Transforming Of the Past

“수학영역의 지침서”

2nd Edition

수학 영역 B형

신희철(申熙哲) 저

現 인하대학교 수학과 재학

이 책을 검토해주신 분들

수학 I

이재우 (한양대학교 의예과)
전재하 (성균관대학교 경영학과)

수학 II

김유범 (성균관대학교 공학계열)
유영석 (서울청원고등학교 졸업)
김문석 (연세대학교 수학과)
류주찬 (성균관대학교 전기전자컴퓨터공학부)
전홍배

적분과 통계

차주영 (야탑고등학교 졸업)
이예희 (연세대학교 불어불문학과)
양지헌 (중동고등학교 졸업)

기하와 벡터

최병찬 (서울백암고등학교 졸업)
이영현 (분당중앙고등학교 졸업)
김병도 (성균관대학교 자연과학계열)
양성현

1st Edition 검토진

구형모 (고려대학교 보건과학부)
성종하 (연세대학교 도시공학부)
김동현 (순천향대학교 의예과)
조병인 (한양대학교 의예과)
김희태 (한양대학교 의예과)

PREFACE

2012년에 수험생 사이트 “오르비” 에서 첫 출간된 수학 문제집 T.O.P는 수험생 여러분의 많은 사랑을 받아 인쇄한 모든 책이 매진되었습니다. 이에 힘입어서 T.O.P 2nd Edition을 집필하게 되었고, 2012년에 부족했던 부분과 각종 건의사항을 최대한으로 반영하여 수험생 여러분에게 더 도움이 될 수 있는 방향으로 가닥을 잡아 책을 집필했습니다.
어떤 시험을 준비하기 위해선 시험의 성격과 평가내용을 살펴보아야 하는건 당연한 일. 대학수학능력시험 - 수학영역을 준비하는 수험생들은 수학영역이 어떤 성격을 띄고, 어떤 것을 평가하는지 알아야 합니다.
수학영역 시험은 “고등학교까지의 수학 학습을 통해 습득한 수학의 기본 개념, 원리, 법칙을 이해하고 이를 적용하여 계산하고 추론하며 문제를 해결하는 능력을 평가함으로써 대학교육을 받는 데 필요한 수학적 사고력을 측정하는 시험” 입니다. (한국교육과정평가원 수능대비학습서 발췌)
수학영역에 나오는 30문제는 대부분이 과거 수능, 모의평가 기출문제나 교과서에 있는 문항에서 숫자나 표현만 바꾼 문항이고 몇몇 고난이도 문항은 과거 기출문제에 없었던 새로운 소재를 이용한 문제나 특별한 규칙이 있어서 각종 방법으로 규칙을 발견하게끔 하는 문항이라는 것을 알 수 있습니다.
그래서 이 책은 대학수학능력시험 - 수학영역의 출제방침을 적용하여 과거 기출문제를 응용 또는 변형한 문항과, 고난이도 문항을 대비할 수 있게끔 새로운 소재나 특별한 규칙을 이용하여 만든 문항으로 구성하였습니다. 즉, 대부분의 문제의 출제 근거는 과거 수학영역의 기출문제에 있습니다. 또한, 교과서에서 소개되는 개념들을 정리하여 수험생들이 피드백을 할 수 있도록 하였고, 특정 단원에서는 교육과정을 벗어난 “심화정리” 를 제공하여 확률은 낮지만, 실제 시험에 이용될 수 있는 이론들을 소개하였습니다. 그리고, 각 Section의 실전문제 부분은 수학영역의 경험이 없는 수험생 분들을 배려하여 실제 수학영역 시험에서 적용되는 글씨체, 폰트, 그래프, 그림 등의 전체적인 디자인을 수학영역 시험지 형태 그대로 유지하였습니다.

수학영역 때문에 많은 학생들이 좌절합니다. 다급한 마음에 “수학 잘하는 방법” 이 담긴 여러 가지 책들을 사서 보지만, 결국 얻는 내용은 아래와 같은 어구입니다.

“모든 단원의 개념을 꼼꼼히 공부하고
수능에 나올만한 양, 질의 문제를 끊임없이 푸십시오.”

수학영역은 교과서에 소개되는 개념과 적당한 양, 질의 문제를 풀면서 피드백하면 누구나 수학영역의 높은 벽을 허물수 있습니다. T.O.P는 수능에 나올만한 양, 질의 문제를 제공하겠습니다. 이 책의 문제를 풀어나갈수록 여러분의 수학 실력이 크게 증진될 것이라 확신하며 서문(PREFACE)을 마치겠습니다.
이 책에 많은 지원을 해주신 오르비 관계자 여러분에게 감사의 말씀을 표합니다.

2013년 1월 9일
대표저자 신희철(申熙哲)

FEATURE

Ⅰ. 수능에 나올 문제들로만 구성되어 있다.

T.O.P의 모든 문항들은 교과서와 수능 및 평가원 모의평가 기출문제에 그 근거가 있다. 또한, 과거에 출제된 문항들을 “재구성 및 변형” 하여 수험생들이 좀 더 수능기출문제를 다양한 관점으로 바라볼 수 있도록 구성하였다.

Ⅱ. 수능 및 모의평가와 똑같은 인터페이스

T.O.P의 모든 실전문항은 실제 수학영역 출제에 이용되는 글꼴과 그래픽 프로그램을 이용하여 수능에 경험이 없는 수험생들이 좀 더 시험지에 익숙해질 수 있도록 하였다.

Ⅲ. 문항에 배점 부여

각 문항에 배점을 부여하여 수험생의 대략적인 실력을 가늠해볼 수 있도록 하였다.

Ⅳ. 단원별 정리 및 Tip

단원별로 중요한 사항이나 핵심 및 반복적으로 출제되는 문제를 푸는 Tip을 수록하여 개념공부가 덜된 수험생의 개념보완 및 문제풀이 실력을 높이도록 하였고, 특정 단원에서는 고등학교 교육과정이 아닌 “심화정리” 를 소개하여 좀 더 높은 수준의 수학을 미리 맛볼 수 있도록 하였다.

Ⅴ. 중하위권부터 최상위권까지

이 책은 문제의 난이도가 **매우 쉬운 것**부터 **매우 어려운 것**까지 모두 포함하고 있기 때문에 이 책의 용도는 자신의 실력이나 성적에 따라 달라질 것이다.

Ⅵ. 해설지 및 검토진의 수험생활 후기

저자의 출제의도가 담긴 해설지와 이 책을 검토한 검토진 분들의 수험생활 후기를 수록하여 공부에 도움이 될 수 있도록 하였다.

CONTENTS

수학 I

CHAPTER 1. 행렬과 그래프

Section 1.1 행렬과 역행렬의 기본 연산 및 그래프	6p
Section 1.2 연립방정식과 행렬	25p

CHAPTER 2. 지수와 로그

Section 2.1 지수와 로그의 기본 연산 및 실생활 이용	30p
Section 2.2 지수와 로그의 함수, 방정식, 부등식	41p
Section 2.3 지표와 가수	57p

CHAPTER 3. 수열

Section 3.1 등차수열, 등비수열, 계차수열	63p
Section 3.2 수열의 극한과 무한급수	83p
Section 3.3 도형과 무한급수	99p

수학 II

CHAPTER 4. 방정식과 부등식

Section 4.1 분수, 무리방정식과 부등식	117p

CHAPTER 5. 삼각함수

Section 5.1 삼각함수	132p

CHAPTER 6. 함수의 극한과 연속성

Section 6.1 함수의 극한과 연속성	145p

CHAPTER 7. 함수의 미분법

Section 7.1 함수의 미분법과 응용	185p

CONTENTS

적분과 통계

CHAPTER 8. 함수의 적분법

Section 8.1 함수의 적분법과 응용	221p
Section 8.2 속도와 가속도	258p

CHAPTER 9. 확률

Section 9.1 순열, 조합, 중복조합과 이항정리	265p
Section 9.2 확률	276p

CHAPTER 10. 확률분포

Section 10.1 이산확률분포와 연속확률분포	292p
Section 10.2 정규분포와 통계적 추정	305p

기하와 벡터

CHAPTER 11. 일차변환과 행렬

Section 11.1 일차변환과 행렬	326p

CHAPTER 12. 이차곡선

Section 12.1 포물선, 타원, 쌍곡선	336p

CHAPTER 13. 공간도형과 공간좌표 및 벡터

Section 13.1 공간도형과 공간좌표	359p
Section 13.2 벡터와 평면의 방정식	362p

APPENDIX. 정답과 해설

CHAPTER 1. 행렬과 그래프	3p
CHAPTER 2. 지수와 로그	12p
CHAPTER 3. 수열	22p
CHAPTER 4. 방정식과 부등식	38p
CHAPTER 5. 삼각함수	42p
CHAPTER 6. 함수의 극한과 연속성	46p
CHAPTER 7. 함수의 미분법	55p
CHAPTER 8. 함수의 적분법	66p
CHAPTER 9. 확률	78p
CHAPTER 10. 확률분포	87p
CHAPTER 11. 일차변환과 행렬	97p
CHAPTER 12. 이차곡선	100p
CHAPTER 13. 공간도형과 공간좌표 및 벡터	105p

CHAPTER 7. 함수의 미분법

7.1 함수의 미분법과 응용

① 평균변화율과 순간변화율

(1) 평균변화율

열린 구간 (a, b)에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 x의 증가량과 y의 증가량의 비율을 평균변화율이라 하고,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

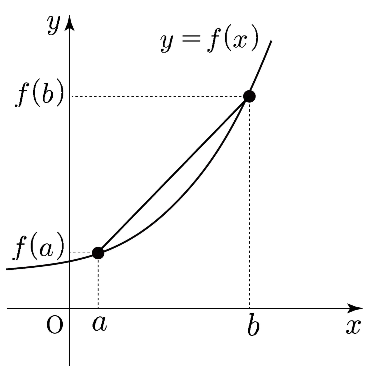
이다. 평균변화율은 두 점 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$을 잇는 직선의 기울기와 같다.

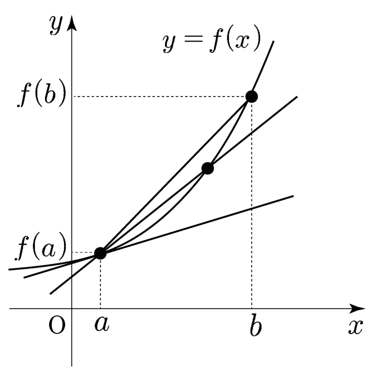
(2) 순간변화율(미분계수)

$\Delta x \to 0$일 때, 평균변화율의 극한값을 $x=a$에서의 순간변화율(미분계수)라 하고,

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h \to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{x \to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

이다. 순간변화율은 함수 $y=f(x)$의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 기울기와 같다.



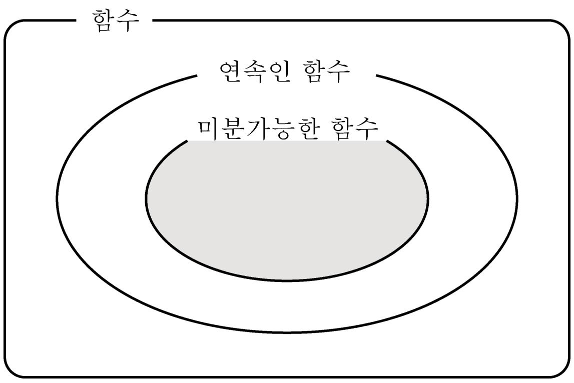


② 미분가능성과 연속성

(1) 함수 $y=f(x)$의 $x=a$에서의 미분계수 $f'(a)$가 존재할 때, 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다고 한다.

(2) 함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하면 함수 $y=f(x)$는 $x=a$에서 연속이다. 그러나 연속함수 모두가 미분가능한 것은 아니다.

Ex) 연속함수 $y=|x|$가 $x=0$에서 미분 불가능함을 확인하시오.



③ 도함수

함수 $f(x)$에 대하여 각 x에 미분계수를 대응시킨 함수를 도함수라 하고 다음과 같다.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

④ 미분법의 공식

(1) $f(x)=c \quad \Rightarrow \quad f'(x)=y'=0$ (단, c는 상수)

(2) $f(x)=x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x)=y'=nx^{n-1}$

(3) $y=cf(x) \quad \Rightarrow \quad y'=cf'(x)$

(4) $y=f(x)\pm g(x) \quad \Rightarrow \quad y'=f'(x)\pm g'(x)$

(5) $y=f(x)g(x) \quad \Rightarrow \quad y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(6) $y=\{f(x)\}^n \quad \Rightarrow \quad y'=n\{f(x)\}^{n-1}f'(x)$

※ $y=f(g(x)) \quad \Rightarrow \quad y'=f'(g(x))g'(x)$

⑤ 미분가능에 대하여

"연속" 함수 $f(x)$에 대하여 극한 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$의 좌극한과 우극한이 존재하여 그 값이 서로 같을 때, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$라 쓰고, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

즉, $\lim\limits_{h\to +0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to -0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$일 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 미분가능하다.

⑥ 몫의 미분법

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 미분가능할 때, $(g(x)\neq 0)$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

⑦ 합성함수의 미분법

두 함수 $y=f(x)$, $u=g(x)$가 미분가능할 때, 합성함수 $y=f(g(x))$의 도함수는

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{또는} \quad y'=\{f(g(x))\}'=f'(g(x))g'(x)$$

⑧ 음함수의 미분법

y를 x의 함수로 보고,

각 항을 x에 대하여 미분하여 $\dfrac{dy}{dx}$를 구한다.

즉, $\dfrac{d}{dx}f(y)=\dfrac{d}{dy}f(y)\cdot\dfrac{dy}{dx}$

ex) $x^2+y^2=1$을 음함수의 미분법을 적용하여 x에 관하여 미분하면 $2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$

⑨ 역함수의 미분법

함수 $y=f(x)$가 미분가능할 때, 역함수 $x=g(y)$가 존재하고 미분가능하면 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}} \quad \text{또는} \quad g'(y)=\frac{1}{f'(x)}$$

⑩ 매개변수의 미분법

$x=f(t)$, $y=g(t)$가 각각 미분가능하고 $f'(t)\neq 0$이면 다음이 성립한다.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$$

⑪ 삼각함수의 미분법

(1) $(\sin x)'=\cos x$

(2) $(\cos x)'=-\sin x$

(3) $(\tan x)'=\sec^2 x$

(4) $(\cot x)'=-\operatorname{cosec}^2 x$

(5) $(\sec x)'=\sec x\tan x$

(6) $(\operatorname{cosec} x)'=-\operatorname{cosec} x\cot x$

⑫ 지수함수의 미분법

(1) 함수 $y=a^x$에 대하여 $y'=a^x(\ln a)$ (단, $a\neq 1$, $a>0$)

(2) 함수 $y=e^x$에 대하여 $y'=e^x$

⑬ 로그함수의 미분법

(1) 함수 $y=\ln x$에 대하여 $y'=\frac{1}{x}$

(2) 함수 $y=\log_a x$에 대하여 $y'=\frac{1}{x\ln a}$

⑭ 접선의 방정식

곡선 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능할 때, 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 기울기는 $f'(a)$와 같다. 따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $\mathrm{P}(a, f(a))$에서의 접선의 방정식은 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$이다.

⑮ 함수의 증가와 감소

$x=a$에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

(1) $f'(a)>0$이면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다.

(2) $f'(a)<0$이면, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 감소상태에 있다.

⑯ 극댓값, 극솟값

$x=a$에서 "연속" 인 함수 $f(x)$에 대하여

(1) $x=a$에서 함수 $f(x)$가 증가상태에서 감소상태로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값 $f(a)$을 가진다.

(2) $x=a$에서 함수 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 바뀌면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값 $f(a)$을 가진다.

(3) $x=a$를 포함하는 열린 구간에서 이계도함수를 갖는 $y=f(x)$에서 $f'(a)=0$일 때,

$f''(a)<0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극댓값 $f(a)$를 갖는다.

$f''(a)>0$이면 $f(x)$는 $x=a$에서 극솟값 $f(a)$를 갖는다.

⑰ 이계도함수

함수 $y=f(x)$의 도함수 $y'=f'(x)$의 도함수를 함수 $f(x)$의 이계도함수라 하고, $f''(x)$ 또는 y''로 나타낸다.

⑱ 변곡점

함수 $y=f(x)$는 어떤 구간에서

$f''(x)>0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다.

$f''(x)<0$이면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 위로 볼록하다.

함수 $f(x)$에서 $x=a$의 좌우에서 $f''(x)$의 부호가 바뀌면 점 $(a, f(a))$는 곡선 $y=f(x)$의 변곡점이다.

ex) 함수 $y=x^2$는 $y''>0$이므로 아래로 볼록, 함수 $y=-x^2$은 $y''<0$이므로 위로 볼록이다.

⑲ 롤의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때, $f(a)=f(b)$이면 $f'(c)=0$을 만족하는 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

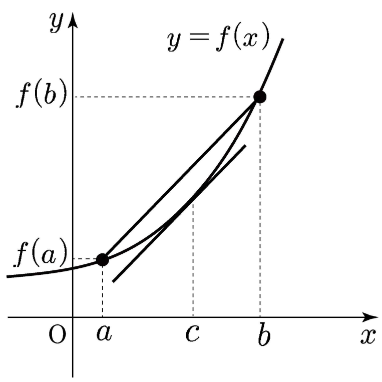
⑳ 평균값의 정리

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a, b]$에서 연속이고 열린 구간 (a, b)에서 미분가능할 때,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

인 c가 열린 구간 (a, b)에 적어도 하나 존재한다.

※ 평균값의 정리에서 $f(a)=f(b)$인 경우가 롤의 정리이다.



※ 로피탈의 정리(L'Hospital's Theorem) (심화)

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하고, $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$ 혹은 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=\infty$일 때, $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$가 수렴하면, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$이다.

입실론-델타 논법(Epsilon-Delta argument)을 이용한 증명이 옳은 증명 방법이지만 입실론-델타 논법은 고등학교 수준에선 이해하기 힘드니, 여기서는 약한 증명을 소개하고자 한다.

증명) 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 $x=a$에서 미분가능하므로 $x=a$에서 연속이다. 즉, $f(a)=g(a)=0$이다. 따라서

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Example 1) 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}$의 값을 로피탈의 정리를 이용하여 구하시오.

sol) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\tan x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\sec^2 x}=2$

Example 2) 극한 $\lim_{x\to 1}\frac{x^{20}-1}{x-1}$의 값을 로피탈의 정리를 이용하여 구하시오.

sol) $\lim_{x\to 1}\frac{x^{20}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{20x^{19}}{1}=20$

Example 3) 극한 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-1}$의 값을 구하시오.

sol) $\lim_{x\to 2}(x-1)=1$이므로 로피탈의 정리를 쓸 수 없다. 따라서 $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-1}=0$

Example 4) 극한 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$의 값을 로피탈의 정리를 이용하여 구하시오.

sol) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}$

로피탈의 정리는 기본적인 극한값의 계산을 모두 할 줄 안다고 가정할 때 익혀두도록 하고, **꼭, 위에 써진 조건이 맞는지 확인한 후에 사용하자.** 무턱대고 사용하였다가는 Example 3)과 같이 쉬운 문항을 틀릴 수 있다. 또한, **평가원 수학영역 시험에선 로피탈의 정리를 쓰는 것보다 안쓰는 것이 더 쉽도록 문항을 출제하므로** 로피탈의 정리를 사용하지 않고 문항을 해결하는 것을 추천한다.

3점 문항

1. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 $f(x)=-f(-x)$를 만족하고,

$\lim_{h \to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{h}=4$일 때, $f(3)$의 값을 구하시오. [3점]

2. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $f'(1)=4$일 때, $\lim_{n \to \infty} n\left\{f\left(1+\frac{2}{n}\right)-f\left(1-\frac{3}{n}\right)\right\}$의 값을 구하시오.

[3점]

3. 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$\lim_{x \to 2}\frac{f(x)-3}{x-2}=1,\ \lim_{x \to 2}\frac{g(x)-1}{x-2}=2$$

를 만족시킬 때, 함수 $y=f(x)+g(x)+f(x)g(x)$의 $x=2$에서의 미분계수는? [3점]

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

4. 함수 $f(x)=\begin{cases} x^2-1 & (|x|>1) \\ x^4+ax^2+b & (|x|\le 1) \end{cases}$

가 모든 실수 x 에서 미분가능하도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $2a+b$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

5. 곡선 $y=x^2$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$에서의 접선과 원점 사이의 거리를 $f(t)$라 하자.

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{f(t)}{t}=\alpha$일 때, 20α의 값을 구하시오. [3점]

6. 함수 $f(x)$가 $f(x+1)-f(1)=x^2+16x$를 만족시킬 때, $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

7. 함수 $f(x)=x^2-6x+3$ 위의 점 $\mathrm{P}(-1,\ a)$에서의 접선의 방정식이 $y=bx+c$이다. 세 수의 합 $3a+2b-c$을 구하시오. [3점]

8. 삼차함수 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$의 극댓값을 M 극솟값을 m이라 할 때, $\mathrm{M}-m$의 값을 구하시오. [3점]

9. 실수에서 정의된 미분가능한 함수 $f(x)$는 다음 두 조건을 만족한다.

(가) $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$ (나) $f'(1)=12$

$f'(0)$의 값을 구하시오. [3점]

10. 함수 $f(x)=x^2-4$ 위의 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 방정식이 $y=ax+b$이다. a^2+b^2의 값을 구하시오. [3점]

11. 삼차함수 $f(x)=x^3+9x-8$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\frac{1}{n}\right)-f(1)\right\}$의 값을 구하시오. [3점]

12. 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax+2 & (x<1) \\ bx^3+x^2 & (x\geq 1) \end{cases}$$

이 모든 실수에서 미분가능할 때, $(a+b)^2$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

13. 함수 $f(x)=x^4(10-x)$가 $x=a$에서 변곡점을 가질 때, a의 값은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

14. 좌표평면에서 곡선 $e^x+y=3xy$ 위의 점 $(0, -1)$에서의 접선의 기울기가 a일 때, a^2의 값을 구하시오. [3점]

15. 함수 $f(x)=\left(e^x-1\right)^{\frac{3}{2}}$과 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 $h(x)=(g\circ f)(x)$라 하자. $h'(\ln 2)=15$일 때, $g'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

16. 함수 $f(x)=e^{x}-1$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} n\left\{f\left(2+\frac{2}{n}\right)-f\left(2+\frac{1}{n}\right)\right\}$의 값은? [3점]

① e ② e^{2} ③ $2e^{2}$ ④ e^{3} ⑤ $2e^{3}$

17. 점 $(0,\ 1)$에서 곡선 $y=e^{x}+1$에 그은 접선이 $(1,\ a)$를 지날 때, a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ e ④ $e+1$ ⑤ e^{2}

18. 미분가능한 함수 $f(x)$의 역함수 $g(x)$가

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-2}{x}=\frac{1}{6}$$

일 때, $f'(2)$의 값을 구하시오. [3점]

19. 구간 $[-1,\ 1]$에서 함수 $y=e^x(e^x-2)$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $\mathrm{M}-m$의 값은? [3점]

① $e-1$ ② e ③ e^2 ④ $(e-1)^2$ ⑤ e^2-2e-1

4점 문항

1. 다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $-f(x)=f(-x)$이고, $\lim_{x \to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-8$를 만족시킨다. $g(x)=xf(x)$일 때, $g'(-2)$의 값을 구하시오. [4점]

2. 대칭축이 $x=1$인 이차함수 $f(x)$에 대하여

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(2+h)-f(2-h)}{h}=-4$$

일 때, $20f'(0)$의 값은? [4점]

3. 함수 $f(x)=-x^3+3x^2$는 $x=a$에서 극댓값 b를 가진다. 함수 $f(x)$위의 점 $(b,\ f(b))$에서 접하는 직선을 $y=cx+d$이라 하자. $a+b+c+d$의 값을 구하시오. [4점]

4. 다음 극한의 극한값이 존재하도록 하는 함수 $f(x)$로 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}$$

〈보 기〉

ㄱ. $f(x)=(x-1)^2$

ㄴ. $f(x)=|x-1|$

ㄷ. $f(x)=\begin{cases} 1-x & (x<1) \\ (x-1)^2 & (x \geq 1) \end{cases}$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

5. 삼차함수 $y=f(x)$의 그래프가 점 $(3,\ 0)$에 대하여 대칭일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. 모든 실수 x에 대하여 $f(3+x)=f(3-x)$이다.

ㄴ. 함수 $f(x)$에서 x값이 0에서 6까지 변할 때의 평균변화율은 $\dfrac{f(6)}{3}$이다.

ㄷ. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} f(k)=0$

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

6. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음을 만족시킨다.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(-1)}{x-1}=0$$

옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f(1)=f(-1)$
ㄴ. $f'(2)=7$
ㄷ. $f(1)<0$이면, $f(x)$는 세 개의 실근을 가진다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

7. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 실수 $a(a \neq 1)$에 대하여 다음을 만족시킨다.

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(a)}{x-1}=0$$

$f(a)=a$일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $f(1)=f(a)$
ㄴ. $f'(a)=a-1$를 만족하는 a의 개수는 2개이다.
ㄷ. 함수 $f(x)$의 그래프가 항상 지나는 점들의 y좌표의 합은 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

8. 삼차함수 $f(x)=x^3-3x+2$와 실수 k, α, β에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le \alpha,\ x \ge \beta) \\ k & (\alpha < x < \beta) \end{cases}$$

라 하자. 함수 $g(x)$가 모든 실수 x에서 연속일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha \ne \beta$이다.) [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $\alpha=0$이면, $k=2$이다.
ㄴ. $0 \le k \le 4$
ㄷ. 함수 $g(x)$의 미분 가능하지 않은 점이 적어도 하나 존재한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

9. 함수 $f(x)$가

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x+1 & (x<0) \\ x^3-1 & (x \ge 0) \end{cases}$$

일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $|f(x)|$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄴ. $\{f(x)\}^2$는 $x=0$에서 연속이다.
ㄷ. $x^k f(x)$가 $x=0$에서 미분가능하도록 하는 최소의 자연수 k는 2이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

CHAPTER 7. 함수의 미분법

Section 7.1 실전문제 해설

3점 문항

1	24	2	20	3	③	4	①	5	10	6	16	7	12
8	4	9	11	10	29	11	12	12	16	13	①	14	16
15	5	16	②	17	④	18	6	19	④				

1. $f(x)=x^3+ax$이고 $f'(1)=2$이므로 $a=-1$ 따라서, $f(3)=24$

2. $\lim_{n\to\infty}\dfrac{f\left(1+\dfrac{2}{n}\right)-f\left(1-\dfrac{3}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(1+2h)-f(1-3h)}{h}=5f'(1)=20$

3. $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)-3}{x-2}=1$ 이므로, $f(2)=3$, $f'(2)=1$ 이고, $\lim_{x\to 2}\dfrac{g(x)-1}{x-2}=2$ 이므로, $g(2)=1$,

$g'(2)=2$ 이다. $y=f(x)+g(x)+f(x)g(x)$를 미분하면,

$y=f'(x)+g'(x)+f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$이고, $x=2$를 넣으면, $1+2+1+6=10$

4. 우선 함수 $f(x)$가 연속이어야 하므로 $x=\pm 1$을 넣으면, $a+b=-1$이다. 좌미분계수와

우미분계수가 같아야 하므로, $2=4x^2+2a$에서 $x=\pm 1$을 넣으면, $a=-1$이다.

따라서, $a=-1$, $b=0$이다.

5. 접선이 $y=2tx-t^2$이므로 $f(t)=\dfrac{t^2}{\sqrt{4t^2+1}}$이다. 따라서, $\lim_{t\to\infty}\dfrac{f(t)}{t}=\dfrac{1}{2}$이다.

6. $\dfrac{f(x+1)-f(1)}{x}=x+16$이다. $x\to 0$이면, $f'(1)=16$

7. 점 $(-1,\ 10)$위에서 접선의 방정식은 $y=-8x+2$이다. 따라서, $30-16-2=12$

8. $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$이므로 극댓값은 6, 극솟값은 2

9. $f(x+y)=f(x)+f(y)+xy$을 다음과 같이 변형시키자.

1) $f(x+y)-f(x)=f(y)+xy$로 바꾸고 양변을 y로 나누자.

2) $\dfrac{f(x+y)-f(x)}{y}=\dfrac{f(y)}{y}+x$ 이므로 $y\to 0$ 이면, $f'(x)=f'(0)+x$이다. $(f(0)=0)$

3) $f'(1)=12$이므로 $f'(0)=11$

10. 점 $(1,\ -3)$에서의 접선의 기울기는 2이므로 $y=2(x-1)-3=-2x-5$이다.

따라서, 답은 29

11. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{f\left(1+\dfrac{1}{n}\right)-f(1)\right\}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$이므로, $f'(1)=12$

12. 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 연속이어야 하므로 $3+a=b+1$이고, $x=1$에서 미분가능하여야 하므로 $2+a=3b+2 \Rightarrow a=3b$이고, $3+3b=b+1 \Rightarrow b=-1,\ a=-3$. 따라서, $(a+b)^2=16$

13. $f'(x)=4x^3(10-x)-x^4$ 이고, $f''(x)=12x^2(10-x)-8x^3$이다. 이것을 정리하면, $f''(x)=20x^2(6-x)$이고 $x=6$에서 변곡점을 갖는다.

14. $e^x+y=3xy$를 미분 $\Rightarrow$ $e^x+y'=3y+3xy'$이고 점 $(0,\ -1)$에서의 접선의 기울기는 -4

15. $f'(x)=\dfrac{3}{2}(e^x-1)^{\frac{1}{2}}e^x$이고, $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$이므로 $x=\ln 2$를 넣으면, $3g'(1)=15$가 나온다. 따라서, $g'(1)=5$

16. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left\{f\left(2+\dfrac{2}{n}\right)-f\left(2+\dfrac{1}{n}\right)\right\}=f'(2)$이므로 $f'(2)=e^2$

17. 곡선 $y=e^x+1$ 위의 임의의 점을 $(t,\ e^t+1)$이라 하면 접선의 방정식은

$y=e^t(x-t)+e^t+1$이고 점 $(0,\ 1)$을 넣으면 $t=1$이 나온다.

따라서, 접선의 방정식은 $y=ex+1$이고 $a=e+1$

18. $g(0)=2$이므로 $f(2)=0$이다. 역함수의 미분법에 의해 $g'(0)=\dfrac{1}{6}$이므로 $f'(2)=6$이다.

19. 함수 $y=e^x(e^x-2)$를 미분하면 $y'=2e^{2x}-2e^x$이고, $x=0$에서 극솟값을 가지므로 구간 $[-1,\ 1]$에서 최솟값은 $f(0)=-1$, 최댓값은 $f(1)=e^2-2e$, 따라서, $\mathrm{M}-m=(e-1)^2$

4점 문항

1	16	2	40	3	62	4	⑤	5	④	6	③	7	④
8	⑤	9	⑤	10	19	11	5	12	36	13	40	14	9
15	20	16	③	17	⑤	18	④	19	9	20	16	21	③
22	57	23	40	24	85	25	③	26	②	27	④	28	②
29	④	30	⑤	31	8	32	14	33	②	34	③	35	10
36	④	37	19	38	⑤	39	④	40	④				

1. $-f(x)=f(-x)$이면 $f'(x)=f'(-x)$이므로, (양변을 미분해보면 알 수 있다.)

$f(-2)=f(2)=0$, $f'(2)=f'(-2)$을 만족시킨다. 또한,

$g'(x)=f(x)+xf'(x)$이므로 $g'(-2)=f(-2)-2\times f'(-2)=16$이다.

2. $x=1$이 대칭축이므로 $f'(0)=-f'(2)$이다. $2f'(2)=-4$이므로 $f'(0)=2$

3. $x=2$에서 극댓값 4를 가진다. 그리고 점 $(4,\ -16)$에서의 접선은 $y=-24x+80$이다.

따라서, 답은 62

4.

ㄱ. $\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1-h)}{2h}=0$ (참)

ㄴ. $\lim_{h\to 0}\frac{|h|-|-h|}{2h}=0$ (참)

ㄷ. $\lim_{h\to 0+}\frac{h^2-h}{2h}=-\frac{1}{2}$, $\lim_{h\to 0-}\frac{-h-h^2}{2h}=-\frac{1}{2}$ (참)

5. ㄱ. $f(3+x)+f(3-x)=0$이다. (거짓)

ㄴ. ㄱ에 의해 $f(6)=-f(0)$이므로 $\frac{f(6)-f(0)}{6}=\frac{2f(6)}{6}=\frac{f(6)}{3}$

ㄷ. ㄱ에 $x=0,\ 1,\ 2$를 넣으면 $f(1)+f(5)+f(2)+f(4)+f(3)=0$을 얻어낼 수 있다. (참)

6. ㄱ. 함수의 극한의 성질에 의해서 (참)

ㄴ. ㄱ에 의해 $f(x)=(x-1)^2(x+1)+k$ 이므로, $f'(x)=2(x-1)(x+1)+(x-1)^2$이다. 따라서,

$f'(2)=7$이다. (참)

ㄷ. $f(1)<0$이면 $f(x)=(x-1)^2(x+1)+k$에서 $k<0$인데, 이 때, 함수 $f(x)$는 1개의 실근을 가질 수도, 2개의 실근을 가질 수도, 3개의 실근을 가질 수도 있다. (거짓)

7.

ㄱ. 함수의 극한의 성질에 의해서 (참)

ㄴ. ㄱ과 $f(a)=a$이므로 $f(x)=(x-1)^2(x-a)+a$ 이다.

그리고 $f'(x)=(x-1)^2+2(x-1)(x-a)$이므로, $f'(a)=(a-1)^2$이다.

따라서, $(a-1)^2=a-1$을 만족하는 $a=1$ or 2인데, 문제 조건에서 $a\neq1$이므로 $a=2$만 된다.

따라서, 1개이다. (거짓)

ㄷ. $f(x)=(x-1)^2(x-a)+a$는 a값에 상관없이 $f(0)=0$, $f(2)=2$를 지나므로 (참)

8.

ㄱ. $\alpha=0$이면 $f(0)=2$, 연속이므로 $k=2$ (참)

ㄴ. 함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값 사이에 k가 존재해야 연속이 된다. 그 밖에 존재하면, 모든 실수에서 연속이 될 수 없다. 따라서, $0\le k\le4$ (참)

ㄷ. $k=0$이나 $k=4$일 때, 미분가능하지 않은 점이 1개, $0<k<4$일 때, 미분가능하지 않은 점이 2개이다. (참)

9. 연속의 정의 $\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$을 이용하여 ㄱ,ㄴ을 해결하고, 미분계수의 정의

$\lim_{h\to0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$을 이용하여 ㄷ을 해결하자.

ㄱ, $\lim_{x\to0}|f(x)|=|f(0)|=1$이다. (그래프를 그려도 좋다.) (참)

ㄴ. $\lim_{x\to0}\{f(x)\}^2=\{f(0)\}^2=1$이다. (그래프를 그려도 좋다.) (참)

ㄷ. $x^kf(x)=g(x)$라 하자. $\frac{g(h)-f(0)}{h}=\frac{h^k(h^2+h+1)}{h}=\lim_{h\to0-}h^{k-1}(h^2+h+1)$이고,

$\frac{g(h)-f(0)}{h}=\frac{h^k(h^3-1)}{h}=\lim_{h\to0+}h^{k-1}(h^3-1)$이다. 미분계수의 정의에 의해

$\lim_{h\to-0}h^{k-1}(h^2+h+1)=\lim_{h\to+0}h^{k-1}(h^3-1)$ 이어야 한다. $k=1$이면, 좌우변이 같지 않다.

$k=2$이면 좌우변이 0으로 모두 같다. 따라서, 최소의 자연수 $k=2$ (참)

10. $g(t)=-tf'(t)+f(t)$이므로, $g(t)=2at^3+at^2+\frac{7}{3}$이다. 함수 $g(t)$를 a에 관해 정리하면,

$g(t)=at^2(2t+1)+\frac{7}{3}$이므로, 두 점 $\left(0,\ \frac{7}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{7}{3}\right)$을 항상 지난다. 따라서, 삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{7}{3}=\frac{7}{12}$