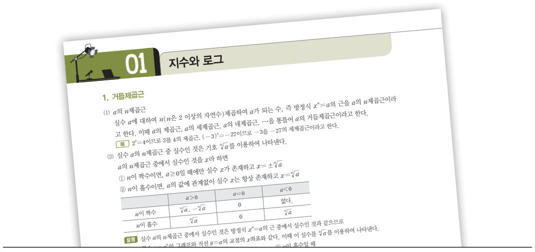
수능특강

수학영역 **수학 Ⅰ**

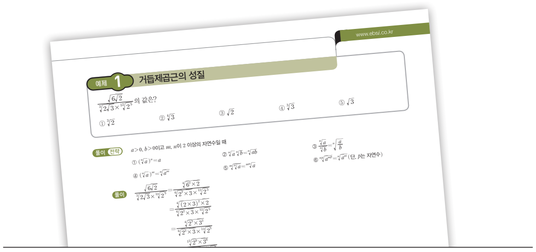
이 책의 차례 Contents

이 책의 구성과 특징 Structure



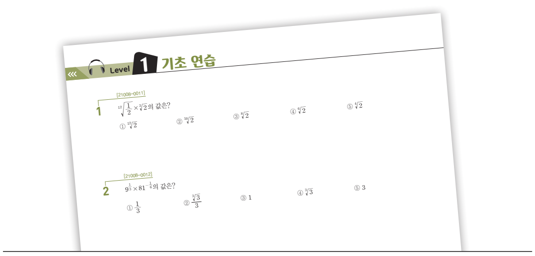
개념 정리

교과서의 핵심 내용을 체계적으로 정리하였다.



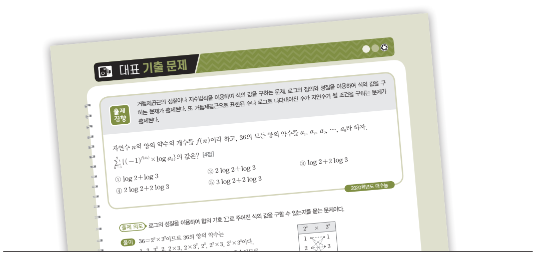
예제 & 유제

예제는 개념을 적용한 대표 문항으로 문제를 해결하는 데 필요한 주요 개념을 풀이 전략으로 제시하여 풀이 과정의 이해를 돕도록 하였고, 유제는 예제와 유사한 내용의 문제나 일반화된 문제를 제시하여 학습 내용과 문제에 대한 연관성을 익히도록 구성하였다.



Level 1 – Level 2 – Level 3

Level 1 기초 연습은 기초 개념의 인지 정도를 확인할 수 있는 문항을 제시하였으며, Level 2 기본 연습은 기본 응용 문항을, 그리고 Level 3 실력 완성은 수학적 사고력과 문제 해결 능력을 함양할 수 있는 문항을 제시하여 대학수학능력시험 실전에 대비할 수 있도록 구성하였다.

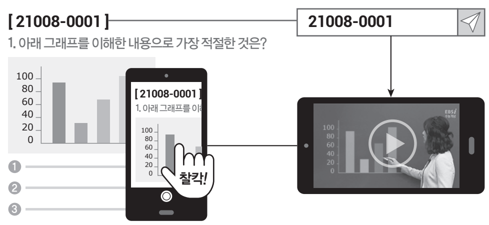


대표 기출 문제

대학수학능력시험과 모의평가 기출 문항으로 구성하였으며 기존 출제 유형을 파악할 수 있도록 출제 경향과 출제 의도를 제시하였다.

학생 EBS 교재 문제 검색

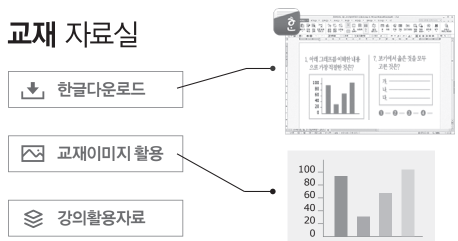
EBS 단추에서 문항코드나 사진으로
문제를 검색하면 푸리봇이 해설 영상을 제공합니다.



※ EBSi 사이트 및 모바일에서 이용이 가능합니다.
※ 사진 검색은 EBSi 고교강의 앱에서만 이용하실 수 있습니다.

교사 교사지원센터 교재 자료실

교재 문항 한글 문서(HWP)와
교재의 이미지 파일을 무료로 제공합니다.



※ **교사지원센터(http://teacher.ebsi.co.kr)** 접속 후 '교사인증'을 통해 이용 가능

01 지수와 로그

1. 거듭제곱근

(1) a의 n제곱근

실수 a에 대하여 n(n은 2 이상의 자연수)제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$의 근을 a의 n제곱근이라고 한다. 이때 a의 제곱근, a의 세제곱근, a의 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

예 $2^2=4$이므로 2를 4의 제곱근, $(-3)^3=-27$이므로 -3을 -27의 세제곱근이라고 한다.

(2) 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것은 기호 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 나타낸다.

a의 n제곱근 중에서 실수인 것을 x라 하면

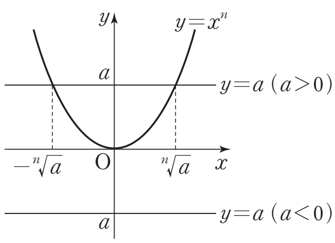
① n이 짝수이면, $a\ge0$일 때에만 실수 x가 존재하고 $x=\pm\sqrt[n]{a}$

② n이 홀수이면, a의 값에 관계없이 실수 x는 항상 존재하고 $x=\sqrt[n]{a}$

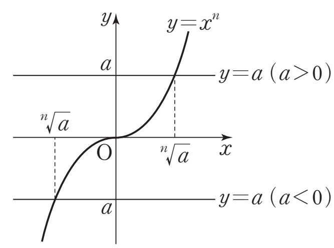
	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$

설명 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 근 중에서 실수인 것과 같으므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다. 이때 이 실수를 $\sqrt[n]{a}$를 이용하여 나타낸다.

① n이 짝수일 때



② n이 홀수일 때



예 ① 16의 네제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^4=16$의 근 중 실수인 것으로 -2 또는 2이다.
그러므로 $\sqrt[4]{16}=2$, $-\sqrt[4]{16}=-2$이다.

② 8의 세제곱근 중 실수인 것은 방정식 $x^3=8$의 근 중 실수인 것으로 2이다.
그러므로 $\sqrt[3]{8}=2$이다.

(3) 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n=a$

② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

④ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

설명 ② $a>0$, $b>0$이고 n이 2 이상의 자연수일 때, 지수법칙에 의하여 $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$
이때 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$
따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

예제 1 거듭제곱근의 성질

$\dfrac{\sqrt{6\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}\times\sqrt[12]{2^5}}$ 의 값은?

① $\sqrt[3]{2}$ ② $\sqrt[4]{3}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ $\sqrt[3]{3}$ ⑤ $\sqrt{3}$

풀이 전략 $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 자연수일 때

① $(\sqrt[n]{a})^n=a$ ② $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$ ③ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

④ $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$ ⑤ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$ ⑥ $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$ (단, p는 자연수)

풀이

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{6\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{2\sqrt{3}}\times\sqrt[12]{2^5}}&=\frac{\sqrt[4]{6^2\times 2}}{\sqrt[6]{2^2\times 3}\times\sqrt[12]{2^5}}\\&=\frac{\sqrt[4]{(2\times 3)^2\times 2}}{\sqrt[6]{2^2\times 3}\times\sqrt[12]{2^5}}\\&=\frac{\sqrt[4]{2^3\times 3^2}}{\sqrt[6]{2^2\times 3}\times\sqrt[12]{2^5}}\\&=\frac{\sqrt[12]{2^9\times 3^6}}{\sqrt[12]{2^4\times 3^2}\times\sqrt[12]{2^5}}\\&=\sqrt[12]{\frac{2^9\times 3^6}{2^4\times 3^2\times 2^5}}\\&=\sqrt[12]{3^4}\\&=\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

답 ④

정답과 풀이 4쪽

[21008-0001]

유제 1 $\sqrt[3]{-\dfrac{1}{8}}\times\sqrt[3]{(-2)^6}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 8

[21008-0002]

유제 2 $\sqrt[20]{2}\times\dfrac{\sqrt[12]{2}}{\sqrt[15]{2}}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{2}}$를 만족시키는 2 이상의 두 자연수 m, n에 대하여 $m+n$의 값을 구하시오.

2. 정수인 지수

(1) 0 또는 음의 정수인 지수의 정의

a는 0이 아닌 실수이고 n이 양의 정수일 때, $a^0=1$, $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

설명 자연수 m, n에 대하여 지수법칙 $a^m a^n = a^{m+n}$ $(a \neq 0)$ …… ㉠이 성립한다.

① $m=0$인 경우에 ㉠이 성립한다고 하면 $a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$이어야 하므로 $a^0=1$로 정의한다.

② $m=-n$인 경우에 ㉠이 성립한다고 하면 $a^{-n}a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$이어야 하므로 $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$로 정의한다.

(2) 지수가 정수일 때의 지수법칙: a, b는 0이 아닌 실수이고 m, n이 정수일 때

① $a^m a^n = a^{m+n}$
② $a^m \div a^n = a^{m-n}$
③ $(a^m)^n = a^{mn}$
④ $(ab)^n = a^n b^n$

3. 유리수인 지수

(1) 유리수인 지수의 정의

$a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 정수일 때, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$이다. 특히, $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$이다.

설명 $a>0$일 때, 두 정수 m, n에 대하여 지수법칙 $(a^m)^n = a^{mn}$ …… ㉡이 성립한다.

지수가 유리수일 때도 ㉡이 성립한다고 하면 정수 m과 2 이상의 정수 n에 대하여

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$$

이므로 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이다. 따라서 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$으로 정의한다.

(2) 지수가 유리수일 때의 지수법칙: $a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^r a^s = a^{r+s}$
② $a^r \div a^s = a^{r-s}$
③ $(a^r)^s = a^{rs}$
④ $(ab)^r = a^r b^r$

4. 실수인 지수

(1) 실수인 지수의 정의

지수가 무리수인 수, 예를 들어 $2^{\sqrt{2}}$을 살펴보자.

무리수 $\sqrt{2}$는 $\sqrt{2}=1.414213\cdots$이고, 유리수 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, …를 지수로 갖는 수

$$2^1,\ 2^{1.4},\ 2^{1.41},\ 2^{1.414},\ 2^{1.4142},\ \cdots$$

은 일정한 수에 한없이 가까워진다는 사실이 알려져 있는데 이 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다. 이와 같은 방법으로 지수가 무리수인 수를 정의한다. 따라서 $a>0$일 때, 임의의 실수 x에 대하여 a^x을 정의할 수 있다.

(2) 지수가 실수일 때의 지수법칙: $a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때

① $a^x a^y = a^{x+y}$
② $a^x \div a^y = a^{x-y}$
③ $(a^x)^y = a^{xy}$
④ $(ab)^x = a^x b^x$

예제 2 지수가 유리수일 때의 지수법칙

$\{(3\times\sqrt[3]{3})^{\frac{9}{4}}\}^{\frac{2}{3}}\times\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 6 ④ 9 ⑤ 12

풀이 전략

(1) $a>0$이고 m은 정수, n은 2 이상의 정수일 때, $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

(2) $a>0$, $b>0$이고 r, s가 유리수일 때

① $a^ra^s=a^{r+s}$ ② $a^r\div a^s=a^{r-s}$

③ $(a^r)^s=a^{rs}$ ④ $(ab)^r=a^rb^r$

풀이

$$\begin{aligned}\{(3\times\sqrt[3]{3})^{\frac{9}{4}}\}^{\frac{2}{3}}\times\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-\frac{4}{3}}\right\}^{\frac{3}{2}}&=(3\times\sqrt[3]{3})^{\frac{9}{4}\times\frac{2}{3}}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\left(-\frac{4}{3}\right)\times\frac{3}{2}}\\&=(3\times\sqrt[3]{3})^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{-2}\\&=(3\times3^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{2}}\times\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2}\\&=(3^{\frac{4}{3}})^{\frac{3}{2}}\times\frac{4}{3}\\&=3^{\frac{4}{3}\times\frac{3}{2}}\times\frac{4}{3}\\&=3^2\times\frac{4}{3}=12\end{aligned}$$

답 ⑤

정답과 풀이 4쪽

[21008-0003]

유제 3 $(2\sqrt{2}\times2^{-\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}=2^k$을 만족시키는 상수 k의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[21008-0004]

유제 4 $(3\times3^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}-1}$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt{3}$ ⑤ 3

5. 로그

(1) 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$, $N>0$일 때, $a^x=N$을 만족시키는 실수 x를 기호로

$\log_a N$

으로 나타낸다. 즉,

$a^x=N \iff x=\log_a N$

이때 $\log_a N$에서 a를 밑, N을 진수라 하고, $\log_a N$을 a를 밑으로 하는 N의 로그라고 한다.

예 ① $2^3=8 \iff 3=\log_2 8$

② $2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2} \iff \frac{1}{2}=\log_2 \sqrt{2}$

참고 $\log_a N$이 정의되기 위한 조건은 $a>0$, $a\neq1$, $N>0$이다.

(2) 로그의 성질

$a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

설명 ① $a>0$, $a\neq1$일 때, $a^0=1$, $a^1=a$이므로 로그의 정의에 의하여 $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

또 $a>0$, $a\neq1$이고 $M>0$, $N>0$일 때 $\log_a M=x$, $\log_a N=y$라 하면

$M=a^x$, $N=a^y$이므로

② $MN=a^xa^y=a^{x+y}$에서 로그의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\log_a MN&=x+y\\&=\log_a M+\log_a N\end{aligned}$$

③ $\frac{M}{N}=\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$에서 로그의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\log_a \frac{M}{N}&=x-y\\&=\log_a M-\log_a N\end{aligned}$$

④ $M^k=(a^x)^k=a^{kx}$에서 로그의 정의에 의하여

$$\begin{aligned}\log_a M^k&=kx\\&=k\log_a M\end{aligned}$$

예 ① $\log_{\frac{1}{2}} 1=0$, $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}=1$

② $\log_2 6=\log_2 (2\times3)=\log_2 2+\log_2 3=1+\log_2 3$

③ $\log_7 \frac{2}{7}=\log_7 2-\log_7 7=\log_7 2-1$

④ $\log_3 \sqrt{3}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\log_3 3=\frac{1}{2}\times1=\frac{1}{2}$

예제 3 로그의 성질

$\log_2 36+2\log_2 \frac{\sqrt{3}}{3}-\log_2 \frac{3}{2}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 다음 로그의 성질을 이용하여 식을 간단히 한다.

$a>0$, $a\neq 1$이고 $M>0$, $N>0$일 때

① $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$

② $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

③ $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

④ $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

풀이

$$\begin{aligned}\log_2 36+2\log_2 \frac{\sqrt{3}}{3}-\log_2 \frac{3}{2}&=\log_2 36+\log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\log_2 \frac{3}{2}\\&=\log_2 36+\log_2 \frac{1}{3}-\log_2 \frac{3}{2}\\&=\log_2 \left(36\times\frac{1}{3}\div\frac{3}{2}\right)\\&=\log_2 \left(36\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)\\&=\log_2 8\\&=\log_2 2^3\\&=3\log_2 2=3\end{aligned}$$

답 ③

다른 풀이

$$\begin{aligned}\log_2 36+2\log_2 \frac{\sqrt{3}}{3}-\log_2 \frac{3}{2}&=\log_2 (2\times 3)^2+\log_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2-\log_2 \frac{3}{2}\\&=2\log_2 (2\times 3)+\log_2 \frac{1}{3}-\log_2 \frac{3}{2}\\&=2(\log_2 2+\log_2 3)-\log_2 3-(\log_2 3-\log_2 2)\\&=3\log_2 2=3\end{aligned}$$

정답과 풀이 4쪽

[21008-0005]

유제 5 $3^x=12$, $y=\log_3 \frac{3}{2}$을 만족시키는 두 실수 x, y에 대하여 $x+2y$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21008-0006]

유제 6 $\dfrac{\log_5 \sqrt[4]{125}}{\log_2 \sqrt{12}-\log_2 \sqrt{3}}$ 의 값은?

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{8}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{5}{8}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

6. 로그의 밑의 변환

(1) 로그의 밑의 변환

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때,

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}\ (\text{단, } c>0,\ c\neq1)$$

설명 $\log_a b=x$, $\log_c a=y$라 하면

$a^x=b$, $c^y=a$

이므로 지수법칙에 의하여

$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$

이다. 그러므로

$xy=\log_c b$

$\log_a b\times\log_c a=\log_c b$ $\quad\cdots\cdots$ ㉠

$a\neq1$에서 $\log_c a\neq0$이므로 ㉠의 양변을 $\log_c a$로 나누면

$\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

예 $\log_3 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$

(2) 로그의 밑의 변환의 활용

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$일 때

① $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a c$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{n}{m}\log_a b$ (단, m, n은 실수이고 $m\neq0$)

④ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$ (단, $b\neq1$, $c>0$)

설명 ① $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$

② $\log_a b\times\log_b c=\log_a b\times\dfrac{\log_a c}{\log_a b}=\log_a c$

③ $\log_{a^m} b^n=\dfrac{\log_a b^n}{\log_a a^m}=\dfrac{n\log_a b}{m\log_a a}=\dfrac{n}{m}\log_a b$

④ $c\neq1$일 때, $a=c^x$이라 하면 $x=\log_c a$이므로

$a^{\log_b c}=(c^{\log_c a})^{\log_b c}=c^{\log_c a\times\log_b c}=c^{\log_c a\times\frac{\log_c c}{\log_c b}}=c^{\frac{\log_c a}{\log_c b}}=c^{\log_b a}$

$c=1$일 때, (좌변)$=a^{\log_b 1}=a^0=1$, (우변)$=1^{\log_b a}=1$이므로

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

예 ① $\log_2 3=\dfrac{\log_3 3}{\log_3 2}=\dfrac{1}{\log_3 2}$

② $\log_2 3\times\log_3 5=\log_2 3\times\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}=\log_2 5$

③ $\log_8 32=\log_{2^3} 2^5=\dfrac{5}{3}\log_2 2=\dfrac{5}{3}$

④ $9^{\log_3 5}=5^{\log_3 9}=5^{\log_3 3^2}=5^2=25$

예제 4 로그의 밑의 변환

$\log_2 9 \times \log_3 6 - \dfrac{1}{\log_{81} 4}$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

풀이 전략 다음 성질을 이용하여 로그의 밑이 같아지도록 변형한다.

$a>0$, $a\neq1$, $b>0$, $c>0$, $c\neq1$일 때,

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

특히, $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (단, $b\neq1$)

풀이

$$\begin{aligned}
\log_2 9 \times \log_3 6 - \frac{1}{\log_{81} 4} &= \log_2 9 \times \log_3 6 - \log_4 81 \\
&= \log_2 3^2 \times \frac{\log_2 6}{\log_2 3} - \log_{2^2} 3^4 \\
&= 2\log_2 3 \times \frac{\log_2 6}{\log_2 3} - \frac{4}{2}\log_2 3 \\
&= 2\log_2 6 - 2\log_2 3 \\
&= 2(\log_2 6 - \log_2 3) \\
&= 2\log_2 \frac{6}{3} \\
&= 2\log_2 2 = 2
\end{aligned}$$

답 ④

정답과 풀이 5쪽

[21008-0007]

유제 7 $\log_9 54 + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{2}$의 값은?

① $\dfrac{1}{2}$ ② 1 ③ $\dfrac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\dfrac{5}{2}$

[21008-0008]

유제 8 $\dfrac{1}{\log_{24} 2} - \dfrac{1}{\log_9 4}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

7. 상용로그

(1) 상용로그의 뜻

10을 밑으로 하는 로그, 즉 $\log_{10} N\,(N>0)$을 상용로그라 하고, 보통 밑 10을 생략하여

$$\log N$$

과 같이 나타낸다.

예 ① $\log 10=\log_{10} 10=1$　　② $\log \frac{1}{100}=\log_{10} 10^{-2}=-2$　　③ $\log \sqrt{10}=\log_{10} 10^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

(2) 상용로그의 값 구하기

① 상용로그표를 이용한 상용로그의 값 구하기

상용로그표는 0.01 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수에 대한 상용로그의 값을 반올림하여 소수점 아래 넷째 자리까지 나타낸 것이다. 예를 들어, $\log 5.73$의 값을 구하려면 상용로그표에서 5.7의 행과 3의 열이 만나는 곳의 수 .7582를 찾으면 된다. 즉, $\log 5.73=0.7582$이다.

참고 상용로그표에서 .7582는 0.7582를 뜻한다.

열

	수	0	1	2	3	⋯	9
	⋮						
행	5.7				.7582		
	⋮						

② 양수 N의 상용로그의 값 구하기

양수 N은 $1\le a<10$인 실수 a와 정수 n에 대하여 $N=a\times 10^n$의 꼴로 나타낼 수 있다. 이를 로그의 성질을 이용하면

$$\log N=\log\,(a\times 10^n)=n+\log a$$

와 같이 나타낼 수 있으므로, N의 상용로그의 값은 로그의 성질과 상용로그표를 이용하여 구할 수 있다.

예 상용로그표에서 $\log 3.12=0.4942$이므로

① $\log 312=\log\,(3.12\times 10^2)=\log 10^2+\log 3.12=2+0.4942=2.4942$

② $\log 0.312=\log\,(3.12\times 10^{-1})=\log 10^{-1}+\log 3.12=-1+0.4942=-0.5058$

(3) 상용로그의 활용

상용로그를 이용하면 2^{30}, $\sqrt[3]{2}$ 등과 같은 수를 10진법으로 나타내어 어림한 값을 구할 수 있다.

예 2^{30}의 어림한 값을 구하면 다음과 같다.

(i) 상용로그 $\log 2^{30}$의 값 구하기

상용로그표에서 $\log 2=0.3010$이므로

$$\log 2^{30}=30\log 2=30\times 0.3010=9.03=9+0.03$$

(ii) 상용로그의 값으로부터 진수 구하기

상용로그표를 이용하여 $\log 1.07=0.03$으로 계산하면

$$9+0.03=\log 10^9+\log 1.07=\log\,(1.07\times 10^9)$$

(iii) 어림한 값 구하기

$\log 2^{30}=\log\,(1.07\times 10^9)$이므로 $2^{30}=1.07\times 10^9$

예제 5 상용로그

$\log 2=0.3010$일 때, $\log 10\sqrt[3]{25}$의 값은?

① 1.2330 ② 1.3010 ③ 1.4660 ④ 1.6020 ⑤ 1.6990

풀이 전략 상용로그의 뜻과 로그의 성질을 이용하여 계산한다.

풀이

$$\begin{aligned}\log 10\sqrt[3]{25}&=\log 10+\log\sqrt[3]{5^2}\\&=1+\log 5^{\frac{2}{3}}\\&=1+\frac{2}{3}\log 5\\&=1+\frac{2}{3}\log\frac{10}{2}\\&=1+\frac{2}{3}(\log 10-\log 2)\\&=1+\frac{2}{3}(1-\log 2)\\&=1+\frac{2}{3}(1-0.3010)\\&=1+\frac{2}{3}\times 0.6990\\&=1.4660\end{aligned}$$

답 ③

정답과 풀이 5쪽

[21008-0009]

유제 9 $\log 2=0.3010$, $\log 3=0.4771$일 때, $\log 0.006$의 값은?

① -2.2219 ② -2.3219 ③ -2.4219 ④ -2.5219 ⑤ -2.6219

[21008-0010]

유제 10 $a=\log 2$, $b=\log 3$일 때, 다음 중 $\log_5 9$를 a, b로 나타낸 것은?

① $\frac{a}{1-a}$ ② $\frac{b}{1-a}$ ③ $\frac{2a}{1-a}$ ④ $\frac{2b}{1-a}$ ⑤ $\frac{a+b}{1-a}$

[21008-0011]

1 $\sqrt[12]{\dfrac{1}{2}}\times\sqrt[3]{2}$의 값은?

① $\sqrt[12]{2}$ ② $\sqrt[10]{2}$ ③ $\sqrt[8]{2}$ ④ $\sqrt[6]{2}$ ⑤ $\sqrt[4]{2}$

[21008-0012]

2 $9^{\frac{1}{3}}\times81^{-\frac{1}{6}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{3}$ ② $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{3}$ ③ 1 ④ $\sqrt[3]{3}$ ⑤ 3

[21008-0013]

3 세 양수 a, b, c에 대하여 $a^{-\frac{1}{4}}=3$, $b^{-\frac{1}{2}}=4$, $c^{-\frac{1}{3}}=18$일 때, $\dfrac{c}{ab}$의 값은?

① $\dfrac{2}{9}$ ② $\dfrac{1}{3}$ ③ $\dfrac{4}{9}$ ④ $\dfrac{5}{9}$ ⑤ $\dfrac{2}{3}$

[21008-0014]

4 두 실수 x, y에 대하여 $2^x=3^y=25$일 때, $5^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$의 값은?

① $\dfrac{1}{6}$ ② $\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ③ 1 ④ $\sqrt{6}$ ⑤ 6

[21008-0015]

5 자연수 n에 대하여 $\left(\dfrac{96}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 n의 값의 합을 구하시오.

[21008-0016]

6 $2\log_2 \sqrt[4]{6}+\frac{1}{2}\log_2 \frac{8}{3}$의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

[21008-0017]

7 $(\log_2 9-\log_4 9)(\log_9 4-\log_{27} 2)$의 값은?

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

[21008-0018]

8 $\log_3 45-\frac{1}{\log_{25} 9}$의 값은?

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ 2

[21008-0019]

9 $a=\log 0.2$일 때, 다음 중 $\log 80$을 a로 나타낸 것은?

① $a+3$ ② $2a+3$ ③ $2a+4$ ④ $3a+3$ ⑤ $3a+4$

[21008-0020]

10 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여 $a^2=b^3=c^4$일 때, $\log_a \sqrt{b}+\log_b \frac{1}{c}+\log_c a=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[21008-0021]

1 2 이상의 자연수 n에 대하여 실수 x의 n제곱근 중에서 실수인 것의 개수를 $f_n(x)$라 하자. 2의 제곱근 중 음수인 것을 a, -3의 세제곱근 중 실수인 것을 b라 할 때, $f_3(a)+f_4(b)+f_5(a+b)+f_6(ab)$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[21008-0022]

2 $a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$일 때, $\dfrac{a^{-\frac{1}{2}}}{a+a^{-\frac{1}{2}}}+\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a^2-a^{\frac{1}{2}}}$의 값은?

① $-\sqrt{2}$ ② -1 ③ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$ ⑤ 1

[21008-0023]

3 양수 x에 대하여 $x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}=4$일 때, $x^{\frac{1}{3}}+x^{-\frac{1}{3}}$의 값은?

① $\dfrac{3}{2}$ ② 2 ③ $\dfrac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\dfrac{7}{2}$

[21008-0024]

4 두 실수 a, b에 대하여 $15^a=2$, $15^b=3$일 때, $25^{\frac{a}{1-b}}$의 값은?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

[21008-0025]

5 $\sqrt[n]{\sqrt[n]{a^3}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 2 이상의 두 자연수 n, a에 대하여 $n+a$의 최솟값을 구하시오.

[21008-0026]

6 1이 아닌 세 양수 a, b, c에 대하여

$$\sqrt{\frac{b}{a}}=\sqrt[3]{a},\ \log_b ac=\log_a b$$

일 때, $\log_a c=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[21008-0027]

7 서로 다른 두 실수 a, b에 대하여

$$\log x^a=b\log y=\log\frac{y}{x}$$

를 만족시키는 1이 아닌 서로 다른 두 양수 x, y가 존재한다. $\frac{a^2+b^2}{a-b}=5$일 때, ab의 값은?

① 2 ② $\frac{5}{2}$ ③ 3 ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ 4

[21008-0028]

8 1이 아닌 서로 다른 두 양수 a, b에 대하여 두 집합 A, B를

$$A=\{1,\ \log_a b\},\ B=\{2,\ 3,\ 2\log_2 a-\log_2 b\}$$

라 하자. $A\cap B=A$일 때, $\frac{a}{b}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ③ $\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ 8

[21008-0029]

9 좌표평면에서 원 $(x-6)^2+(y-8)^2=64$ 위의 점 P와 원점 O 사이의 거리를 D_{P}라 하자. $\log_2 D_{\mathrm{P}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 점 P의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

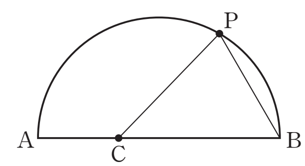
[21008-0030]

1 $2\le m\le 9$, $2\le n\le 9$인 두 자연수 m, n에 대하여 $\sqrt[3]{(mn)^{\frac{n}{m}}}$의 값이 자연수가 되도록 하는 m, n의 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

[21008-0031]

2 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 선분 AB 위의 점 C와 호 AB 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{CB}}=1:2$, $\overarc{\mathrm{AP}}:\overarc{\mathrm{PB}}=2:1$이고 $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt[4]{32}$이다. 삼각형 PCB의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오.



[21008-0032]

3 자연수 m에 대하여 집합 A_m을

$$A_m=\{(a, b)\mid m=a\log_2 b\text{이고 } a, b\text{는 자연수}\}$$

라 할 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $A_2=\{(1, 4), (2, 2)\}$

ㄴ. 두 자연수 p, q에 대하여 $n(A_{pq})=n(A_p)\times n(A_q)$이다.

ㄷ. $n(A_m)=4$를 만족시키는 30 이하의 모든 자연수 m의 개수는 9이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

대표 기출 문제

출제 경향 거듭제곱근의 성질이나 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구하는 문제, 로그의 정의와 성질을 이용하여 식의 값을 구하는 문제가 출제된다. 또 거듭제곱근으로 표현된 수나 로그로 나타내어진 수가 자연수가 될 조건을 구하는 문제가 출제된다.

자연수 n의 양의 약수의 개수를 $f(n)$이라 하고, 36의 모든 양의 약수를 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_9라 하자.

$\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$의 값은? [4점]

① $\log 2+\log 3$ ② $2\log 2+\log 3$ ③ $\log 2+2\log 3$

④ $2\log 2+2\log 3$ ⑤ $3\log 2+2\log 3$

2020학년도 대수능

출제 의도 로그의 성질을 이용하여 합의 기호 $\sum$로 주어진 식의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $36=2^2\times3^2$이므로 36의 양의 약수는

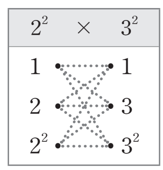
$1,\ 3,\ 3^2,\ 2,\ 2\times3,\ 2\times3^2,\ 2^2,\ 2^2\times3,\ 2^2\times3^2$이다.

$1,\ 3^2,\ 2^2,\ 2^2\times3^2$의 양의 약수의 개수는 홀수이므로

$f(1),\ f(3^2),\ f(2^2),\ f(2^2\times3^2)$은 홀수이고,

$3,\ 2,\ 2\times3,\ 2\times3^2,\ 2^2\times3$의 양의 약수의 개수는 짝수이므로

$f(3),\ f(2),\ f(2\times3),\ f(2\times3^2),\ f(2^2\times3)$은 짝수이다.



따라서

$$\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}$$
$$=-\{\log 1+\log 3^2+\log 2^2+\log(2^2\times3^2)\}$$
$$+\{\log 3+\log 2+\log(2\times3)+\log(2\times3^2)+\log(2^2\times3)\}$$
$$=\log\frac{3\times2\times(2\times3)\times(2\times3^2)\times(2^2\times3)}{1\times3^2\times2^2\times(2^2\times3^2)}$$
$$=\log\frac{2^5\times3^5}{2^4\times3^4}$$
$$=\log(2\times3)$$
$$=\log 2+\log 3$$

답 ①

다른 풀이 $36=1\times36=2\times18=3\times12=4\times9=6\times6$

에서 36의 양의 약수는 $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 12,\ 18,\ 36$이고 이 중에서 양의 약수의 개수가 홀수인 약수는

$1,\ 2^2,\ 3^2,\ 2^2\times3^2$이므로

$$\sum_{k=1}^{9}\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\}=\sum_{k=1}^{9}\log a_k-2\times\{\log 1+\log 2^2+\log 3^2+\log(2^2\times3^2)\}$$
$$=\log(36^4\times6)-\log(2^2\times3^2)^4$$
$$=\log\frac{36^4\times6}{36^4}=\log 6=\log(2\times3)=\log 2+\log 3$$

02 지수함수와 로그함수

1. 지수함수의 뜻

1이 아닌 양의 실수 a에 대하여 임의의 실수 x에 a^x을 대응시키면 x의 값에 따라 a^x의 값이 오직 하나 정해지므로

$y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$

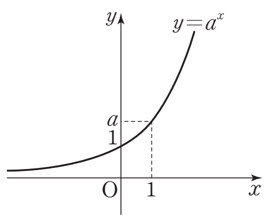
은 x에 대한 함수이다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 지수함수라고 한다.

참고 $y=a^x$에서 $a=1$이면 임의의 실수 x에 대하여 $y=1$이므로 $y=a^x$은 상수함수가 된다.
따라서 지수함수에서는 밑이 1이 아닌 양수인 경우만 생각한다.

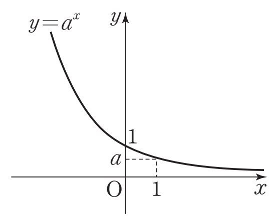
2. 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프는 a의 값의 범위에 따라 그림과 같다.

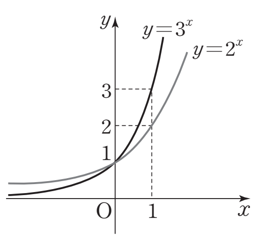
(1) $a>1$일 때

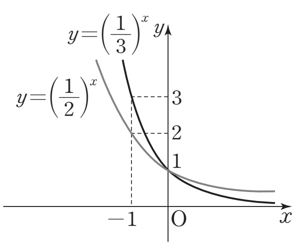


(2) $0<a<1$일 때



예 두 함수 $y=2^x$, $y=3^x$의 그래프와 두 함수 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=\left(\frac{1}{3}\right)^x$의 그래프는 그림과 같다.





① $a>b>1$일 때
$x\geq0$이면 $a^x\geq b^x$, $x<0$이면 $a^x<b^x$

② $0<a<b<1$일 때
$x\geq0$이면 $a^x\leq b^x$, $x<0$이면 $a^x>b^x$

3. 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 실수 전체의 집합이고, 치역은 양의 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.
$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(0,\ 1)$을 지나고, 그래프의 점근선은 x축(직선 $y=0$)이다.

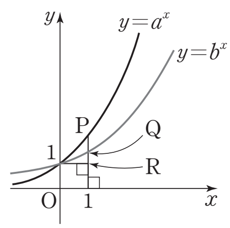
예제 1 지수함수의 그래프

$2\le a\le 10$, $2\le b\le 10$인 서로 다른 두 자연수 a, b에 대하여 직선 $x=1$과 두 함수 $y=a^x$, $y=b^x$의 그래프가 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 R$(1,\ 1)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$를 만족시키는 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는?

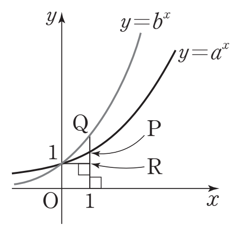
① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

풀이 전략 $a>b$와 $a<b$일 때로 나누어 두 함수 $y=a^x$, $y=b^x$의 그래프를 그린 후 $\overline{\mathrm{PQ}}$, $\overline{\mathrm{PR}}$의 값을 구하고, 주어진 조건을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$를 구한다.

풀이 $a>b$와 $a<b$일 때의 두 함수 $y=a^x$, $y=b^x$의 그래프는 각각 그림과 같고 P$(1,\ a)$, Q$(1,\ b)$이다.



$a>b$일 때



$a<b$일 때

(i) $a>b$일 때

$\overline{\mathrm{PQ}}<\overline{\mathrm{PR}}$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a<b$일 때

$\overline{\mathrm{PQ}}=b-a$이고 $\overline{\mathrm{PR}}=a-1$이므로 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$에서

$$b-a=a-1,\ \text{즉}\ a=\frac{1}{2}(b+1)$$

$a=\frac{1}{2}(b+1)$을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는 $(2,\ 3)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 7)$, $(5,\ 9)$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{PR}}$를 만족시키는 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는 4이다.

답 ②

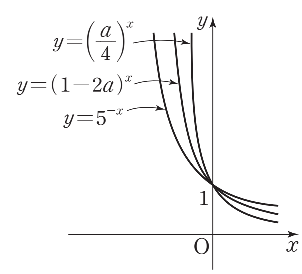
정답과 풀이 12쪽

[21008-0033]

유제 1 $0<a<\frac{1}{2}$인 실수 a에 대하여 세 함수

$$y=5^{-x},\ y=(1-2a)^x,\ y=\left(\frac{a}{4}\right)^x$$

의 그래프가 그림과 같도록 하는 모든 a의 값의 범위가 $p<a<q$일 때, $45(p+q)$의 값을 구하시오.



[21008-0034]

유제 2 $0<a<1$인 상수 a에 대하여 두 함수 $y=2^x$, $y=a^x$의 그래프가 서로 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=2$와 두 함수 $y=2^x$, $y=a^x$의 그래프가 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 원점 O에 대하여 삼각형 ABC의 넓이가 삼각형 AOC의 넓이의 $\frac{7}{2}$배일 때, a의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　② $\frac{\sqrt{2}}{3}$　　③ $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$　　⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

(1) 평행이동

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y=a^{x-m}+n$이다.

이때 함수 $y=a^{x-m}+n$의 그래프는 점 $(m,\ 1+n)$을 지나고, 점근선은 직선 $y=n$이다.

(2) 대칭이동

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축, y축, 원점에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은 각각 다음과 같다.

① x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식: $-y=a^x$, 즉 $y=-a^x$

② y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식: $y=a^{-x}$, 즉 $y=\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

③ 원점에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식: $-y=a^{-x}$, 즉 $y=-\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$

5. 지수함수의 최댓값과 최솟값

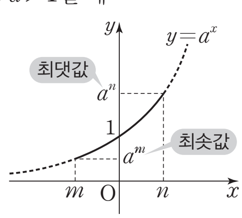
정의역이 $\{x\mid m\le x\le n\}$ $(m<n)$일 때, 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값

(1) $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 a^m, $x=n$에서 최댓값 a^n을 갖는다.

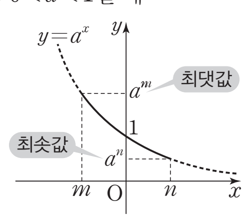
(2) $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 a^m, $x=n$에서 최솟값 a^n을 갖는다.

설명 정의역이 $\{x\mid m\le x\le n\}$ $(m<n)$일 때, 함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값은 함수의 그래프를 그려서 다음과 같이 판단할 수 있다.

(1) $a>1$일 때



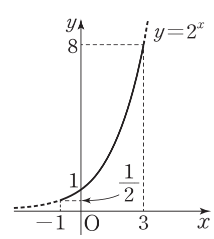
(2) $0<a<1$일 때



예 ① 정의역이 $\{x\mid -1\le x\le 3\}$일 때, 함수 $y=2^x$의 최댓값과 최솟값

2^x의 밑이 2이고 $2>1$이므로 함수 $y=2^x$은

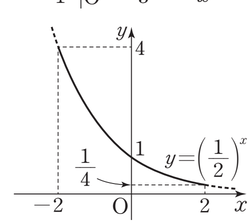
$x=-1$에서 최솟값 $2^{-1}=\dfrac{1}{2}$을 갖고, $x=3$에서 최댓값 $2^3=8$을 갖는다.



② 정의역이 $\{x\mid -2\le x\le 2\}$일 때, 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 최댓값과 최솟값

$\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$의 밑이 $\dfrac{1}{2}$이고 $0<\dfrac{1}{2}<1$이므로 함수 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$은

$x=-2$에서 최댓값 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}=4$를 갖고, $x=2$에서 최솟값 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$을 갖는다.



예제 2 지수함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $y=\frac{a}{2^x}+b$의 그래프는 함수 $y=\frac{1}{2^x}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 것이고, 함수 $y=\frac{1}{2^x}+c$의 그래프는 점 $(-1, 5)$를 지난다. $\frac{b+c}{a^2}$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

풀이 전략 지수함수 $y=a^x$ $(a>0, a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y=a^{x-m}+n$이다.

풀이 함수 $y=\frac{1}{2^x}+c$의 그래프가 점 $(-1, 5)$를 지나므로

$5=\frac{1}{2^{-1}}+c$에서 $c=5-2=3$

함수 $y=\frac{1}{2^x}+3$의 그래프를 x축의 방향으로 $\frac{1}{2}$만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은

$$y=\frac{1}{2^{x-\frac{1}{2}}}+3+2, \text{ 즉 } y=\frac{\sqrt{2}}{2^x}+5$$

따라서 $a=\sqrt{2}$, $b=5$, $c=3$이므로 $\frac{b+c}{a^2}=\frac{5+3}{(\sqrt{2})^2}=4$

답 ④

정답과 풀이 12쪽

[21008-0035]

유제 3 세 상수 a, b, c에 대하여 함수 $y=2^{ax}+2$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 그래프와 함수 $y=\frac{16}{4^x}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 그래프가 서로 일치할 때, $a+b+c$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21008-0036]

유제 4 $0<a<1$인 상수 a와 상수 b에 대하여 정의역이 $\{x|1\leq x\leq 2\}$인 함수 $f(x)=a^x+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m=\frac{15}{4}$, $M-m=\frac{1}{4}$일 때, $a-b$의 값은?

① -5 ② -4 ③ -3 ④ -2 ⑤ -1

6. 로그함수의 뜻

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로 역함수가 존재한다. 로그의 정의에 의하여

$$y=a^x \iff x=\log_a y$$

이므로 $x=\log_a y$에서 x와 y를 서로 바꾸면 지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 역함수

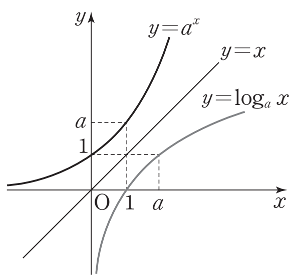
$$y=\log_a x\ (a>0,\ a\neq1)$$

을 얻을 수 있다. 이 함수를 a를 밑으로 하는 로그함수라고 한다.

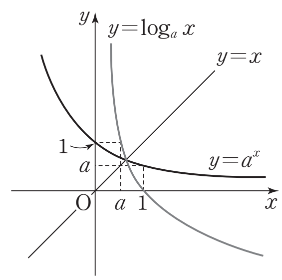
7. 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프

로그함수 $y=\log_a x$는 지수함수 $y=a^x$의 역함수이므로 두 함수 $y=\log_a x$, $y=a^x$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

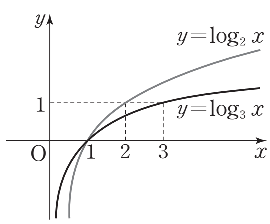
(1) $a>1$일 때

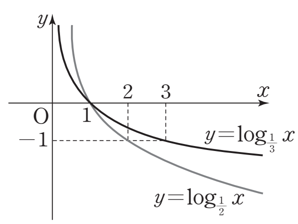


(2) $0<a<1$일 때



예 두 함수 $y=\log_2 x$, $y=\log_3 x$의 그래프와 두 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$, $y=\log_{\frac{1}{3}} x$의 그래프는 그림과 같다.





① $a>b>1$일 때

$x\geq1$이면 $\log_a x\leq\log_b x$, $0<x<1$이면 $\log_a x>\log_b x$

② $0<a<b<1$일 때

$x\geq1$이면 $\log_a x\geq\log_b x$, $0<x<1$이면 $\log_a x<\log_b x$

8. 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 성질

(1) 정의역은 양의 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.

(2) $a>1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값도 증가한다.

$0<a<1$일 때, x의 값이 증가하면 y의 값은 감소한다.

(3) 그래프는 점 $(1,\ 0)$을 지나고, 그래프의 점근선은 y축(직선 $x=0$)이다.

예제 3 로그함수의 그래프

1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. 함수 $y=a^x$의 그래프의 점근선과 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 만나는 점의 좌표는 $(1, 0)$이다.

ㄴ. $0<a<1$, $b>1$이면 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 함수 $y=b^x$의 그래프는 오직 한 점에서 만난다.

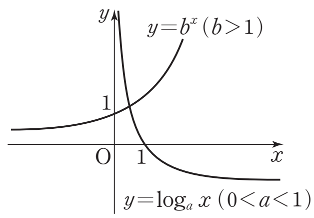
ㄷ. $a>b>1$일 때, $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $\log_a x>\log_b x$이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

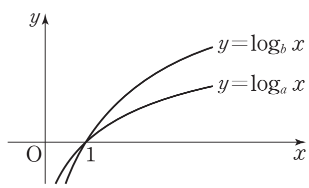
풀이 전략 a, b가 1보다 클 때와 작을 때의 지수함수와 로그함수의 그래프를 그려서 생각해 본다.

풀이 ㄱ. 함수 $y=a^x$의 그래프의 점근선은 x축이고 함수 $y=\log_a x$의 그래프가 x축과 만나는 점의 좌표는 $(1, 0)$이다. (참)

ㄴ. 두 함수 $y=\log_a x$ $(0<a<1)$, $y=b^x$ $(b>1)$의 그래프는 그림과 같다.
따라서 $0<a<1$, $b>1$이면 주어진 두 함수의 그래프는 오직 한 점에서 만난다. (참)



ㄷ. $a>b>1$일 때, 두 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$의 그래프는 그림과 같다.
따라서 $a>b>1$일 때, $x>1$인 모든 실수 x에 대하여 $\log_a x<\log_b x$이다. (거짓)



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

정답과 풀이 13쪽

[21008-0037]

유제 5 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여 두 함수 $y=\log_a x$, $y=b^x$의 그래프는 모두 점 $\left(\sqrt{2}, \frac{1}{2}\right)$을 지난다. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

보기

ㄱ. $a>1$　ㄴ. $b<1$　ㄷ. $ab<1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[21008-0038]

유제 6 $a>2$인 상수 a에 대하여 함수 $y=\log_a x$의 그래프와 함수 $y=\log_2 x$의 그래프가 만나는 점을 A라 하고, 직선 $x=4$가 두 함수 $y=\log_a x$, $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 각각 B, C라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 1일 때, a^2의 값을 구하시오.

9. 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

(1) 평행이동

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y=\log_a(x-m)+n$이다.

이때 함수 $y=\log_a(x-m)+n$의 그래프는 점 $(1+m,\ n)$을 지나고, 점근선은 직선 $x=m$이다.

(2) 대칭이동

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프를 x축, y축, 원점, 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식은 각각 다음과 같다.

① x축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식: $-y=\log_a x$, 즉 $y=-\log_a x$

② y축에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식: $y=\log_a(-x)$

③ 원점에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식: $-y=\log_a(-x)$, 즉 $y=-\log_a(-x)$

④ 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동한 그래프를 나타내는 식: $x=\log_a y$, 즉 $y=a^x$

10. 로그함수의 최댓값과 최솟값

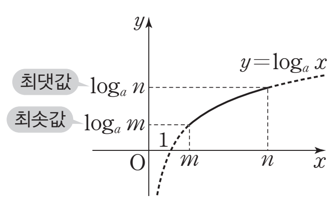
정의역이 $\{x\,|\,m\leq x\leq n\}$ $(0<m<n)$일 때, 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값

(1) $a>1$이면 $x=m$에서 최솟값 $\log_a m$, $x=n$에서 최댓값 $\log_a n$을 갖는다.

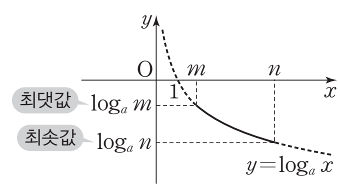
(2) $0<a<1$이면 $x=m$에서 최댓값 $\log_a m$, $x=n$에서 최솟값 $\log_a n$을 갖는다.

설명 정의역이 $\{x\,|\,m\leq x\leq n\}$ $(0<m<n)$일 때, 함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 최댓값과 최솟값은 함수의 그래프를 그려서 다음과 같이 판단할 수 있다.

(1) $a>1$일 때



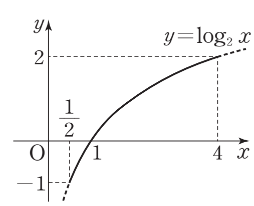
(2) $0<a<1$일 때



예 ① 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leq x\leq 4\right\}$일 때, 함수 $y=\log_2 x$의 최댓값과 최솟값

$\log_2 x$의 밑이 2이고 $2>1$이므로 함수 $y=\log_2 x$는

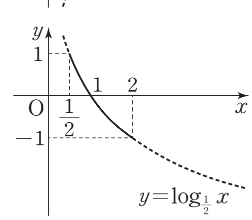
$x=\frac{1}{2}$에서 최솟값 $\log_2\frac{1}{2}=-1$을 갖고, $x=4$에서 최댓값 $\log_2 4=2$를 갖는다.



② 정의역이 $\left\{x\,\middle|\,\frac{1}{2}\leq x\leq 2\right\}$일 때, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 최댓값과 최솟값

$\log_{\frac{1}{2}} x$의 밑이 $\frac{1}{2}$이고 $0<\frac{1}{2}<1$이므로 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$는

$x=\frac{1}{2}$에서 최댓값 $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}=1$을 갖고, $x=2$에서 최솟값 $\log_{\frac{1}{2}} 2=-1$을 갖는다.



예제 4 로그함수의 그래프의 평행이동과 대칭이동

두 상수 a, b에 대하여 함수 $y=-\log_3(3x+a)+b$의 그래프의 점근선과 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+2$의 그래프의 점근선은 서로 같고, 함수 $y=-\log_3(3x+a)+b$의 그래프는 점 $(2, 3)$을 지난다. $a+b$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

풀이 전략

① 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 식은 $y=\log_a(x-m)+n$이다.

② 로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0, a\neq1)$의 그래프의 점근선은 y축(직선 $x=0$)이다.

풀이

함수 $y=-\log_3 3\left(x+\frac{a}{3}\right)+b$의 그래프는 함수 $y=-\log_3 3x$의 그래프를 x축의 방향으로 $-\frac{a}{3}$만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은

직선 $x=-\frac{a}{3}$

함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+2$의 그래프는 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프이므로 점근선은

직선 $x=-1$

두 함수 $y=-\log_3 3\left(x+\frac{a}{3}\right)+b$, $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)+2$의 그래프의 점근선이 서로 같으므로

$-\frac{a}{3}=-1$에서 $a=3$

함수 $y=-\log_3(3x+3)+b$의 그래프가 점 $(2, 3)$을 지나므로

$3=-\log_3(3\times2+3)+b$, $3=-\log_3 3^2+b$

$3=-2+b$에서 $b=5$

따라서 $a+b=3+5=8$

답 ④

정답과 풀이 13쪽

유제 7 [21008-0039]

두 상수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=2^{x-1}+a$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 함수 $y=g(x)$의 그래프는 점 $(3, 2)$를 지나고 점근선은 직선 $x=b$이다. $a+b$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

유제 8 [21008-0040]

정의역이 $\{x\,|\,1\leq x\leq3\}$인 함수 $f(x)=\log_2(3x-1)+1$의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

11. 지수함수의 활용

(1) 지수에 미지수가 있는 방정식

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 실수 전체의 집합에서 양의 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로

$$a^{x_1}=a^{x_2} \iff x_1=x_2$$

가 성립한다. 이 성질을 이용하여 지수에 미지수가 있는 방정식의 해를 구할 수 있다.

① $a^{f(x)}=b \iff f(x)=\log_a b$ (단, $b>0$)

② $a^{f(x)}=a^{g(x)} \iff f(x)=g(x)$

(2) 지수에 미지수가 있는 부등식

지수함수 $y=a^x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프의 성질에 의하여

(i) $a>1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1<x_2$

(ii) $0<a<1$일 때, $a^{x_1}<a^{x_2} \iff x_1>x_2$

가 성립한다. 이 성질을 이용하여 지수에 미지수가 있는 부등식의 해를 구할 수 있다.

① $a>1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)<g(x)$

② $0<a<1$일 때, $a^{f(x)}<a^{g(x)} \iff f(x)>g(x)$

예 ① $3^{2x-1}>3^3$에서 밑이 1보다 크므로 $2x-1>3$에서 $x>2$

② $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}>\left(\frac{1}{2}\right)^5$에서 밑이 1보다 작으므로 $2x-1<5$에서 $x<3$

12. 로그함수의 활용

(1) 로그의 진수에 미지수가 있는 방정식

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$은 양의 실수 전체의 집합에서 실수 전체의 집합으로의 일대일대응이므로

$$\log_a x_1=\log_a x_2 \iff x_1=x_2,\ x_1>0,\ x_2>0$$

이 성립한다. 이 성질을 이용하여 로그의 진수에 미지수가 있는 방정식의 해를 구할 수 있다.

① $\log_a f(x)=b \iff f(x)=a^b,\ f(x)>0$

② $\log_a f(x)=\log_a g(x) \iff f(x)=g(x),\ f(x)>0,\ g(x)>0$

(2) 로그의 진수에 미지수가 있는 부등식

로그함수 $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq1)$의 그래프의 성질에 의하여

(i) $a>1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff 0<x_1<x_2$

(ii) $0<a<1$일 때, $\log_a x_1<\log_a x_2 \iff x_1>x_2>0$

이 성립한다. 이 성질을 이용하여 로그의 진수에 미지수가 있는 부등식의 해를 구할 수 있다.

① $a>1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff 0<f(x)<g(x)$

② $0<a<1$일 때, $\log_a f(x)<\log_a g(x) \iff f(x)>g(x)>0$

예 ① $\log_2 5>\log_2(x-1)$에서 밑이 1보다 크므로 $5>x-1$에서 $x<6$

이때 로그의 진수 조건에 의하여 $x-1>0$에서 $x>1$이므로 구하는 해는 $1<x<6$

② $\log_{\frac{1}{3}}(2x-4)>\log_{\frac{1}{3}}2$에서 밑이 1보다 작으므로 $2x-4<2$에서 $x<3$

이때 로그의 진수 조건에 의하여 $2x-4>0$에서 $x>2$이므로 구하는 해는 $2<x<3$

예제 5 로그의 진수에 미지수가 있는 부등식

부등식 $\log_2(x+3) \geq 1-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

풀이 전략

① $a>1$일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff 0<x_1<x_2$

② $0<a<1$일 때, $\log_a x_1 < \log_a x_2 \iff x_1>x_2>0$

풀이

로그의 진수 조건에 의하여 $x+3>0$이고 $x-2>0$

즉, $x>-3$이고 $x>2$이므로 $x>2$ ...... ㉠

$\log_2(x+3) \geq 1-\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$에서

$\log_2(x+3) \geq 1-\log_{2^{-1}}(x-2)$

$\log_2(x+3) \geq 1+\log_2(x-2)$

$\log_2(x+3) \geq \log_2 2+\log_2(x-2)$

$\log_2(x+3) \geq \log_2 2(x-2)$

$x+3 \geq 2(x-2)$

$x+3 \geq 2x-4$

$x \leq 7$ ...... ㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 x의 값의 범위는 $2<x\leq 7$

따라서 부등식을 만족시키는 정수 x는 3, 4, 5, 6, 7이고, 그 개수는 5이다.

답 ⑤

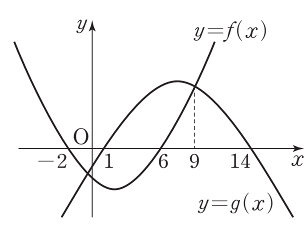
정답과 풀이 13쪽

[21008-0041]

유제 9 부등식 $3^{x^2} < \left(\frac{1}{9}\right)^{2x+1}$의 해가 $\alpha<x<\beta$일 때, $\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha+\beta}$의 값을 구하시오.

[21008-0042]

유제 10 두 이차함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f(-2)=f(6)=g(1)=g(14)=0$, $f(9)=g(9)$이다. 부등식 $\log_{\frac{1}{2}} f(x) > 2\log_{\frac{1}{4}} g(x)$를 만족시키는 모든 정수 x의 개수는?



① 2　② 4　③ 6

④ 8　⑤ 10

[21008-0043]

1 정수 a에 대하여 함수 $f(x)=\left(a^2+4a+\frac{9}{2}\right)^x$이라 하자. 함수 $f(x)$가 모든 음의 실수 x에 대하여 $f(x)>1$을 만족시킬 때, $f(a)$의 값은?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $2\sqrt{2}$ ④ 4 ⑤ $4\sqrt{2}$

[21008-0044]

2 상수 k와 1이 아닌 양수 a에 대하여 함수 $y=a^{x+k}-1$의 그래프가 x축, y축과 만나는 점의 좌표가 각각 $(-2, 0)$, $(0, 2)$일 때, a^2+k^2의 값은?

① 5 ② 7 ③ 9 ④ 11 ⑤ 13

[21008-0045]

3 함수 $y=2^{x-1}+1$의 그래프를 y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프의 점근선이 함수 $y=\log_2 x+1$의 그래프와 만나는 점의 좌표가 (a, b)일 때, $a+b$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

[21008-0046]

4 두 함수 $f(x)=3^x$, $g(x)=2^{-x}$에 대하여 함수 $h(x)=f(x)g(x)$라 하자. $-1\le x\le 2$에서 함수 $h(x)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, Mm의 값은?

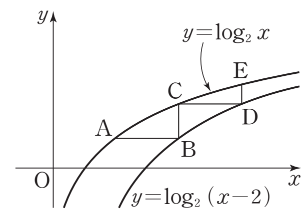
① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

[21008-0047]

5 부등식 $\log_2(x^2-3x)>\log_2(8-x)$를 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오.

[21008-0048]

1 그림과 같이 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 한 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x-2)$와 만나는 점을 B, 점 B를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2(x-2)$와 만나는 점을 D, 점 D를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 ABC의 넓이가 1일 때, 삼각형 CDE의 넓이는?



① $\log_2 \frac{7}{6}$ ② $\log_2 \frac{4}{3}$ ③ $\log_2 \frac{3}{2}$ ④ $\log_2 \frac{5}{3}$ ⑤ $\log_2 \frac{11}{6}$

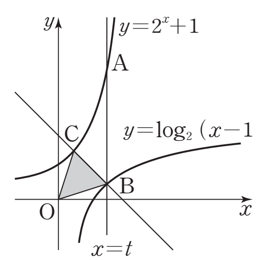
[21008-0049]

2 두 함수 $y=2^{x+2}-1$, $y=\log_{\frac{1}{3}}(x+a)$의 그래프가 제2사분면에서 만나도록 하는 모든 실수 a의 값의 범위는?

① $-1<a<2$ ② $-\frac{1}{3}<a<2$ ③ $0<a<\frac{5}{2}$ ④ $\frac{1}{27}<a<3$ ⑤ $\frac{1}{9}<a<\frac{7}{2}$

[21008-0050]

3 그림과 같이 직선 $x=t$ $(t>2)$가 두 함수 $y=2^x+1$, $y=\log_2(x-1)$의 그래프와 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 기울기가 -1인 직선이 함수 $y=2^x+1$의 그래프와 만나는 점을 C라 하자. $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=2\sqrt{2}$일 때, 삼각형 OBC의 넓이는? (단, O는 원점이다.)



① 3 ② 4 ③ $3\sqrt{2}$
④ $4\sqrt{2}$ ⑤ 6

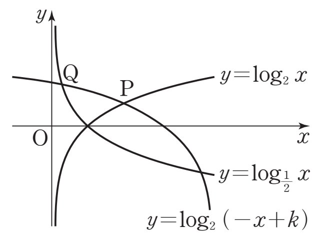
[21008-0051]

4 두 함수 $f(x)=3x^2-12x+16$, $g(x)=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$이 있다. $1\le x\le 4$에서 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 최솟값이 -2, 최댓값이 M일 때, M의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

[21008-0052]

5 그림과 같이 함수 $y=\log_2(-x+k)\,(k>2)$의 그래프가 함수 $y=\log_2 x$의 그래프와 만나는 점을 P, 함수 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 Q라 하자. 두 점 P, Q의 x좌표의 차가 $\sqrt{3}$일 때, 상수 k의 값은?



① $2\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ 4
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

[21008-0053]

6 k가 1이 아닌 양수일 때, x에 대한 방정식 $2^{\frac{x}{4}}=kx$는 서로 다른 두 실근 α, β를 갖고 $\alpha : \beta=1 : 2$이다. $\log_k \alpha$의 값은?

① -2 ② $-\frac{7}{4}$ ③ $-\frac{3}{2}$ ④ $-\frac{5}{4}$ ⑤ -1

[21008-0054]

7 x에 대한 방정식 $\log_2(3x+1)+\log_2(3-x)=\log_2 a$를 만족시키는 실수 x가 존재하도록 하는 모든 자연수 a의 개수는?

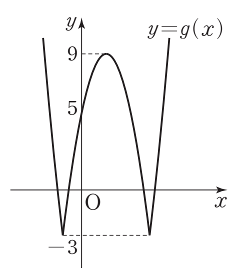
① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

[21008-0055]

8 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=|f(x)|-3$의 그래프가 그림과 같다. 정수 k에 대하여 집합 A_k를

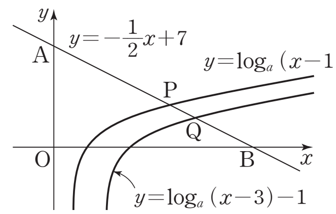
$$A_k=\{x\,|\,\log_2\{g(x)+2\}\le\log_2 11,\ g(x)=k,\ x>0\}$$

이라 할 때, $n(A_k)=2$를 만족시키는 모든 k의 값의 합을 구하시오.



[21008-0056]

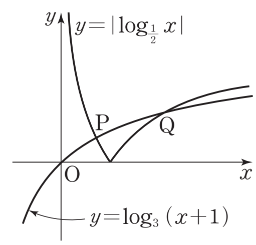
1 그림과 같이 직선 $y=-\frac{1}{2}x+7$이 y축, x축과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=-\frac{1}{2}x+7$이 두 함수 $y=\log_a(x-1)$, $y=\log_a(x-3)-1$의 그래프와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. $\overline{\mathrm{AP}}=2\overline{\mathrm{QB}}$일 때, 상수 a의 값은? (단, $a>1$)



① $\sqrt[3]{5}$　② $\sqrt{3}$　③ $\sqrt[3]{7}$
④ $\sqrt[3]{9}$　⑤ $\sqrt{5}$

[21008-0057]

2 그림과 같이 함수 $y=\log_3(x+1)$의 그래프와 함수 $y=|\log_{\frac{1}{2}}x|$의 그래프가 만나는 두 점을 각각 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$ $(x_1<x_2)$라 하자. **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?



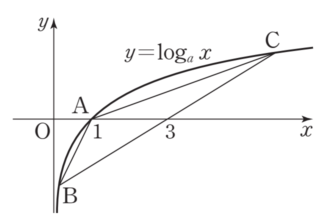
보기

ㄱ. $x_1>\frac{1}{2}$　ㄴ. $y_2<1$　ㄷ. $y_1<x_1<2y_1$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ　④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[21008-0058]

3 그림과 같이 곡선 $y=\log_a x$ $(a>1)$ 위에 서로 다른 세 점 $\mathrm{A}(1, 0)$, $\mathrm{B}(x_1, y_1)$, $\mathrm{C}(x_2, y_2)$가 있다. $x_1<1<x_2$를 만족시키는 세 수 x_1, 1, x_2는 이 순서대로 등비수열을 이룬다. 직선 BC의 x절편이 3이고 삼각형 ABC의 넓이가 4일 때, $a^2+\frac{1}{a^2}$의 값을 구하시오.



대표 기출 문제

출제 경향 지수함수의 그래프 위의 점과 관련된 조건으로부터 식을 세우고 지수, 로그의 성질을 이용하여 미지수를 구하는 문제가 출제된다.

지수함수 $y=a^x$ $(a>1)$의 그래프와 직선 $y=\sqrt{3}$이 만나는 점을 A라 하자. 점 $B(4, 0)$에 대하여 직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이 되도록 하는 모든 a의 값의 곱은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $3^{\frac{1}{3}}$　② $3^{\frac{2}{3}}$　③ 3　④ $3^{\frac{4}{3}}$　⑤ $3^{\frac{5}{3}}$

2020학년도 대수능

출제 의도 지수함수의 그래프와 로그의 성질을 이용하여 미지수를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $a^x=\sqrt{3}$에서 $x=\log_a\sqrt{3}$이므로 점 A의 좌표는 $(\log_a\sqrt{3}, \sqrt{3})$이다.

직선 OA의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}$$

$B(4, 0)$이므로 직선 AB의 기울기는

$$\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}$$

직선 OA와 직선 AB가 서로 수직이려면

$$\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}}\times\frac{\sqrt{3}}{\log_a\sqrt{3}-4}=-1$$

이어야 한다.

즉, $(\log_a\sqrt{3})^2-4\log_a\sqrt{3}+3=0$에서

$$(\log_a\sqrt{3}-1)(\log_a\sqrt{3}-3)=0$$

$\log_a\sqrt{3}=1$ 또는 $\log_a\sqrt{3}=3$

$a=\sqrt{3}$ 또는 $a^3=\sqrt{3}$

따라서 $a=3^{\frac{1}{2}}$ 또는 $a=3^{\frac{1}{6}}$이므로 모든 a의 값의 곱은

$$3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{1}{6}}=3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=3^{\frac{2}{3}}$$

답 ②

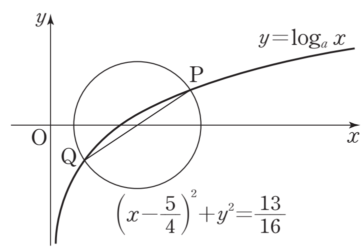
대표 기출 문제

출제 경향 로그함수의 그래프 위의 점과 관련된 조건으로부터 식을 세우고 지수, 로그의 성질을 이용하여 미지수를 구하는 문제가 출제된다.

$a>1$인 실수 a에 대하여 곡선 $y=\log_a x$와

원 $C : \left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\frac{13}{16}$의 두 교점을 P, Q라 하자. 선분 PQ가

원 C의 지름일 때, a의 값은? [4점]



① 3 ② $\frac{7}{2}$ ③ 4

④ $\frac{9}{2}$ ⑤ 5

2018학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 로그함수의 그래프와 원의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 원 $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right)^2$의 중심의 좌표는 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$, 반지름의 길이는 $\frac{\sqrt{13}}{4}$이다.

두 점 P, Q의 좌표를 각각 $\mathrm{P}(p, \log_a p)$, $\mathrm{Q}(q, \log_a q)$ $(p>q)$라 하면

선분 PQ의 중점이 원의 중심 $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$이므로

$\frac{p+q}{2}=\frac{5}{4}$, $\frac{\log_a p+\log_a q}{2}=0$에서

$$p+q=\frac{5}{2},\ pq=1$$

p, q를 두 실근으로 갖는 t에 대한 이차방정식은

$$t^2-\frac{5}{2}t+1=0,\ 2t^2-5t+2=0$$

$$(t-2)(2t-1)=0$$

$$t=2 \text{ 또는 } t=\frac{1}{2}$$

따라서 $p=2$, $q=\frac{1}{2}$이므로 $\mathrm{P}(2, \log_a 2)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2}, \log_a \frac{1}{2}\right)$

이때 선분 PQ가 원 C의 지름이므로

$$\left(2-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\log_a 2-\log_a \frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$$

$$\frac{9}{4}+\{\log_a 2-(-\log_a 2)\}^2=\frac{13}{4}$$

$$(2\log_a 2)^2=1$$

$$(\log_a 4)^2=1$$

$a>1$이므로 $\log_a 4=1$에서 $a=4$

답 ③

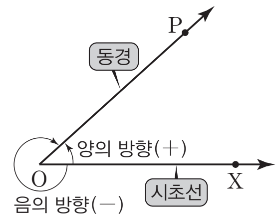
03 삼각함수의 뜻과 그래프

1. 일반각과 호도법

(1) 일반각

① 각과 각의 크기

평면에서 반직선 OP가 반직선 OX의 위치에서 점 O를 중심으로 회전할 때, 두 반직선 OX, OP로 이루어진 도형을 기호 ∠XOP로 나타내고, 회전한 양을 ∠XOP의 크기라고 한다. 이때 반직선 OX를 시초선, 반직선 OP를 동경이라고 한다. 또 동경 OP가 점 O를 중심으로 회전할 때, 시곗바늘이 도는 방향의 반대방향을 양의 방향, 시곗바늘이 도는 방향을 음의 방향이라고 한다.



이때 각의 크기는 양의 방향일 때는 양의 부호 +, 음의 방향일 때는 음의 부호 −를 붙여서 나타낸다.

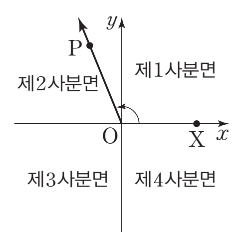
② 일반각

시초선 OX와 동경 OP에 의하여 ∠XOP가 주어질 때, 동경 OP가 나타내는 한 각의 크기를 α°라 하면 ∠XOP의 크기는 다음과 같이 나타내고, 이것을 동경 OP가 나타내는 일반각이라고 한다.

$360^\circ \times n + \alpha^\circ$ (단, n은 정수)

③ 사분면의 각

좌표평면에서 원점 O에 대하여 시초선 OX를 x축의 양의 방향으로 잡을 때, 동경 OP가 제1사분면, 제2사분면, 제3사분면, 제4사분면에 있으면 동경 OP가 나타내는 각을 각각 제1사분면의 각, 제2사분면의 각, 제3사분면의 각, 제4사분면의 각이라고 한다.

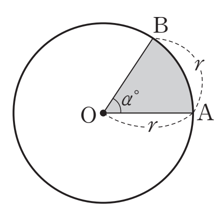


(2) 호도법

① 호도법

중심이 O이고 반지름의 길이가 r인 원에서 호 AB의 길이가 r인 부채꼴 OAB의 중심각의 크기 α°를 1라디안(radian)이라 하고, 이것을 단위로 하여 각의 크기를 나타내는 방법을 호도법이라고 한다.

참고 호도법으로 각의 크기를 나타낼 때는 단위인 라디안은 보통 생략한다.



② 육십분법과 호도법의 관계

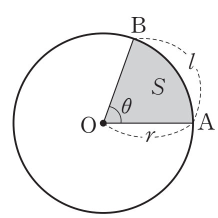
$1\,(\text{라디안}) = \dfrac{180^\circ}{\pi}$, $1^\circ = \dfrac{\pi}{180}\,(\text{라디안})$

설명 호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로 $2\pi r : r = 360^\circ : \alpha^\circ$, $\alpha^\circ = \dfrac{180^\circ}{\pi}$, 즉 $1\,(\text{라디안}) = \dfrac{180^\circ}{\pi}$

③ 부채꼴의 호의 길이와 넓이

반지름의 길이가 r, 중심각의 크기가 θ(라디안)인 부채꼴에서 호의 길이를 l, 넓이를 S라 하면

(i) $l = r\theta$　　　　(ii) $S = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}rl$

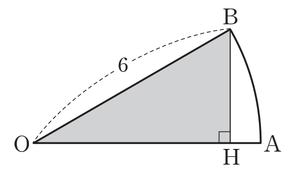


설명 호의 길이 l과 부채꼴의 넓이 S는 중심각의 크기 θ(라디안)에 비례하므로

(i) $l : 2\pi r = \theta : 2\pi$에서 $l = r\theta$　　　　(ii) $S : \pi r^2 = \theta : 2\pi$에서 $S = \dfrac{1}{2}r^2\theta = \dfrac{1}{2}rl$

예제 1 일반각과 호도법

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 6, 넓이가 3π인 부채꼴 OAB가 있다. 점 B에서 선분 OA에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 OHB의 넓이는?



① $\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$　　② $4\sqrt{3}$　　③ $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

④ $5\sqrt{3}$　　⑤ $\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$

풀이 전략 부채꼴의 반지름의 길이와 넓이를 이용하여 부채꼴의 중심각의 크기를 구한 후 삼각형의 넓이를 구한다.

풀이 $\angle AOB=\theta$라 하면 부채꼴 OAB의 넓이가 3π이므로

$$\frac{1}{2}\times 6^2\times\theta=3\pi,\ \theta=\frac{\pi}{6}$$

따라서

$$\overline{OH}=6\cos\frac{\pi}{6}=6\times\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3},$$

$$\overline{BH}=6\sin\frac{\pi}{6}=6\times\frac{1}{2}=3$$

이므로 삼각형 OHB의 넓이는

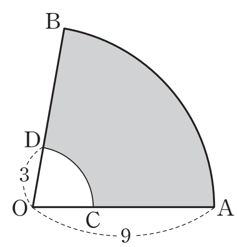
$$\frac{1}{2}\times\overline{OH}\times\overline{BH}=\frac{1}{2}\times 3\sqrt{3}\times 3=\frac{9\sqrt{3}}{2}$$

답 ③

정답과 풀이 19쪽

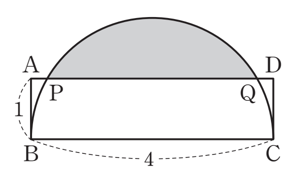
유제 1 [21008-0059]

그림과 같이 중심이 O이고 반지름의 길이가 9인 부채꼴 OAB에서 두 선분 OA, OB 위에 각각 $\overline{OC}=\overline{OD}=3$인 두 점 C, D가 있다. 부채꼴 OAB의 호 AB와 부채꼴 OCD의 호 CD 및 두 선분 AC, BD로 둘러싸인 도형의 둘레의 길이가 28일 때, 이 도형의 넓이를 구하시오.



유제 2 [21008-0060]

그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{BC}=4$인 직사각형 ABCD에 대하여 선분 BC를 지름으로 하는 반원의 호 BC와 선분 AD의 교점을 각각 P, Q라 하자. 호 PQ와 선분 PQ로 둘러싸인 부분의 넓이는?

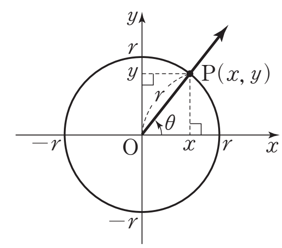


① $\dfrac{4}{3}\pi-2\sqrt{3}$　　② $\dfrac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$　　③ $\dfrac{2}{3}\pi+\sqrt{3}$

④ $\dfrac{2}{3}\pi+2\sqrt{3}$　　⑤ $\dfrac{4}{3}\pi+\sqrt{3}$

2. 삼각함수의 정의

좌표평면에서 중심이 원점 O이고 반지름의 길이가 r인 원 위의 한 점을 $\mathrm{P}(x, y)$, x축의 양의 방향을 시초선으로 하였을 때 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, θ에 대한 삼각함수를 다음과 같이 정의한다.



$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

이때 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$를 각각 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라고 한다.

설명 동경 OP가 나타내는 각의 크기 θ에 대하여 다음 값은 각각 하나로 결정된다.

$$\frac{y}{r},\ \frac{x}{r},\ \frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

즉, 다음의 대응관계는 각각 θ에 대한 함수가 된다.

$$\theta \longrightarrow \frac{y}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{x}{r},\ \theta \longrightarrow \frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

이때 각 함수를 사인함수, 코사인함수, 탄젠트함수라 하고, 이것을 각각 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\sin\theta=\frac{y}{r},\ \cos\theta=\frac{x}{r},\ \tan\theta=\frac{y}{x}\ (x\neq0)$$

참고 (1) 각 사분면에서의 삼각함수의 부호는 다음 표와 같다.

삼각함수 \ 사분면	제1사분면	제2사분면	제3사분면	제4사분면
$\sin\theta$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\theta$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\theta$	$+$	$-$	$+$	$-$

(2) $\tan\theta$는 $\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)에서 정의되지 않는다.

3. 삼각함수 사이의 관계

(1) $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

(2) $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

설명 크기가 θ인 각을 나타내는 동경과 원 $x^2+y^2=1$이 만나는 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라 하면 다음이 성립한다.

(1) $\sin\theta=y$, $\cos\theta=x$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$ $(x\neq0)$이므로

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

(2) 점 $\mathrm{P}(x, y)$가 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=y^2+x^2=1$$

예제 2 삼각함수의 정의

좌표평면 위의 원점 O와 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ $(0\le\theta<2\pi)$라 하고, 점 P와 원점에 대하여 대칭인 점을 P′이라 할 때, 점 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\tan\theta<0$
(나) 동경 OP′이 나타내는 각의 크기는 5θ이다.

$\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\sqrt{2}$　② -1　③ 0　④ 1　⑤ $\sqrt{2}$

풀이 전략 주어진 조건을 만족시키는 각의 크기를 구하여 삼각함수의 값을 구한다.

풀이 조건 (가)에서 $\tan\theta<0$이므로 θ는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다. …… ㉠
조건 (나)에서 동경 OP′이 나타내는 각의 크기가 5θ이므로
$5\theta-\theta=(2n+1)\pi$
즉, $\theta=\frac{2n+1}{4}\pi$ (단, n은 정수)
㉠에 의하여 $\theta=\frac{3}{4}\pi$ 또는 $\theta=\frac{7}{4}\pi$
$\theta=\frac{3}{4}\pi$일 때,

$$\sin\theta+\cos\theta=\sin\frac{3}{4}\pi+\cos\frac{3}{4}\pi=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=0$$

$\theta=\frac{7}{4}\pi$일 때,

$$\sin\theta+\cos\theta=\sin\frac{7}{4}\pi+\cos\frac{7}{4}\pi=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

따라서 $\sin\theta+\cos\theta=0$

답 ③

정답과 풀이 20쪽

[21008-0061]

유제 3 θ가 제4사분면의 각이고 $\sin\theta=-\frac{5}{13}$일 때, $\cos\theta+\tan\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.
(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[21008-0062]

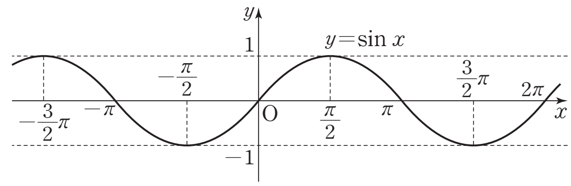
유제 4 θ가 제3사분면의 각이고 $4\sin\theta+\cos\theta+4=0$일 때, $\sin\theta+\cos\theta$의 값은?

① $-\frac{25}{17}$　② $-\frac{24}{17}$　③ $-\frac{23}{17}$　④ $-\frac{22}{17}$　⑤ $-\frac{21}{17}$

4. 삼각함수의 그래프

(1) 함수 $y=\sin x$의 그래프

① 정의역은 실수 전체의 집합이고,
치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.



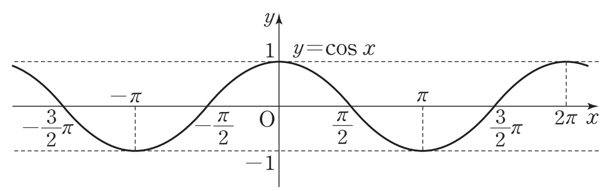
② 모든 실수 x에 대하여
$\sin(-x)=-\sin x$이다.
즉, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

③ 모든 실수 x에 대하여 $\sin(2n\pi+x)=\sin x$ (n은 정수)이고, 주기가 2π인 주기함수이다.

참고 함수 $f(x)$의 정의역에 속하는 임의의 실수 x에 대하여 $f(x+p)=f(x)$를 만족시키는 0이 아닌 상수 p가 존재할 때 함수 $f(x)$를 주기함수라 하고, 상수 p 중 최소인 양수를 함수 $f(x)$의 주기라고 한다.

(2) 함수 $y=\cos x$의 그래프

① 정의역은 실수 전체의 집합이고,
치역은 $\{y \mid -1 \le y \le 1\}$이다.

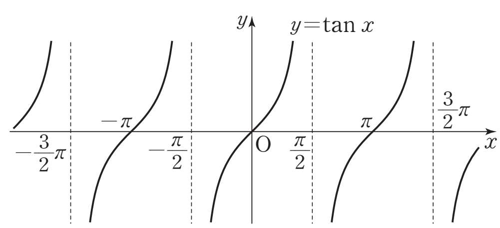


② 모든 실수 x에 대하여
$\cos(-x)=\cos x$이다.
즉, 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

③ 모든 실수 x에 대하여 $\cos(2n\pi+x)=\cos x$ (n은 정수)이고, 주기가 2π인 주기함수이다.

(3) 함수 $y=\tan x$의 그래프

① 정의역은 $x \ne n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)인 실수 전체의 집합이고, 치역은 실수 전체의 집합이다.



② 정의역에 속하는 모든 실수 x에 대하여
$\tan(-x)=-\tan x$이다.
즉, 그래프는 원점에 대하여 대칭이다.

③ 모든 실수 x에 대하여 $\tan(n\pi+x)=\tan x$ (n은 정수)이고, 주기가 π인 주기함수이다.

④ 그래프의 점근선은 직선 $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ (n은 정수)이다.

참고 여러 가지 삼각함수의 그래프

(1) 함수 $y=a\sin x$, $y=a\cos x$, $y=a\tan x$ (a는 0이 아닌 상수)의 그래프

① 두 함수 $y=a\sin x$, $y=a\cos x$의 최댓값과 최솟값은 각각 $|a|$, $-|a|$이다.

② 함수 $y=a\tan x$의 최댓값과 최솟값은 없다.

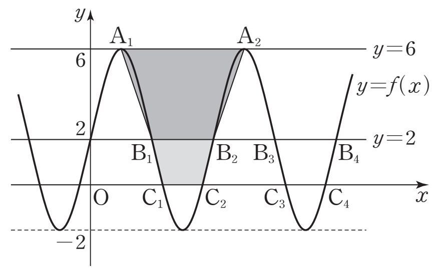
(2) 함수 $y=\sin ax$, $y=\cos ax$, $y=\tan ax$ (a는 0이 아닌 상수)의 그래프

① 두 함수 $y=\sin ax$, $y=\cos ax$의 주기는 모두 $\frac{2\pi}{|a|}$이다.

② 함수 $y=\tan ax$의 주기는 $\frac{\pi}{|a|}$이다.

예제 3 삼각함수의 그래프

양수 k에 대하여 $f(x)=4\sin(kx)+2$일 때, 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 직선 $y=6$과 제1사분면에서 만나는 점 중에서 x좌표가 작은 것부터 순서대로 A_1, A_2, $\cdots$, 직선 $y=2$와 제1사분면에서 만나는 점 중에서 x좌표가 작은 것부터 순서대로 B_1, B_2, $\cdots$, x축과 $x>0$에서 만나는 점 중에서 x좌표가 작은 것부터 순서대로 C_1, C_2, $\cdots$이라 하자. 사각형 $A_1B_1B_2A_2$의 넓이가 18일 때, 사각형 $B_1C_1C_2B_2$의 넓이는?



① 4 ② $\frac{17}{4}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{19}{4}$ ⑤ 5

풀이 전략 주어진 조건을 이용하여 미지수 k의 값을 구하고, $y=0$을 대입하여 x축과 만나는 점의 좌표를 구하여 사각형의 넓이를 구한다.

풀이 양수 k에 대하여 함수 $y=4\sin(kx)+2$의 주기는 $\frac{2\pi}{k}$이므로

$$\overline{A_1A_2}=\frac{2\pi}{k},\ \overline{B_1B_2}=\frac{1}{2}\times\frac{2\pi}{k}=\frac{\pi}{k}$$

이때 사각형 $A_1B_1B_2A_2$의 넓이가

$$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2\pi}{k}+\frac{\pi}{k}\right)\times 4=\frac{6\pi}{k}$$

이므로 $\frac{6\pi}{k}=18$에서 $k=\frac{\pi}{3}$

즉, $f(x)=4\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)+2$이고, $\overline{B_1B_2}=\frac{\pi}{k}=3$

한편, $4\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)+2=0$에서 $\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)=-\frac{1}{2}$

$$\frac{\pi}{3}x=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\ \cdots$$

$$x=\frac{7}{2},\ \frac{11}{2},\ \cdots$$

이므로 $\overline{C_1C_2}=\frac{11}{2}-\frac{7}{2}=2$

따라서 구하는 사각형 $B_1C_1C_2B_2$의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times(\overline{B_1B_2}+\overline{C_1C_2})\times 2=\frac{1}{2}\times(3+2)\times 2=5$$

답 ⑤

정답과 풀이 20쪽

유제 5 [21008-0063]

두 상수 a, b에 대하여 함수 $y=2\cos(ax)+b$의 주기가 6π이고 최댓값이 5일 때, $a+b$의 값은? (단, $a>0$)

① $\frac{19}{6}$ ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{7}{2}$ ④ $\frac{11}{3}$ ⑤ $\frac{23}{6}$

5. 삼각함수의 성질

(1) $2n\pi+\theta$의 삼각함수 (단, n은 정수)

① $\sin(2n\pi+\theta)=\sin\theta$ ② $\cos(2n\pi+\theta)=\cos\theta$ ③ $\tan(2n\pi+\theta)=\tan\theta$

(2) $-\theta$의 삼각함수

① $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ ② $\cos(-\theta)=\cos\theta$ ③ $\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(3) $\pi+\theta$의 삼각함수

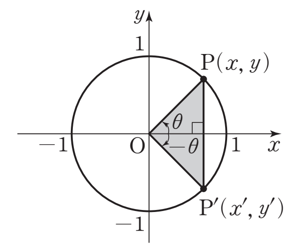
① $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ ② $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$ ③ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

(4) $\dfrac{\pi}{2}+\theta$의 삼각함수

① $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\cos\theta$ ② $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

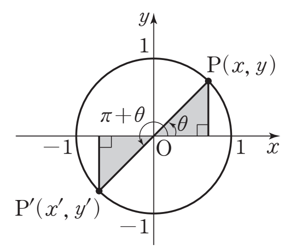
설명 (2) 크기가 θ, $-\theta$인 각을 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면 점 P와 점 P′은 x축에 대하여 서로 대칭이므로 $x'=x$, $y'=-y$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\sin(-\theta)=y'=-y=-\sin\theta$$
$$\cos(-\theta)=x'=x=\cos\theta$$
$$\tan(-\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{x}=-\tan\theta\ (x\neq0)$$



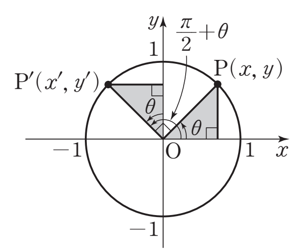
(3) 크기가 θ, $\pi+\theta$인 각을 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면 점 P와 점 P′은 원점에 대하여 서로 대칭이므로 $x'=-x$, $y'=-y$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\sin(\pi+\theta)=y'=-y=-\sin\theta$$
$$\cos(\pi+\theta)=x'=-x=-\cos\theta$$
$$\tan(\pi+\theta)=\frac{y'}{x'}=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x}=\tan\theta\ (x\neq0)$$



(4) 크기가 θ, $\dfrac{\pi}{2}+\theta$인 각을 나타내는 동경이 원 $x^2+y^2=1$과 만나는 점을 각각 $\mathrm{P}(x, y)$, $\mathrm{P}'(x', y')$이라 하면 점 P′의 x좌표는 점 P의 y좌표와 절댓값이 서로 같고 부호가 반대이므로 $x'=-y$이고, 점 P′의 y좌표는 점 P의 x좌표와 같으므로 $y'=x$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=y'=x=\cos\theta$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=x'=-y=-\sin\theta$$



참고 위의 (3), (4)의 식에 θ 대신 $-\theta$를 대입하면 다음이 성립한다.

(1) $\sin(\pi-\theta)=-\sin(-\theta)=\sin\theta$, $\cos(\pi-\theta)=-\cos(-\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=\tan(-\theta)=-\tan\theta$

(2) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sin(-\theta)=\sin\theta$

예제 4 삼각함수의 성질

$\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{3}$이고 $\tan\theta<0$일 때,

$$\left\{\sin(\pi+\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}\times\tan(\pi-\theta)$$

의 값은?

① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{6}$ ③ $-\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{\sqrt{2}}{6}$

풀이 전략 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 삼각함수의 값을 구한 후, 삼각함수의 성질을 이용하여 식의 값을 구한다.

풀이 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta=\frac{1}{3}$

이때 $\sin\theta>0$, $\tan\theta<0$에서 θ는 제2사분면의 각이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\frac{1}{9}}=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{1}{3}}{-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$$

따라서

$$\begin{aligned}\left\{\sin(\pi+\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\right\}\times\tan(\pi-\theta)&=(-\sin\theta-\sin\theta)\times(-\tan\theta)\\&=2\sin\theta\tan\theta\\&=2\times\frac{1}{3}\times\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\\&=-\frac{\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

답 ②

정답과 풀이 20쪽

[21008-0064]

유제 6 $\sin\theta=\frac{3}{5}$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\sin(\pi+\theta)+\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\theta\right)$의 값은?

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{5}$ ③ $-\frac{2}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

[21008-0065]

유제 7 $\frac{3}{2}\pi<\theta<2\pi$인 θ에 대하여 $\sin\theta=-\frac{2}{3}$일 때, $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\tan(\pi+\theta)$의 값은?

① $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $-\frac{\sqrt{5}}{15}$ ③ $\frac{\sqrt{5}}{15}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{5}}{3}$

6. 삼각함수의 활용

(1) 방정식에의 활용

방정식 $2\sin x=1$, $\tan x=-1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 방정식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 방정식을 $\sin x=k$ ($\cos x=k$, $\tan x=k$)의 꼴로 변형한다.

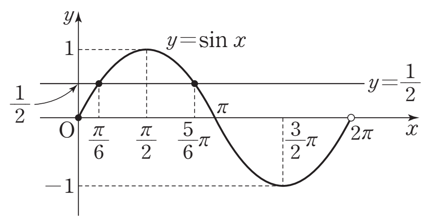
② 주어진 범위에서 삼각함수 $y=\sin x$ ($y=\cos x$, $y=\tan x$)의 그래프와 직선 $y=k$를 그린 후 두 그래프의 교점의 x좌표를 찾아서 해를 구한다.

예 $0\le x<2\pi$일 때, 방정식 $\sin x=\frac{1}{2}$의 해를 구해 보자.

이 방정식의 해는 함수 $y=\sin x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표이다.

그러므로 그림에서 구하는 해는

$x=\frac{\pi}{6}$ 또는 $x=\frac{5}{6}\pi$

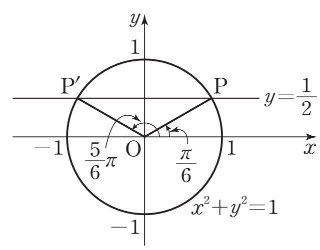


참고 다음과 같이 단위원을 이용하여 풀 수도 있다.

단위원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=\frac{1}{2}$이 만나는 두 점을 P, P′이라 할 때, 원점 O에 대하여 방정식 $\sin\theta=\frac{1}{2}$의 해는 두 동경 OP, OP′이 나타내는 각의 크기이다.

그러므로 그림에서 구하는 해는

$\theta=\frac{\pi}{6}$ 또는 $\theta=\frac{5}{6}\pi$



(2) 부등식에의 활용

부등식 $2\sin x<1$, $2\sin x>-1$과 같이 각의 크기가 미지수인 삼각함수를 포함한 부등식은 삼각함수의 그래프를 이용하여 다음과 같이 풀 수 있다.

① 주어진 부등식을 $\sin x>k$ ($\sin x\ge k$, $\sin x<k$, $\sin x\le k$)의 꼴로 변형한다.

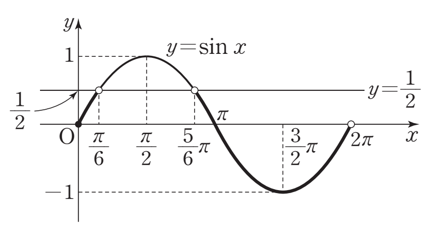
② 주어진 범위에서 삼각함수 $y=\sin x$의 그래프가 직선 $y=k$보다 위쪽(또는 아래쪽)에 있는 x의 값의 범위를 찾아서 해를 구한다. 이때 함수 $y=\sin x$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 x좌표를 찾는다.

예 $0\le x<2\pi$일 때, 부등식 $\sin x<\frac{1}{2}$의 해를 구해 보자.

이 부등식의 해는 함수 $y=\sin x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프가 직선 $y=\frac{1}{2}$보다 아래쪽에 있는 x의 값의 범위이다.

이때 함수 $y=\sin x$ $(0\le x<2\pi)$의 그래프와 직선 $y=\frac{1}{2}$의 교점의 x좌표가 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5}{6}\pi$이므로 구하는 해는

$0\le x<\frac{\pi}{6}$ 또는 $\frac{5}{6}\pi<x<2\pi$



참고 (1) 삼각함수를 포함한 부등식도 방정식과 마찬가지로 단위원을 이용하여 풀 수 있다.

(2) 두 개 이상의 삼각함수가 포함된 방정식 또는 부등식은 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 등을 이용하여 하나의 삼각함수로 변형하여 풀면 편리하다.

예제 5 삼각함수의 활용

$0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $\sin^2 x - \sin x \cos x - \sin x - \cos x - 1 = 0$을 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 값의 합은?

① 3π ② $\frac{7}{2}\pi$ ③ 4π ④ $\frac{9}{2}\pi$ ⑤ 5π

풀이 전략 삼각함수 사이의 관계를 이용하여 식을 변형한 후, 인수분해하여 방정식의 해를 구한다.

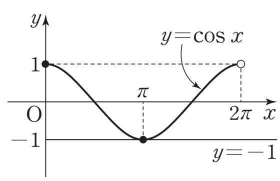
풀이 $\sin^2 x - \sin x \cos x - \sin x - \cos x - 1 = 0$에서

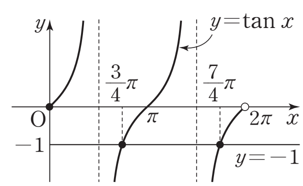
$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$이므로

$$1 - \cos^2 x - \sin x \cos x - \sin x - \cos x - 1 = 0$$
$$\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin x + \cos x = 0$$
$$\cos x(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x) = 0$$
$$(\cos x + 1)(\sin x + \cos x) = 0$$
$$\cos x + 1 = 0 \text{ 또는 } \sin x + \cos x = 0$$

즉, $\cos x = -1$ 또는 $\tan x = -1$

이때 $0 \le x < 2\pi$에서 함수 $y = \cos x$의 그래프와 직선 $y = -1$이 만나는 점의 x좌표는 π이고, 함수 $y = \tan x$의 그래프와 직선 $y = -1$이 만나는 점의 x좌표는 $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{7}{4}\pi$이다.





따라서 구하는 모든 실수 x의 값의 합은

$$\pi + \frac{3}{4}\pi + \frac{7}{4}\pi = \frac{7}{2}\pi$$

답 ②

정답과 풀이 21쪽

[21008-0066]

유제 8 $0 \le x < 2\pi$일 때, 부등식 $2\sin^2 x - (2-\sqrt{3})\sin x - \sqrt{3} \le 0$의 해가 $0 \le x \le \alpha$ 또는 $\beta \le x < 2\pi$이다. $\alpha + \beta$의 값은?

① $\frac{7}{3}\pi$ ② $\frac{8}{3}\pi$ ③ 3π ④ $\frac{10}{3}\pi$ ⑤ $\frac{11}{3}\pi$

[21008-0067]

유제 9 $0 \le \theta < 3\pi$일 때, x에 대한 이차방정식 $6x^2 + (4\sin\theta)x + \cos\theta = 0$이 중근을 갖도록 하는 서로 다른 모든 실수 θ의 값의 합이 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[21008-0068]

1 $\sin \frac{2}{3}\pi \times \tan \frac{4}{3}\pi$의 값은?

① $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ 1 ④ $\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

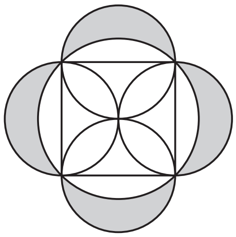
[21008-0069]

2 호의 길이가 6이고 넓이가 15인 부채꼴의 중심각의 크기는?

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

[21008-0070]

3 그림과 같이 반지름의 길이가 6인 원에 내접하는 정사각형의 각 변을 지름으로 하는 네 원이 있다. 큰 원의 외부와 네 개의 작은 원의 내부의 공통부분의 넓이를 구하시오.



[21008-0071]

4 $\tan \theta = \frac{3}{4}$이고 $\sin \theta < 0$일 때, $\cos \theta$의 값은?

① $-\frac{4}{5}$ ② $-\frac{3}{4}$ ③ $-\frac{3}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

[21008-0072]

5 $3\sin^2 \theta - 4\sin \theta - 4 = 0$일 때, $\cos^2 \theta + \cos^4 \theta$의 값은?

① $\frac{62}{81}$ ② $\frac{64}{81}$ ③ $\frac{22}{27}$ ④ $\frac{68}{81}$ ⑤ $\frac{70}{81}$

[21008-0073]

6 x에 대한 방정식 $25x^2-40x+k=0$의 두 근이 $\sin\theta+\cos\theta$, $\sin\theta-\cos\theta$일 때, 상수 k의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

[21008-0074]

7 함수 $y=2\sin(6\pi x)$의 그래프와 직선 $y=\frac{2}{3}x$가 만나는 모든 점의 개수는?

① 31 ② 33 ③ 35 ④ 37 ⑤ 39

[21008-0075]

8 양수 a에 대하여 함수 $f(x)=a\sin 3x+2$의 최댓값이 6일 때, $f\left(\frac{\pi}{18}\right)$의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21008-0076]

9 함수 $y=3\sin^2 x-\cos x-1$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① $\frac{1}{12}$ ② $\frac{1}{6}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{5}{12}$

[21008-0077]

10 $\sin 1200^\circ\times\tan 420^\circ-\sin 675^\circ\times\cos 315^\circ$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

정답과 풀이 23쪽

[21008-0078]

11 좌표평면 위의 점 $P(3, -4)$에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)+\tan(-\theta)$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $\dfrac{23}{15}$ ② $\dfrac{5}{3}$ ③ $\dfrac{9}{5}$ ④ $\dfrac{29}{15}$ ⑤ $\dfrac{31}{15}$

[21008-0079]

12 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{11}}{6}$이고 $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)<0$일 때, $\tan(5\pi-\theta)$의 값은?

① $-\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$ ② $-\dfrac{\sqrt{11}}{11}$ ③ $\dfrac{\sqrt{11}}{11}$ ④ $\dfrac{3\sqrt{11}}{11}$ ⑤ $\dfrac{5\sqrt{11}}{11}$

[21008-0080]

13 $\tan x>0$이고 $3\sin^2 x-2\cos x-3=0$일 때, $\sin x$의 값은?

① $-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ② $-\dfrac{2}{3}$ ③ $-\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{2}{3}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

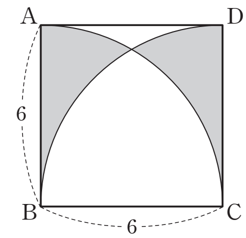
[21008-0081]

14 $0\le x<2\pi$일 때, 두 부등식 $|\sin x|<\dfrac{1}{2}$과 $\sin x\cos x>0$을 동시에 만족시키는 모든 실수 x의 값의 범위가 $0<x<a\pi$ 또는 $b\pi<x<c\pi$이다. $a+b+c$의 값은?

① $\dfrac{11}{6}$ ② 2 ③ $\dfrac{13}{6}$ ④ $\dfrac{7}{3}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

[21008-0082]

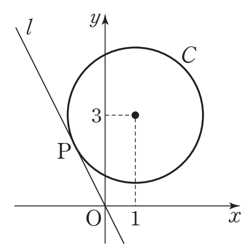
1 그림과 같이 한 변의 길이가 6인 정사각형 ABCD에서 점 B를 중심으로 하는 부채꼴 BCA의 호 CA와 점 C를 중심으로 하는 부채꼴 CDB의 호 DB를 그렸을 때, 색칠한 부분의 넓이는?



① $18\sqrt{3}-6\pi$ ② $18\sqrt{3}-4\pi$ ③ $18\sqrt{3}-2\pi$
④ $24\sqrt{3}-4\pi$ ⑤ $24\sqrt{3}-2\pi$

[21008-0083]

2 그림과 같이 점 $(1, 3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원 C와 원점 O를 지나는 직선 l이 있다. 원 C와 직선 l이 제2사분면 위의 점 P에서 접할 때, 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 하자. $\sin\theta\times\cos\theta$의 값은?



① $-\dfrac{1}{10}$ ② $-\dfrac{1}{5}$ ③ $-\dfrac{3}{10}$
④ $-\dfrac{2}{5}$ ⑤ $-\dfrac{1}{2}$

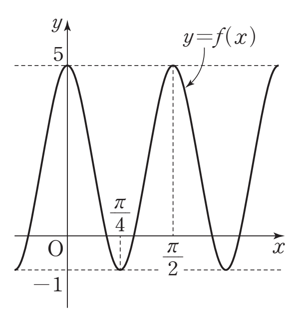
[21008-0084]

3 방정식 $x^2-5x+1=0$의 한 근이 $\dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$일 때, $\sin\theta\times\tan\theta$의 값은?

① $\dfrac{21}{10}$ ② $\dfrac{11}{5}$ ③ $\dfrac{23}{10}$ ④ $\dfrac{12}{5}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

[21008-0085]

4 두 양수 a, b에 대하여 $f(x)=a\cos(bx)+2$이다. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같고 $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=5$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$일 때, $f\left(\dfrac{11}{6}\pi\right)$의 값은?



① $\dfrac{1}{2}$ ② $\dfrac{3}{2}$ ③ $\dfrac{5}{2}$
④ $\dfrac{7}{2}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

[21008-0086]

5 함수 $y=\log(3x-\pi)+2$의 그래프의 점근선이 함수 $y=\tan(ax+3\pi)$의 그래프의 점근선이 되도록 하는 양수 a의 최솟값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ 2 ⑤ $\frac{5}{2}$

[21008-0087]

6 정의역이 $\{x \mid 0 \le x < 2\pi\}$인 함수 $y=\sin^2\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)+\sin\left(x+\frac{5}{3}\pi\right)+2$가 $x=a\pi$ 또는 $x=b\pi$에서 최댓값 M을 갖고 $x=c\pi$에서 최솟값 m을 갖는다. $a+b+c+M+m$의 값은? (단, $a<b$)

① $\frac{31}{4}$ ② $\frac{33}{4}$ ③ $\frac{35}{4}$ ④ $\frac{37}{4}$ ⑤ $\frac{39}{4}$

[21008-0088]

7 두 직선 $3x-4y=0$, $4x+3y=0$이 이루는 각을 이등분하는 직선 중에서 제3사분면을 지나는 직선을 l이라 하자. 제3사분면에서 직선 l 위에 있는 점 P에 대하여 동경 OP가 나타내는 각의 크기를 θ라 할 때, $\sin(\pi-\theta)+\cos(\pi+\theta)$의 값은? (단, O는 원점이다.)

① $-\frac{3\sqrt{2}}{5}$ ② $-\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ③ $-\frac{\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ⑤ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$

[21008-0089]

8 $0 \le x < 2\pi$일 때, 방정식 $2\cos 3x+3\tan 3x=0$을 만족시키는 모든 실수 x의 개수는 n이고 모든 실수 x의 값의 합은 $k\pi$이다. $n+k$의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[21008-0090]

1 $\sin x \times \cos y = \cos x + \sin y = \frac{\sqrt{2}}{4}$일 때, $(\cos x - \sin y)^2$의 값은?

① $\frac{11}{8}$　② $\frac{13}{8}$　③ $\frac{15}{8}$　④ $\frac{17}{8}$　⑤ $\frac{19}{8}$

[21008-0091]

2 실수 x에 대하여 t에 대한 함수 $f(t)=2\sin^2 t + x\cos t + 3$의 최댓값을 $g(x)$라 하자. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=10$으로 둘러싸인 도형의 내부에 있고 x좌표와 y좌표가 모두 정수인 점의 개수는?

① 32　② 34　③ 36　④ 38　⑤ 40

[21008-0092]

3 실수 k에 대하여 x에 대한 방정식 $4\sin^2 x + \sin^2\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + 3\sin(\pi + x) - k = 0$ $\left(0 \le x < \frac{3}{2}\pi\right)$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 개수를 $f(k)$라 하자. 직선 $y=ax-a+4$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 a의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은?

① $\frac{2}{3}$　② $\frac{4}{3}$　③ 2　④ $\frac{8}{3}$　⑤ $\frac{10}{3}$

[21008-0093]

4 실수 전체의 집합을 정의역으로 하는 함수 $f(x)$가 $0 \le x \le \pi$일 때 $f(x)=\sin 2x$이고, 모든 실수 x에 대하여

$$f(-x)=f(x),\ f(x+2\pi)=f(x)$$

를 만족시킨다. $0 \le x < 3\pi$에서 방정식 $f(x)=\frac{2}{3}$를 만족시키는 서로 다른 모든 실수 x의 값의 합이 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

대표 기출 문제

출제 경향 삼각함수의 성질에 관련된 문제 또는 이를 이용하여 삼각함수의 최댓값이나 최솟값을 구하는 문제가 출제된다.

실수 k에 대하여 함수

$$f(x)=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k$$

의 최댓값은 3, 최솟값은 m이다. $k+m$의 값은? [4점]

① 2　② $\frac{9}{4}$　③ $\frac{5}{2}$　④ $\frac{11}{4}$　⑤ 3

2019학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 최댓값과 최솟값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이

$$\begin{aligned}f(x)&=\cos^2\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\\&=\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi-x\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\\&=\cos^2\left\{\frac{\pi}{2}-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\right\}-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\\&=\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\\&=1-\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+k\end{aligned}$$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=t$ $(-1\le t\le 1)$이라 하면

$$\begin{aligned}f(x)&=-t^2-t+k+1\\&=-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+k+\frac{5}{4}\ (-1\le t\le 1)\end{aligned}$$

이므로 $t=-\frac{1}{2}$일 때 최댓값 $k+\frac{5}{4}$를 갖고, $t=1$일 때 최솟값 $k-1$을 갖는다.

따라서 $k+\frac{5}{4}=3$에서 $k=\frac{7}{4}$이고, $m=\frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$이므로

$$k+m=\frac{7}{4}+\frac{3}{4}=\frac{5}{2}$$

답 ③

대표 기출 문제

출제 경향 삼각함수가 포함된 방정식 또는 부등식에 관련된 문제가 출제된다.

$0<x<2\pi$일 때, 방정식 $4\cos^2 x-1=0$과 부등식 $\sin x\cos x<0$을 동시에 만족시키는 모든 x의 값의 합은? [3점]

① 2π　② $\frac{7}{3}\pi$　③ $\frac{8}{3}\pi$　④ 3π　⑤ $\frac{10}{3}\pi$

2020학년도 대수능

출제 의도 삼각함수가 포함된 방정식과 부등식을 풀 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 $4\cos^2 x-1=0$에서

$$(2\cos x+1)(2\cos x-1)=0$$

$$\cos x=-\frac{1}{2} \text{ 또는 } \cos x=\frac{1}{2}$$

$0<x<2\pi$이므로

$$x=\frac{\pi}{3} \text{ 또는 } x=\frac{2}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{4}{3}\pi \text{ 또는 } x=\frac{5}{3}\pi$$

한편, $\sin x\cos x<0$이므로 x는 제2사분면 또는 제4사분면의 각이다.

따라서 $x=\frac{2}{3}\pi$ 또는 $x=\frac{5}{3}\pi$이므로 구하는 모든 x의 값의 합은

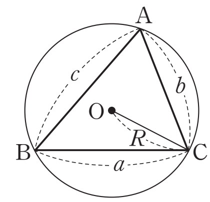
$$\frac{2}{3}\pi+\frac{5}{3}\pi=\frac{7}{3}\pi$$

답 ②

04 사인법칙과 코사인법칙

1. 사인법칙

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면



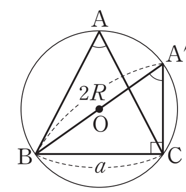
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

참고 삼각형 ABC에서 ∠A, ∠B, ∠C의 크기를 각각 A, B, C로 나타내고, 이들의 대변의 길이를 각각 a, b, c로 나타내기로 한다.

설명 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O라 할 때, 등식 $\frac{a}{\sin A}=2R$가 성립함을 ∠A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수 있다.

(ⅰ) $0°<A<90°$일 때

점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면 $A=A'$이므로



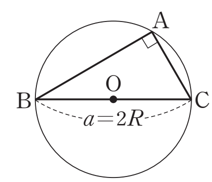
$$\sin A=\sin A'$$

삼각형 A′BC에서 ∠BCA′=90°이므로

$$\sin A'=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}=\frac{a}{2R}$$

따라서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, 즉 $\frac{a}{\sin A}=2R$

(ⅱ) $A=90°$일 때



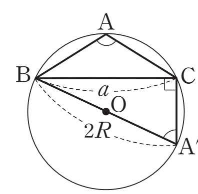
$$\sin A=\sin 90°=1$$

$$a=2R$$

따라서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{2R}{1}=2R$

(ⅲ) $90°<A<180°$일 때

점 B에서 중심 O를 지나는 지름 BA′을 그리면 $A+A'=180°$이므로



$$A=180°-A'$$

즉, $\sin A=\sin(180°-A')=\sin A'$

삼각형 A′BC에서 ∠A′CB=90°이므로

$$\sin A'=\frac{\overline{BC}}{\overline{BA'}}=\frac{a}{2R}$$

따라서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, 즉 $\frac{a}{\sin A}=2R$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 ∠A의 크기에 관계없이 $\frac{a}{\sin A}=2R$가 성립한다.

같은 방법으로 $\frac{b}{\sin B}=2R$, $\frac{c}{\sin C}=2R$도 성립한다.

예 $B=60°$인 삼각형 ABC가 반지름의 길이가 1인 원에 내접할 때, 선분 AC의 길이를 구해 보자.

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 1이므로 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AC}}{\sin B}=2\times 1$$

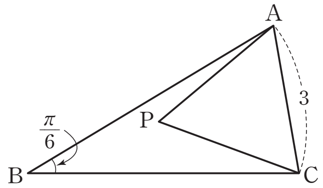
즉, $\frac{\overline{AC}}{\sin 60°}=2$이므로

$$\overline{AC}=2\times\sin 60°=2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

예제 1 사인법칙

그림과 같이 $\overline{AC}=3$, $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$인 삼각형 ABC의 내부에 점 P가 있다.

삼각형 APC가 정삼각형이고 $\sin(\angle PCB)=\frac{\sqrt{29}}{15}$일 때, 선분 BC의 길이는?



① 5 ② $\frac{26}{5}$ ③ $\frac{27}{5}$ ④ $\frac{28}{5}$ ⑤ $\frac{29}{5}$

풀이 전략 $\angle PCB$의 크기를 θ로 놓고 $\angle BAC$의 크기를 θ로 나타낸 후 사인법칙을 이용한다.

풀이 $\angle PCB=\theta$라 하면 $\angle ACP=\frac{\pi}{3}$이므로

$$\angle ABC+\angle ACB=\frac{\pi}{6}+\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\pi}{2}+\theta$$

즉, $\angle BAC=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$이므로 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{3}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\overline{BC}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)},\ \overline{BC}=6\cos\theta$$

이때 $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\sqrt{1-\frac{29}{225}}=\sqrt{\frac{196}{225}}=\frac{14}{15}$

따라서 $\overline{BC}=6\times\frac{14}{15}=\frac{28}{5}$

답 ④

정답과 풀이 29쪽

유제 1 [21008-0094]

$\overline{BC}=5$인 삼각형 ABC에 대하여

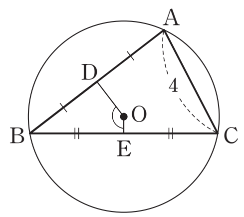
$$9\sin A\sin(B+C)=4$$

가 성립할 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?

① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

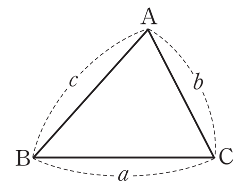
유제 2 [21008-0095]

그림과 같이 중심이 O인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. 두 선분 AB, BC의 중점을 각각 D, E라 하자. $\overline{AC}=4$이고 $\cos(\angle DOE)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$일 때, 이 원의 넓이는?



① $\frac{15}{2}\pi$ ② 8π ③ $\frac{17}{2}\pi$ ④ 9π ⑤ $\frac{19}{2}\pi$

2. 코사인법칙



삼각형 ABC에서

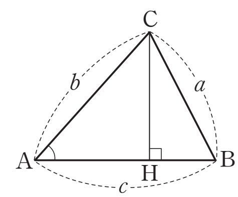
(1) $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

(2) $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$

(3) $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

설명 삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 등식 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$가 성립함을 ∠A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 다음과 같이 증명할 수 있다.

(i) $0°<A<90°$일 때



직각삼각형 CAH에서

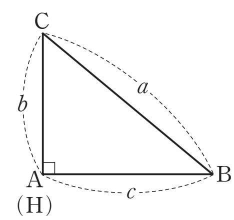
$\overline{CH}=b\sin A$, $\overline{AH}=b\cos A$

또 $\overline{BH}=\overline{AB}-\overline{AH}=c-b\cos A$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{BC}^2=\overline{CH}^2+\overline{BH}^2$이므로

$$\begin{aligned}a^2&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A\\&=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

(ii) $A=90°$일 때



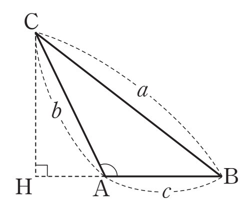
직각삼각형 ABC에서

$\cos A=\cos 90°=0$

이므로

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

(iii) $90°<A<180°$일 때



직각삼각형 ACH에서

$\overline{CH}=b\sin(180°-A)=b\sin A$, $\overline{AH}=b\cos(180°-A)=-b\cos A$

또 $\overline{BH}=\overline{AB}+\overline{AH}=c-b\cos A$

직각삼각형 BCH에서 $\overline{BC}^2=\overline{CH}^2+\overline{BH}^2$이므로

$$\begin{aligned}a^2&=(b\sin A)^2+(c-b\cos A)^2\\&=b^2\sin^2 A+c^2-2bc\cos A+b^2\cos^2 A\\&=b^2(\sin^2 A+\cos^2 A)+c^2-2bc\cos A\\&=b^2+c^2-2bc\cos A\end{aligned}$$

(i), (ii), (iii)에서 ∠A의 크기에 관계없이

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

가 성립한다.

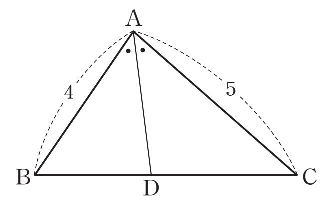
같은 방법으로

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

도 성립한다.

예제 2 코사인법칙

그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$이고 $\cos A=\frac{1}{8}$인 삼각형 ABC가 있다. $\angle$BAC의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 할 때, 선분 AD의 길이는?



① 3 ② $\frac{19}{6}$ ③ $\frac{10}{3}$

④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

풀이 전략 코사인법칙을 이용하여 선분 BC의 길이와 $\cos B$의 값을 구하고 삼각형의 닮음을 이용하여 선분 BD의 길이를 구한 후, 다시 코사인법칙을 이용하여 선분 AD의 길이를 구한다.

풀이 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos A=16+25-2\times4\times5\times\frac{1}{8}=36$$

이므로 $\overline{BC}=6$이고, $\overline{AC}^2=\overline{AB}^2+\overline{BC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BC}\times\cos B$이므로

$$\cos B=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\times4\times6}=\frac{9}{16}$$

한편, 선분 AD가 $\angle$BAC의 이등분선이므로 $\overline{BD}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{AC}=4:5$

즉, $\overline{BD}=6\times\frac{4}{9}=\frac{8}{3}$

따라서 삼각형 ABD에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{AD}^2=\overline{AB}^2+\overline{BD}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{BD}\times\cos B=16+\frac{64}{9}-2\times4\times\frac{8}{3}\times\frac{9}{16}=\frac{100}{9}$$

이므로

$$\overline{AD}=\frac{10}{3}$$

답 ③

정답과 풀이 30쪽

유제 3 [21008-0096]

삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=2\overline{BC}$, $5\overline{BC}=3\overline{CA}$일 때, $\cos C$의 값은?

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-\frac{1}{15}$ ④ $\frac{1}{15}$ ⑤ $\frac{1}{5}$

유제 4 [21008-0097]

삼각형 ABC가

$$a\cos B+b\cos A=14-c$$

를 만족시킬 때, c의 값은?

① 6 ② $\frac{13}{2}$ ③ 7 ④ $\frac{15}{2}$ ⑤ 8

3. 삼각형의 모양

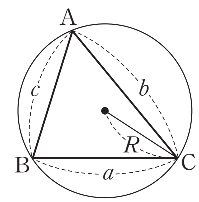
삼각형 ABC의 모양은 다음의 사인법칙의 변형된 식과 코사인법칙의 변형된 식을 이용하여 각의 크기 A, B, C에 대한 식을 변의 길이 a, b, c에 대한 식으로 고쳐서 알아본다.

(1) 사인법칙의 변형

① 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면

$$\sin A=\frac{a}{2R},\ \sin B=\frac{b}{2R},\ \sin C=\frac{c}{2R}$$

② $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$



설명 ① 사인법칙에서 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$이므로

$\frac{a}{\sin A}=2R$에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$

$\frac{b}{\sin B}=2R$에서 $\sin B=\frac{b}{2R}$

$\frac{c}{\sin C}=2R$에서 $\sin C=\frac{c}{2R}$

② ①에서 $\sin A=\frac{a}{2R}$, $\sin B=\frac{b}{2R}$, $\sin C=\frac{c}{2R}$이므로

$$\begin{aligned}\sin A:\sin B:\sin C&=\frac{a}{2R}:\frac{b}{2R}:\frac{c}{2R}\\&=a:b:c\end{aligned}$$

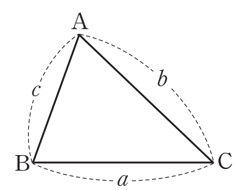
(2) 코사인법칙의 변형

삼각형 ABC에서

① $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

② $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

③ $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$



설명 코사인법칙에서 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$이므로 $2bc\cos A=b^2+c^2-a^2$에서

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

같은 방법으로 $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$, $\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$도 성립한다.

예 삼각형 ABC가 $a\cos A=b\cos B$를 만족시킬 때, 삼각형 ABC의 모양을 조사해 보자.

코사인법칙에 의하여 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$이므로 $a\cos A=b\cos B$에서

$$a\times\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=b\times\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$a^2\times(b^2+c^2-a^2)=b^2\times(c^2+a^2-b^2)$$

정리하면 $(a+b)(a-b)(a^2+b^2-c^2)=0$

이때 $a+b\neq0$이므로 $a=b$ 또는 $a^2+b^2=c^2$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$인 이등변삼각형 또는 $C=90^\circ$인 직각삼각형이다.

예제 3 삼각형의 모양

삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (나) $a^2<b^2+c^2$ (다) $a+b=\sqrt{2}c$

다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은?

① 정삼각형 ② $a=c$인 이등변삼각형 ③ $A=90°$인 직각삼각형
④ $B=90°$인 직각삼각형 ⑤ 직각이등변삼각형

풀이 전략 코사인법칙을 이용하여 삼각형의 세 변의 길이와 $\cos A$에 대한 식을 만들어 본다.

풀이 조건 (나)에서 $a^2<b^2+c^2$이므로 $A<90°$이다.

즉, $\cos A=\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

이때 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-2bc\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$

즉, $a^2=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$ …… ㉠

한편, 조건 (다)에서 $a=\sqrt{2}c-b$이므로 ㉠에 대입하면

$$2c^2-2\sqrt{2}bc+b^2=b^2+c^2-\sqrt{2}bc$$

$$c^2-\sqrt{2}bc=0,\ c(c-\sqrt{2}b)=0$$

$c\neq0$이므로 $c=\sqrt{2}b$이고, $a=\sqrt{2}\times\sqrt{2}b-b=2b-b=b$

이때 $\cos A=\frac{\sqrt{2}}{2}$에서 $A=45°$이고, $a=b$이므로 $B=45°$

즉, $C=90°$

따라서 삼각형 ABC는 $a=b$이고 $C=90°$인 직각이등변삼각형이다.

답 ⑤

정답과 풀이 30쪽

유제 5 [21008-0098]

삼각형 ABC가

$$\sin A+\sin B-\sin(A+B)=2\sin A\cos C$$

를 만족시킬 때, 다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은?

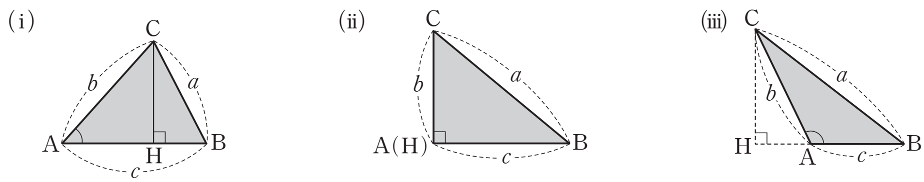
① 정삼각형 ② $a=b$인 이등변삼각형 ③ $a=c$인 이등변삼각형
④ $A=90°$인 직각삼각형 ⑤ $B=90°$인 직각삼각형

4. 삼각형의 넓이

삼각형 ABC에서 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어질 때, 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

설명 삼각형 ABC의 꼭짓점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 삼각형 ABC의 넓이를 ∠A가 예각, 직각, 둔각인 세 경우로 나누어 생각한다.



(i) $0° < A < 90°$일 때

$$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin A$$

(ii) $A=90°$일 때

$\sin A=\sin 90°=1$이므로

$$\overline{\mathrm{CH}}=b=b\sin A$$

(iii) $90° < A < 180°$일 때

$$\overline{\mathrm{CH}}=b\sin(180°-A)=b\sin A$$

(i), (ii), (iii)에서 ∠A의 크기에 관계없이 $\overline{\mathrm{CH}}=b\sin A$이므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CH}}=\frac{1}{2}bc\sin A$$

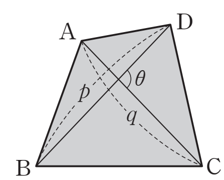
같은 방법으로

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B,\ S=\frac{1}{2}ab\sin C$$

도 성립한다.

참고 그림과 같은 사각형 ABCD에서 두 대각선의 길이가 각각 p, q이고, 두 대각선이 이루는 각의 크기가 θ일 때, 사각형 ABCD의 넓이를 S라 하면

$$S=\frac{1}{2}pq\sin\theta$$

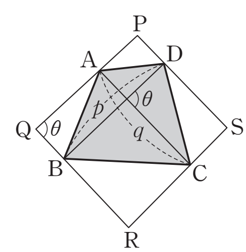


설명 그림과 같이 대각선 BD와 평행하고 두 점 A, C를 지나는 직선을 각각 그리고, 대각선 AC와 평행하고 두 점 B, D를 지나는 직선을 각각 그린다.

네 직선이 만나는 점을 각각 P, Q, R, S라 하면 사각형 PQRS는 평행사변형이다.

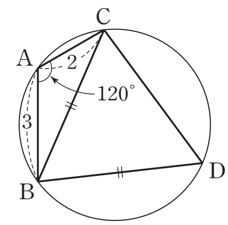
이때 사각형 ABCD의 넓이는 사각형 PQRS의 넓이의 $\frac{1}{2}$이고, 삼각형 PQR의 넓이도 사각형 PQRS의 넓이의 $\frac{1}{2}$이므로 사각형 ABCD의 넓이와 삼각형 PQR의 넓이는 같다.

따라서 $S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{PQ}}\times\overline{\mathrm{QR}}\times\sin\theta=\frac{1}{2}pq\sin\theta$



예제 4 삼각형의 넓이

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=2$, $\angle BAC=120°$인 삼각형 ABC에 외접하는 원 위에 $\overline{BC}=\overline{BD}$를 만족시키는 C가 아닌 점 D가 있다. 사각형 ABDC의 넓이가 $\frac{q}{p}\sqrt{3}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



풀이 전략 코사인법칙을 이용하여 선분 BC의 길이를 구한 후, 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

임을 이용하여 사각형 ABDC의 넓이를 구한다.

풀이 삼각형 ABC의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times3\times2\times\sin120°=\frac{1}{2}\times3\times2\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}$$

한편, 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{BC}^2=3^2+2^2-2\times3\times2\times\cos120°$$
$$=9+4+6=19$$

이때 $\angle BAC=120°$이므로 $\angle BDC=60°$이고, $\overline{BC}=\overline{BD}$이므로 $\angle BCD=\angle BDC=60°$이다.

즉, 삼각형 BDC는 한 변의 길이가 $\sqrt{19}$인 정삼각형이므로 그 넓이는

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{19})^2=\frac{19}{4}\sqrt{3}$$

사각형 ABDC의 넓이는 두 삼각형 ABC와 BDC의 넓이의 합과 같으므로

$$\frac{3}{2}\sqrt{3}+\frac{19}{4}\sqrt{3}=\frac{25}{4}\sqrt{3}$$

따라서 $p=4$, $q=25$이므로

$$p+q=4+25=29$$

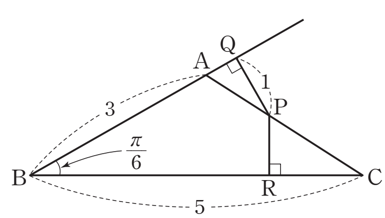
답 29

정답과 풀이 30쪽

유제 6

[21008-0099]

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=5$, $\angle ABC=\frac{\pi}{6}$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위의 점 P에서 두 직선 AB, BC에 내린 수선의 발을 각각 Q, R라 하자. 선분 PQ의 길이가 1일 때, 선분 PR의 길이는?



① $\frac{4}{5}$　② $\frac{17}{20}$　③ $\frac{9}{10}$　④ $\frac{19}{20}$　⑤ 1

[21008-0100]

1 $\sin A=\frac{2}{3}$, $\overline{\mathrm{BC}}=4$인 삼각형 ABC의 외접원의 넓이는?

① 6π ② 7π ③ 8π ④ 9π ⑤ 10π

[21008-0101]

2 둘레의 길이가 8π인 원에 내접하는 삼각형 ABC에 대하여 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$일 때, 선분 BC의 길이는?

① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{2}$ ③ $3\sqrt{5}$ ④ $4\sqrt{3}$ ⑤ $5\sqrt{2}$

[21008-0102]

3 $\overline{\mathrm{AB}}=8$인 삼각형 ABC에 대하여

$$\frac{\sin A}{3}=\frac{\sin B}{5}=\frac{\sin C}{4}$$

가 성립할 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

[21008-0103]

4 $\angle \mathrm{A}=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{BC}} : \overline{\mathrm{CA}}=k : 3 : 2$일 때, 양수 k의 값은?

① $-1+\sqrt{6}$ ② $1+\sqrt{5}$ ③ $1+\sqrt{6}$ ④ $2+\sqrt{5}$ ⑤ $2+\sqrt{6}$

[21008-0104]

5 $\overline{AB}=4$, $\overline{BC}=6$, $\overline{CA}=5$인 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[21008-0105]

6 삼각형 ABC가

$$\frac{\sin A-\sin B}{\sin C}=2\cos B-1$$

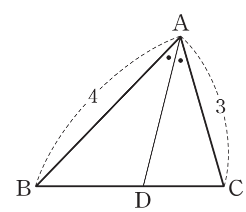
을 만족시킬 때, 다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은?

① 정삼각형 ② $a=b$인 이등변삼각형 ③ $b=c$인 이등변삼각형

④ $A=90^\circ$인 직각삼각형 ⑤ $B=90^\circ$인 직각삼각형

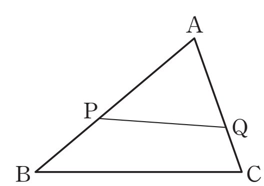
[21008-0106]

7 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=3$, $\angle BAC=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC에 대하여 $\angle BAC$의 이등분선이 선분 BC와 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AD}^2=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[21008-0107]

8 그림과 같이 삼각형 ABC에서 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점을 P, 선분 AC를 2 : 1로 내분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 ABC의 넓이를 S_1, 삼각형 APQ의 넓이를 S_2라 할 때, $\frac{S_2}{S_1}$의 값은?



① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$

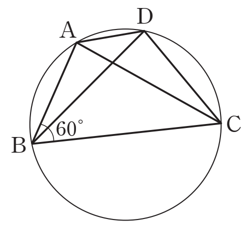
④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

Level 2 기본 연습

[21008-0108]

1 그림과 같이 원에 내접하는 사각형 ABCD에서 $\angle \mathrm{ABC}=60^\circ$, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{3}$, $\overline{\mathrm{BD}}=5$이다. $\cos^2(\angle \mathrm{BCD})=\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.

(단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



[21008-0109]

2 삼각형 ABC에 대하여

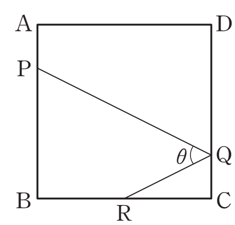
$$2\sin A=4\sin B=3\sin C$$

가 성립할 때, $\cos A+\cos B$의 값은?

① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{7}{16}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{9}{16}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[21008-0110]

3 그림과 같이 정사각형 ABCD에 대하여 두 선분 AB, CD를 $1:3$으로 내분하는 점을 각각 P, Q라 하고, 선분 BC의 중점을 R라 하자. $\angle \mathrm{PQR}=\theta$라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ② $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$

④ $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

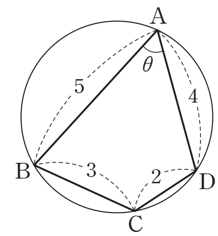
[21008-0111]

4 삼각형 ABC에서 $\sin A=\frac{2}{3}$일 때, $\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$의 값은?

① $\frac{1}{9}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{4}{9}$ ⑤ $\frac{5}{9}$

[21008-0112]

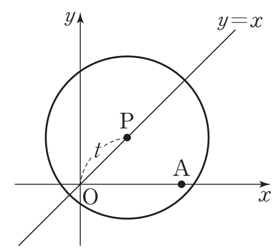
5 그림과 같이 $\overline{AB}=5$, $\overline{BC}=3$, $\overline{CD}=2$, $\overline{DA}=4$인 사각형 ABCD가 원에 내접하고 있다. $\angle BAD=\theta$라 할 때, $\cos\theta$의 값은?



① $\frac{4}{13}$ ② $\frac{5}{13}$ ③ $\frac{6}{13}$
④ $\frac{7}{13}$ ⑤ $\frac{8}{13}$

[21008-0113]

6 그림과 같이 좌표평면에 점 A$(5,\ 0)$과 제1사분면에서 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P가 있다. 원점 O와 점 P 사이의 거리가 t일 때, 점 A가 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 원의 내부에 있도록 하는 모든 양수 t의 값의 범위가 $\alpha<t<\beta$이다. $\beta-\alpha$의 값은?



① $\sqrt{11}$ ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{13}$
④ $\sqrt{14}$ ⑤ $\sqrt{15}$

[21008-0114]

7 삼각형 ABC가

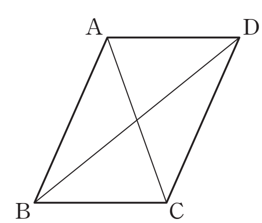
$$\frac{\tan A}{a}=\frac{\tan B}{b}$$

를 만족시킬 때, 다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은?

① 정삼각형 ② $a=b$인 이등변삼각형 ③ 직각이등변삼각형
④ $A=90^{\circ}$인 직각삼각형 ⑤ $C=90^{\circ}$인 직각삼각형

[21008-0115]

8 그림과 같이 $\overline{AC}=4$, $\overline{BD}=6$이고 넓이가 $8\sqrt{2}$인 평행사변형 ABCD에 대하여 $\overline{AB}^2$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{BC}$)



① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

[21008-0116]

9 삼각형 ABC에서

$$\sin^2 A+\sin^2 B=2\sin^2 C$$

일 때, $\cos C$의 최솟값은?

① $\frac{1}{8}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{5}{8}$

[21008-0117]

10 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\cos^2 A+\cos^2 B-\cos^2 C=1$

(나) $2\tan(\pi-A)+\tan(\pi+B)-\tan\left(\frac{\pi}{4}-C\right)=2$

삼각형 ABC의 넓이가 5일 때, 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이는?

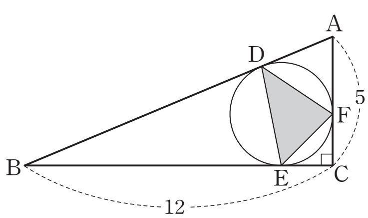
① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

[21008-0118]

11 반지름의 길이가 $5\sqrt{5}$인 원에 내접하는 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=5\sqrt{2}:2\sqrt{5}:3\sqrt{2}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이를 구하시오.

[21008-0119]

12 그림과 같이 $\overline{AC}=5$, $\overline{BC}=12$, $\angle ACB=\frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 내접원이 세 변 AB, BC, CA와 접하는 점을 각각 D, E, F라 할 때, 삼각형 DEF의 넓이는?

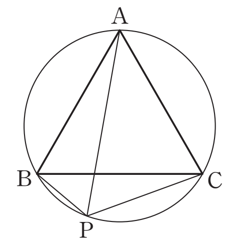


① $\frac{54}{13}$ ② $\frac{56}{13}$ ③ $\frac{58}{13}$

④ $\frac{60}{13}$ ⑤ $\frac{62}{13}$

[21008-0120]

1 그림과 같이 반지름의 길이가 $\sqrt{3}$인 원에 내접하는 정삼각형 ABC가 있다. $\angle$BAC를 삼등분하는 직선 중 하나가 점 A를 포함하지 않는 호 BC와 만나는 점을 P라 할 때, $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$의 값은?



① 16 ② 17 ③ 18
④ 19 ⑤ 20

[21008-0121]

2 삼각형 ABC가 다음 조건을 만족시킨다.

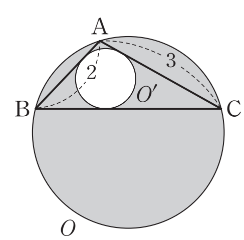
(가) $\sin A+\sin B=2\sin C$
(나) $\cos A+\cos B=2\cos C$

다음 중 삼각형 ABC의 모양으로 항상 옳은 것은?

① 정삼각형 ② $a=b\neq c$인 이등변삼각형 ③ $a=c\neq b$인 이등변삼각형
④ $A=90°$인 직각삼각형 ⑤ $B=90°$인 직각삼각형

[21008-0122]

3 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$인 삼각형 ABC의 외접원을 O, 내접원을 O'이라 하자. $\cos(\angle\mathrm{BAC})=-\frac{1}{4}$일 때, 외접원 O의 내부와 내접원 O'의 외부의 공통부분의 넓이가 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



대표 기출 문제

출제 경향 삼각형에서 사인법칙을 이용하여 선분의 길이, 각의 크기 또는 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제된다.

$\overline{AB}=8$이고 $\angle A=45^\circ$, $\angle B=15^\circ$인 삼각형 ABC에서 선분 BC의 길이는? [3점]

① $2\sqrt{6}$　② $\dfrac{7\sqrt{6}}{3}$　③ $\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$　④ $3\sqrt{6}$　⑤ $\dfrac{10\sqrt{6}}{3}$

2021학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 삼각형의 한 변의 길이와 그 양 끝 각의 크기가 주어졌을 때 사인법칙을 이용하여 다른 한 변의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 삼각형 ABC에서 $\angle A=45^\circ$, $\angle B=15^\circ$이므로

$$\angle C=180^\circ-45^\circ-15^\circ=120^\circ$$

이때 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{AB}}{\sin(\angle C)}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\angle A)}$$

이므로

$$\frac{8}{\sin 120^\circ}=\frac{\overline{BC}}{\sin 45^\circ}$$

따라서

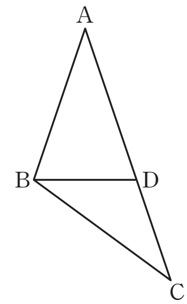
$$\overline{BC}=\frac{8}{\sin 120^\circ}\times\sin 45^\circ=\frac{8}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{8\sqrt{6}}{3}$$

답 ③

대표 기출 문제

출제 경향 삼각형에서 코사인법칙을 이용하여 선분의 길이, 각의 크기 또는 삼각함수의 값을 구하는 문제가 출제된다.

$\overline{AB}=6$, $\overline{AC}=10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AC 위에 점 D를 $\overline{AB}=\overline{AD}$가 되도록 잡는다. $\overline{BD}=\sqrt{15}$일 때, 선분 BC의 길이를 k라 하자. k^2의 값을 구하시오. [3점]



2021학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 삼각형의 세 변의 길이가 주어졌을 때 코사인법칙을 이용하여 한 각의 크기에 대한 코사인함수의 값을 구할 수 있는지, 또 삼각형의 두 변의 길이와 그 끼인각의 크기가 주어졌을 때 코사인법칙을 이용하여 나머지 한 변의 길이를 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 삼각형 ABD에서 $\overline{AB}=\overline{AD}=6$, $\overline{BD}=\sqrt{15}$이므로 $\angle BAD=\theta$라 하면 코사인법칙에 의하여

$$\cos\theta=\frac{\overline{AB}^2+\overline{AD}^2-\overline{BD}^2}{2\times\overline{AB}\times\overline{AD}}=\frac{6^2+6^2-(\sqrt{15})^2}{2\times6\times6}=\frac{19}{24}$$

따라서 삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$\begin{aligned}k^2=\overline{BC}^2&=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos\theta\\&=6^2+10^2-2\times6\times10\times\frac{19}{24}\\&=41\end{aligned}$$

답 41

05 등차수열과 등비수열

1. 수열의 뜻과 일반항

(1) 자연수 중 짝수를 차례로 나열하면

$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$

이다. 이와 같이 차례로 나열한 수의 열을 수열이라 하고, 수열을 이루는 각각의 수를 그 수열의 항이라고 한다.

(2) 수열을 나타낼 때는 각 항에 번호를 붙여

$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots$

과 같이 나타내며, 앞에서부터 차례로 첫째항, 둘째항, 셋째항, $\cdots$, n째항, $\cdots$ 또는 제1항, 제2항, 제3항, $\cdots$, 제n항, $\cdots$이라고 한다. 이때 n의 식으로 나타낸 제n항 a_n을 수열의 일반항이라 하며, 일반항이 a_n인 수열을 간단히 $\{a_n\}$으로 나타낸다.

2. 등차수열의 뜻과 일반항

(1) 등차수열의 뜻: 첫째항부터 차례로 일정한 수를 더해 만들어지는 수열을 등차수열이라 하고, 더하는 일정한 수를 공차라고 한다.

(2) 등차수열의 일반항: 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

설명 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에서

$$\begin{aligned}
&a_1=a\\
&a_2=a_1+d=a+d\\
&a_3=a_2+d=(a+d)+d=a+2d\\
&a_4=a_3+d=(a+2d)+d=a+3d\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n=a+(n-1)d\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

예 첫째항이 1, 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=1+(n-1)\times3=3n-2$$

3. 등차중항

세 수 a, b, c가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등차중항이라고 한다.

이때 b가 a와 c의 등차중항이면 $b-a=c-b$이므로

$$2b=a+c,\ \text{즉}\ b=\frac{a+c}{2}$$

가 성립한다. 역으로 $b=\dfrac{a+c}{2}$이면 $b-a=c-b$이므로 b는 a와 c의 등차중항이다.

예 세 수 3, x, 9가 이 순서대로 등차수열을 이루면 x는 3과 9의 등차중항이므로

$$x=\frac{3+9}{2}=6$$

예제 1 등차수열의 일반항

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_2=3,\ a_3+a_5=14$

일 때, a_7의 값은?

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

풀이 전략 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n=a+(n-1)d$

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=a_2+d,\ a_5=a_2+3d$

이므로 $a_3+a_5=(a_2+d)+(a_2+3d)=(3+d)+(3+3d)=6+4d=14$에서

$d=2$

따라서 $a_7=a_2+5d=3+5\times2=3+10=13$

답 ②

다른 풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_2=a_1+d=3$ …… ㉠

$a_3+a_5=(a_1+2d)+(a_1+4d)=2a_1+6d=14$ …… ㉡

㉡$-2\times$㉠을 하면

$4d=8,\ d=2$

$d=2$를 ㉠에 대입하면

$a_1+2=3,\ a_1=1$

따라서 $a_7=a_1+6d=1+6\times2=13$

정답과 풀이 37쪽

유제 1

[21008-0123]

등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_3+a_4=7,\ a_9+a_{10}=a_5+a_6+24$

일 때, a_7의 값은?

① 12　② 13　③ 14　④ 15　⑤ 16

유제 2

[21008-0124]

네 수 $2,\ a,\ b,\ 14$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. a^2+b^2의 값은?

① 124　② 128　③ 132　④ 136　⑤ 140

4. 등차수열의 합

(1) 첫째항이 a, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n(a+l)}{2}$$

(2) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

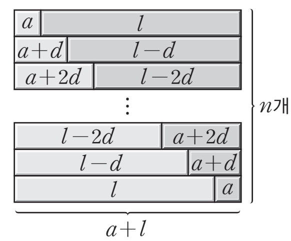
$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

설명 (1) 첫째항이 a, 공차가 d, 제n항이 l인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \quad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 우변의 합의 순서를 거꾸로 나타내면

$$S_n=l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \quad \cdots\cdots ㉡$$



㉠, ㉡을 변끼리 더하면

$$\begin{array}{rl} S_n= & a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(l-2d)+(l-d)+l \\ +)\ S_n= & l+(l-d)+(l-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a \\ \hline 2S_n= & \underbrace{(a+l)+(a+l)+(a+l)+\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)}_{n\text{개}} \\ = & n(a+l) \end{array}$$

따라서 $S_n=\dfrac{n(a+l)}{2}$

예 ① 첫째항이 1이고 제7항이 19인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제7항까지의 합 S_7은

$$S_7=\frac{7(1+19)}{2}=70$$

② 첫째항이 3이고 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{10\{2\times3+(10-1)\times2\}}{2}=120$$

참고 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}=\frac{d}{2}n^2+\frac{2a-d}{2}n$$

이다. 이때 $\dfrac{d}{2}=A$, $\dfrac{2a-d}{2}=B$라 하면

$$S_n=An^2+Bn$$

이므로 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은 n에 대한 이차식이고, 이때 상수항은 0이다.

5. 수열의 합과 일반항 사이의 관계

수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_1=a_1$이고, 2 이상인 자연수 n에 대하여

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n=S_{n-1}+a_n$$

이므로

$$S_1=a_1,\ S_n-S_{n-1}=a_n\ (n\ge2)$$

예제 2 등차수열의 합

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$a_2=7,\ S_5=60$

일 때, a_4의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

풀이 전략 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{n\{2a+(n-1)d\}}{2}$$

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자.

$a_2=a_1+d=7$ …… ㉠

$S_5=\frac{5(2a_1+4d)}{2}=60$에서

$a_1+2d=12$ …… ㉡

㉡$-$㉠을 하면

$d=5$

$d=5$를 ㉡에 대입하면

$a_1+2\times5=12,\ a_1=2$

따라서 $a_4=2+3\times5=17$

답 ⑤

정답과 풀이 38쪽

[21008-0125]

유제 3 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$S_6=33,\ S_{11}=143$

일 때, a_2의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

[21008-0126]

유제 4 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_6=5$일 때,

$(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7)+(a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{11})$

의 값은?

① 65 ② 70 ③ 75 ④ 80 ⑤ 85

6. 등비수열의 뜻과 일반항

(1) 등비수열의 뜻: 첫째항부터 차례로 일정한 수를 곱하여 만들어지는 수열을 등비수열이라 하고, 곱하는 일정한 수를 공비라고 한다.

(2) 등비수열의 일반항: 첫째항이 a, 공비가 $r\,(r\neq0)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

설명 첫째항이 a, 공비가 $r\,(r\neq0)$인 등비수열 $\{a_n\}$에서

$$a_1=a$$
$$a_2=a_1r=ar$$
$$a_3=a_2r=(ar)r=ar^2$$
$$a_4=a_3r=(ar^2)r=ar^3$$
$$\vdots$$

이므로 일반항 a_n은

$$a_n=ar^{n-1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

예 ① 첫째항이 2이고 공비가 $\frac{1}{3}$인 등비수열은 2, $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{9}$, $\frac{2}{27}$, $\cdots$이다.

② 첫째항이 3이고 공비가 2인 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=3\times2^{n-1}$$

③ 등비수열 $\{a_n\}$이 1, -3, 9, -27, $\cdots$일 때,
첫째항이 1, 공비가 -3이므로 등비수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=1\times(-3)^{n-1}=(-3)^{n-1}$$

7. 등비중항

0이 아닌 세 수 a, b, c가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, b를 a와 c의 등비중항이라고 한다.

이때 b가 a와 c의 등비중항이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로

$$b^2=ac$$

가 성립한다.

역으로 $b^2=ac$이면 $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$이므로 b는 a와 c의 등비중항이다.

예 세 수 4, x, 9가 이 순서대로 등비수열을 이루면 x는 4와 9의 등비중항이므로

$$x^2=4\times9=36$$

즉, $x=-6$ 또는 $x=6$

예제 3 등비수열의 일반항

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_2=2,\ a_5-2a_4=3a_3$

일 때, a_4-a_3의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

풀이 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공비를 r $(r\neq0)$이라 하면 $a_n=ar^{n-1}$이다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면 모든 항이 양수이므로 $a_1>0$, $r>0$이다.

$a_5-2a_4=3a_3$에서

$a_1r^4-2a_1r^3=3a_1r^2$

$r^2-2r=3$

$r^2-2r-3=0$

$(r+1)(r-3)=0$

$r=-1$ 또는 $r=3$

이때 $r>0$이므로 $r=3$

따라서 $a_3=a_2\times r=2\times3=6$, $a_4=a_3\times r=6\times3=18$이므로

$a_4-a_3=18-6=12$

답 ①

정답과 풀이 38쪽

[21008-0127]

유제 5 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1=20,\ \dfrac{a_3+a_2}{a_5+a_4}=16$

일 때, a_2의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[21008-0128]

유제 6 두 양수 a, b에 대하여 세 수 a, $a+b$, $a+4b$가 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, $\dfrac{b}{a}$의 값은?

① 2 ② 1 ③ $\dfrac{1}{2}$ ④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{8}$

8. 등비수열의 합

첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

(1) $r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

(2) $r=1$일 때, $S_n=na$

설명 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 공비 r를 곱하면

$$rS_n=ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠에서 ㉡을 변끼리 빼면

$$\begin{array}{rrl} & S_n= & a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1} \\ -) & rS_n= & \quad\;\; ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}+ar^n \\ \hline & (1-r)S_n= & a \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -ar^n \end{array}$$

$$(1-r)S_n=a(1-r^n)$$

따라서

$r\neq1$일 때, $S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$일 때, $S_n=\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{n\text{개}}=na$

예 첫째항이 2이고 공비가 3인 등비수열의 첫째항부터 제10항까지의 합 S_{10}은

$$S_{10}=\frac{2\times(1-3^{10})}{1-3}=\frac{2\times(3^{10}-1)}{3-1}=3^{10}-1$$

참고 첫째항이 a, 공비가 r $(r\neq1)$인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$
$$=\frac{a}{r-1}r^n-\frac{a}{r-1}$$

이다. 이때 $\dfrac{a}{r-1}=A$라 하면

$$S_n=Ar^n-A$$

예를 들어 첫째항이 3, 공비가 5인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하면

$$S_n=\frac{3(5^n-1)}{5-1}=\frac{3}{4}\times5^n-\frac{3}{4}$$

또 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n이 $S_n=2\times3^n-2$이면

$n\geq2$일 때, $a_n=S_n-S_{n-1}=2\times3^n-2-(2\times3^{n-1}-2)=4\times3^{n-1}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_1=S_1=2\times3^1-2=4$

이것은 ㉠에 $n=1$을 대입하여 얻은 값과 같으므로 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=4\times3^{n-1}\ (n\geq1)$$

따라서 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 4, 공비가 3인 등비수열이다.

예제 4 등비수열의 합

공비가 1보다 큰 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_2=3,\ S_6=3S_3$$

일 때, a_5의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

풀이 전략 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r\neq1)$이라 하면 첫째항부터 제n항까지의 합 S_n은

$$S_n=\frac{a_1(1-r^n)}{1-r}=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>1)$이라 하자.

$S_6=3S_3$에서

$$\frac{a_1(r^6-1)}{r-1}=3\times\frac{a_1(r^3-1)}{r-1}$$

$$\frac{a_1(r^3-1)(r^3+1)}{r-1}=3\times\frac{a_1(r^3-1)}{r-1}$$

$$r^3+1=3$$

$$r^3=2$$

따라서 $a_5=a_2\times r^3=3\times2=6$

답 ①

정답과 풀이 39쪽

[21008-0129]

유제 7 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=128,\ a_1a_3=4a_2a_4$$

일 때, $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$의 값은?

① $\frac{63}{4}$ ② 16 ③ $\frac{65}{4}$ ④ $\frac{33}{2}$ ⑤ $\frac{67}{4}$

[21008-0130]

유제 8 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$a_1=\frac{1}{3},\ S_4-S_2=3a_3$$

일 때, S_{10}의 값은?

① 339 ② 341 ③ 343 ④ 345 ⑤ 347

[21008-0131]

1 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_2=-1,\ a_4=4$

일 때, a_{10}의 값은?

① 19 ② 20 ③ 21 ④ 22 ⑤ 23

[21008-0132]

2 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_2=5,\ a_4-a_6=4$

일 때, $a_m=-21$을 만족시키는 자연수 m의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

[21008-0133]

3 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_2+a_3=10$

일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{10}$의 값은?

① 100 ② 105 ③ 110 ④ 115 ⑤ 120

[21008-0134]

4 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_1=3,\ a_5+a_6+a_7+\cdots+a_{15}=132$

일 때, a_3의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[21008-0135]

5 첫째항이 9인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $S_3=21$일 때, $S_k<0$을 만족시키는 자연수 k의 최솟값은?

① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

[21008-0136]

6 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_{10}-2S_7=3-S_4$$

일 때, $a_{16}-a_1$의 값을 구하시오.

[21008-0137]

7 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=27,\ 2a_2=3a_4$$

일 때, a_5의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

[21008-0138]

8 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 서로 다른 세 수 a_1, a_2, a_6이 이 순서대로 등비수열을 이룰 때, a_3의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

[21008-0139]

9 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_1=64,\ a_1-a_2=2a_3$$

일 때, 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제7항까지의 합은?

① 123 ② 124 ③ 125 ④ 126 ⑤ 127

[21008-0140]

10 모든 항이 서로 다른 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4=5S_2$$

일 때, $\dfrac{S_8}{S_4}$의 값은?

① 15 ② 16 ③ 17 ④ 18 ⑤ 19

[21008-0141]

1 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=12$, $a_2=a_3+|a_5|$일 때, a_6의 값은?

① -10 ② -9 ③ -8 ④ -7 ⑤ -6

[21008-0142]

2 첫째항이 정수이고 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4a_5<0$이고 $\frac{a_1}{a_4}$의 값이 자연수일 때, a_{10}의 값은?

① 13 ② 14 ③ 15 ④ 16 ⑤ 17

[21008-0143]

3 첫째항이 1이고 모든 항이 자연수인 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하자. 100보다 작은 자연수 k에 대하여 세 수 a_2, a_2a_3, a_k가 이 순서대로 등차수열을 이루도록 하는 모든 순서쌍 (d, k)의 개수는? (단, $d\neq0$)

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

[21008-0144]

4 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_n+b_n=3n-2$를 만족시킨다. $a_4-b_4=a_3-b_3$일 때, a_3+b_5의 값을 구하시오.

[21008-0145]

5 첫째항과 공차가 모두 양수인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$\frac{S_7+6a_1}{S_5-S_2}=4$$

일 때, $\frac{a_4}{a_1}$의 값은?

① 1 ② $\frac{6}{5}$ ③ $\frac{7}{5}$ ④ $\frac{8}{5}$ ⑤ $\frac{9}{5}$

[21008-0146]

6 첫째항이 10이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_n+|S_n-20|=20$을 만족시키는 정수 d의 최댓값은?

① -7　② -6　③ -5　④ -4　⑤ -3

[21008-0147]

7 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $S_{2n}-S_{2n-1}=4n+3$일 때, $(a_{10}+a_{12}+a_{14}+a_{16}+a_{18})-(a_1+a_3+a_5+a_7)$의 값은?

① 109　② 110　③ 111　④ 112　⑤ 113

[21008-0148]

8 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_2+a_3=5,\ a_4+a_5=2(a_3+a_4)+40$$

일 때, a_1+a_2의 값은?

① $\frac{1}{2}$　② $\frac{3}{4}$　③ 1　④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{3}{2}$

[21008-0149]

9 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$과 공비가 r인 등비수열 $\{b_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n>0$, $b_n>0$이다.
(나) $d=b_1$, $r=a_1$
(다) $a_1=b_3$, $a_5=b_4$

a_2b_5의 값을 구하시오.

[21008-0150]

10 두 양수 a, b에 대하여 세 수 a, b, 2는 이 순서대로 등비수열을 이루고, 세 수 $\frac{a}{64}$, $\frac{5}{16}$, $\frac{b}{8}$는 이 순서대로 등차수열을 이룬다. $a+b$의 값은?

① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

[21008-0151]

11 첫째항이 같고 모든 항이 양수인 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 공비를 각각 r, r^3 $(r \neq 1)$이라 하고, 두 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 각각 S_n, T_n이라 하자.

$$S_{30}=21T_{10}$$

일 때, $\dfrac{T_2}{S_3}=\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[21008-0152]

12 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_1=2$, $a_3=4$일 때, $a_1a_3+a_2a_4+a_3a_5+a_4a_6+a_5a_7$의 값은?

① 244 ② 246 ③ 248 ④ 250 ⑤ 252

[21008-0153]

13 첫째항이 -2이고 공비가 -1이 아닌 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$|a_2|+|a_3|+2a_2+a_3=|a_3-4|$$

일 때, $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_7$의 값은?

① -86 ② -85 ③ -84 ④ -83 ⑤ -82

[21008-0154]

14 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_6=4S_3$$

일 때, $\dfrac{S_{2m}}{S_m}$의 값이 정수가 되도록 하는 30 이하의 모든 자연수 m의 값의 합은?

① 161 ② 162 ③ 163 ④ 164 ⑤ 165

[21008-0155]

1 첫째항이 -12, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_l|=|a_m|$을 만족시키는 세 자연수 d, l, m의 모든 순서쌍 $(d,\ l,\ m)$의 개수는? (단, $l<m$)

① 29 ② 30 ③ 31 ④ 32 ⑤ 33

[21008-0156]

2 첫째항이 -30이고 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. d와 S_n은 다음 조건을 만족시킨다.

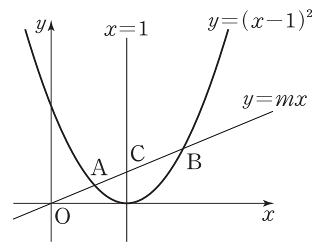
(가) d는 $3<d<30$인 자연수이다.
(나) $|S_l|=|S_{l+7}|=|S_m|$을 만족시키는 서로 다른 두 자연수 l, m이 존재한다.

$a_l+a_{l+7}+a_m$의 값을 구하시오. (단, $m>l+7$)

[21008-0157]

3 그림과 같이 곡선 $y=(x-1)^2$과 직선 $y=mx$ $(m>0)$이 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 직선 $y=mx$가 직선 $x=1$과 만나는 점을 C라 하자. 또 $\overline{\mathrm{OA}}=a$, $\overline{\mathrm{OB}}=b$, $\overline{\mathrm{OC}}=c$라 하자. 세 수 $c-a$, a, $b-c$가 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, **보기**에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

(단, O는 원점이고, 점 A의 x좌표는 점 B의 x좌표보다 작다.)



보기

ㄱ. $b=3a$
ㄴ. 세 수 a, c, b는 이 순서대로 등비수열을 이룬다.
ㄷ. $(m+2)^2=\dfrac{14}{3}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

대표 기출 문제

출제 경향 등차수열의 뜻 또는 두 항 사이의 관계를 이용하여 공차 또는 특정한 항의 값을 구하는 문제, 등차수열의 합을 이용하여 등차수열의 첫째항, 공차, 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, a_2의 값은? [4점]

(가) $a_6+a_8=0$
(나) $|a_6|=|a_7|+3$

① -15 ② -13 ③ -11 ④ -9 ⑤ -7

2017학년도 대수능

출제 의도 등차수열의 일반항을 이용하여 등차수열의 공차와 첫째항을 구한 후 등차수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d $(d>0)$이라 하자.

조건 (가)에서 $a_6+a_8=0$이므로

$(a+5d)+(a+7d)=0$

$2a+12d=0$

$a=-6d$ …… ㉠

조건 (나)에서 $|a_6|=|a_7|+3$이므로

$|a+5d|=|a+6d|+3$ …… ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$|-6d+5d|=|-6d+6d|+3$

$|-d|=3$

$d>0$이므로 $d=3$

$d=3$을 ㉠에 대입하면

$a=-6\times3=-18$

따라서 $a_2=a+d=-18+3=-15$

답 ①

대표 기출 문제

출제 경향 등비수열의 뜻 또는 두 항 사이의 관계를 이용하여 공비 또는 특정한 항의 값을 구하는 문제, 등비수열의 합을 이용하여 등비수열의 공비 또는 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$$S_4-S_3=2,\ S_6-S_5=50$$

일 때, a_5의 값을 구하시오. [4점]

2019학년도 대수능 9월 모의평가

출제 의도 등비수열의 합을 이용하여 등비수열의 공비를 구한 후 등비수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

모든 항이 양수이므로 $r>0$이다.

$$S_4-S_3=a_4$$

이므로 $a_4=2$

$$S_6-S_5=a_6$$

이므로 $a_6=50$

$a_6=a_4\times r^2$이므로

$$r^2=\frac{a_6}{a_4}=\frac{50}{2}=25$$

$$r=5 \text{ 또는 } r=-5$$

$r>0$이므로 $r=5$

따라서 $a_5=a_4\times r=2\times 5=10$

답 10

06 수열의 합과 수학적 귀납법

1. 합의 기호 $\sum$

(1) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 합의 기호 $\sum$를 사용하여

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$$

와 같이 나타낸다.

(2) 수열 $\{a_n\}$의 제m항부터 제n항까지의 합

$$a_m+a_{m+1}+a_{m+2}+\cdots+a_n \ (m\le n)$$

은 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{k=m}^{n}a_k$와 같이 나타낸다.

이것은 첫째항부터 제n항까지의 합에서 첫째항부터 제$(m-1)$항까지의 합을 뺀 것과 같으므로

$$\sum_{k=m}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{m-1}a_k \ (2\le m\le n)$$

이 성립한다.

제n항까지

$$\sum_{k=m}^{n}a_k$$

일반항

제m항부터

a_k를 차례로 더한다.

예 ① $1+2+3+\cdots+20=\sum_{k=1}^{20}k$

② $15+18+21+\cdots+45=\sum_{k=5}^{15}3k=\sum_{k=1}^{15}3k-\sum_{k=1}^{4}3k$

참고 $\sum_{k=1}^{n}a_k$에서 k 대신 다른 문자를 사용해도 그 합은 같다. 즉,

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{j=1}^{n}a_j$$

2. 합의 기호 $\sum$의 성질

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(2) $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수)

(4) $\sum_{k=1}^{n}c=\underbrace{c+c+c+\cdots+c}_{n\text{개}}=cn$ (단, c는 상수)

설명 (1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+\cdots+(a_n+b_n)$

$=(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n)$

$=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$

(3) $\sum_{k=1}^{n}ca_k=ca_1+ca_2+ca_3+\cdots+ca_n$

$=c(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)$

$=c\sum_{k=1}^{n}a_k$

예제 1 합의 기호 $\sum$의 성질

수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10} a_k=12,\ \sum_{k=1}^{10}(a_k^2-2a_k)=30$$

일 때, $\sum_{k=1}^{10}(a_k-2)^2$의 값은?

① 42 ② 43 ③ 44 ④ 45 ⑤ 46

풀이 전략 합의 기호 $\sum$의 성질을 이용한다.

① $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ ② $\sum_{k=1}^{n}(a_k-b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k-\sum_{k=1}^{n}b_k$

③ $\sum_{k=1}^{n}ca_k=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ (단, c는 상수) ④ $\sum_{k=1}^{n}c=cn$ (단, c는 상수)

풀이 $\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-2a_k)=30$에서 $\sum_{k=1}^{10}a_k=12$이므로

$$\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-2a_k)=\sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\sum_{k=1}^{10}a_k=\sum_{k=1}^{10}a_k^2-2\times12=30$$

$$\sum_{k=1}^{10}a_k^2=54$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(a_k-2)^2&=\sum_{k=1}^{10}(a_k^2-4a_k+4)\\&=\sum_{k=1}^{10}a_k^2-4\sum_{k=1}^{10}a_k+\sum_{k=1}^{10}4\\&=54-4\times12+4\times10\\&=46\end{aligned}$$

답 ⑤

정답과 풀이 47쪽

[21008-0158]

유제 1 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+2)=20,\ \sum_{k=1}^{5}(b_k-1)=3$$

일 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k+2b_k)$의 값은?

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32

[21008-0159]

유제 2 공차가 2인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{10}a_k-\sum_{k=1}^{7}a_k=51$$

일 때, a_8의 값을 구하시오.

3. 자연수의 거듭제곱의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n} k=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} k^2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $\sum_{k=1}^{n} k^3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

설명 (2) k에 대한 항등식 $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$의 k에 1, 2, 3, $\cdots$, n을 차례로 대입하면

$k=1$일 때, $2^3-1^3=3\times1^2+3\times1+1$

$k=2$일 때, $3^3-2^3=3\times2^2+3\times2+1$

$k=3$일 때, $4^3-3^3=3\times3^2+3\times3+1$

$\vdots$

$k=n$일 때, $(n+1)^3-n^3=3\times n^2+3\times n+1$

이 n개의 등식을 변끼리 더하면

$$(n+1)^3-1^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=3\sum_{k=1}^{n}k^2+3\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

$$3\sum_{k=1}^{n}k^2=(n+1)^3-\frac{3n(n+1)}{2}-(n+1)$$
$$=\frac{n+1}{2}\{2(n+1)^2-3n-2\}$$
$$=\frac{(n+1)(2n^2+n)}{2}$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{2}$$

따라서 $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) k에 대한 항등식 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$을 이용하여 (3)이 성립함을 보일 수 있다.

예 ① $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}1$

$$=2\times\frac{n(n+1)}{2}-1\times n=n^2$$

② $2^2+4^2+6^2+8^2+10^2+12^2=\sum_{k=1}^{6}(2k)^2=4\sum_{k=1}^{6}k^2$

$$=4\times\frac{6\times7\times13}{6}=364$$

③ $\sum_{k=1}^{5}k^2(k-1)=\sum_{k=1}^{5}(k^3-k^2)=\sum_{k=1}^{5}k^3-\sum_{k=1}^{5}k^2$

$$=\left(\frac{5\times6}{2}\right)^2-\frac{5\times6\times11}{6}=170$$

예제 2 자연수의 거듭제곱의 합

$\sum_{k=1}^{10}(2k^2-ak-3)=245$일 때, 상수 a의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

풀이 전략 합의 기호 $\sum$의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합

① $\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$ ② $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

을 이용한다.

풀이

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{10}(2k^2-ak-3)&=2\sum_{k=1}^{10}k^2-a\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}3\\&=2\times\frac{10\times11\times21}{6}-a\times\frac{10\times11}{2}-3\times10\\&=770-55a-30\\&=740-55a\end{aligned}$$

따라서 $740-55a=245$에서

$a=9$

답 ③

정답과 풀이 48쪽

유제 3 [21008-0160]

$\sum_{k=1}^{10}\frac{k^3-k}{k+1}+\sum_{k=1}^{10}\frac{3k^2+7k+2}{k+2}$의 값은?

① 495 ② 500 ③ 505 ④ 510 ⑤ 515

유제 4 [21008-0161]

자연수 n에 대하여 이차함수 $f(x)=x^2-nx+2n$의 최솟값을 a_n이라 하자. $\sum_{k=1}^{7}a_k$의 값은?

① 21 ② 22 ③ 23 ④ 24 ⑤ 25

4. 일반항이 분수 꼴인 수열의 합

(1) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$

(2) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

(3) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$

설명 분모가 서로 다른 두 일차식의 곱으로 나타내어진 유리식을 일반항으로 갖는 수열의 합은

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\ (A \neq B)$$

임을 이용하여 각 항을 두 개의 항으로 분리하여 구한다.

(1) $$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{(k+1)-k}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

(2) $$\frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{(2k+1)-(2k-1)}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$$

(3) 분모가 서로 다른 두 무리식의 합으로 나타내어진 식을 일반항으로 갖는 수열의 합은 분모를 유리화하여 구한다.

$$(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = (\sqrt{k+1})^2 - (\sqrt{k})^2 = (k+1)-k = 1$$

이므로

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})} = \sum_{k=1}^{n} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

예 ① $$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{20} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{21}\right) = 1-\frac{1}{21} = \frac{20}{21}$$

② $$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{20} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k}) = (\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\cdots+(\sqrt{21}-\sqrt{20}) = \sqrt{21}-1$$

예제 3 일반항이 분수 꼴인 수열의 합

첫째항이 4이고 공차가 양수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{a_k a_{k+1}}=\frac{4}{9(a_3-a_1)}$$

일 때, a_9의 값을 구하시오.

풀이 전략 $\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$을 이용하여 주어진 식을 간단히 한다.

풀이 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d\ (d>0)$이라 하면

$$a_{n+1}-a_n=d$$

이때 $\dfrac{1}{a_n a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_{n+1}-a_n}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)$이므로

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{8}\frac{1}{a_k a_{k+1}}&=\frac{1}{d}\sum_{k=1}^{8}\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)\\&=\frac{1}{d}\left\{\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\left(\frac{1}{a_3}-\frac{1}{a_4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_8}-\frac{1}{a_9}\right)\right\}\\&=\frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_9}\right)\end{aligned}$$

$a_3-a_1=2d$이므로 $\dfrac{4}{9(a_3-a_1)}=\dfrac{4}{9\times 2d}=\dfrac{2}{9d}$

즉, $\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{a_1}-\dfrac{1}{a_9}\right)=\dfrac{2}{9d}$에서 $a_1=4$이므로

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{a_9}=\frac{2}{9},\ \frac{1}{a_9}=\frac{1}{4}-\frac{2}{9}=\frac{1}{36}$$

따라서 $a_9=36$

답 36

정답과 풀이 48쪽

유제 5 [21008-0162]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{10}\frac{a}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{10}{3}$ 일 때, 상수 a의 값은?

① 17 ② 19 ③ 21 ④ 23 ⑤ 25

유제 6 [21008-0163]

첫째항이 4인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_{10}-a_5=10$$

일 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{16}\frac{1}{\sqrt{a_{k+1}}+\sqrt{a_k}}$의 값을 구하시오.

5. 수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$을
(i) 처음 몇 개의 항의 값
(ii) 이웃하는 여러 항 사이의 관계식
으로 정의하는 것을 수열의 귀납적 정의라고 한다.

6. 등차수열의 귀납적 정의

(1) 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는 다음과 같다.

$$a_1=a,\ a_{n+1}=a_n+d\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 모든 자연수 n에 대하여 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이다.

예 ① $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+5\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_{n+1}-a_n=5$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 2이고, 공차가 5인 등차수열이다.
즉, $a_n=2+(n-1)\times5=5n-3$

② $a_1=3,\ a_2=1,\ 2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$a_{n+1}-a_n=a_{n+2}-a_{n+1}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고, 공차가 $a_2-a_1=1-3=-2$인 등차수열이다.
즉, $a_n=3+(n-1)\times(-2)=-2n+5$

7. 등비수열의 귀납적 정의

(1) 첫째항이 a, 공비가 r인 등비수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는 다음과 같다.

$$a_1=a,\ a_{n+1}=ra_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 모든 자연수 n에 대하여 ${a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}$를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 등비수열이다.

예 ① $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 3이고, 공비가 2인 등비수열이다.
즉, $a_n=3\times2^{n-1}$

② $a_1=6,\ a_2=3,\ {a_{n+1}}^2=a_na_{n+2}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$$

이므로 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 6이고, 공비가 $\frac{a_2}{a_1}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$인 등비수열이다.

즉, $a_n=6\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

예제 4 등차수열과 등비수열의 귀납적 정의

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=-2$$

를 만족시킨다. $a_2=15$일 때, $\sum_{k=5}^{14} a_{k+1}$의 값은?

① -40　② -30　③ -20　④ -10　⑤ 0

풀이 전략 모든 자연수 n에 대하여 $a_1=a$, $a_{n+1}=a_n+d$를 만족시키는 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a, 공차가 d인 등차수열이다.

풀이 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}-a_n=-2$$

를 만족시키므로 수열 $\{a_n\}$은 공차가 -2인 등차수열이다.

$a_2=a_1+(-2)=15$에서 $a_1=17$이므로

$$a_6=17+5\times(-2)=7,\ a_{15}=17+14\times(-2)=-11$$

따라서

$$\begin{aligned}\sum_{k=5}^{14} a_{k+1}&=a_6+a_7+a_8+\cdots+a_{15}\\&=\frac{10(a_6+a_{15})}{2}\\&=5\{7+(-11)\}\\&=-20\end{aligned}$$

답 ③

정답과 풀이 48쪽

[21008-0164]

유제 7 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$$

를 만족시킨다. $a_2=-2$, $a_3+a_5=12$일 때, a_9의 값은?

① 22　② 23　③ 24　④ 25　⑤ 26

[21008-0165]

유제 8 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}{}^2=a_na_{n+2}$$

를 만족시킨다. $a_2=4$, $a_3a_5=1$일 때, a_5의 값은?

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{1}{4}$　④ $\frac{1}{8}$　⑤ $\frac{1}{16}$

8. 귀납적으로 정의된 여러 가지 수열

귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 항의 값을 구할 때는 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하여 항의 값을 구한다.

예 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=2$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\frac{n+1}{n}a_n$을 만족시킬 때, a_5의 값을 구해 보자.

$$a_2=\frac{2}{1}\times a_1=2\times 2=4$$
$$a_3=\frac{3}{2}\times a_2=\frac{3}{2}\times 4=6$$
$$a_4=\frac{4}{3}\times a_3=\frac{4}{3}\times 6=8$$
$$a_5=\frac{5}{4}\times a_4=\frac{5}{4}\times 8=10$$

9. 수학적 귀납법

자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

이와 같이 자연수 n에 대한 어떤 명제 $p(n)$이 참임을 증명하는 방법을 수학적 귀납법이라고 한다.

예 모든 자연수 n에 대하여

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하면 다음과 같다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1^2=1$, (우변)$=\frac{1\times 2\times 3}{6}=1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $(k+1)^2$을 더하면

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2&=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}\\&=\frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}\\&=\frac{(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}}{6}\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

참고 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 $n\geq m$ (m은 자연수)인 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(i) $n=m$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=k$ $(k\geq m)$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=k+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

예제 5 귀납적으로 정의된 수열

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=ka_n-1$$

을 만족시킨다. $a_1=2$, $a_4=9$일 때, a_2의 값은? (단, k는 실수이다.)

① 1　② 3　③ 5　④ 7　⑤ 9

풀이 전략 귀납적으로 정의된 수열 $\{a_n\}$에서 특정한 항의 값을 구할 때, n에 1, 2, 3, …을 차례로 대입한다.

풀이 $a_2=ka_1-1=k\times2-1=2k-1$

$a_3=ka_2-1=k(2k-1)-1=2k^2-k-1$

$a_4=ka_3-1=k(2k^2-k-1)-1=2k^3-k^2-k-1$

$a_4=9$이므로

$$2k^3-k^2-k-1=9$$
$$2k^3-k^2-k-10=0$$
$$(k-2)(2k^2+3k+5)=0$$

k는 실수이고, 방정식 $2k^2+3k+5=0$은 허근을 가지므로

$$k=2$$

따라서

$$a_2=2k-1=2\times2-1=3$$

답 ②

정답과 풀이 49쪽

[21008-0166]

유제 9 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(n^2+n)a_{n+1}=(n+2)a_n$$

을 만족시킨다. $\dfrac{a_2}{a_5}$의 값을 구하시오. (단, $a_1\neq0$)

[21008-0167]

유제 10 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 1이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$2a_{n+1}={a_n}^2-3a_n$$

을 만족시킨다. $\sum_{k=1}^{m}a_k=3$이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값을 구하시오.

예제 6 수학적 귀납법

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(k\times 2^{n-k+1})=2^{n+2}-2(n+2) \qquad \cdots\cdots (*)$$

가 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=1\times 2^{1-1+1}=2$, (우변)$=2^3-2\times 3=2$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(k\times 2^{m-k+1})=2^{m+2}-2(m+2)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\{k\times 2^{(m+1)-k+1}\}&=\sum_{k=1}^{m}\{k\times 2^{(m+1)-k+1}\}+\boxed{\text{(가)}}\\&=2\times(\boxed{\text{(나)}})+\boxed{\text{(가)}}\\&=2^{m+3}-2(m+3)\end{aligned}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $g(4)-f(5)$의 값은?

① 34 ② 36 ③ 38 ④ 40 ⑤ 42

풀이 전략 자연수 n에 대한 명제 $p(n)$이 모든 자연수 n에 대하여 성립함을 증명하려면 다음 두 가지가 성립함을 보이면 된다.

(i) $n=1$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, 명제 $p(n)$이 성립한다고 가정하면 $n=m+1$일 때도 명제 $p(n)$이 성립한다.

풀이 (i) $n=1$일 때, (좌변)$=1\times 2^{1-1+1}=2$, (우변)$=2^3-2\times 3=2$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}(k\times 2^{m-k+1})=2^{m+2}-2(m+2)$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m+1}\{k\times 2^{(m+1)-k+1}\}&=\sum_{k=1}^{m}\{k\times 2^{(m+1)-k+1}\}+(m+1)2^{(m+1)-(m+1)+1}\\&=\sum_{k=1}^{m}\{k\times 2^{(m+1)-k+1}\}+\boxed{2m+2}\\&=2\sum_{k=1}^{m}(k\times 2^{m-k+1})+2m+2\\&=2\times\{\boxed{2^{m+2}-2(m+2)}\}+\boxed{2m+2}\\&=2^{m+3}-4m-8+2m+2\\&=2^{m+3}-2(m+3)\end{aligned}$$

이므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

따라서 $f(m)=2m+2$, $g(m)=2^{m+2}-2(m+2)$이므로 $g(4)-f(5)=(64-12)-12=40$

답 ④

정답과 풀이 50쪽

[21008-0168]

유제 11 다음은 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k^2}}<1-\frac{1}{2^{n^2}} \qquad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=2$일 때, (좌변)$=\boxed{\text{(가)}}$, (우변)$=1-\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m\ (m\ge 2)$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2^{k^2}}<1-\frac{1}{2^{m^2}}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{2^{k^2}}<1-\frac{1}{2^{m^2}}+\frac{1}{2^{(m+1)^2}}$$

$$=1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}}+\boxed{\text{(나)}} \qquad \cdots\cdots ㉠$$

이때 $\boxed{\text{(나)}}<0$이므로

$$1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}}+\boxed{\text{(나)}}<1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{2^{k^2}}<1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}}+\boxed{\text{(나)}}<1-\frac{1}{2^{(m+1)^2}}$$

그러므로 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 2 이상인 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a, (나)에 알맞은 식을 $f(m)$이라 할 때, $\frac{af(2)}{f(3)}$의 값은?

① $\frac{110}{7}$ ② $\frac{120}{7}$ ③ $\frac{130}{7}$ ④ 20 ⑤ $\frac{150}{7}$

[21008-0169]

1 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10} a_k=15$, $\sum_{k=1}^{10}(a_{k+1}+2)=40$일 때, $a_{11}-a_1$의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

[21008-0170]

2 첫째항이 -3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5-a_3=4$일 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$의 값은?

① 40 ② 50 ③ 60 ④ 70 ⑤ 80

[21008-0171]

3 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{7} a_k=8$, $\sum_{k=1}^{7} a_k(a_k-3)=7$일 때, $\sum_{k=1}^{7} a_k^{\,2}$의 값을 구하시오.

[21008-0172]

4 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5} a_k=7$, $\sum_{k=1}^{5}(2a_k+3b_k)=26$일 때, $\sum_{k=1}^{5} b_k$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

[21008-0173]

5 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{5}(a_{2k}+a_{2k+2})=104$일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_{2k+1}$의 값은?

① 48 ② 49 ③ 50 ④ 51 ⑤ 52

[21008-0174]

6 $\sum_{k=1}^{7}(ak^2+2k)=96$일 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{2}{7}$　② $\frac{3}{7}$　③ $\frac{4}{7}$　④ $\frac{5}{7}$　⑤ $\frac{6}{7}$

[21008-0175]

7 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=2n$$

을 만족시킨다. $a_3=2$일 때, a_7의 값을 구하시오.

[21008-0176]

8 $\sum_{k=1}^{9}\frac{1}{\sqrt{5k+4}+\sqrt{5k-1}}$의 값은?

① $\frac{4}{5}$　② 1　③ $\frac{6}{5}$　④ $\frac{7}{5}$　⑤ $\frac{8}{5}$

[21008-0177]

9 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+2a_n=n^2$$

을 만족시킨다. $a_5=4a_1$일 때, a_2의 값은?

① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

[21008-0178]

10 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-a_n+5 & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 3a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_6=8$일 때, a_1의 값은?

① 3　② $\frac{7}{2}$　③ 4　④ $\frac{9}{2}$　⑤ 5

[21008-0179]

1 n이 자연수일 때, x에 대한 이차방정식 $x^2-2nx+2n-3=0$의 두 근을 α_n, β_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7}(\alpha_n{}^2+\beta_n{}^2)$의 값은?

① 480 ② 490 ③ 500 ④ 510 ⑤ 520

[21008-0180]

2 첫째항이 2인 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. $a_2+a_3=10$일 때, $\sum_{k=1}^{m}\frac{2}{S_k}=\frac{7}{4}$을 만족시키는 자연수 m에 대하여 a_m의 값은?

① 14 ② 16 ③ 18 ④ 20 ⑤ 22

[21008-0181]

3 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}a_k=3^n-2$를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}a_{2k}$의 값은?

① $\frac{3^{11}-3}{4}$ ② $\frac{3^{11}-2}{4}$ ③ $\frac{3^{11}-1}{4}$ ④ $\frac{3^{12}-3}{4}$ ⑤ $\frac{3^{12}-2}{4}$

[21008-0182]

4 모든 항이 0이 아닌 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 $\frac{1}{3}$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2k-1}{a_k}-\frac{2k+1}{a_{k+1}}\right)=-2n^2-3n+2$$

를 만족시킨다. a_5의 값은?

① $\frac{1}{10}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{3}{10}$ ④ $\frac{2}{5}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

[21008-0183]

5 공차가 3인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(a_{2k}{}^2-a_{2k-1}{}^2)=1200$일 때, $\sum_{k=11}^{20}a_k$의 값을 구하시오.

[21008-0184]

6 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}(-1)^n\times(2a_n+3) & (n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\\ a_n-2 & (n\text{이 3의 배수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_3=a_7$일 때, a_1의 값은?

① $-\frac{6}{5}$ ② -1 ③ $-\frac{4}{5}$ ④ $-\frac{3}{5}$ ⑤ $-\frac{2}{5}$

[21008-0185]

7 첫째항이 3 이상의 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-1 & (a_n\text{이 홀수인 경우})\\ a_n+3 & (a_n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{10}=12$일 때, a_1+a_2의 값을 구하시오.

[21008-0186]

8 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$2\times6\times10\times\cdots\times(4n-2)=\frac{(2n)!}{n!} \quad\cdots\cdots(*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=2$, (우변)$=\frac{2!}{1!}=2$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=k$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$2\times6\times10\times\cdots\times(4k-2)=\frac{(2k)!}{k!} \quad\cdots\cdots ㉠$$

㉠의 양변에 $(4k+2)$를 곱하면

$$\begin{aligned}2\times6\times10\times\cdots\times(4k-2)\times(4k+2)&=\frac{\boxed{(\text{가})}}{k!}\\&=\frac{\boxed{(\text{가})}}{2(k+1)!}\times\left(\boxed{(\text{나})}\right)\\&=\frac{(2k+2)!}{(k+1)!}\end{aligned}$$

이므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $\frac{10!\times g(3)}{f(4)}$의 값은?

① 32 ② 34 ③ 36 ④ 38 ⑤ 40

[21008-0187]

1 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k a_{k+1}}{2k+1} = 4n^2+16n$$

을 만족시킬 때, $\frac{a_9-a_7}{a_9+a_7}=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

[21008-0188]

2 모든 항이 0이 아닌 정수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n^{\ 2}-2a_n$$

을 만족시킨다. $a_2 \neq a_3$, $a_4=a_5$일 때, $\sum_{k=1}^{5} a_k$의 값을 구하시오.

[21008-0189]

3 자연수 n에 대하여 곡선 $y=x^2$과 직선 $y=x+n$이 만나는 서로 다른 두 점을 각각 A_n, B_n이라 하자. 선분 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$을 지름으로 하는 원이 곡선 $y=x^2$과 만나는 점 중 두 점 A_n, B_n이 아니고 x좌표가 0 이상인 점을 C_n이라 하자. 점 C_n의 x좌표를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} (a_n^{\ 2}+a_n-1)$의 값은?

① 25 ② 30 ③ 35 ④ 40 ⑤ 45

[21008-0190]

4 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=5$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{2n}=a_n-1 \\ a_{2n+1}=2a_n-3 \end{cases}$$

을 만족시킨다. 집합 $A=\{a_n \mid n$은 50 이하의 자연수$\}$의 원소의 값 중 최댓값은?

① 35 ② 36 ③ 37 ④ 38 ⑤ 39

대표 기출 문제

출제 경향 귀납적으로 정의된 수열의 규칙성을 이용하여 특정한 항의 값을 구하는 문제가 출제된다.

수열 $\{a_n\}$은 $0<a_1<1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_2\times a_n+1$	(나) $a_{2n+1}=a_2\times a_n-2$

$a_7=2$일 때, a_{25}의 값은? [4점]

① 78　② 80　③ 82　④ 84　⑤ 86

2021학년도 대수능

출제 의도 수열의 귀납적 정의를 이용하여 수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는지를 묻는 문제이다.

풀이 조건 (가)에서 $a_2=a_2\times a_1+1$ ······ ㉠

$a_7=2$이므로 조건 (나)에서

$$\begin{aligned} 2=a_7&=a_2\times a_3-2 \\ &=a_2\times(a_2\times a_1-2)-2 \\ &=a_2\times\{(a_2-1)-2\}-2 \ (\text{㉠에서 } a_2\times a_1=a_2-1\text{이므로}) \\ &=a_2^2-3a_2-2 \end{aligned}$$

즉, $a_2^2-3a_2-4=0$이므로 $(a_2+1)(a_2-4)=0$

따라서 $a_2=-1$ 또는 $a_2=4$

(i) $a_2=-1$일 때

㉠에서 $a_1=2$이므로 $0<a_1<1$이라는 조건에 모순이다.

(ii) $a_2=4$일 때

㉠에서 $a_1=\frac{3}{4}$이므로 $0<a_1<1$이라는 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a_1=\frac{3}{4}$, $a_2=4$이므로 조건 (나)에서

$$a_3=a_2\times a_1-2=4\times\frac{3}{4}-2=1$$

이때 조건 (가), (나)에서

$$a_{25}=a_2\times a_{12}-2=4a_{12}-2$$

$$a_{12}=a_2\times a_6+1=4a_6+1$$

$$a_6=a_2\times a_3+1=4\times1+1=5$$

이므로 $a_{12}=4\times5+1=21$

따라서 $a_{25}=4\times21-2=82$

답 ③

고2~N수 수능 집중 로드맵

과목: 국어 / 영어 / 수학 / 사회 / 과학

수능 입문
- 수능 감(感)잡기
- 뉴수능 스타트
- 수능특강 Light
- 강의노트 수능개념

기출 / 연습
- 수능 기출의 미래
- 수능특강Q 미니모의고사

연계+연계 보완
- 수능연계교재의 국어 어휘
- 수능연계교재의 VOCA 1800
- 수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200
- 연계: 수능특강, 수능완성
- 수능특강 사용설명서
- 수능특강 연계 기출
- 수능완성 사용설명서

고난도
- 수능연계완성 3/4주 특강 (고난도 · 신유형)
- 수능의 7대 함정

모의고사
- FINAL 실전모의고사
- 만점마무리 봉투모의고사
- 고난도 시크릿X 봉투모의고사

과목	시리즈명	특징	수준	영역
수능 입문	수능 감(感) 잡기	동일 개념의 내신과 수능 문항 비교로 수능 입문		국/수/영
	뉴수능 스타트	2022학년도 수능 평가원 예시문항 최초 분석		국/수/영
	수능특강 Light	수능 연계교재 학습 전 연계교재 입문서		국/영
	수능개념	EBSi 대표 강사들과 함께하는 수능 개념 다지기		전영역
기출/연습	수능 기출의 미래	올해 수능에 딱 필요한 문제만 선별한 기출 문제집		전영역
	수능특강Q 미니모의고사	매일 15분으로 연습하는 고퀄리티 미니모의고사		전영역
연계 + 연계 보완	수능특강	최신 수능 경향과 기출 유형을 분석한 종합 개념서		전영역
	수능특강 사용설명서	수능 연계교재 수능특강 지문 · 자료 · 문항 분석		전영역
	수능특강 연계 기출	수능특강 수록 작품과 지문과 연관된 기출문제 학습		국/영
	수능완성	유형 분석과 실전모의고사로 단련하는 문항 연습		전영역
	수능완성 사용설명서	수능 연계교재 수능완성 국어 · 영어 지문 분석		국/영
	수능연계교재의 국어 어휘	수능 지문과 문항 이해에 필요한 어휘 학습서		국어
	수능연계교재의 VOCA 1800	수능특강과 수능완성의 필수 중요 어휘 1800개 수록		영어
	수능연계 기출 Vaccine VOCA 2200	수능-EBS 연계 및 평가원 최다 빈출 어휘 선별 수록		영어
고난도	수능연계완성 3/4주 특강	단기간에 끝내는 수능 킬러 문항 대비서		국/수/영/과
	수능의 7대 함정	아깝게 틀리기 쉬운 영역별 수능 함정 문제 유형 분석		국/수/영/사/과
모의고사	FINAL 실전모의고사	수능 동일 난도의 최다 분량, 최다 과목 모의고사		전영역
	만점마무리 봉투모의고사	실제 시험지 형태 + OMR카드 실전 훈련 모의고사		전영역
	고난도 시크릿X 봉투모의고사	제대로 어려운 고퀄리티 최고난도 모의고사		국/수/영