

1. $A^{-1} = \frac{1}{5-4} \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \therefore$ 성분의 합 = 1

2. $f(x)$ 가 $x=0$ 에서 연속이면
 $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0} f(x) = f(0)$ 이다

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + a}{x}$ 에서 이 값이 b 로 수렴하고,
 분모 $\rightarrow 0$ 이므로 분자 $\rightarrow 0$ 이다.

$\lim_{x \rightarrow 0} (e^{2x} + a) = 0$ 에서 $a = -1$ 이고

$b = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2 = 2$

3. 외분점 공식을 써도 별로 오래 걸리지 않지만, 점을 머릿속으로 떠올려 보면 Q가 P와 외분점의 중점임을 쉽게 알 수 있다. (물론, 2:1이 아닌 다른 비율의 내/외분이라고 숫자가 복잡하지 않다면 간단히 떠올리거나 그려서 해결할 수 있다.) 따라서 외분점의 좌표는 $(2, 2b-7, 18-a)$ 이다.

$\therefore a = 4, b = 6$

4. $P(A \cup B^c) = \frac{3}{10}$ 이므로 드 모르간의 법칙에 의해

$P(A^c \cap B) = \frac{7}{10}$ 이고, A^c 와 B 는 독립*이므로

$\frac{3}{4} \times P(B) = \frac{7}{10} \therefore P(B) = \frac{14}{15}$

5. 두 가지의 풀이가 가능하다.

첫 번째 풀이)

$\frac{g(x)}{f(x)} \geq 1$ 에서 $\frac{f(x) - g(x)}{f(x)} \leq 0$ 이고, 이는
 $f(x)\{f(x) - g(x)\} \leq 0, f(x) \neq 0$ 과 동치이다.

따라서 이를 만족하는 범위는 $f > 0, f - g \leq 0$ 또는
 $f < 0, f - g \geq 0$ 이고, 이를 찾으려면
 $-3 \leq x < 1, 3 \leq x < 5$ 이다. 따라서 정수 x 는 6개.

두 번째 풀이)

f 와 $f - g$ 모두 이차함수이므로,
 $f(x) = a(x-1)(x-5), f(x) - g(x) = b(x-3)(x+3) (a > 0, b > 0)$

* 사건 A와 B가 독립이면, A의 여사건과 B, B의 여사건과 A, A의 여사건과 B의 여사건의 세 가지 또한 모두 독립이다. 간단히 증명할 수 있다.

으로 둘 수 있다. 따라서 주어진 부등식은

$(x-1)(x-5)(x+3)(x-3) \leq 0 (x \neq 1, 5)$ 와 동치가 되어 답을 구할 수 있다.

바람직한 풀이는 당연히 첫 번째 풀이이다. 다항함수가 아닌 함수로 주어진다면 두 번째 풀이는 써먹을 수 없기 때문.

6. 날개 하나를 빨간색으로 고정하면 반대쪽에는 자동으로 파란색이 오므로 나머지 4개를 색칠하는 경우의 수인 4!이 답.

7. 두 가지의 풀이가 가능하다.

첫 번째 풀이) 합성변환 $f \circ g$ 를 나타내는 행렬은 AB 이고 계산하면 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

$(f \circ g)(x, y) \rightarrow (x', y')$ 라 하면 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ 에서

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \therefore x = \frac{1}{3}y', y = x'$

따라서 변환된 도형의 방정식은

$(x+3)^2 + (\frac{y}{3} - 2)^2 = 5^2$ 이므로 y 절편은 $(-6, 0), (18, 0)$.

두 번째 풀이) 첫 번째 풀이처럼 행렬 자체를 구할 수도 있지만, 해당 변환의 의미를 생각해보자. 변환 f 는

$x \rightarrow x, y \rightarrow 3y$ 이므로 y 축 방향 3배 확대변환이고, 변환 g 는 $y = x$ 에 대한 대칭변환이다. 그러므로 $f \circ g$ 는 $y = x$ 에 대해 대칭시킨 후 y 축 방향으로 3배 확대시키는 변환.

우선 $y = x$ 에 대해 대칭시키면 $(y-2)^2 + (x+3)^2 = 5^2$ 이고

이를 y 축 방향으로 3배 확대하려면 y 대신 $\frac{y}{3}$ **를 대입하면

되므로 $(x+3)^2 + (\frac{y}{3} - 2)^2 = 5^2$ 가 답이다.

실제 시험 상황에서 가장 적절한 풀이는 일단 행렬이 특수한 변환(eg. 대칭, 닮음, 회전,...)을 나타내는지 생각해보고 아니라면 첫 번째 풀이처럼 계산하는 것이 가장 합리적이다.

** 점을 3배 확대하려면 y 대신 $3y$ 를 대입하지만, 도형을 확대하려면 $\frac{y}{3}$ 를 대입하여야 한다.

[8~9] 이 문제를 풀 때 주의할 점은, 위에 주어진 상황만 공통이고 8번과 9번의 상황은 조금씩 다르다는 점이다.

일단, $f(x) = -2^x + m$ 이므로 $A(\log_2 m, 0)$, $B(\log_2 \frac{m}{2}, \frac{m}{2})$ 이다.

8. $\overline{OA} = 2\overline{BC}$ 이므로 $\overline{BC} = \overline{OA} - \overline{BC} = \log_2 m - \log_2 \frac{m}{2} = 1$ 인데,

$\overline{BC} = \log_2 \frac{m}{2}$ 이므로 $\log_2 \frac{m}{2} = 1 \quad \therefore m = 4$.

9. $m = 5$ 이면 $A(\log_2 5, 0)$ 이다. 따라서

$$(\text{회전체의 부피}) = 2\pi \int_0^{\log_2 5} (2^x)^2 dx = \frac{12}{\ln 2} \pi$$

10. 구하고자 하는 확률은

(B를 선택하고 검은 구슬 2개를 뽑을 확률) \div (A를 선택하고 검은 구슬 2개를 뽑을 확률 + B를 선택하고 검은 구슬 2개를 뽑을 확률)이다.

일단 A나 B가 뽑힐 확률은 각각 $\frac{1}{2}$.

A가 뽑히면 무조건 검은 구슬만 나오므로

$$(\text{A를 선택하고 검은 구슬 2개를 뽑을 확률}) = \frac{1}{2}$$

B가 뽑혔을 때, 구슬 2개를 골랐는데 둘 다 검은 구슬일

확률은 $\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}$ 이므로

$$(\text{B를 선택하고 검은 구슬 2개를 뽑을 확률}) = \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}$$

$$\therefore \frac{\frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}} = \frac{1}{7}$$

11.

$$(A - E)^{n+1} = a_n A^2 - a_n A + (-1)^n A + (-1)^{n+1} E \text{에서}$$

$$A^2 = 3A \text{이므로 } (A - E)^{n+1} = (2a_n + (-1)^n)A + (-1)^{n+1} E$$

따라서 $f(n) = (-1)^n$ 이고,

$$(A - E)^{n+1} = a_{n+1} A + (-1)^{n+1} E \text{ 이므로 } a_{n+1} = 2a_n + (-1)^n$$

$n \geq 2$ 이면 $a_n = 2a_{n-1} + (-1)^{n-1}$ 이 성립한다.

따라서 $n \geq 2$ 일 때

$$a_n + a_{n+1} = 2(a_{n-1} + a_n) + (-1)^n + (-1)^{n-1} \text{인데 어떤 자연수}$$

n 에 대해서든 $(-1)^n + (-1)^{n-1} = 0$ 이므로

$a_n + a_{n+1} = 2(a_{n-1} + a_n)$ 이다. 또한 $a_1 + a_2 = 1 + 1 = 2$ 이므로

모든 자연수 n 에 대하여

$$a_n + a_{n+1} = 2(a_{n-1} + a_n) = 2 \cdot 2(a_{n-2} + a_{n-1}) = \dots =$$

$$2^{n-1}(a_1 + a_2) = \boxed{2^n}$$

따라서 $g(n) = 2^n$.

㉠과 ㉡에 의해 $3a_n + (-1)^n = 2^n$ 이다. 따라서

$$a_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$$

$$\therefore f(9) \times g(5) = (-1)^9 \times 2^5 = -32$$

12. 기본적인 합성함수의 최대/최소 문제이다.

$$g(x) = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}) \text{이므로}$$

$-\sqrt{2} \leq g(x) \leq \sqrt{2}$ 이다. $g(x) = t$ 로 치환*하자.

$(f \circ g)(x) = f(t)$ 가 되고, $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 는 $f(t)$ 의 정의역이

된다. $f(t) = (t+1)^2 - 2$ 이므로 최댓값은 $t = \sqrt{2}$ 일 때

$2\sqrt{2} + 1$, 최솟값은 $t = -1$ 일 때 -2 이다.

13. $f(x) = mx + 2$, $g(x) = mx$ 이다.

$\sqrt{f(x)} = g(x)$ 의 실근은 α 이므로 $\sqrt{m\alpha + 2} = m\alpha$ 에서 $m\alpha = 2$ 이다.

$$\sqrt{f(\frac{x}{2})} = g(x - \alpha) \text{의 실근은 } 2 \text{이므로}$$

$$\sqrt{f(1)} = g(2 - \alpha)$$

$$\sqrt{m+2} = m(2 - \alpha) = 2m - m\alpha = 2m - 2 \text{를 풀면 } m = 2.$$

$$\therefore m = 2, \alpha = 1$$

이렇게 말고, $\sqrt{f(x)} = g(2x - \alpha)$ 의 실근이 1임을 이용하여 두 식에서 α 가 1임을 찾아낼 수도 있지만, 이런 풀이는 실제 상황에서 잘 생각나지 않는다. ‘평가원 문제엔 보이지 않는 무언가가 있다’라고 생각하는 순간 문제에 말려들어간다.

14. 정형화된 무한등비급수-도형 문제로서, 1분만에

해결해야 한다. 추가되는 도형이 원래 도형과 닮음임은

당연하고, 2개씩 늘어나므로 공비는 (닮음비)² $\times 2$ 가 되어

(초항) $\div \{1 - (\text{닮음비})^2 \times 2\}$ 가 답이다.

원래 원의 반지름의 반이 새로 추가되는 원의 지름이 되므로

닮음비는 $\frac{1}{4}$ 이다.

$$\angle DOB = 45^\circ \text{이므로 } \triangle DOB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{4} \text{이다.}$$

* 속달되면 치환하지 않아도 된다.

따라서 (초항) = $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$\therefore \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}}{1 - (\frac{1}{4})^2 \times 2} = \frac{12\sqrt{2}}{7}$$

15.

ㄱ. $A^2 = A - E$ 에서 $A(E - A) = E$ 이므로 A 는 역행렬을 가지고, $(AB)^2 = ABAB = (ABA)B = E$ 이므로 B 역시 역행렬을 가진다. (참)

ㄴ. $A(BAB) = E$ 에서 $BAB = A^{-1} = E - A = -A^2$ (참)

ㄷ. $B^2AB^2 = B(BAB)B = B(-A^2)B = B(E - A)B = B^2 - BAB = B^2 + A^2$ (참)

ㄱㄴㄷ 형태의 문제에서 보기 ㄷ은 대개 ㄱ과 ㄴ에서 힌트를 얻는다.

16. P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 I 라 하자.

$\angle OPA = \theta$ 이므로, 직선 AP 와 x 축의 양의 방향이 이루는 각의 크기는 2θ 이다.

또한 $\overline{AO} = \overline{AP} = \frac{5}{4}$, $\overline{PI} = 1$ 이므로 $\overline{AI} = \frac{3}{4}$ 이다.

$$\tan\theta = \frac{\overline{PI}}{\overline{OI}} = \frac{1}{2}, \quad \tan 2\theta = \frac{\overline{PI}}{\overline{AI}} = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \tan 3\theta = \tan(\theta + 2\theta) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}} = \frac{11}{2}$$

물론, 원의 접선 공식을 이용해도 풀 수 있으나, 중학교 때 배운 도형의 성질로 금방 해결할 수 있다.

17. 이차곡선은 정의 문제와 접선의 방정식 문제밖에 나오지 않는다. 이 문제는 접선이 나오니 당연히 접선의 방정식 문제이다. (정의와 접선을 같이 묻는 경우가 있을 수도 있다.)

$P(\cos\theta, \sin\theta)$ 라고 하자. $\overline{OP} = \cos\theta$ 이므로 단축의 길이는

$2\sin\theta$ 이고, 타원의 방정식은 $\frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{\sin^2\theta} = 1$ 이 된다.

이차곡선 위에 있지 않는 점에서 그은 접선의 방정식 문제는 기울기 m 인 접선의 방정식에 그 점의 좌표를 대입해 m 을 찾는 방법으로 푸는 것이 일반적이다.

이 문제에서는 접선의 기울기가 $-\frac{3}{2}$ 이므로 기울기 $-\frac{3}{2}$ 인

접선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}x \pm \sqrt{1^2 \cdot (\frac{3}{2})^2 + \sin^2\theta}$ 이다.

$(\cos\theta, \sin\theta)$ 를 대입하여 풀면 $3\cos^2\theta + 4\sin\theta\cos\theta - 3 = 0$ 이

되는데, 양변을 $\cos^2\theta$ 로 나누면

$$3 + 4\tan\theta - 3\sec^2\theta = 3 + 4\tan\theta - 3(1 + \tan^2\theta) = 4\tan\theta - 3\tan^2\theta = 0$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{4}{3}$$

물론, $\cos^2\theta$ 로 양변을 나누지 않고

$$3\cos^2\theta - 3 = -3(1 - \cos^2\theta) = -3\sin^2\theta$$
와 같이 풀어도 된다.

18. 지금까지 평가원에서 잘 나오지 않던 유형의 문제이다. 직관을 이용해 풀 수도 있겠지만, 실제 수능 치는 상황에서 직관은 잘 떠오르지 않으므로, 논리적으로 푸는 훈련을 해야 한다. $f(x)$ 가 어떻게 생겼는지 모르기 때문에 그림을 그려 푸는 것은 엄밀하지 못하다. 미분계수의 정의를 이용하자.

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$2x \leq f(x) \leq 3x$ 에서 식을 변화율 형태로 적절히 변형 해 보자.

$x > 1$ 인 경우: $2x - 2 \leq f(x) - f(1) \leq 3x - 2$ 이고, $x - 1$ 로

나누면 $\frac{2x - 2}{x - 1} \leq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \frac{3x - 2}{x - 1}$ 이다. $x \rightarrow 1+0$ 의

극한을 취하면 $2 \leq \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \infty$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq 2.$$

$x < 1$ 인 경우: $2x - 2 \leq f(x) - f(1) \leq 3x - 2$ 이고, $x - 1$ 로

나누면 $\frac{3x - 2}{x - 1} \leq \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq \frac{2x - 2}{x - 1}$ 이다. $x \rightarrow 1-0$ 의

극한을 취하면 $-\infty \leq \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq 2$ 에서

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \leq 2.$$

그런데 $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ 이어야 하므로

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2$$
임을 알 수

있다.

$f'(2)$ 도 같은 방법으로 3임을 알 수 있다.

19. 학생 한 명을 뽑았을 때 7시간 이상 독서한 학생일 확률은 0.36이므로, 100명을 임의추출할 때 7시간 이상 독서한 학생의 수 X 는 이항분포 $B(100, 0.36)$ 을 따른다. 이항분포는 시행횟수가 충분히 크면(보통 30 이상이면 충분히 크다고 한다.) 정규분포로 근사할 수 있다. 근사하면 X 는 $N(36, (\frac{24}{5})^2)$ 를 따른다.

$$\therefore P(X \leq 42) = P(Z \leq \frac{42-36}{\frac{24}{5}}) = P(Z \leq 1.25) = 0.8944$$

20.

- ㄱ. $h(3) = (f \circ g(3)) = f(1) = 5$ (거짓)
- ㄴ. $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ 이므로 $h'(2) = f'(g(2))g'(2)$ 인데, $g(2) = 2.xxx$ 이므로 $f'(g(2)) < 0$ 이고 $g'(2) < 0$ 이므로 $h'(2) > 0$ (참)
- ㄷ. x 가 3에서 4로 갈 때, $g(x)$ 는 1에서 0.xxx로 감소한다. x 가 1에서 0.xxx로 갈 때, $f(x)$ 는 5에서 4.xxx로 감소하므로 x 가 3에서 4로 갈 때 $h(x)$ 는 감소한다. (참)

21. $f(x)$ 가 우함수임은 쉽게 알 수 있다(x^2, x^4 , 상수항으로만 이루어져 있으므로). 그리고 $f(x+2) = f(x)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x = (\text{정수})$ 에 대해 대칭이다.(머릿속으로 대충 떠올려보면 알 수 있다.)

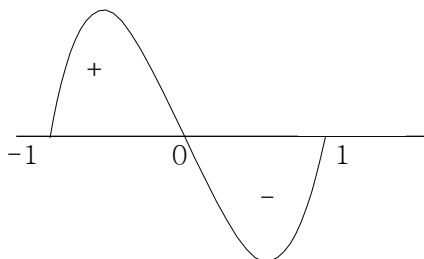
ㄱ. $f(x+2) = f(x)$ 이므로

$$\int_{-2}^{-1} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx, \int_1^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx$$

우함수이므로 $\int_{-1}^0 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$

$$\therefore \int_{-2}^2 f(x)dx = 4 \int_0^1 f(x)dx \quad (\text{참})$$

ㄴ. $f'(x) = \frac{4x(x+1)(x-1)(x^2+1)}{(x^4+1)^2}$ ($-1 \leq x < 1$)에서 부호를 결정하는 부분은 $x(x+1)(x-1)$ 이다.



- $1 < x < 2$ 일 때는 $-1 < x < 0$ 일 때와 같으므로 위 그림과 같이, $-1 < x < 0$ 일 때 $f'(x) > 0$ (참)
- ㄷ. $1 < x < 2$ 에서 $f'(x) > 0$ 이고, $2 < x < 3$ 에서 $f'(x) < 0$ 이다.

$$\int_1^3 x|f'(x)|dx = \int_1^2 xf'(x)dx - \int_2^3 xf'(x)dx$$

$$= [xf(x)]_1^2 - \int_1^2 f(x)dx - [xf(x)]_2^3 + \int_2^3 f(x)dx$$

$$= 2f(2) - 1f(1) - 3f(3) + 2f(2) = 4f(2) = 4f(0) = 4$$

$$\therefore \int_1^2 f(x)dx = \int_2^3 f(x)dx \quad (\text{참})$$

22. 제 n 항까지의 합은 $n^2 - 7n$ 이다.
 $n^2 - 7n = 30 \quad \therefore n = 10$

23. $\vec{OB} = (a, 2), \vec{AB} = (a-1, 2-a)$ 이므로
 $a(a-1) + 2(2-a) = 14 \quad \therefore a = 5$

24. 일차변환 f 를 나타내는 행렬을 A 라고 하자.
 $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 에서 $A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 이므로 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \end{pmatrix}$
 $\therefore a = 11, b = 4$

25. 문제의 상황을 식으로 나타내면
 $C = B \log_2(1+a), 2C = B \log_2(1+33a)$ 와 같다. 두 식을 빼면
 $C = B \log_2 \frac{1+33a}{1+a}$ 인데 이것이 $B \log_2(1+a)$ 와 같으므로
 $\frac{1+33a}{1+a} = 1+a \quad \therefore a = 31$

26. $\int_{-1}^0 f(x)dx = \frac{2}{3}a$ 이고, $\int_0^3 f(x)dx = \frac{3}{2}a$ 이므로

$$P(-1 \leq X \leq 0) = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{2}} = \frac{4}{13}$$

§ 이 문제처럼 $[-1, 0]$ 의 확률을 구하는 것이 아니라 다른 구간이 주어진다면 a 를 구하여야 한다.
 $(\frac{2}{3} + \frac{3}{2})a = 1$ 에서 $a = \frac{6}{13}$ 이다.

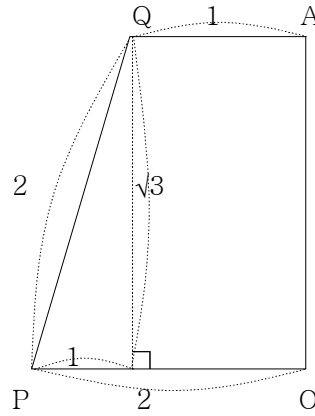
* 자주 쓰이는 테크닉이다. 간단히 증명할 수 있다.

27. B에서 $x = -p$ 에 내린 수선의 발을 H라 하자.
 $\overline{BF} = \overline{BH} = 5$ 이고 $\overline{AB} = 7$ 이므로 $\overline{AH} = \sqrt{24}$ 이고, 따라서
 $B(5-p, \sqrt{24})$ 이다. B는 $y^2 = 4px$ 위의 점이므로
 $24 = 4p(5-p) \quad \therefore p = 2, 3$

28. 세 직선을 포함하는 평면의 법선벡터는 세 직선의
 방향벡터와 전부 수직이므로 내적이 0이다.
 세 직선의 방향벡터는 각각 $(1, -1, 2), (1, 1, 2a), (1, -2, a)$.
 평면의 법선벡터를 (p, q, r) 이라 하면
 $p - q + 2r = 0$
 $p + q + 2ar = 0$
 $p - 2q + ar = 0$
 두 번째 식과 세 번째 식에서 a 와 r 을 소거하면 $p = 5q$ 를
 얻고, 첫 번째 식에 대입하면 $r = -2q$ 를 얻고, 이들을 두
 번째 식에 대입하면 $6q - 4qa = 0$
 여기에서 $q = 0$ 이면 $p = r = 0$ 이 되어버리므로 $q \neq 0$ 이다.
 $\therefore a = \frac{3}{2}$

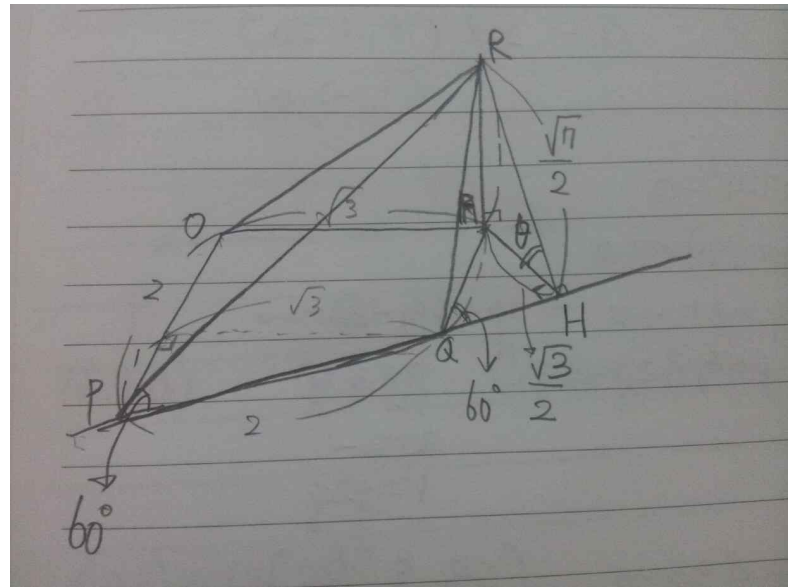
29. $\overline{BP} = \tan\theta$ 이므로 $\overline{AP} = 1 - \tan\theta$ 이고, $\angle QCD = \frac{\pi}{4} - \theta$ 에서
 $\overline{QD} = \tan(\frac{\pi}{4} - \theta), \overline{AQ} = 1 - \tan(\frac{\pi}{4} - \theta) = \frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta}$ 이다.
 $\therefore f(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \tan\theta) \cdot \frac{2\tan\theta}{1 + \tan\theta} = \frac{\tan\theta(1 - \tan\theta)}{1 + \tan\theta}$
 $g(\theta)$ 를 구하기 위해서는 반지름을 알아야 한다.
 $\triangle OBP = \frac{1}{2}\tan\theta = \frac{r}{2}(1 + \tan\theta + \sec\theta)$ 에서 양변에 $2\cos\theta$ 를
 곱하여 정리하면 $r = \frac{\sin\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta}$ 를 얻는다.
 $\therefore g(\theta) = \pi \left(\frac{\sin\theta}{1 + \sin\theta + \cos\theta} \right)^2$
 $\therefore \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{g(\theta)}{\theta \times f(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\pi \sin^2\theta}{(1 + \sin\theta + \cos\theta)^2} \cdot \frac{1 + \tan\theta}{\tan\theta(1 - \tan\theta)} \right\}$
 $= \pi \lim_{\theta \rightarrow +0} \left\{ \frac{\sin^2\theta}{\theta^2} \cdot \frac{1}{(1 + \sin\theta + \cos\theta)^2} \cdot \frac{\theta}{\tan\theta} \cdot \frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} \right\} = \pi \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1$
 $= \frac{\pi}{4}$

30. $\overline{OA} = \sqrt{3}, \overline{OR} = 2$ 이므로 $\overline{AR} = 1$ 이다.



또한 그림과 같이 $\overline{PQ} = 2$ 이다.

이면각을 구할 때는 넓이 정사영을 이용하거나, 교선에
 수직인 두 직선이 이루는 각을 찾으면 된다.
 여기에서는 두 번째 방법을 이용해 보자.
 R 에서 직선 PQ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면,
 $\overline{RA} \perp$ (평면 $AQPO$)이고, $\overline{RH} \perp$ (직선 PQ)에서 삼수선의
 정리에 의해 $\overline{AH} \perp$ (직선 PQ)이다.



그림과 같이 $\angle OPQ = \angle AQH = 60^\circ$ 이므로
 $\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \overline{RH} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 가 된다.
 $\therefore \cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$