-\lim\limits_{x\to a-}(x-5)(x+1)^2$

$=-(a-5)(a+1)^2$

$\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{f(x)|g(x)|-f(a)|g(a)|}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{(x-5)(x+1)^2|x-a|-0}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a+}\dfrac{(x-5)(x+1)^2(x-a)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a+}(x-5)(x+1)^2$

$=(a-5)(a+1)^2$

이므로 $-(a-5)(a+1)^2=(a-5)(a+1)^2$

$(a-5)(a+1)^2=0$

$a=5$ 또는 $a=-1$

따라서 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$5+(-1)=4$

답 ④

4 $\lim_{x\to3}\frac{f(x)+g(x)-4}{x-3}=2$에서

$x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)+g(x)-4\}=0$에서

$f(x)+g(x)$는 연속함수이므로

$f(3)+g(3)-4=0$

$f(3)+g(3)=4$ …… ㉠

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)-2}{x-3}=-6$에서

$x\to3$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to3}\{f(x)-g(x)-2\}=0$에서

$f(x)-g(x)$는 연속함수이므로

$f(3)-g(3)-2=0$

$f(3)-g(3)=2$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$f(3)=3,\ g(3)=1$

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)+g(x)-4}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-3+g(x)-1}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\frac{\{f(x)-f(3)\}+\{g(x)-g(3)\}}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}+\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$=f'(3)+g'(3)$

이므로 $f'(3)+g'(3)=2$ …… ㉢

$\lim_{x\to3}\frac{f(x)-g(x)-2}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-3-\{g(x)-1\}}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\frac{\{f(x)-f(3)\}-\{g(x)-g(3)\}}{x-3}$

$=\lim_{x\to3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}-\lim_{x\to3}\frac{g(x)-g(3)}{x-3}$

$=f'(3)-g'(3)$

이므로 $f'(3)-g'(3)=-6$ …… ㉣

㉢, ㉣을 연립하여 풀면

$f'(3)=-2,\ g'(3)=4$

$h(x)=f(x)g(x)$가 미분가능하고

$h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이므로

$h'(3)=f'(3)g(3)+f(3)g'(3)$

$=(-2)\times1+3\times4=10$

답 10

5 조건 (가)에서 $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=3f(1)$

$x\to1$일 때 (분모) $\to0$이고 극한값이 존재하므로

(분자) $\to0$이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to1}\{f(x)-g(x)\}=0$에서

$f(x)-g(x)$는 연속함수이므로

$f(1)-g(1)=0$

$f(1)=g(1)$

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{\{f(x)-f(1)\}-\{g(x)-g(1)\}}{x-1}$

$=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}-\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

$=f'(1)-g'(1)$

이므로

$f'(1)-g'(1)=3f(1)$

$f(1)=\frac{f'(1)-g'(1)}{3}$ …… ㉠

조건 (나)에서

$\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(1+\frac{3}{x}\right)-g\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}=5f(1)$

$h=\frac{1}{x}$이라 하면 $x\to\infty$일 때 $h\to0+$이고

$f(1)=g(1)$이므로

$\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(1+\frac{3}{x}\right)-g\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{f(1+3h)-g(1-h)}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\frac{\{f(1+3h)-f(1)\}-\{g(1-h)-g(1)\}}{h}$

$=\lim_{h\to0+}\left\{3\times\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}+\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}\right\}$

$=3\lim_{h\to0+}\frac{f(1+3h)-f(1)}{3h}+\lim_{h\to0+}\frac{g(1-h)-g(1)}{-h}$

이때 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능하므로

$\lim_{x\to\infty}x\left\{f\left(1+\frac{3}{x}\right)-g\left(1-\frac{1}{x}\right)\right\}=3f'(1)+g'(1)$

즉, $3f'(1)+g'(1)=5f(1)$

이 식에 ㉠을 대입하면

$3f'(1)+g'(1)=5\times\frac{f'(1)-g'(1)}{3}$

$9f'(1)+3g'(1)=5f'(1)-5g'(1)$

따라서 $f'(1)=-2g'(1)$이고 $f'(1)\neq0$이므로

$\frac{g'(1)}{f'(1)}=-\frac{1}{2}$

답 ④

6 $\begin{cases} x^2-4 \le f(x) \le x-2 \ (2-t<x<2) & \cdots\cdots ㉠ \\ x-2 \le f(x) \le x^2-4 \ (2<x<2+t) & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

㉠에서 $\lim_{x \to 2-} f(x) \le \lim_{x \to 2-} (x-2)=0$

이때 $f(x)$는 다항함수이므로

$\lim_{x \to 2} f(x)=\lim_{x \to 2-} f(x) \le 0$

또한, ㉡에서 $\lim_{x \to 2+} f(x) \ge \lim_{x \to 2+} (x-2)=0$이므로

$\lim_{x \to 2} f(x)=\lim_{x \to 2+} f(x) \ge 0$

즉, $\lim_{x \to 2} f(x)=0$

삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수와 상수항이 모두 1이므로

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ (a, b는 상수)

로 놓으면 $f(x)$는 연속함수이므로

$f(2)=\lim_{x \to 2} f(x)=0$에서

$8+4a+2b+1=0$, $b=-2a-\frac{9}{2}$

$f(2)=0$이므로

㉠에서 $x<2$이면 $\frac{x-2}{x-2} \le \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \le \frac{x^2-4}{x-2}$

㉡에서 $x>2$이면 $\frac{x-2}{x-2} \le \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \le \frac{x^2-4}{x-2}$

이때 $\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x-2}=1$, $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x \to 2}(x+2)=4$이므로

함수의 극한의 대소 관계에 의하여

$1 \le \lim_{x \to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \le 4$, 즉 $1 \le f'(2) \le 4$

$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$에서 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$f'(2)=12+4a+b$

이때 $b=-2a-\frac{9}{2}$이므로

$f'(2)=12+4a+\left(-2a-\frac{9}{2}\right)=2a+\frac{15}{2}$

즉, $1 \le 2a+\frac{15}{2} \le 4$에서 $-\frac{13}{4} \le a \le -\frac{7}{4}$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 1}\{f'(0)-f'(x)\} &= \lim_{x \to 1}\{b-(3x^2+2ax+b)\} \\ &= \lim_{x \to 1}(-3x^2-2ax)=-3-2a\end{aligned}$$

$\frac{1}{2} \le -2a-3 \le \frac{7}{2}$이고 $-2a-3$이 짝수이므로

$-2a-3=2$, $a=-\frac{5}{2}$

$b=-2a-\frac{9}{2}=(-2)\times\left(-\frac{5}{2}\right)-\frac{9}{2}=\frac{1}{2}$

따라서 $f(x)=x^3-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x+1$이므로

$f(1)=1-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}+1=0$

답 ③

04 도함수의 활용 (1)

유제 본문 47~53쪽

1 ③ 2 ② 3 ③ 4 ⑤ 5 ⑤
6 ② 7 ⑤

1 $f(x)=2x^3-2x^2+a$라 하면

$f'(x)=6x^2-4x$

$f'(1)=2$이므로 접선의 방정식은

$y=2(x-1)+a$, 즉 $y=2x-2+a$

이 직선이 점 $(0, 4)$를 지나므로 $0-2+a=4$

따라서 $a=6$

답 ③

2 $g(x)=x^3+2x$라 하면

$g'(x)=3x^2+2$

$g'(0)=2$이므로 곡선 $y=x^3+2x$ 위의 원점에서의 접선의 방정식은

$y=2x$

점 $(1, f(1))$이 직선 $y=2x$ 위의 점이므로 $f(1)=2$

$y=x^2f(x)$에서 $y'=2xf(x)+x^2f'(x)$

곡선 $y=x^2f(x)$ 위의 점 $(1, f(1))$에서의 접선의 기울기는

$2f(1)+f'(1)=4+f'(1)$

따라서 $4+f'(1)=2$이므로 $f'(1)=-2$

답 ②

3 다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고

$f(1)f(2)<0$, $f(2)f(3)<0$, $f(3)f(4)<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여

$f(d_1)=0$ $(1<d_1<2)$

$f(d_2)=0$ $(2<d_2<3)$

$f(d_3)=0$ $(3<d_3<4)$

를 만족시키는 d_1, d_2, d_3이 존재한다.

다항함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고

$f(d_1)=f(d_2)$, $f(d_2)=f(d_3)$

이므로 롤의 정리에 의하여

$f'(c_1)=0$ $(d_1<c_1<d_2)$

$f'(c_2)=0$ $(d_2<c_2<d_3)$

을 만족시키는 c_1, c_2가 존재한다.
따라서 $n(S_f)$의 최솟값은 2이다.

답 ③

4 함수 $f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x$가 일대일대응이 되려면 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$ 또는 $f'(x)\le0$이어야 한다.
$f(x)=x^3+ax^2+(a+6)x$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+a+6$이므로 $f'(x)\ge0$이어야 한다.
즉, $3x^2+2ax+a+6\ge0$
이차방정식 $3x^2+2ax+a+6=0$의 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=a^2-3(a+6)\le0$
$a^2-3a-18\le0$, $(a-6)(a+3)\le0$
$-3\le a\le6$
따라서 모든 정수 a의 값은 -3, -2, -1, $\cdots$, 6이고, 그 개수는 10이다.

답 ⑤

5 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하려면 a가 아닌 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.
$f(x)=\begin{cases}3x^3+4x-4a & (x<a)\\ 3x^3-4x+4a & (x\ge a)\end{cases}$이므로
$f'(x)=\begin{cases}9x^2+4 & (x<a)\\ 9x^2-4 & (x>a)\end{cases}$
(ⅰ) $x<a$일 때,
$f'(x)=9x^2+4$에서 $x<a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)>0$이다.
(ⅱ) $x>a$일 때,
$f'(x)=9x^2-4$에서 $x>a$인 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이려면
$f'(0)=-4$에서 $a>0$이고
$f'(a)=9a^2-4\ge0$이어야 한다.
즉, $a>0$이고 $(3a-2)(3a+2)\ge0$이므로 $a\ge\frac{2}{3}$
(ⅰ), (ⅱ)에서 a의 최솟값은 $\frac{2}{3}$이다.

답 ⑤

6 $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+4$에서
$f'(x)=3x^2-3x-6=3(x+1)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극댓값을 갖고, $x=2$에서 극솟값을 갖는다.
$f(-1)=-1-\frac{3}{2}+6+4=\frac{15}{2}$
$f(2)=8-6-12+4=-6$
이므로 함수 $f(x)$의 모든 극값의 합은
$\frac{15}{2}+(-6)=\frac{3}{2}$

답 ②

7 $f(x)=3x^4+4x^3-12x^2+a$에서
$f'(x)=12x^3+12x^2-24x=12x(x+2)(x-1)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$, $x=1$에서 극솟값을 갖고, $x=0$에서 극댓값을 갖는다.
함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축에 접하려면 극댓값 또는 극솟값이 0이어야 하므로
$f(-2)=48-32-48+a=0$에서 $a=32$
$f(0)=0+a=0$에서 $a=0$
$f(1)=3+4-12+a=0$에서 $a=5$
따라서 모든 상수 a의 값의 합은
$32+0+5=37$

답 ⑤

Level 1 기초 연습

본문 54쪽

1 ③　　2 ④　　3 ①　　4 ②

1 $f(x)=x^4+3x+4$라 하면
$f'(x)=4x^3+3$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(-1,\ 2)$에서의 접선의 기울기가
$f'(-1)=-1$이므로 접선의 방정식은
$y=-(x+1)+2$, 즉 $y=-x+1$
따라서 $a=-1$, $b=1$이므로 $a+b=0$

답 ③

2 $f(x)=x^3-x^2+3$이라 하면
$f'(x)=3x^2-2x$
$f'(1)=1$이므로 점 $(1,\ 3)$에서의 접선과 수직인 직선의 기울기는 -1이다.
점 $(1,\ 3)$을 지나고 이 점에서의 접선과 수직인 직선의 방정식은
$y=-(x-1)+3$, 즉 $y=-x+4$
따라서 구하는 직선의 y절편은 4이다.

답 ④

3 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x$에서
$f'(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

구간 $(-\infty,\ k]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.
따라서 $k\le1$이므로 실수 k의 최댓값은 1이다.

답 ①

4 $f(x)=x^3-12x$에서
$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=2$
함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 극댓값을 가지므로
$M=f(-2)=-8+24=16$
따라서 $a+M=-2+16=14$

답 ②

Level 2 기본 연습

본문 55~56쪽

1 ③	**2** ④	**3** 23	**4** ④	**5** 21
6 ①	**7** ④	**8** 20		

1 점 $(1,\ 6)$이 곡선 $y=(x+1)f(x)$ 위에 있으므로
$2f(1)=6$, $f(1)=3$
$g(x)=(x+1)f(x)$라 하면
$g'(x)=f(x)+(x+1)f'(x)$
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(1,\ 6)$에서의 접선의 기울기가
$g'(1)=f(1)+2f'(1)=3+2f'(1)$
이므로 접선의 방정식은
$y=\{3+2f'(1)\}(x-1)+6$
이 직선이 원점을 지나므로
$-3-2f'(1)+6=0$
따라서 $f'(1)=\frac{3}{2}$

답 ③

2 $f(x)=x^3-6x$에서 $f'(x)=3x^2-6$
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 A에서의 접선의 방정식은
$y=(3a^2-6)(x-a)+a^3-6a$, 즉 $y=(3a^2-6)x-2a^3$
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=(3a^2-6)x-2a^3$의 교점의 x좌표는 x에 대한 방정식 $x^3-6x=(3a^2-6)x-2a^3$의 근이다.
$x^3-3a^2x+2a^3=0$, $(x-a)^2(x+2a)=0$
$x=a$ 또는 $x=-2a$
즉, $b=-2a$
$b-a=3$에서 $-2a-a=3$이므로 $a=-1$
따라서 $\mathrm{A}(-1,\ 5)$, $\mathrm{B}(2,\ -4)$이므로
$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{\{2-(-1)\}^2+(-4-5)^2}=3\sqrt{10}$

답 ④

3 $f(t)-mt=0$에서 $\frac{f(t)}{t}=m$ (단, $t\ne0$)
$\frac{f(t)}{t}=\frac{f(t)-0}{t-0}$이므로 $\frac{f(t)}{t}$의 값은 두 점 $(0,\ 0)$, $(t,\ f(t))$를 지나는 직선의 기울기이다.
실수 m의 최솟값이 4이므로 직선 $y=4x$는 곡선 $y=f(x)$의 접선이다.
$f(x)=(x-1)^4+a=(x^2-2x+1)(x^2-2x+1)+a$
에서
$f'(x)=(2x-2)(x^2-2x+1)+(x^2-2x+1)(2x-2)$
$\quad\quad=4(x-1)^3$

기울기가 4인 접선의 접점의 좌표를 $(\alpha,\ (\alpha-1)^4+a)$라 하면
$f'(\alpha)=4(\alpha-1)^3=4$
$(\alpha-1)^3=1,\ \alpha=2$
접점의 좌표가 $(2,\ 1+a)$이므로 접선의 방정식은
$y=4(x-2)+1+a$, 즉 $y=4x-7+a$
이 직선이 $y=4x$이므로
$-7+a=0,\ a=7$
따라서 $f(x)=(x-1)^4+7$이므로
$f(3)=16+7=23$

답 23

참고
t에 대한 방정식 $f(t)-mt=0$을 만족시키는 t의 값은 곡선 $y=f(t)$와 직선 $y=mt$의 교점의 t좌표와 같다.
양수 t가 존재하도록 하는 실수 m의 최솟값이 4이므로 직선 $y=4t$는 곡선 $y=f(t)$의 접선이어야 한다.

4 $(x_1-x_2)\{f(x_1)-f(x_2)\}>0$에서 $x_1>x_2$이면 $f(x_1)>f(x_2)$이고 $x_1<x_2$이면 $f(x_1)<f(x_2)$이므로 함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.
따라서 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 하므로
$f'(x)=3x^2-2ax+a$에서
$3x^2-2ax+a\ge0$
이차방정식 $3x^2-2ax+a=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=a^2-3a\le0$
$a(a-3)\le0,\ 0\le a\le3$
따라서 구하는 모든 정수 a의 값은 0, 1, 2, 3이고, 그 개수는 4이다.

답 ④

5 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)=x$인 함수 $g(x)$가 존재하므로 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\ge0$이어야 한다.
$f(x)=x^3+ax^2+(a^2-1)x+3$에서
$f'(x)=3x^2+2ax+a^2-1\ge0$
이차방정식 $3x^2+2ax+a^2-1=0$의 판별식을 D라 하면 $D\le0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=a^2-3(a^2-1)\le0$
$2a^2-3\ge0$
$a\le-\frac{\sqrt{6}}{2}$ 또는 $a\ge\frac{\sqrt{6}}{2}$ …… ㉠
조건 (나)에서 $f(1)=1+a+a^2-1+3=5$이므로
$a^2+a-2=0,\ (a+2)(a-1)=0$
$a=-2$ 또는 $a=1$
㉠에 의하여 $a=-2$
따라서 $f(x)=x^3-2x^2+3x+3$이므로
$f(3)=27-18+9+3=21$

답 21

6 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	4	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	극소	↗	극대	↘		↘	극소	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 극댓값을 갖는 모든 a의 값은 -1, 4이므로 그 합은
$-1+4=3$

답 ①

7 $g(x)=x^2f(x)$에서
$g'(x)=2xf(x)+x^2f'(x)$
함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극댓값 18을 가지므로
$g(3)=9f(3)=18,\ f(3)=2$
함수 $g(x)$가 $x=3$에서 극값을 가지므로
$g'(3)=6f(3)+9f'(3)$
$\quad=6\times2+9f'(3)=0$
따라서 $f'(3)=-\frac{4}{3}$

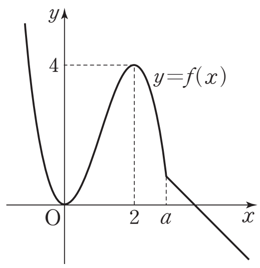
답 ④

8 함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=a$에서도 연속이다.
즉, $\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a+}f(x)=f(a)$
이때
$\lim_{x\to a-}f(x)=\lim_{x\to a-}(-x^3+3x^2)=-a^3+3a^2$
$\lim_{x\to a+}f(x)=\lim_{x\to a+}(-x+b)=-a+b$
$f(a)=-a+b$
이므로 $-a^3+3a^2=-a+b$
$b=-a^3+3a^2+a$ …… ㉠
$g(x)=-x^3+3x^2$이라 하면
$g'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$
$g'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	↘	극소	↗	극대	↘

(i) $a\geq 2$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 1]과 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=2$에서 극값을 갖는다.



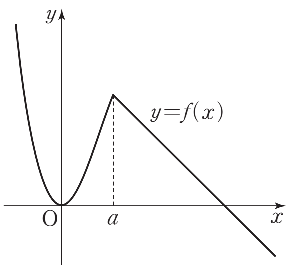
[그림 1]

$f(0)+f(2)=0+(-8+12)=4$이므로 모든 극값의 합은 4이다.

따라서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $0<a<2$일 때,

함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같으므로 함수 $f(x)$는 $x=0$, $x=a$에서 극값을 갖는다.



[그림 2]

모든 극값의 합이 2이므로

$f(0)+f(a)=0+(-a^3+3a^2)=2$

$a^3-3a^2+2=0$

$(a-1)(a^2-2a-2)=0$

$a=1$ 또는 $a=1-\sqrt{3}$ 또는 $a=1+\sqrt{3}$

$0<a<2$이므로 $a=1$

㉠에서 $b=-1+3+1=3$

(i), (ii)에서 $a=1$, $b=3$

따라서 $f(x)=\begin{cases} -x^3+3x^2 & (x<1) \\ -x+3 & (x\geq 1) \end{cases}$이므로

$f(a-b)=f(-2)=8+12=20$

답 20

Level 3 실력 완성

본문 57쪽

1 191 **2** ⑤ **3** ②

1 함수 $y=f(x-t)$의 그래프는 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 t만큼 평행이동한 것이다.

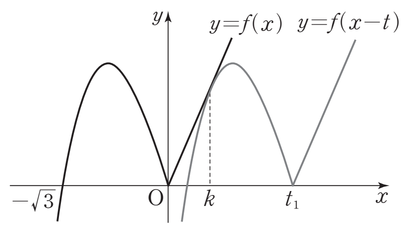
함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 실수 a의 값은 두 함수 $y=f(x)$, $y=f(x-t)$의 그래프의 교점의 x좌표 중 하나이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(x-t)$가 서로 접할 때 t의 값을 t_1이라 하자.

(i) $t=t_1$일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(x-t)$는 [그림 1]과 같으므로

$h(t)=1$

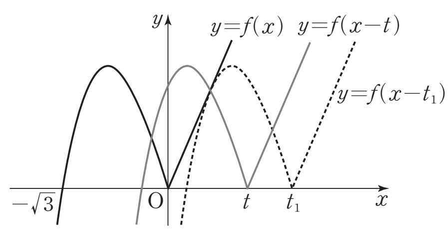


[그림 1]

(ii) $0<t<t_1$일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(x-t)$는 [그림 2]와 같으므로

$h(t)=2$

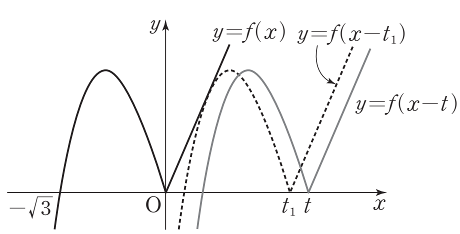


[그림 2]

(iii) $t>t_1$일 때,

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f(x-t)$는 [그림 3]과 같으므로

$h(t)=0$



[그림 3]

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 함수 $h(t)$는 $t=t_1$에서 불연속이다.

즉, $t=t_1$일 때 직선 $y=\frac{7}{3}x$가 곡선 $y=(x-t)^3-3(x-t)$와 점 $\left(k, \frac{7}{3}k\right)$ $(0<k<t_1)$에서 접한다고 하자.

$y=(x-t)^3-3(x-t)$에서 $y'=3(x-t)^2-3$

곡선 $y=(x-t_1)^3-3(x-t_1)$ 위의 점 $\left(k, \frac{7}{3}k\right)$에서의 접선의 기울기가 $\frac{7}{3}$이므로

$3(k-t_1)^2-3=\frac{7}{3}$, $(k-t_1)^2=\frac{16}{9}$

$k-t_1=-\frac{4}{3}$ …… ㉠

점 $\left(k, \frac{7}{3}k\right)$가 곡선 $y=(x-t_1)^3-3(x-t_1)$ 위의 점이므로

$(k-t_1)^3-3(k-t_1)=\frac{7}{3}k$ …… ㉡

㉠, ㉡에서

$-\frac{64}{27}-3\times\left(-\frac{4}{3}\right)=\frac{7}{3}k$, $k=\frac{44}{63}$

㉠에서 $t_1=\frac{44}{63}+\frac{4}{3}=\frac{128}{63}$, 즉 $\alpha=\frac{128}{63}$

따라서 $p=63$, $q=128$이므로

$p+q=63+128=191$

답 191

참고

$(x-t)^3=(x-t)(x^2-2xt+t^2)$이므로

$$\{(x-t)^3\}'=(x^2-2xt+t^2)+(x-t)(2x-2t)$$
$$=(x-t)^2+2(x-t)^2$$
$$=3(x-t)^2$$

2 ㄱ. $h(x)=g(x)-x$라 하면

함수 $h(x)$는 닫힌구간 $[1, 2]$에서 연속이고,

$h(1)=g(1)-1=f(1)-1=1>0$

$h(2)=g(2)-2=f(2)-2=-2<0$

이므로 사잇값의 정리에 의하여 방정식 $h(x)=0$은 열린구간 $(1, 2)$에서 적어도 하나의 실근을 갖는다.

따라서 $g(a)=a$인 실수 a가 열린구간 $(1, 2)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄴ. 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=0$에서도 연속이어야 한다.

즉, $\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0+} g(x)=g(0)$

이때

$\lim_{x\to 0-} g(x)=\lim_{x\to 0-} \{-f(-x)\}=-f(0)$

$\lim_{x\to 0+} g(x)=\lim_{x\to 0+} f(x)=f(0)$

$g(0)=f(0)$

에서 $-f(0)=f(0)$이므로 $f(0)=0$

또한, $g(-2)=-f(2)=0$

함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-2, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-2, 0)$에서 미분가능하며 $g(0)=g(-2)$이므로 롤의 정리에 의하여 $g'(b)=0$인 실수 b가 열린구간 $(-2, 0)$에 적어도 하나 존재한다. (참)

ㄷ. $g(-1)=-f(1)=-2$

함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[-1, 0]$에서 연속이고 열린구간 $(-1, 0)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{g(0)-g(-1)}{0-(-1)}=g'(c_1)$, 즉 $g'(c_1)=2$인 실수 c_1이 열린구간 $(-1, 0)$에 적어도 하나 존재한다.

또한, 함수 $g(x)$는 닫힌구간 $[0, 1]$에서 연속이고 열린구간 $(0, 1)$에서 미분가능하므로 평균값 정리에 의하여

$\frac{g(1)-g(0)}{1-0}=g'(c_2)$, 즉 $g'(c_2)=2$인 실수 c_2가 열린구간 $(0, 1)$에 적어도 하나 존재한다.

따라서 $g'(c)=2$인 실수 c가 열린구간 $(-1, 1)$에 적어도 두 개 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

3 조건 (나)에서 $f(0)=3$, $f'(0)=-1$ …… ㉠

(ⅰ) $a<0$일 때,

$(x^2-a)^3=(x^2-a)(x^2-a)(x^2-a)$이고, $f(x)$가 삼차함수이므로 $f(x)g(x)=(x^2-a)^3$인 다항함수 $g(x)$가 존재하지 않는다.

즉, 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a=0$일 때,

$f(x)g(x)=x^6$에서

$f(x)=kx^3$ ($k>0$, k는 상수)이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $a>0$일 때,

$f(x)g(x)=(x^2-a)^3$에서

$f(x)g(x)=(x-\sqrt{a})^3(x+\sqrt{a})^3$

양의 상수 k에 대하여

$f(x)=k(x-\sqrt{a})^3$이면

$f'(x)=3k(x-\sqrt{a})^2$이고 $f'(0)=3ka>0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

$f(x)=k(x+\sqrt{a})^3$이면

$f'(x)=3k(x+\sqrt{a})^2$이고 $f'(0)=3ka>0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

$f(x)=k(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})^2$이면

$f(0)=-k\sqrt{a}\times(\sqrt{a})^2=-ka\sqrt{a}<0$이므로 ㉠을 만족시키지 않는다.

$f(x)=k(x-\sqrt{a})^2(x+\sqrt{a})$이면

$f(x)=k(x-\sqrt{a})(x^2-a)$에서

$$\begin{aligned}f'(x)&=k(x^2-a)+k(x-\sqrt{a})\times 2x\\&=k(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})+2kx(x-\sqrt{a})\\&=k(x-\sqrt{a})(3x+\sqrt{a})\end{aligned}$$

$f'(0)=-ka=-1$이므로 $ka=1$

$f(0)=ka\sqrt{a}=3$이므로 $\sqrt{a}=3$, $a=9$

따라서 $k=\frac{1}{9}$

(i), (ii), (iii)에서 $f(x)=\frac{1}{9}(x-3)^2(x+3)$이므로

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{9}\times 2(x-3)(x+3)+\frac{1}{9}(x-3)^2\\&=\frac{1}{9}(x-3)(3x+3)\\&=\frac{1}{3}(x+1)(x-3)\end{aligned}$$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서 함수 $f(x)$의 극댓값은

$f(-1)=\frac{1}{9}\times 16\times 2=\frac{32}{9}$

답 ②

참고

① $(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$이므로

$$\begin{aligned}\{(x-a)^2\}'&=2x-2a\\&=2(x-a)\end{aligned}$$

② $(x-a)^3=(x-a)(x-a)^2$이므로

$$\begin{aligned}\{(x-a)^3\}'&=(x-a)^2+(x-a)\times 2(x-a)\\&=3(x-a)^2\end{aligned}$$

05 도함수의 활용 (2)

유제

본문 61~65쪽

1 16　2 ③　3 ②　4 ④　5 ⑤
6 ①

1 $f(x)=x^3-6x^2+9x+12$에서

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	12	↗	16	↘	12

닫힌구간 $[0, 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최댓값 16을 갖는다.

답 16

2 $f(x)=3x^4-4x^3+a$에서

$f'(x)=12x^3-12x^2=12x^2(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=1$

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$a+7$	↘	a	↘	$a-1$	↗	$a+16$

닫힌구간 $[-1, 2]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $a+16$을 갖고, $x=1$에서 최솟값 $a-1$을 갖는다.

즉, $M=a+16$, $m=a-1$

$M+m=(a+16)+(a-1)=2a+15=18$

따라서 $a=\frac{3}{2}$

답 ③

3 $f(x)=g(x)$, 즉 $x^3-9x=-3x^2+a$에서

$x^3+3x^2-9x=a$

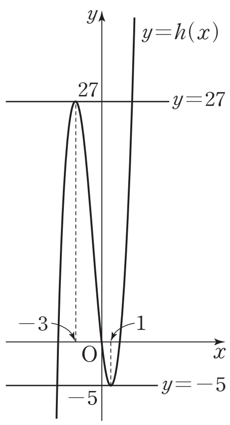
$h(x)=x^3+3x^2-9x$라 하면

$h'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

$h'(x)=0$에서 $x=-3$ 또는 $x=1$

함수 $h(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	↗	27	↘	-5	↗



함수 $y=h(x)$의 그래프는 그림과 같고 방정식 $x^3+3x^2-9x=a$가 서로 다른 두 실근을 가지려면 함수 $y=h(x)$의 그래프와 직선 $y=a$가 서로 다른 두 점에서 만나야 한다.

따라서 $a=-5$ 또는 $a=27$이므로 구하는 모든 상수 a의 값의 합은

$-5+27=22$

답 ②

4 $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+40$이라 하면

$f'(x)=12x^3-12x^2-24x=12x(x+1)(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	35	↗	40	↘	8	↗

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 8을 갖는다.

따라서 모든 실수 x에 대하여 부등식 $3x^4-4x^3-12x^2+40>a$가 성립하려면 $a<8$이어야 하므로 모든 자연수 a의 값은 1, 2, 3, $\cdots$, 7이고, 그 개수는 7이다.

답 ④

5 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=t^3-3t^2-5t$이므로 속도 v는

$v=\dfrac{dx}{dt}=3t^2-6t-5$

점 P의 속도가 4인 시각은

$3t^2-6t-5=4$

$3t^2-6t-9=0$, $3(t-3)(t+1)=0$

$t\geq0$이므로 $t=3$

점 P의 시각 t에서의 가속도 a는

$a=\dfrac{dv}{dt}=6t-6$

이므로 $t=3$일 때 점 P의 가속도는

$6\times3-6=12$

답 ⑤

6 두 점 P, Q가 만나는 시각은

$f(t)=g(t)$에서

$t^3-3t^2+t=2t^2-3t$

$t^3-5t^2+4t=0$, $t(t-1)(t-4)=0$

$t=0$ 또는 $t=1$ 또는 $t=4$

$t>0$에서 두 점 P, Q가 처음으로 만나는 시각은 $t=1$일 때이다.

점 P의 시각 t에서의 속도는 $f'(t)=3t^2-6t+1$이므로

$t=1$일 때 점 P의 속도는

$3-6+1=-2$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 66쪽

1 ③　2 ④　3 ⑤　4 ③

1 $f(x)=x^4-4x+8$에서

$f'(x)=4x^3-4=4(x-1)(x^2+x+1)$

$x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$이므로

$f'(x)=0$에서 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	5	↗

따라서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 5를 갖는다.

답 ③

2 x에 대한 방정식 $3f(x)=a$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=3f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수와 같다. 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않으면 함수 $y=3f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수는 항상 1이므로 함수 $f(x)$는 극값을 가져야 한다.
함수 $f(x)$가 $x=\alpha$, $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$에서 극값을 갖는다고 하면 방정식 $3f(x)=a$가 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 모든 실수 a의 값의 합이 8이므로
$3f(\alpha)+3f(\beta)=8$
따라서 $f(\alpha)+f(\beta)=\frac{8}{3}$이므로 함수 $f(x)$의 모든 극값의 합은 $\frac{8}{3}$이다.

답 ④

3 $f(x)=x^3-5x^2+3x+k$라 하면
$f'(x)=3x^2-10x+3=(3x-1)(x-3)$
$f'(x)=0$에서 $x=\frac{1}{3}$ 또는 $x=3$
$x>0$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	(0)	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	(k)	$\nearrow$	$k+\frac{13}{27}$	$\searrow$	$k-9$	$\nearrow$

$x>0$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $x^3-5x^2+3x+k>0$이 성립하려면
$f(3)=k-9>0$, 즉 $k>9$
이어야 한다.
따라서 정수 k의 최솟값은 10이다.

답 ⑤

4 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=-2t^3+6t^2+9$이므로 속도를 v, 가속도를 a라 하면
$v=\frac{dx}{dt}=-6t^2+12t$
$a=\frac{dv}{dt}=-12t+12$
점 P의 가속도가 0인 시각은 $-12t+12=0$에서 $t=1$
$t=1$일 때 점 P의 속도는
$-6+12=6$

답 ③

Level 2 기본 연습

본문 67~68쪽

1 ⑤	2 ③	3 ④	4 ④	5 ⑤
6 ③	7 ③	8 70		

1 삼차함수 $f(x)=ax^3-3ax^2$ $(a\neq0)$에서
$f'(x)=3ax^2-6ax=3ax(x-2)$
$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$
(i) $a>0$일 때,
닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-4a$	$\nearrow$	$16a$

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최솟값 $-4a$를 갖고, $x=4$에서 최댓값 $16a$를 갖는다.
$16a=6$에서 $a=\frac{3}{8}$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은
$-4\times\frac{3}{8}=-\frac{3}{2}$
(ii) $a<0$일 때,
닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$-4a$	$\searrow$	$16a$

닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $f(x)$는 $x=2$에서 최댓값 $-4a$를 갖고, $x=4$에서 최솟값 $16a$를 갖는다.
$-4a=6$에서 $a=-\frac{3}{2}$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은
$16\times\left(-\frac{3}{2}\right)=-24$
(i), (ii)에서 함수 $f(x)$의 최솟값이 정수이므로 $a=-\frac{3}{2}$
따라서 $f(x)=-\frac{3}{2}x^2(x-3)$이므로
$f(1)=-\frac{3}{2}\times1\times(-2)=3$

답 ⑤

2 점 P의 좌표를 $\left(t, t^4-\frac{3}{2}t^2-t+2\right)$ $(t>0)$이라 하면
$y=t^4-\frac{3}{2}t^2-t+2$에서

$y'=4t^3-3t-1=(t-1)(2t+1)^2$

이므로 함수 $y=t^4-\frac{3}{2}t^2-t+2$는 $t=1$에서 최솟값 $\frac{1}{2}$을 갖는다. 즉, $t>0$에서 $t^4-\frac{3}{2}t^2-t+2>0$이다.

사각형 OQPR의 둘레의 길이를 $f(t)$라 하면

$f(t)=2t+2\left(t^4-\frac{3}{2}t^2-t+2\right)=2t^4-3t^2+4$

에서 $f'(t)=8t^3-6t=2t(2t+\sqrt{3})(2t-\sqrt{3})$

$t>0$이므로 $f'(t)=0$에서 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$t>0$에서 함수 $f(t)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

t	(0)	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	극소	$\nearrow$

$t>0$에서 함수 $f(t)$는 $t=\frac{\sqrt{3}}{2}$에서 최소이고 최솟값은

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\times\frac{9}{16}-3\times\frac{3}{4}+4=\frac{23}{8}$

답 ③

3 $x^3+\frac{3}{2}x^2-6x+a=0$에서 $-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x=a$

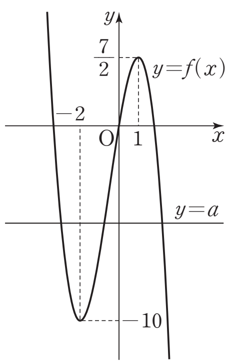
$f(x)=-x^3-\frac{3}{2}x^2+6x$라 하면

$f'(x)=-3x^2-3x+6=-3(x+2)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	$\frac{7}{2}$	$\searrow$



주어진 방정식이 서로 다른 두 개의 음의 실근과 한 개의 양의 실근을 가지려면 그림과 같이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=a$의 세 교점의 x좌표가 음수 2개와 양수 1개이어야 한다.

즉, $-10<a<0$

따라서 모든 정수 a의 값은 -9, -8, -7, $\cdots$, -1이고, 그 개수는 9이다.

답 ④

4 $f(x)=x^3-3x$라 하면 $|x^3-3x|=k^3-3k$에서

$|f(x)|=f(k)$

방정식 $|f(x)|=f(k)$의 서로 다른 실근의 개수는 함수 $y=|f(x)|$의 그래프와 직선 $y=f(k)$의 교점의 개수와 같다.

$f(x)=x^3-3x$에서

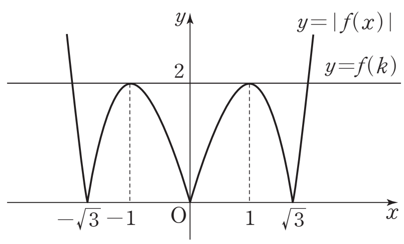
$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같으므로 방정식 $|x^3-3x|=k^3-3k$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되려면 직선 $y=f(k)$는 그림과 같아야 한다.



즉, $f(k)=2$이다.

$k^3-3k=2$에서 $(k-2)(k+1)^2=0$

따라서 $k=2$ 또는 $k=-1$이므로 모든 실수 k의 값의 합은

$2+(-1)=1$

답 ④

5 $x^3+3x^2+2x=2x+t$에서

$x^3+3x^2=t$

직선 $y=2x+t$와 곡선 $y=x^3+3x^2+2x$의 교점의 개수는 직선 $y=t$와 곡선 $y=x^3+3x^2$의 교점의 개수와 같다.

$g(x)=x^3+3x^2$이라 하면

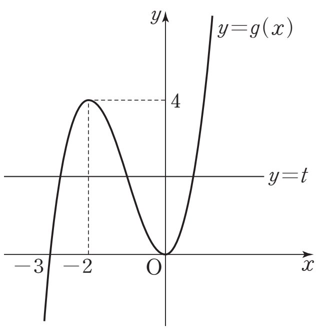
$g'(x)=3x^2+6x=3x(x+2)$

$g'(x)=0$에서 $x=-2$ 또는 $x=0$

함수 $g(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$

직선 $y=t$와 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같으므로 함수 $f(t)$는 $t=0$, $t=4$에서만 불연속이다.



즉, $a\neq 0$, $a\neq 4$인 모든 실수 a에 대하여

$\lim_{t\to a-} f(t)=\lim_{t\to a+} f(t)$이다.

$a=0$일 때, $\lim_{t\to 0-} f(t)=1$, $\lim_{t\to 0+} f(t)=3$이므로

$\lim_{t\to 0-} f(t)-\lim_{t\to 0+} f(t)=-2$

$a=4$일 때, $\lim_{t\to 4-} f(t)=3$, $\lim_{t\to 4+} f(t)=1$이므로

$\lim_{t\to 4-} f(t)-\lim_{t\to 4+} f(t)=2$

따라서 $a=4$

답 ⑤

6 $f(x)=x^3-3x^2+a$라 하면

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

$0\le x\le 4$에서 함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	0	$\cdots$	2	$\cdots$	4
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	a	$\searrow$	$a-4$	$\nearrow$	$a+16$

$0\le x\le 4$에서

$a-4\le f(x)\le a+16$

따라서 $-18<a-4$, $a+16<18$에서

$-14<a<2$

이므로 모든 정수 a의 값은 -13, -12, -11, $\cdots$, 1이고, 그 개수는 15이다.

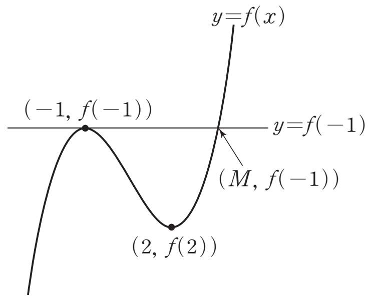
답 ③

7 $f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	극대	$\searrow$	극소	$\nearrow$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



실수 a의 최댓값을 M $(M>2)$라 하자.

$x\le M$인 모든 실수 x에 대하여 부등식 $f(x)\le f(-1)$이 성립하려면 방정식 $f(x)=f(-1)$은 서로 다른 두 실근 $x=-1$ 또는 $x=M$을 가져야 한다. 즉,

$f(x)-f(-1)=k(x+1)^2(x-M)$ ($k>0$, k는 상수)

로 놓을 수 있으므로

$f'(x)=2k(x+1)(x-M)+k(x+1)^2$

$f'(2)=6k(2-M)+9k=0$에서

$3k(7-2M)=0$

$k>0$이므로 $7-2M=0$

따라서 $M=\frac{7}{2}$

답 ③

참고

$(x+1)^2=x^2+2x+1$이므로

$\{(x+1)^2\}'=2x+2=2(x+1)$

8 점 P의 시각 t에서의 위치 x가 $x=-t^4+8t^3+6t$이므로 속도를 v, 가속도를 a라 하면

$v=\frac{dx}{dt}=-4t^3+24t^2+6$

$a=\frac{dv}{dt}=-12t^2+48t=-12(t-2)^2+48$

$t=2$일 때 점 P의 가속도가 최대이므로 점 P의 가속도가 최대인 시각에서의 점 P의 속도는

$-32+96+6=70$

답 70

Level 3 실력 완성 본문 69쪽

1 ⑤ 2 ⑤ 3 75

1 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$에서

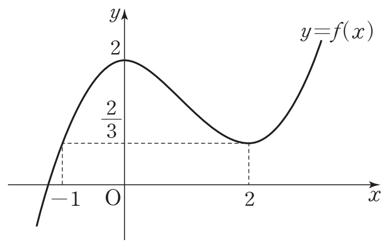
$f'(x)=x^2-2x=x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{2}{3}$	$\nearrow$

즉, 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



(i) $t<-1$일 때,

닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(t+1)$이므로

$g(t)=f(t+1)$

$=\frac{1}{3}(t+1)^3-(t+1)^2+2$

$=\frac{1}{3}t^3-t+\frac{4}{3}$

따라서 $g'(t)=t^2-1$이므로

$g'(-2)=4-1=3$

(ii) $0<t<1$일 때,

닫힌구간 $[t,\ t+1]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값은 $f(t)$이므로

$g(t)=f(t)$

$=\frac{1}{3}t^3-t^2+2$

따라서 $g'(t)=t^2-2t$이므로

$g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$

(i), (ii)에서

$g'(-2)+g'\left(\frac{1}{2}\right)=3+\left(-\frac{3}{4}\right)=\frac{9}{4}$

답 ⑤

2 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $x=c$에서도 연속이다.

$\lim_{x\to c-} g(x)=\lim_{x\to c-} f(x)=f(c)$

$\lim_{x\to c+} g(x)=\lim_{x\to c+} \{8-f(x)\}=8-f(c)$

$g(c)=8-f(c)$

에서

$f(c)=8-f(c)$

$f(c)=4$ $\cdots\cdots$ ㉠

함수 $y=g(x)$의 그래프는 $x<c$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프이고, $x\ge c$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 8만큼 평행이동한 것이다.

$f(x)=x^4+ax^3+b$에서

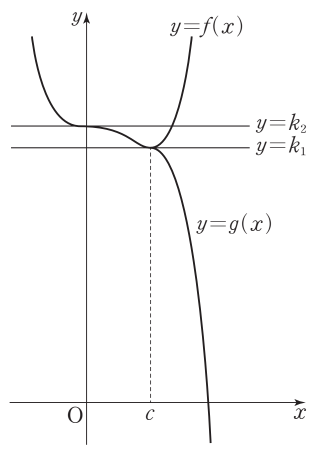
$f'(x)=4x^3+3ax^2=x^2(4x+3a)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=-\frac{3a}{4}$

집합 S의 원소의 개수는 2이므로

$-\frac{3a}{4}=c$ $\cdots\cdots$ ㉡

이때 $c>0$에서 $a<0$이므로 조건을 만족시키려면 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같아야 한다.



집합 S의 모든 원소의 합은 $\frac{25}{3}$이므로

$g(0)+g(c)=\frac{25}{3}$

㉠에서 $g(0)+g(c)=f(0)+f(c)=b+4=\frac{25}{3}$이므로

$b=\frac{13}{3}$

㉡에서 $f(x)=x^4-\frac{4c}{3}x^3+\frac{13}{3}$이므로

$f(c)=-\frac{c^4}{3}+\frac{13}{3}=4$

$c^4=1,\ c=1$

따라서 $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3+\frac{13}{3}$이므로

$f(2)=16-\frac{32}{3}+\frac{13}{3}=\frac{29}{3}$

답 ⑤

3 $h(x)=(x+a)f(x)$라 하면

$g(x)=|h(x)|$

$h(-a)=0$이고 함수 $|h(x)|$가 $x=1$에서만 미분가능하지 않으므로

$h'(-a)=0$, $h(1)=0$

즉, $h(x)=(x+a)^2(x-1)(x+b)$ (b는 상수)로 놓을 수 있다.

$b=-1$이면

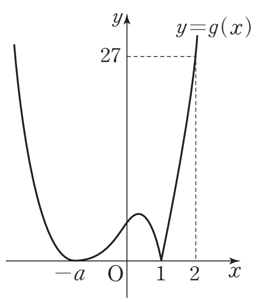
$h(x)=(x+a)^2(x-1)^2$이므로 함수 $|h(x)|$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하고,

$b\neq a$, $b\neq -1$이면

$h(x)=(x+a)^2(x-1)(x+b)$이므로 함수 $|h(x)|$는 $x=1$, $x=-b$에서 미분가능하지 않으므로 $b=a$이어야 한다.

즉, $h(x)=(x+a)^3(x-1)$

함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같다.



조건 (나)에서 $g(2)=27$이므로

$g(2)=|(2+a)^3\times(2-1)|=(2+a)^3=27$

즉, $a=1$

따라서 $f(x)=(x+1)^2(x-1)$이므로

$f(4)=25\times 3=75$

답 75

06 부정적분과 정적분

유제 본문 73~81쪽

1 ④	2 ③	3 ②	4 ④	5 ①
6 ④	7 ②	8 ③	9 ③	10 ①

1 함수 $f(x)$의 부정적분이 $4x^3+3x^2-2x+C$이므로

$f(x)=(4x^3+3x^2-2x+C)'=12x^2+6x-2$

따라서

$$G(x)=\int xf(x)dx=\int(12x^3+6x^2-2x)dx$$
$$=3x^4+2x^3-x^2+C_1 \ (C_1\text{은 적분상수})$$

이므로

$$G(1)-G(-1)=(3+2-1+C_1)-(3-2-1+C_1)$$
$$=4$$

답 ④

2 조건 (가)에서 $f'(x)=3x^2-12x+9$이므로

$$f(x)=\int(3x^2-12x+9)dx$$
$$=x^3-6x^2+9x+C \ (C\text{는 적분상수})$$

$f'(x)=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=3$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$4+C$	↘	C	↗

조건 (나)에서 함수 $f(x)$의 극댓값이 7이므로

$4+C=7$에서 $C=3$

따라서 $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$이므로

$f(2)=8-24+18+3=5$

답 ③

3 $F(x)=(x+1)f(x)-x^4-4x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+(x+1)f'(x)-4x^3-4$

$$(x+1)f'(x)=4(x^3+1)$$
$$=4(x+1)(x^2-x+1)$$

$f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x)=4(x^2-x+1)$

$f(x)=\int(4x^2-4x+4)dx$

$=\frac{4}{3}x^3-2x^2+4x+C$ (C는 적분상수)

$F(0)=f(0)=3$이므로 $f(0)=C=3$

따라서 $f(x)=\frac{4}{3}x^3-2x^2+4x+3$이므로

$f(3)=36-18+12+3=33$

답 ②

4 $F(x)=xf(x)+ax^3-10x^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+3ax^2-20x$

$xf'(x)=-3ax^2+20x$

$f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x)=-3ax+20$

$f(x)=\int(-3ax+20)dx$

$=-\frac{3}{2}ax^2+20x+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=2$이므로 $f(0)=C=2$

$f(x)=-\frac{3}{2}ax^2+20x+2$이고 $f(1)=10$이므로

$f(1)=-\frac{3}{2}a+20+2=10$, $\frac{3}{2}a=12$

따라서 $a=8$

답 ④

5 $\int_2^x f(t)dt=ax+4+\int_1^x(3t^2-2t)dt$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=2$를 대입하면

$0=2a+4+\int_1^2(3t^2-2t)dt$

$=2a+4+\Big[t^3-t^2\Big]_1^2$

$=2a+4+\{(8-4)-(1-1)\}$

$=2a+8$

이므로 $a=-4$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=a+3x^2-2x=3x^2-2x-4$

따라서

$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3(3x^2-2x-4)dx$

$=\Big[x^3-x^2-4x\Big]_0^3=27-9-12=6$

답 ①

6 $\int_1^x f(t)dt=xf(x)+ax^2-10$ …… ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=f(1)+a-10$

$f(1)=8$이므로 $0=8+a-10$, $a=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+2ax$

$xf'(x)=-2ax=-4x$

$f(x)$가 다항함수이므로 $f'(x)=-4$

$f(x)=\int(-4)dx=-4x+C$ (C는 적분상수)

이고,

$f(1)=-4+C=8$에서 $C=12$

따라서 $f(x)=-4x+12$이므로

$f(a)=f(2)=-8+12=4$

답 ④

7 $x+f(x)=\begin{cases}3x+3 & (x<0)\\ 3 & (x\ge 0)\end{cases}$이므로

$f(x)\{x+f(x)\}=\begin{cases}(2x+3)(3x+3) & (x<0)\\ 3(-x+3) & (x\ge 0)\end{cases}$

$=\begin{cases}6x^2+15x+9 & (x<0)\\ -3x+9 & (x\ge 0)\end{cases}$

따라서

$\int_{-1}^3 f(x)\{x+f(x)\}dx$

$=\int_{-1}^0(6x^2+15x+9)dx+\int_0^3(-3x+9)dx$

$=\Big[2x^3+\frac{15}{2}x^2+9x\Big]_{-1}^0+\Big[-\frac{3}{2}x^2+9x\Big]_0^3$

$=-\left(-2+\frac{15}{2}-9\right)+\left(-\frac{27}{2}+27\right)$

$=17$

답 ②

8 $f(x)=x^3+ax^2+4$에서 $f'(x)=3x^2+2ax$

함수 $f(x)$가 $x=2$에서 극솟값을 가지므로

$f'(2)=0$에서 $12+4a=0$, $a=-3$

$f(x)=x^3-3x^2+4$이므로

$\int_0^2 f(x)dx+\int_0^2(3x^2+b)dx$

$=\int_0^2(x^3-3x^2+4)dx+\int_0^2(3x^2+b)dx$

$=\int_0^2 \{(x^3-3x^2+4)+(3x^2+b)\}dx$

$=\int_0^2 (x^3+4+b)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4+(4+b)x\right]_0^2$

$=4+8+2b=2b+12$

이고, $2b+12=0$이므로 $b=-6$

따라서

$ab=(-3)\times(-6)=18$

답 ③

9 $\int_{-2}^2 (ax+b)dx=2\int_0^2 b\,dx=2\left[bx\right]_0^2=4b$

이므로 $4b=8$에서 $b=2$

$\int_{-2}^2 (ax^2+bx+1)dx=2\int_0^2 (ax^2+1)dx$

$=2\left[\frac{a}{3}x^3+x\right]_0^2=2\left(\frac{8}{3}a+2\right)$

이므로 $2\left(\frac{8}{3}a+2\right)=20$에서 $a=3$

따라서 $a+b=3+2=5$

답 ③

10 사차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$를 만족시키므로

$f(x)=x^4+ax^2+b$ (a, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$\int_{-1}^1 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$이므로

$\int_{-1}^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\frac{6}{5}$에서

$2\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 f(x)dx+\frac{6}{5}$

$\int_0^1 f(x)dx=\frac{6}{5}$

따라서

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x^4+ax^2+b)dx$

$=\left[\frac{1}{5}x^5+\frac{a}{3}x^3+bx\right]_0^1=\frac{1}{5}+\frac{a}{3}+b$

이므로 $\frac{1}{5}+\frac{a}{3}+b=\frac{6}{5}$에서

$a+3b=3$ …… ㉠

$f(1)=1+a+b=0$에서

$a+b=-1$ …… ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-3$, $b=2$

$f(x)=x^4-3x^2+2$이므로

$f(2)=16-12+2=6$

답 ①

Level 1 기초 연습

본문 82~83쪽

1 ①	2 ③	3 ④	4 ①	5 ⑤
6 ⑤	7 ②	8 ⑤	9 ①	10 ⑤

1 $f'(x)=2x-4$이므로

$f(x)=\int(2x-4)dx$

$=x^2-4x+C$ (C는 적분상수)

$f(2)=4-8+C=0$에서 $C=4$

따라서 $f(x)=x^2-4x+4$이므로

$f(1)=1-4+4=1$

답 ①

2 함수 $f(x)$의 부정적분이 x^3+3x+C이므로

$f(x)=(x^3+3x+C)'=3x^2+3$

$f'(x)=6x$

따라서 $f'(2)=12$

답 ③

3 $F(x)=xf(x)+x^4$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+4x^3$

$xf'(x)=-4x^3$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=-4x^2$

따라서 $f'(1)=-4$

답 ④

4 $F(x)=xf(x)+ax^2$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=f(x)+xf'(x)+2ax$

$xf'(x)+2ax=0$ …… ㉠

$f'(1)=4$이므로 ㉠에 $x=1$을 대입하면

$f'(1)+2a=0$, $4+2a=0$

따라서 $a=-2$

답 ①

5 $\int_0^2 (x^2+ax)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2\right]_0^2=\frac{8}{3}+2a$

이므로 $\frac{8}{3}+2a=-\frac{4}{3}$에서 $a=-2$

$\int_0^1 (ax+b)dx=\int_0^1 (-2x+b)dx$

$=\left[-x^2+bx\right]_0^1=-1+b$

이므로 $-1+b=6$에서 $b=7$

따라서 $a+b=-2+7=5$

답 ⑤

6 $\int_a^x f(t)dt=x^2-2x$ $\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=a$를 대입하면

$0=a^2-2a$, $a(a-2)=0$

$a=0$ 또는 $a=2$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2x-2$

$a=0$이면 $f(a)=f(0)=-2<0$

$a=2$이면 $f(a)=f(2)=2>0$

따라서 $a=2$

답 ⑤

7 $\int_0^2 (x+1)|x-1|dx$

$=\int_0^1 (x+1)(1-x)dx+\int_1^2 (x+1)(x-1)dx$

$=\int_0^1 (1-x^2)dx+\int_1^2 (x^2-1)dx$

$=\left[x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^1+\left[\frac{1}{3}x^3-x\right]_1^2$

$=\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left\{\left(\frac{8}{3}-2\right)-\left(\frac{1}{3}-1\right)\right\}$

$=2$

답 ②

8 $\int_0^2 (x^2+ax)dx=\int_0^2 (x^2+1)dx+4$에서

$\int_0^2 (x^2+ax)dx-\int_0^2 (x^2+1)dx$

$=\int_0^2 \{(x^2+ax)-(x^2+1)\}dx$

$=\int_0^2 (ax-1)dx$

$=\left[\frac{a}{2}x^2-x\right]_0^2$

$=2a-2=4$

이므로 $a=3$

$\int_0^1 bx^2dx=9-\int_1^3 bx^2dx$에서

$\int_0^1 bx^2dx+\int_1^3 bx^2dx=\int_0^3 bx^2dx$

$=\left[\frac{b}{3}x^3\right]_0^3$

$=9b=9$

이므로 $b=1$

따라서 $a+b=3+1=4$

답 ⑤

9 $\int_{-a}^a (x^3+3x^2+3)dx=2\int_0^a (3x^2+3)dx$

$=2\left[x^3+3x\right]_0^a=2(a^3+3a)$

$2(a^3+3a)=8$에서

$a^3+3a-4=0$

$(a-1)(a^2+a+4)=0$

a는 실수이므로 $a=1$

답 ①

10 $\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt$

$=\lim_{x\to1}\left\{\frac{1}{x+1}\times\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt\right\}$

이고,

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)dt=f(1)=1+6-1=6$

이므로

$\lim_{x\to1}\frac{1}{x^2-1}\int_1^x f(t)dt=\frac{1}{2}\times6=3$

답 ⑤

Level 2 기본 연습 본문 84~85쪽

1 ②	2 ②	3 ③	4 ③	5 ④
6 ④	7 ③	8 ④		

1 $G(x)=x^2f(x)-2x^6+3x^5$ $\cdots\cdots$ ㉠

이때 $2xf(x)$의 한 부정적분이 $G(x)$이므로

$G'(x)=2xf(x)$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$2xf(x)=2xf(x)+x^2f'(x)-12x^5+15x^4$

$x^2f'(x)=12x^5-15x^4$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=12x^3-15x^2$

$f(x)=\int(12x^3-15x^2)dx$

$=3x^4-5x^3+C$ (C는 적분상수)

㉠에서 $G(1)=f(1)+1$이고, $G(1)=4$이므로

$4=f(1)+1$, $f(1)=3$

$f(1)=3-5+C=3$에서 $C=5$

따라서 $f(x)=3x^4-5x^3+5$이므로

$f(2)=48-40+5=13$

답 ②

2 두 함수 $F(x)$, $G(x)$가 모두 함수 $f(x)$의 부정적분이므로

$G(x)=F(x)+C$ (C는 상수)

조건 (가)에서 $G(0)=F(0)+2$이므로 $C=2$

조건 (나)에서 $G(3)=8$이므로

$G(3)=F(3)+2=8$, $F(3)=6$

따라서

$\int_1^3 f(x)dx=\Big[F(x)\Big]_1^3=F(3)-F(1)$

$=6-2=4$

답 ②

3 $f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)로 놓으면

$f(-x)=x^2-ax+b$이고,

$F(x)=\int(x^2+ax+b)dx$

$=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx+C_1$ (C_1은 적분상수)

$G(x)=\int(x^2-ax+b)dx$

$=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+bx+C_2$ (C_2는 적분상수)

조건 (가)에서

$F(0)=C_1=0$, $G(0)=C_2=0$

따라서

$F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+bx$

$G(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{a}{2}x^2+bx$

조건 (나)에서

$F(1)-G(1)=\left(\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{a}{2}+b\right)$

$=a=3$

조건 (다)에서

$F(2)+G(2)=\left(\frac{8}{3}+2a+2b\right)+\left(\frac{8}{3}-2a+2b\right)$

$=\frac{16}{3}+4b=\frac{4}{3}$

$4b=-4$, $b=-1$

따라서 $f(x)=x^2+3x-1$이므로

$f(1)=1+3-1=3$

답 ③

4 $\int_0^2 f(x)dx=a$ (a는 상수)라 하자.

$f(x)=3x^2+a(2x-1)=3x^2+2ax-a$이므로

$a=\int_0^2 f(x)dx$

$=\int_0^2(3x^2+2ax-a)dx$

$=\Big[x^3+ax^2-ax\Big]_0^2=8+4a-2a$

즉, $a=8+4a-2a$에서 $a=-8$

따라서 $f(x)=3x^2-16x+8$이므로

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(3x^2-16x+8)dx$

$=\Big[x^3-8x^2+8x\Big]_0^1=1-8+8=1$

답 ③

5 $\int_1^x(3t^4+at^2+bt)dt=\int_1^x\{t+f(t)\}dt+3x^3+a$

$\cdots\cdots$ ㉠

㉠의 양변에 $x=1$을 대입하면

$0=0+3+a$, $a=-3$

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$3x^4+ax^2+bx=x+f(x)+9x^2$

$f(x)=3x^4-12x^2+(b-1)x$

$f(2)=48-48+2b-2=20$에서

$2b=22$, $b=11$

따라서 $a+b=-3+11=8$

답 ④

6 $\int_{-2}^{3} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{3} f(x)dx$

$=\int_{-2}^{0} (ax^2-2ax+a)dx+\int_{0}^{2} a\,dx$

$\quad +\int_{2}^{3} (ax^2-2ax+a)dx$

$=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2+ax\right]_{-2}^{0}+\left[ax\right]_{0}^{2}+\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2+ax\right]_{2}^{3}$

$=-\left(-\frac{8}{3}a-4a-2a\right)+2a$

$\quad +\left\{(9a-9a+3a)-\left(\frac{8}{3}a-4a+2a\right)\right\}$

$=13a$

이므로 $13a=26$에서 $a=2$

$f(-x)=\begin{cases} a(-x-1)^2 & (-x<0 \text{ 또는 } -x\geq 2) \\ a & (0\leq -x<2) \end{cases}$

$=\begin{cases} 2(x+1)^2 & (x\leq -2 \text{ 또는 } x>0) \\ 2 & (-2<x\leq 0) \end{cases}$

따라서

$\int_{0}^{a} f(-x)dx=\int_{0}^{2} f(-x)dx$

$=\int_{0}^{2} (2x^2+4x+2)dx$

$=\left[\frac{2}{3}x^3+2x^2+2x\right]_{0}^{2}$

$=\frac{16}{3}+8+4=\frac{52}{3}$

답 ④

7 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+1$ ($a\neq 0$, a, b, c는 상수)로 놓으면

$g(x)=\int_{-x}^{x} (at^3+bt^2+ct+1)dt$

$=2\int_{0}^{x} (bt^2+1)dt$

$=2\left[\frac{b}{3}t^3+t\right]_{0}^{x}$

$=\frac{2b}{3}x^3+2x$

ㄱ. $g(-x)=-\frac{2b}{3}x^3-2x=-g(x)$ (참)

ㄴ. $f'(x)=3ax^2+2bx+c$이고

모든 실수 x에 대하여 $f'(-x)=f'(x)$이면 $b=0$이므로

$g(x)=2x$

따라서 $g(1)=2$ (참)

ㄷ. $g(x)=\frac{2b}{3}x^3+2x$에서 $g(1)=0$이면

$\frac{2b}{3}+2=0$, $b=-3$

따라서 $g(x)=-2x^3+2x$이므로

$\int_{0}^{1} g(x)dx=\int_{0}^{1} (-2x^3+2x)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}x^4+x^2\right]_{0}^{1}$

$=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

8 조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(-x)+g(-x)=-\{f(x)+g(x)\}$

이므로

$f(x)+g(x)=2x^3+(a+2)x^2+(b-4)x$에서

$a+2=0$, $a=-2$

$f'(x)=3x^2-4x-4$, $g'(x)=3x^2+4x+b$이므로

조건 (나)에서

$\int_{-1}^{1} \{xf'(x)+g'(x)\}dx$

$=\int_{-1}^{1} \{(3x^3-4x^2-4x)+(3x^2+4x+b)\}dx$

$=\int_{-1}^{1} (3x^3-x^2+b)dx$

$=2\int_{0}^{1} (-x^2+b)dx$

$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+bx\right]_{0}^{1}$

$=2\left(-\frac{1}{3}+b\right)$

$2\left(-\frac{1}{3}+b\right)=\frac{28}{3}$에서 $b=5$

따라서 $f(x)=x^3-2x^2-4x$, $g(x)=x^3+2x^2+5x$이므로

$\int_{-1}^{1} \{f(x)+xg(x)\}dx$

$=\int_{-1}^{1} \{(x^3-2x^2-4x)+(x^4+2x^3+5x^2)\}dx$

$=\int_{-1}^{1} (x^4+3x^3+3x^2-4x)dx$

$=2\int_{0}^{1} (x^4+3x^2)dx$

$=2\left[\frac{1}{5}x^5+x^3\right]_{0}^{1}$

$=2\times\left(\frac{1}{5}+1\right)=\frac{12}{5}$

답 ④

Level 3 실력 완성

본문 86쪽

1 ① 2 ③ 3 ①

1 $\{xf(x)\}'=f(x)+xf'(x)$이므로

조건 (나)에서

$\{xf(x)\}'=3x^2-6x+4+g'(x)$

$xf(x)=x^3-3x^2+4x+g(x)+C$ (C는 적분상수) …… ㉠

㉠의 양변에 $x=0$을 대입하면

$0=g(0)+C$

조건 (가)에서 $g(0)=0$이므로 $C=0$

또한 두 조건 (가), (다)에 의하여 삼차항의 계수가 1인 삼차함수 $g(x)$는

$g(x)=x(x-p)^2$

으로 놓을 수 있으므로 이를 ㉠에 대입하면

$xf(x)=x^3-3x^2+4x+x(x-p)^2$

$f(x)$는 다항함수이므로

$f(x)=x^2-3x+4+(x-p)^2$

조건 (가)에서 $f(1)=3$이므로

$f(1)=1-3+4+(1-p)^2=3$에서

$p^2-2p=0$, $p(p-2)=0$

$p\neq0$이므로 $p=2$

따라서 $f(x)=x^2-3x+4+(x-2)^2$이므로

$f(3)=9-9+4+1=5$

답 ①

2 조건 (가)에서 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)+f'(x)=f(x)+xf'(x)+3x^3+3ax^2+6x$

$(x-1)f'(x)=-3x^3-3ax^2-6x$

양변에 $x=1$을 대입하면

$0=-3-3a-6$에서 $a=-3$

$(x-1)f'(x)=-3x(x^2-3x+2)$

$=-3x(x-1)(x-2)$

$f(x)$는 다항함수이므로 $f'(x)=-3x(x-2)$

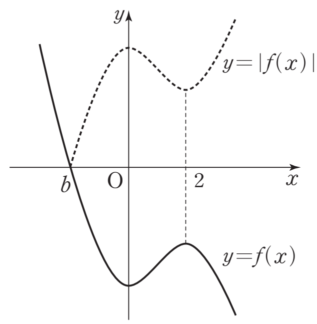
즉, 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 극소이고, $x=2$에서 극대이다.

$f(x)=\int(-3x^2+6x)dx$

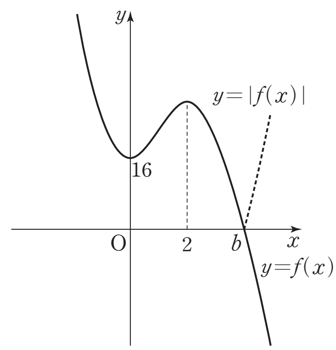
$=-x^3+3x^2+C$ (C는 적분상수) …… ㉠

조건 (나)에서 함수 $|f(x)|$가 서로 다른 두 개의 극솟값 $f(b)$, 16을 가지므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 다음 두 가지 경우가 있다.

(ⅰ) 함수 $f(x)$의 극댓값이 -16인 경우



(ⅱ) 함수 $f(x)$의 극솟값이 16인 경우



이때 $b>0$이므로 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형은 (ⅱ)와 같다.

즉, $f(0)=16$, $f(b)=0$이다.

㉠에서 $f(0)=C=16$이므로

$f(x)=-x^3+3x^2+16$

$f(b)=0$에서

$-b^3+3b^2+16=0$, $b^3-3b^2-16=0$

$(b-4)(b^2+b+4)=0$

$b>0$이므로 $b=4$

따라서 $a+b=-3+4=1$이므로

$f(a+b)=f(1)=-1+3+16=18$

답 ③

3 함수 $F(x)$의 사차항의 계수가 1이고,

$F(a)=F(b)=0$, $F'(a)=F'(b)=0$이므로

$F(x)=(x-a)^2(x-b)^2$이다.

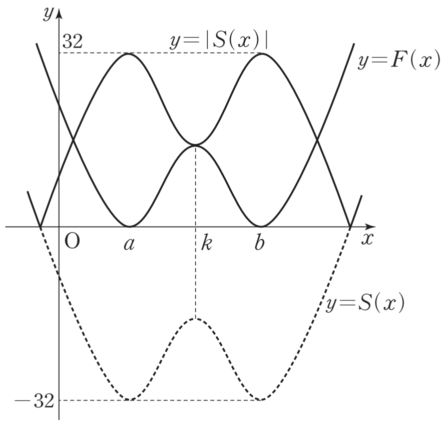
$S(x)=\int_p^x f(t)dt=\Big[F(t)\Big]_p^x$

$=F(x)-F(p)$

$=F(x)-32$

이므로 함수 $y=S(x)$의 그래프는 함수 $y=F(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -32만큼 평행이동한 것이다.

조건 (가)에서 두 함수 $y=F(x)$, $y=|S(x)|$의 그래프의 한 교점 $(k,\ F(k))$에서의 접선의 기울기가 서로 같으므로 [그림 1]과 같이 함수 $F(x)$는 $x=k$에서 극대이다.



[그림 1]

$F(k)=|S(k)|$에서

$F(k)=-S(k)=-\{F(k)-32\}$

$2F(k)=32$, $F(k)=16$

즉, 함수 $F(x)$의 극댓값은 16이다.

$$F'(x)=2(x-a)(x-b)^2+2(x-a)^2(x-b)$$
$$=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$$

이므로 $F'(x)=0$에서

$x=a$ 또는 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 또는 $x=b$

함수 $F(x)$는 $x=\dfrac{a+b}{2}$에서 극대이므로

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=\left(\frac{b-a}{2}\right)^4=16$$

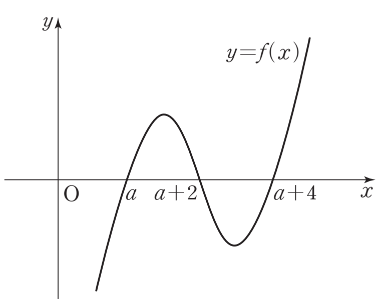
$\dfrac{b-a}{2}>0$이므로 $\dfrac{b-a}{2}=2$

즉, $b=a+4$

$f(x)=F'(x)=2(x-a)(x-b)(2x-a-b)$이고,

$\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{a+a+4}{2}=a+2$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는 [그림 2]와 같다.



[그림 2]

조건 (나)에서

$T(5)-T(3)=S(3)-S(5)$이고,

$$T(5)-T(3)=\int_p^5|f(t)|dt-\int_p^3|f(t)|dt$$
$$=\int_p^5|f(t)|dt+\int_3^p|f(t)|dt$$
$$=\int_3^5|f(t)|dt$$

$$S(3)-S(5)=\int_p^3 f(t)dt-\int_p^5 f(t)dt$$
$$=\int_p^3 f(t)dt+\int_5^p f(t)dt$$
$$=\int_5^3 f(t)dt$$
$$=-\int_3^5 f(t)dt$$

이므로

$$\int_3^5|f(t)|dt=-\int_3^5 f(t)dt=\int_3^5\{-f(t)\}dt$$

즉, $3\le x\le 5$에서 $f(x)\le 0$이다.

함수 $y=f(x)$의 그래프에서

$x\le a$ 또는 $a+2\le x\le a+4$에서 $f(x)\le 0$이고,

$0<a<3$이므로

$a+2=3$, $a+4=5$

즉, $a=1$이다.

따라서 $f(x)=4(x-1)(x-3)(x-5)$이므로

$f(2)=4\times1\times(-1)\times(-3)=12$

답 ①

07 정적분의 활용

유제				본문 89~97쪽
1 ④	2 ⑤	3 24	4 ①	5 ②
6 8	7 ④	8 10		

1 $g(x)=a(x-1)(x-3)+2$

$\quad =ax^2-4ax+3a+2$

이고, 닫힌구간 $[2, 3]$에서 $g(x)\ge 0$이므로 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_2^3 (ax^2-4ax+3a+2)dx$

$=\left[\frac{a}{3}x^3-2ax^2+(3a+2)x\right]_2^3$

$=(9a-18a+9a+6)-\left(\frac{8}{3}a-8a+6a+4\right)$

$=-\frac{2}{3}a+2$

따라서 $-\frac{2}{3}a+2=\frac{3}{2}$에서 $a=\frac{3}{4}$이므로

$f(x)=\frac{3}{4}(x-1)(x-3)$

$\quad =\frac{3}{4}x^2-3x+\frac{9}{4}$

닫힌구간 $[3, 4]$에서 $f(x)\ge 0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_3^4 \left(\frac{3}{4}x^2-3x+\frac{9}{4}\right)dx$

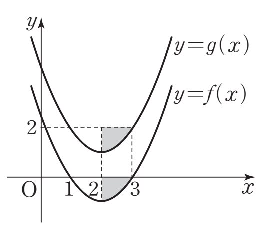
$=\left[\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x\right]_3^4$

$=(16-24+9)-\left(\frac{27}{4}-\frac{27}{2}+\frac{27}{4}\right)$

$=1$

답 ④

다른 풀이



곡선 $y=g(x)$는 곡선 $y=f(x)$를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이므로 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 두 직선 $x=2$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{3}{2}$이면 닫힌구간 $[2, 3]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$1\times 2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

따라서 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_1^3 |f(x)|dx=2\times\frac{1}{2}=1$

이고, 닫힌구간 $[1, 3]$에서 $f(x)\le 0$이므로

$\int_1^3 (-ax^2+4ax-3a)dx$

$=\left[-\frac{a}{3}x^3+2ax^2-3ax\right]_1^3$

$=(-9a+18a-9a)-\left(-\frac{a}{3}+2a-3a\right)$

$=\frac{4}{3}a=1$

에서 $a=\frac{3}{4}$

따라서 닫힌구간 $[3, 4]$에서 $f(x)\ge 0$이므로 이 구간에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_3^4 \left(\frac{3}{4}x^2-3x+\frac{9}{4}\right)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x\right]_3^4$

$=(16-24+9)-\left(\frac{27}{4}-\frac{27}{2}+\frac{27}{4}\right)=1$

2 함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+b$의 그래프가 점 $(3, 2)$를 지나므로

$f(3)=9+9a+b=2$에서

$9a+b=-7$ …… ㉠

$f'(x)=x^2+2ax$

곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3, 2)$에서의 접선의 기울기가 3이므로

$f'(3)=9+6a=3$에서

$a=-1$

㉠에서 $b=2$

곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$와 직선 $y=3x-7$의 교점의 x좌표를 구하면

$\frac{1}{3}x^3-x^2+2=3x-7$

$x^3-3x^2-9x+27=0$

$(x+3)(x-3)^2=0$

$x=-3$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[-3, 3]$에서 $f(x)\ge 3x-7$이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=3x-7$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-3}^{3}\left\{\left(\frac{1}{3}x^3-x^2+2\right)-(3x-7)\right\}dx$$

$$=\int_{-3}^{3}\left(\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+9\right)dx$$

$$=2\int_{0}^{3}(-x^2+9)dx$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}x^3+9x\right]_0^3$$

$$=2\times(-9+27)=36$$

답 ⑤

3 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=ax$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3-(a+3)x^2+4ax=ax$

$x\{x^2-(a+3)x+3a\}=0$

$x(x-3)(x-a)=0$

$x=0$ 또는 $x=3$ 또는 $x=a$

이때 $a>3$이므로

닫힌구간 $[0, 3]$에서 $f(x)\ge ax$

닫힌구간 $[3, a]$에서 $f(x)\le ax$

직선 $y=ax$와 곡선 $y=f(x)$로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로 $\int_0^a\{f(x)-ax\}dx=0$이다.

$$\int_0^a\{f(x)-ax\}dx$$

$$=\int_0^a\{x^3-(a+3)x^2+3ax\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{a+3}{3}x^3+\frac{3a}{2}x^2\right]_0^a$$

$$=\frac{1}{4}a^4-\frac{a^3(a+3)}{3}+\frac{3}{2}a^3$$

$$=-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^3$$

이므로 $-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{2}a^3=0$에서

$$-\frac{1}{12}a^3(a-6)=0$$

$a>3$이므로 $a=6$

따라서 $f(x)=x^3-9x^2+24x$, $f'(x)=3x^2-18x+24$이므로

$f'(a)=f'(6)=108-108+24=24$

답 24

4 함수 $f(x)$의 역함수가 $g(x)$이므로

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$$f(x)=-\frac{1}{4}(x^2-4x-4)$$

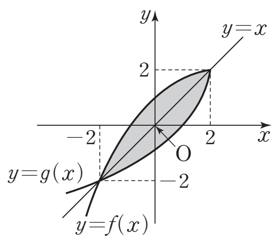
$$=-\frac{1}{4}(x-2)^2+2\ (x\le 2)$$

이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 x좌표는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 x좌표와 같다.

즉, $-\frac{1}{4}x^2+x+1=x$에서

$x^2=4$

$x=-2$ 또는 $x=2$



닫힌구간 $[-2, 2]$에서 $f(x)\ge x$이므로 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$2\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{4}x^2+x+1-x\right)dx$$

$$=4\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)dx$$

$$=4\left[-\frac{1}{12}x^3+x\right]_0^2$$

$$=4\times\left(-\frac{2}{3}+2\right)=\frac{16}{3}$$

답 ①

5 $v(t)=at^2+bt+5$에서

$v(1)=v(2)$이므로

$a+b+5=4a+2b+5$

$3a+b=0$ …… ㉠

시각 $t=1$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$$\int_1^2 v(t)dt=\int_1^2(at^2+bt+5)dt$$

$$=\left[\frac{a}{3}t^3+\frac{b}{2}t^2+5t\right]_1^2$$

$$=\left(\frac{8}{3}a+2b+10\right)-\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}+5\right)$$

$$=\frac{7}{3}a+\frac{3}{2}b+5$$

이므로 $\frac{7}{3}a+\frac{3}{2}b+5=\frac{43}{6}$에서

$14a+9b+30=43$

$14a+9b=13$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=-1$, $b=3$

따라서 $a+b=2$

답 ②

6 점 P가 운동 방향을 바꾸는 순간 $v(t)=0$이므로 이차방정식 $t^2+at+8=0$의 서로 다른 두 실근이

$t=b$ 또는 $t=b+2$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$b+(b+2)=-a$ ...... ㉠

$b(b+2)=8$ ...... ㉡

㉡에서 $b^2+2b-8=0$

$(b+4)(b-2)=0$

$b>0$이므로 $b=2$

㉠에서 $a=-6$

따라서 $v(t)=t^2-6t+8=(t-2)(t-4)$이고

$2\le t\le 4$에서 $v(t)\le 0$, $t\ge 4$에서 $v(t)\ge 0$이므로

시각 $t=2$에서 $t=6$까지 점 P가 움직인 거리는

$$\int_2^6 |v(t)|dt$$

$$=\int_2^4(-t^2+6t-8)dt+\int_4^6(t^2-6t+8)dt$$

$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+3t^2-8t\right]_2^4+\left[\frac{1}{3}t^3-3t^2+8t\right]_4^6$$

$$=\left\{\left(-\frac{64}{3}+48-32\right)-\left(-\frac{8}{3}+12-16\right)\right\}+\left\{(72-108+48)-\left(\frac{64}{3}-48+32\right)\right\}$$

$$=8$$

답 8

7 시각 $t=0$에서의 두 점 P, Q의 위치가 모두 원점이므로 시각 $t=a$에서 점 P의 위치는

$$\int_0^a f(t)dt=\int_0^a(2t-8)dt=\left[t^2-8t\right]_0^a=a^2-8a$$

이고, 시각 $t=a$에서 점 Q의 위치는

$$\int_0^a g(t)dt=\int_0^a(16-4t)dt=\left[16t-2t^2\right]_0^a=16a-2a^2$$

시각 $t=a$에서 두 점 P, Q가 만나므로

$a^2-8a=16a-2a^2$, $a(a-8)=0$

$a>0$이므로 $a=8$

$4\le t\le 8$에서 $f(t)\ge 0$, $g(t)\le 0$이므로

$$s_1=\int_4^8|f(t)|dt=\int_4^8 f(t)dt$$

$$=\int_4^8(2t-8)dt$$

$$=\left[t^2-8t\right]_4^8$$

$$=(64-64)-(16-32)=16$$

$$s_2=\int_4^8|g(t)|dt=\int_4^8\{-g(t)\}dt$$

$$=\int_4^8(4t-16)dt$$

$$=\left[2t^2-16t\right]_4^8$$

$$=(128-128)-(32-64)=32$$

따라서 $|s_1-s_2|=|16-32|=16$

답 ④

8 시각 $t=0$에서의 점 P의 위치가 원점이므로 시각 $t=1$에서의 점 P의 위치는

$$\int_0^1(3t^2-12t+a)dt=\left[t^3-6t^2+at\right]_0^1=1-6+a=a-5$$

이고 $a-5=1$에서 $a=6$

시각 $t=2$에서 $t=4$까지 두 점 P, Q의 위치의 변화량은 각각

$\int_2^4 f(t)dt$, $\int_2^4 g(t)dt$이므로 $\int_2^4 f(t)dt=\int_2^4 g(t)dt$에서

$\int_2^4\{f(t)-g(t)\}dt=0$이다.

$$\int_2^4\{f(t)-g(t)\}dt$$

$$=\int_2^4\{(3t^2-12t+6)-(-2t+b)\}dt$$

$$=\int_2^4(3t^2-10t+6-b)dt$$

$$=\left[t^3-5t^2+(6-b)t\right]_2^4$$

$$=(64-80+24-4b)-(8-20+12-2b)$$

$$=8-2b$$

이므로 $8-2b=0$에서 $b=4$

따라서 $a+b=6+4=10$

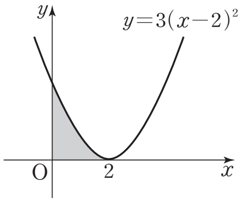
답 10

Level 1 기초 연습

본문 98~99쪽

1 ③	2 ④	3 ⑤	4 ②	5 ③
6 ②	7 ④	8 ②	9 ④	

1 곡선 $y=3(x-2)^2$은 그림과 같다.

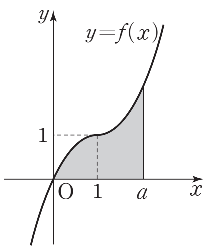


닫힌구간 $[0, 2]$에서 $3(x-2)^2\geq 0$이므로 곡선 $y=3(x-2)^2$과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2 3(x-2)^2dx=\int_0^2(3x^2-12x+12)dx$$
$$=\Big[x^3-6x^2+12x\Big]_0^2$$
$$=8-24+24=8$$

답 ③

2 함수 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



닫힌구간 $[0, a]$에서 $f(x)\geq 0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^1(-x^2+2x)dx+\int_1^a(x^2-2x+2)dx$$
$$=\Big[-\frac{1}{3}x^3+x^2\Big]_0^1+\Big[\frac{1}{3}x^3-x^2+2x\Big]_1^a$$
$$=\Big(-\frac{1}{3}+1\Big)+\Big\{\Big(\frac{1}{3}a^3-a^2+2a\Big)-\Big(\frac{1}{3}-1+2\Big)\Big\}$$
$$=\frac{1}{3}a^3-a^2+2a-\frac{2}{3}$$

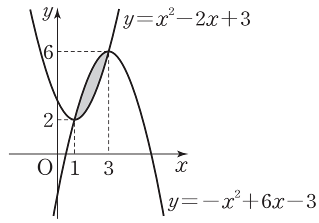
따라서 $\frac{1}{3}a^3-a^2+2a-\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$에서

$a^3-3a^2+6a-18=0$, $(a-3)(a^2+6)=0$

$a>1$이므로 $a=3$

답 ④

3 두 곡선 $y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$,
$y=-x^2+6x-3=-(x-3)^2+6$은 그림과 같다.



두 곡선 $y=x^2-2x+3$, $y=-x^2+6x-3$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^2-2x+3=-x^2+6x-3$에서

$2x^2-8x+6=0$, $x^2-4x+3=0$, $(x-1)(x-3)=0$

$x=1$ 또는 $x=3$

닫힌구간 $[1, 3]$에서 $-x^2+6x-3\geq x^2-2x+3$이므로 두 곡선 $y=x^2-2x+3$, $y=-x^2+6x-3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_1^3\{(-x^2+6x-3)-(x^2-2x+3)\}dx$$
$$=\int_1^3(-2x^2+8x-6)dx$$
$$=\Big[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\Big]_1^3$$
$$=(-18+36-18)-\Big(-\frac{2}{3}+4-6\Big)=\frac{8}{3}$$

답 ⑤

4 $f(x)=x^3-3x^2+5$에서

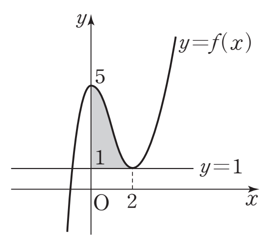
$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극소이고, 극솟값은

$f(2)=8-12+5=1$

따라서 $a=2$, $m=1$이다.

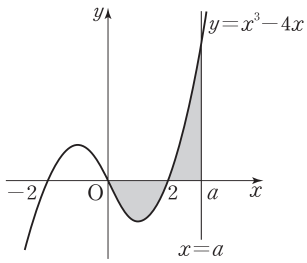


닫힌구간 $[0, 2]$에서 $x^3-3x^2+5\geq 1$이므로 이 구간에서 곡선 $y=x^3-3x^2+5$와 직선 $y=1$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^2 \{(x^3-3x^2+5)-1\}dx=\left[\frac{1}{4}x^4-x^3+4x\right]_0^2$$
$$=4-8+8$$
$$=4$$

답 ②

5 곡선 $y=x^3-4x=x(x+2)(x-2)$는 그림과 같다.



닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $x^3-4x\le 0$, 닫힌구간 $[2,\ a]$에서 $x^3-4x\ge 0$이고, 닫힌구간 $[0,\ a]$에서 곡선과 x축 및 직선 $x=a$로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_0^a (x^3-4x)dx=0$이다.

$$\int_0^a (x^3-4x)dx=\left[\frac{1}{4}x^4-2x^2\right]_0^a=\frac{1}{4}a^4-2a^2$$

이므로 $\frac{1}{4}a^4-2a^2=0$에서

$a^4-8a^2=0$

$a^2(a+2\sqrt{2})(a-2\sqrt{2})=0$

$a>2$이므로 $a=2\sqrt{2}$

답 ③

6 두 곡선 $y=ax^2$, $y=-x^2+4$의 교점의 x좌표를 각각 k, $-k\ (k>0)$이라 하자.

두 곡선 $y=ax^2$, $y=-x^2+4$는 각각 y축에 대하여 대칭이므로 닫힌구간 $[0,\ k]$에서 두 곡선 $y=ax^2$, $y=-x^2+4$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\frac{1}{2}A$이다.

이때 $A=2B$에서 $\frac{1}{2}A=B$

닫힌구간 $[0,\ k]$에서 $-x^2+4\ge ax^2$,

닫힌구간 $[k,\ 2]$에서 $ax^2\ge -x^2+4$이므로

$\int_0^2 \{ax^2-(-x^2+4)\}dx=0$이다.

$$\int_0^2 \{(a+1)x^2-4\}dx=\left[\frac{a+1}{3}x^3-4x\right]_0^2$$
$$=\frac{8a+8}{3}-8=\frac{8a-16}{3}$$

이므로 $\frac{8a-16}{3}=0$에서

$a=2$

답 ②

7 $f(-1)=-1$, $f(2)=2$이므로

$g(-1)=-1$, $g(2)=2$

두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서

$f(x)\le x\le g(x)$

따라서 닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_{-1}^2 \{g(x)-f(x)\}dx=2\int_{-1}^2 \{x-f(x)\}dx$$
$$=2\left\{\int_{-1}^2 x\,dx-\int_{-1}^2 f(x)dx\right\}$$
$$=2\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^2-\left(-\frac{5}{6}\right)\right\}$$
$$=2\times\left\{\left(2-\frac{1}{2}\right)+\frac{5}{6}\right\}$$
$$=\frac{14}{3}$$

답 ④

8 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_0^2 v(t)dt$

시각 $t=0$에서 $t=4$까지 점 P의 위치의 변화량은

$\int_0^4 v(t)dt$

$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^4 v(t)dt$에서

$\int_0^2 v(t)dt=\int_0^2 v(t)dt+\int_2^4 v(t)dt$

즉, $\int_2^4 v(t)dt=0$이다.

$$\int_2^4 v(t)dt=\int_2^4 (t^3+at-32)dt$$
$$=\left[\frac{1}{4}t^4+\frac{a}{2}t^2-32t\right]_2^4$$
$$=(64+8a-128)-(4+2a-64)$$
$$=6a-4$$

이므로 $6a-4=0$에서

$a=\frac{2}{3}$

답 ②

9 시각 t에서 두 점 P, Q가 만나면

$\int_0^t f(t)dt=\int_0^t g(t)dt$이다.

$$\int_0^t \{f(t)-g(t)\}dt$$
$$=\int_0^t \{(t^2+at+1)-(4t^2-4t+b)\}dt$$
$$=\int_0^t \{-3t^2+(a+4)t+(1-b)\}dt$$
$$=\left[-t^3+\frac{a+4}{2}t^2+(1-b)t\right]_0^t$$
$$=-t^3+\frac{a+4}{2}t^2+(1-b)t$$
$$=0$$

이므로 $t\left\{t^2-\frac{a+4}{2}t+(b-1)\right\}=0$

시각 $t=2$, $t=4$에서 각각 두 점 P, Q가 만나므로

이차방정식 $t^2-\frac{a+4}{2}t+(b-1)=0$의 서로 다른 두 실근이 $t=2$ 또는 $t=4$이다.

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여

$2+4=\frac{a+4}{2}$, $2\times4=b-1$

따라서 $a=8$, $b=9$이므로

$a+b=17$

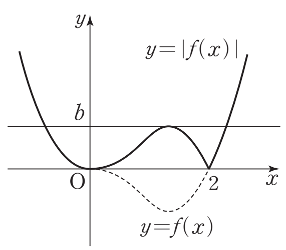
답 ④

Level 2 기본 연습

본문 100~101쪽

1 ③	2 ③	3 ④	4 ④	5 ②
6 ③	7 ②	8 ⑤		

1 함수 $f(x)=ax^3(x-2)$에 대하여 함수 $y=|f(x)|$의 그래프는 그림과 같다.



조건 (가)에서 직선 $y=b$가 곡선 $y=|f(x)|$에 접하므로 함수 $f(x)$의 극솟값이 $-b$이다.

$f'(x)=4ax^3-6ax^2=2ax^2(2x-3)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=\frac{3}{2}$

함수 $f(x)$는 $x=\frac{3}{2}$에서 극소이고, 극솟값은

$f\left(\frac{3}{2}\right)=a\times\frac{27}{8}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{27}{16}a$

이므로 $-\frac{27}{16}a=-b$에서

$b=\frac{27}{16}a$ ...... ㉠

조건 (나)에서 곡선 $y=|f(x)|$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이가 $\frac{64}{45}$이므로

$\int_0^2 |f(x)|dx=\frac{64}{45}$

이때 닫힌구간 $[0,\ 2]$에서 $f(x)\le0$이므로

$\int_0^2 f(x)dx=-\frac{64}{45}$이다.

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (ax^4-2ax^3)dx$$
$$=\left[\frac{a}{5}x^5-\frac{a}{2}x^4\right]_0^2$$
$$=\frac{32}{5}a-8a=-\frac{8}{5}a$$

이므로 $-\frac{8}{5}a=-\frac{64}{45}$에서 $a=\frac{8}{9}$

㉠에 대입하면 $b=\frac{27}{16}\times\frac{8}{9}=\frac{3}{2}$

따라서 $ab=\frac{8}{9}\times\frac{3}{2}=\frac{4}{3}$

답 ③

2 함수 $y=f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 그래프를 나타내는 함수는

$y=f(x)+4$

이고, 이 함수의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시킨 그래프를 나타내는 함수는

$y=-f(x)-4$

이므로 $g(x)=-f(x)-4$이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 서로 만나지 않으므로 닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 $f(x)>g(x)$이다.

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$ 및 두 직선 $x=2$, $x=4$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_2^4 \{f(x)-g(x)\}dx=\int_2^4 \{f(x)+f(x)+4\}dx$$
$$=2\int_2^4 f(x)dx+\int_2^4 4dx$$
$$=2\int_2^4 f(x)dx+\Big[4x\Big]_2^4$$
$$=2\int_2^4 f(x)dx+8$$

이므로 $2\int_2^4 f(x)dx+8=6$에서 $\int_2^4 f(x)dx=-1$

$$\int_2^4 f(x)dx=\int_2^4 a(x^2-6x+8)dx$$
$$=a\Big[\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x\Big]_2^4$$
$$=a\Big\{\Big(\frac{64}{3}-48+32\Big)-\Big(\frac{8}{3}-12+16\Big)\Big\}$$
$$=-\frac{4}{3}a$$

이므로 $-\frac{4}{3}a=-1$에서 $a=\frac{3}{4}$

답 ③

3 $f(x)=-x^3+3x^2$에서

$f'(x)=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$f'(x)=0$에서 $x=0$ 또는 $x=2$

함수 $f(x)$는 $x=2$에서 극대이고, 극댓값은

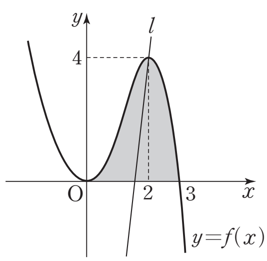
$f(2)=-8+12=4$

점 $(2, 4)$를 지나고 기울기가 m인 직선 l의 방정식은

$y-4=m(x-2)$, 즉 $y=mx-2m+4$

직선 l의 x절편은

$mx-2m+4=0$에서 $x=2-\frac{4}{m}$



곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^3 (-x^3+3x^2)dx=\Big[-\frac{1}{4}x^4+x^3\Big]_0^3$$
$$=-\frac{81}{4}+27=\frac{27}{4}$$

이므로 닫힌구간 $[0, 2]$에서 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\frac{27}{4}=\frac{27}{8}$$

이다. 즉,

$$\int_0^2 (-x^3+3x^2)dx-\frac{1}{2}\times\Big\{2-\Big(2-\frac{4}{m}\Big)\Big\}\times 4$$
$$=\Big[-\frac{1}{4}x^4+x^3\Big]_0^2-\frac{1}{2}\times\frac{4}{m}\times 4$$
$$=4-\frac{8}{m}=\frac{27}{8}$$

따라서 $\frac{8}{m}=4-\frac{27}{8}=\frac{5}{8}$에서

$m=\frac{64}{5}$

답 ④

4 $f'(x)=6(x-1)(x-a)$

$\quad=6x^2-6(a+1)x+6a$

에서

$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax+C$ (C는 적분상수)

$f(0)=0$에서 $C=0$이므로

$f(x)=2x^3-3(a+1)x^2+6ax$

$f'(x)=0$에서 $x=1$ 또는 $x=a$

함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극소이고 극솟값이 0이므로

$f(a)=2a^3-3a^3-3a^2+6a^2=-a^3+3a^2=0$

$-a^2(a-3)=0$

$a>1$이므로 $a=3$

즉, $f(x)=2x^3-12x^2+18x$이다.

곡선 $y=f'(x)$와 x축 및 직선 $x=b$로 둘러싸인 두 부분의 넓이가 서로 같으므로

$\int_1^b f'(x)dx=0$에서 $f(b)-f(1)=0$

즉, $f(b)=f(1)=2-12+18=8$

$2b^3-12b^2+18b=8$에서

$b^3-6b^2+9b-4=0$

$(b-1)^2(b-4)=0$

$b>1$이므로 $b=4$

따라서 $a+b=3+4=7$

답 ④

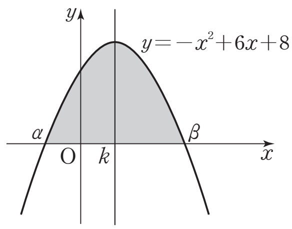
5 곡선 $y=x^2-5x-6$과 직선 $y=x+2$의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2-5x-6=x+2$의 서로 다른 두 실근이다.

이차방정식 $x^2-6x-8=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β $(\alpha<\beta)$라 하면 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 $x+2\geq x^2-5x-6$이므로 곡선 $y=x^2-5x-6$과 직선 $y=x+2$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$\int_{\alpha}^{\beta}\{(x+2)-(x^2-5x-6)\}dx$

$=\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2+6x+8)dx$

이고, 이는 닫힌구간 $[\alpha, \beta]$에서 곡선 $y=-x^2+6x+8$과 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.



곡선 $y=x^2-5x-6$과 직선 $y=x+2$로 둘러싸인 부분의 넓이를 직선 $x=k$가 이등분하므로

$\int_{\alpha}^{k}(-x^2+6x+8)dx=\int_{k}^{\beta}(-x^2+6x+8)dx$

즉, 닫힌구간 $[\alpha, k]$에서 곡선 $y=-x^2+6x+8$과 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이와 닫힌구간 $[k, \beta]$에서 곡선 $y=-x^2+6x+8$과 x축 및 직선 $x=k$로 둘러싸인 부분의 넓이가 같다.

즉, 직선 $x=k$는 곡선 $y=-x^2+6x+8$의 대칭축이므로 $k=3$이다.

따라서 닫힌구간 $[0, 3]$에서 곡선 $y=x^2-5x-6$, 직선 $y=x+2$, y축 및 직선 $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

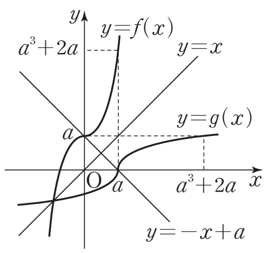
$\int_{0}^{3}(-x^2+6x+8)dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x\right]_0^3$

$=-9+27+24=42$

답 ②

6 $f(0)=a$, $f(a)=a^3+2a$에서

$g(a)=0$, $g(a^3+2a)=a$이다.



$\int_{a}^{a^3+2a}g(x)dx$는 곡선 $y=g(x)$와 x축 및 직선 $x=a^3+2a$로 둘러싸인 부분의 넓이이고, 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로

$\int_{a}^{a^3+2a}g(x)dx$는 곡선 $y=f(x)$와 y축 및 직선 $y=a^3+2a$로 둘러싸인 부분의 넓이와 같다.

따라서

$\int_{0}^{a}f(x)dx+\int_{a}^{a^3+2a}g(x)dx=a(a^3+2a)$

이므로 $a(a^3+2a)=3$에서

$a^4+2a^2-3=0$

$(a^2+3)(a+1)(a-1)=0$

$a>0$이므로 $a=1$

곡선 $y=x^3+x+1$과 직선 $y=x$의 교점의 x좌표를 구하면

$x^3+x+1=x$에서

$x^3+1=0$, $(x+1)(x^2-x+1)=0$

$x=-1$

따라서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와 직선 $y=-x+1$로 둘러싸인 부분의 넓이는

$2\int_{-1}^{0}\{(x^3+x+1)-x\}dx+\frac{1}{2}\times1\times1$

$=2\int_{-1}^{0}(x^3+1)dx+\frac{1}{2}$

$=2\left[\frac{1}{4}x^4+x\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{2}$

$=2\times\left\{-\left(\frac{1}{4}-1\right)\right\}+\frac{1}{2}=2$

답 ③

7 시각 t에서의 점 P의 위치는

$\int_{0}^{t}(at-3)dt=\left[\frac{a}{2}t^2-3t\right]_0^t=\frac{a}{2}t^2-3t$

이므로

$t=1$일 때, $x_1=\frac{1}{2}a-3$

$t=3$일 때, $x_2=\frac{9}{2}a-9$

$t=6$일 때, $x_3=18a-18$

세 수 x_1, x_2, x_3은 이 순서대로 등차수열을 이루므로

$2x_2=x_1+x_3$

$2\left(\frac{9}{2}a-9\right)=\left(\frac{1}{2}a-3\right)+(18a-18)$

$9a-18=\frac{37}{2}a-21$, $\frac{19}{2}a=3$

따라서 $a=\frac{6}{19}$

답 ②

8 두 점 P, Q의 시각 t에서의 위치를 각각 $x_P(t)$, $x_Q(t)$라 하면

$x_P(t)=\int_0^t (6-2t)dt=\left[6t-t^2\right]_0^t$

$=-t^2+6t$

$x_Q(t)=15+\int_0^t (4t-12)dt=15+\left[2t^2-12t\right]_0^t$

$=2t^2-12t+15$

두 점 P, Q가 만날 때, $x_P(t)=x_Q(t)$이므로

$-t^2+6t=2t^2-12t+15$

$3t^2-18t+15=0$

$t^2-6t+5=0$, $(t-1)(t-5)=0$

$t=1$ 또는 $t=5$

따라서 두 점 P, Q는 시각 $t=1$과 $t=5$에서 서로 만난다.

$f(t)=6-2t=0$에서 $t=3$이므로 점 P는 시각 $t=3$에서 운동 방향을 바꾼다.

$x_P(1)=x_P(5)=5$이므로 시각 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리 s_1은

$s_1=\int_1^5 |6-2t|dt$

$=2\int_1^3 (6-2t)dt$

$=2\left[6t-t^2\right]_1^3=2\times\{(18-9)-(6-1)\}=8$

마찬가지로 $g(t)=4t-12=0$에서 $t=3$이므로 점 Q는 시각 $t=3$에서 운동 방향을 바꾼다.

$x_Q(1)=x_Q(5)=5$이므로 시각 $t=1$에서 $t=5$까지 점 Q가 움직인 거리 s_2는

$s_2=\int_1^5 |4t-12|dt$

$=2\int_1^3 (12-4t)dt$

$=2\left[12t-2t^2\right]_1^3=2\times\{(36-18)-(12-2)\}=16$

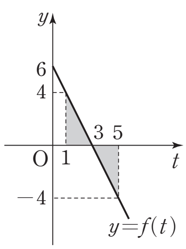
따라서 $s_1+s_2=8+16=24$

답 ⑤

참고

$f(t)=6-2t$이므로 시각 $t=1$에서 $t=5$까지 점 P가 움직인 거리는 그림에서 색칠한 부분의 넓이와 같다.

즉, $2\times\frac{1}{2}\times2\times4=8$



Level 3 실력 완성

본문 102쪽

1 ② 2 ③ 3 ③

1 닫힌구간 $[0, 2]$에서 $f(x)\le0$이므로 곡선 $y=f(x)$와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$P=\int_0^2 (-x^3+2x^2)dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3\right]_0^2$

$=-4+\frac{16}{3}$

$=\frac{4}{3}$

점 (a, a^3-2a^2)과 원점을 지나는 직선 l의 방정식은

$y=\frac{a^3-2a^2}{a}x$, 즉 $y=(a^2-2a)x$

이고, 닫힌구간 $[0, a]$에서 $(a^2-2a)x\ge x^3-2x^2$이므로 닫힌구간 $[0, a]$에서 곡선 $y=f(x)$와 직선 l로 둘러싸인 부분의 넓이는

$Q=\int_0^a \{(a^2-2a)x-(x^3-2x^2)\}dx$

$=\int_0^a \{-x^3+2x^2+(a^2-2a)x\}dx$

$=\left[-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{a^2-2a}{2}x^2\right]_0^a$

$=-\frac{1}{4}a^4+\frac{2}{3}a^3+\frac{a^4-2a^3}{2}$

$=\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^3$

따라서 $P:Q=1:b$에서

$\frac{4}{3}:\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^3\right)=1:b$

$\frac{4}{3}b=\frac{1}{4}a^4-\frac{1}{3}a^3$

$b=\frac{3}{16}a^4-\frac{1}{4}a^3$

이때

$\int_2^a f(x)dx=\int_2^a (x^3-2x^2)dx$

$=\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3\right]_2^a$

$=\left(\frac{1}{4}a^4-\frac{2}{3}a^3\right)-\left(4-\frac{16}{3}\right)$

$=\frac{1}{4}a^4-\frac{2}{3}a^3+\frac{4}{3}$

이므로

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{b}\int_2^a f(x)dx=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{1}{4}a^4-\frac{2}{3}a^3+\frac{4}{3}}{\frac{3}{16}a^4-\frac{1}{4}a^3}$$

$$=\lim_{a\to\infty}\frac{\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{a}+\frac{4}{3}\times\frac{1}{a^4}}{\frac{3}{16}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{a}}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{16}}=\frac{4}{3}$$

답 ②

2 조건 (가)에서 삼차방정식 $f(x)-g(x)=0$의 서로 다른 세 실근이 $x=0$, $x=3$, $x=8$이므로

$f(x)-g(x)=ax(x-3)(x-8)$ ($a>0$, a는 상수)

로 놓을 수 있다.

$0\le x\le 3$에서 $f(x)\ge g(x)$이므로

조건 (나)에서 $\int_0^3\{f(x)-g(x)\}dx=13$이다.

$$\int_0^3\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^3 ax(x-3)(x-8)dx$$

$$=a\int_0^3(x^3-11x^2+24x)dx$$

$$=a\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{11}{3}x^3+12x^2\right]_0^3$$

$$=a\left(\frac{81}{4}-99+108\right)$$

$$=\frac{117}{4}a$$

이므로 $\frac{117}{4}a=13$에서

$a=\frac{4}{9}$

$$f(x)-g(x)=\frac{4}{9}x(x-3)(x-8)$$

$$=\frac{4}{9}x^3-\frac{44}{9}x^2+\frac{32}{3}x \quad \cdots\cdots ㉠$$

$f(x)$는 삼차함수, $g(x)$는 일차함수이고,

$f(0)=g(0)=12$이므로 ㉠에서

$f(x)=\frac{4}{9}x^3-\frac{44}{9}x^2+\left(\frac{32}{3}+b\right)x+12$,

$g(x)=bx+12$ ($b\ne0$, b는 상수)

로 놓을 수 있다.

$0\le x\le 3$에서 $f(x)\ge g(x)\ge 0$이므로

$g(x)\ge 0\ge -f(x)$이고, 조건 (다)에서

$$\int_0^3[g(x)-\{-f(x)\}]dx=94$$

즉, $\int_0^3\{f(x)+g(x)\}dx=94$이다.

$$\int_0^3\{f(x)+g(x)\}dx$$

$$=\int_0^3\left[\left\{\frac{4}{9}x^3-\frac{44}{9}x^2+\left(\frac{32}{3}+b\right)x+12\right\}+(bx+12)\right]dx$$

$$=\int_0^3\left\{\frac{4}{9}x^3-\frac{44}{9}x^2+\left(\frac{32}{3}+2b\right)x+24\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{9}x^4-\frac{44}{27}x^3+\left(\frac{16}{3}+b\right)x^2+24x\right]_0^3$$

$=9-44+48+9b+72$

$=9b+85$

이므로 $9b+85=94$에서

$b=1$

따라서 $f(x)=\frac{4}{9}x^3-\frac{44}{9}x^2+\frac{35}{3}x+12$,

$g(x)=x+12$이므로

$$f(1)+g(1)=\left(\frac{4}{9}-\frac{44}{9}+\frac{35}{3}+12\right)+13$$

$$=\frac{290}{9}$$

답 ③

다른 풀이

$g(x)=bx+12$ ($b\ne0$, b는 상수)에서 b의 값은 다음과 같이 구할 수 있다.

조건 (나)에서 닫힌구간 $[0, 3]$에서 곡선 $y=-f(x)$와 직선 $y=-g(x)$로 둘러싸인 부분의 넓이는 13이므로 조건 (다)에서 닫힌구간 $[0, 3]$에서 두 직선 $y=g(x)$, $y=-g(x)$ 및 두 직선 $x=0$, $x=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$94-13=81$

따라서 네 점 $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, g(3))$, $(0, 12)$를 꼭짓점으로 하는 사다리꼴의 넓이는

$\frac{1}{2}\times\{12+g(3)\}\times3=\frac{81}{2}$

$12+g(3)=27$

$g(3)=15$

따라서 $g(3)=3b+12=15$에서 $b=1$이다.

3 $0\le t\le 4$에서 $v(t)=-t^2+4t\ge0$,

$t>4$에서 $v(t)=-t^2+4t<0$이므로

함수 $f(a)$는 다음과 같이 a의 값의 범위에 따라 구할 수 있다.

(i) $0\le a\le 2$일 때,

$$f(a)=\int_a^{a+2}|-t^2+4t|dt$$
$$=\int_a^{a+2}(-t^2+4t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_a^{a+2}$$
$$=\left\{-\frac{1}{3}(a+2)^3+2(a+2)^2\right\}-\left(-\frac{1}{3}a^3+2a^2\right)$$
$$=-2a^2+4a+\frac{16}{3}$$

(ii) $2<a<4$일 때,

$$f(a)=\int_a^{a+2}|-t^2+4t|dt$$
$$=\int_a^{4}(-t^2+4t)dt+\int_4^{a+2}(t^2-4t)dt$$
$$=\left[-\frac{1}{3}t^3+2t^2\right]_a^{4}+\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_4^{a+2}$$
$$=\left(-\frac{64}{3}+32\right)-\left(-\frac{1}{3}a^3+2a^2\right)+\left\{\frac{1}{3}(a+2)^3-2(a+2)^2\right\}-\left(\frac{64}{3}-32\right)$$
$$=\frac{2}{3}a^3-2a^2-4a+16$$

(iii) $a\ge 4$일 때,

$$f(a)=\int_a^{a+2}|-t^2+4t|dt$$
$$=\int_a^{a+2}(t^2-4t)dt$$
$$=\left[\frac{1}{3}t^3-2t^2\right]_a^{a+2}$$
$$=\left\{\frac{1}{3}(a+2)^3-2(a+2)^2\right\}-\left(\frac{1}{3}a^3-2a^2\right)$$
$$=2a^2-4a-\frac{16}{3}$$

ㄱ. $0\le a\le 2$일 때,

$f(a)=-2a^2+4a+\frac{16}{3}$이므로

$f(1)=-2+4+\frac{16}{3}=\frac{22}{3}$ (참)

ㄴ. $a\ge 4$일 때,

$f(a)=2a^2-4a-\frac{16}{3}$이므로

$$\lim_{a\to\infty}\frac{f(a)}{a^2}=\lim_{a\to\infty}\frac{2a^2-4a-\frac{16}{3}}{a^2}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\left(2-\frac{4}{a}-\frac{16}{3a^2}\right)$$
$$=2 \text{ (참)}$$

ㄷ. $0\le a\le 2$일 때,

$f(a)=-2a^2+4a+\frac{16}{3}=-2(a-1)^2+\frac{22}{3}$

이므로 함수 $f(a)$의 최솟값은 $f(0)=f(2)=\frac{16}{3}$

이다.

$2<a<4$일 때,

$f(a)=\frac{2}{3}a^3-2a^2-4a+16$

이므로

$f'(a)=2a^2-4a-4=2(a^2-2a-2)$

$f'(a)=0$에서 $2<a<4$이므로

$a=1+\sqrt{3}$

따라서 함수 $f(a)$는 $a=1+\sqrt{3}$에서 극소이고 동시에 최소이므로 함수 $f(a)$의 최솟값은 $f(1+\sqrt{3})$이고,

$f(1+\sqrt{3})<f(2)$이다.

$a\ge 4$일 때,

$f(a)=2a^2-4a-\frac{16}{3}=2(a-1)^2-\frac{22}{3}$

이므로 함수 $f(a)$의 최솟값은 $f(4)=\frac{32}{3}$이다.

이때 $f(1+\sqrt{3})<f(2)<f(4)$이므로

함수 $f(a)$는 $a=1+\sqrt{3}$에서 최솟값을 갖는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③