수리논술이란?

수리논술과 Motivation

수리논술은 사실 수능 수학과 크게 다르지 않다. 수능 수학에서 풀이하던 것들을 조금 더 구체적으로 논리를 부여하여 서술하면 그만이다.
하지만 직관적으로만 문제를 풀다가, 논리적인 서술을 덧붙이는 것은 때로 매우 어렵다. 다음 문제를 보자.

$x>0$에서 미분가능한 함수 $f(x)$가

$$f(1)=2, f(2)=6,\ 2x \le f(x) \le 3x$$

를 만족시킬 때, $f'(1), f'(2)$의 값을 구하여라.

수능적 풀이)
그림을 그려본다. $\therefore\ f'(1)=2,\ \ f'(2)=3$

수리논술 풀이)

즉 이 문제를 보면 수능 스타일로 문제를 푸는 것은 어렵지 않으나, 수리논술로 전개하기에는 상당히 까다로운 부분이 있다. 풀이의 전개를 보면 수리논술 문제 해결의 흐름은 다음과 같다.

step 1. (원래 하던 대로) 문제를 어떻게 풀지 고민한다.
step 2. 풀이에 녹아있는 교과서 속 수학적 정의/정리들을 꺼낸다.

즉, 교과서의 개념을 모두 완벽하게 숙지한 뒤에, 해설지를 작성하듯 답안을 작성하면 수리논술은 완성된다.

이와 비슷한 유형의 문제가 올해 수능에서도 출제되었다.

20. 함수 $f(x)=\pi\sin 2\pi x$에 대하여 정의역이 실수 전체의 집합이고 치역이 집합 $\{0, 1\}$인 함수 $g(x)$와 자연수 n이 다음 조건을 만족시킬 때, n의 값은? [4점]

> 함수 $h(x)=f(nx)g(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이고
> $$\int_{-1}^{1} h(x)dx=2, \quad \int_{-1}^{1} xh(x)dx=-\frac{1}{32}$$
> 이다.

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

첫 번째 조건으로부터 $h(x)$는 결국 $g(x)=1$이라는 부분만 살아남는데, 이를 보고 $f(nx)$의 음수인 부분은 모두 0으로 날려버리고, 양수인 부분만 취하여야 원하는 그림이 된다는 직관을 사용한 풀이가 현실적이다. 즉, 조건 (가)를 처리하기 위해서 다음을 계산해보면,

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} \pi\sin 2\pi x dx = \left[-\frac{1}{2n}\cos 2npix\right]_0^{\frac{1}{2n}} = \frac{1}{n}$$

이므로 $-1 \leqq x \leqq 1$이고 $f(nx) \geqq 0$인 구간에서 함수 $f(nx)$의 정적분은 $\frac{1}{n}\times 2n=2$가 나온다. 따라서 $g(x)$는 아래와 같이 표현되면 조건을 만족한다.

$$g(x) = \begin{cases} 1\,(f(nx) \geqq 0) \\ 0\,(f(nx) < 0) \end{cases}$$

따라서 함수 $h(x)$는 다음과 같이 표현된다.

$$h(x) = \begin{cases} f(nx)\,(f(nx) \geqq 0) \\ 0 \qquad (f(nx) < 0) \end{cases}$$

이제 그래프를 통해 $\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_0^1 xf(nx)dx$임을 확인한 후, 부분적분을 통해 계산하면 정답 $n=16$을 얻는다.

하지만 수리논술에서는 이를 구체적으로 기술할 수 있어야 한다. 우리는 직관적으로 $h(x)$과 다음과 같이 구성되기를 원한다.

$$h(x) = \begin{cases} f(nx) & (f(nx) \geqq 0) \\ 0 & (f(nx) < 0) \end{cases}$$

즉, 다음을 증명하자.

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (f(nx) \geqq 0) \\ 0 & (f(nx) < 0) \end{cases}$$

이를 증명하기 위해 아직 사용하지 않은 $h(x) = f(nx)g(x)$가 연속이라는 조건을 사용해보자. $A_n = \{x|f(nx) \geqq 0\} \cap [-1,1]$라 하면,그래프를 통해 $\int_{A_n} f(nx)dx = 2$임을 알고, $g(x) = \dfrac{h(x)}{f(nx)}$이고, 이는 연속함수들의 나눗셈이므로 $f(nx)=0$이 되는 x를 제외한 x에서 $g(x)$는 연속이 되어야 한다. 즉, $f(nx) \neq 0$인 x에서 $g(x)$는 연속함수여야 하므로 어떤 정수 k에 대하여 열린구간 $\left(\dfrac{k}{2n}, \dfrac{k+1}{2n}\right)$에서 $g(x)$는 상수함수여야 한다.(그 값은 0 또는 1)

이제 귀류법을 이용하기 위해 $f(nx) \geqq 0$인 어떤 x를 잡고, 그 x에 대하여 $g(x)=0$이라고 하고, $f(ny)<0$인 어떤 y를 잡고 그 y에 대하여 $g(y)=1$이라 하자. 그러면 어떤 정수 k_0에 대하여 $g(x)=0$로, 상수함수로 나타나는 구간 $\left(\dfrac{k_0}{2n}, \dfrac{k_0+1}{2n}\right)$을 생각할 수 있고, 어떤 정수 k_1에 대하여 $g(y)=1$로, 상수함수로 나타나는 구간 $\left(\dfrac{k_1}{2n}, \dfrac{k_1+1}{2n}\right)$을 생각할 수 있다. 이 구간들을 각각 I_1, I_2라고 하자. 그러면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} 2 &= \int_{-1}^{1} h(x)dx = \int_{A_n} h(x)dx + \int_{[-1,1]-A_n} h(x)dx \\ &= \int_{A_n \cap I_1} h(x)dx + \int_{A_n - I_1} h(x)dx + \int_{[-1,1]-A_n} (-)\times(0 \,\mathrm{or}\, 1)dx \\ &\leqq \int_{A_n \cap I_1} f(nx)\times 0dx + \int_{A_n - I_1} f(nx)dx < \int_{A_n} f(nx)dx = 2 \end{aligned}$$

즉, $2<2$이므로 모순이다. I_2에 관하여도 똑같이 증명이 가능하다. 즉, 위의 조건을 만족하는 x, y, k_0, k_1을 잡은 것 자체가 문제였던 것이므로 $f(nx) \geqq 0$, $f(ny)<0$이 되면서 $g(x)=0$, $g(y)=1$이 되게 하는 x, y는 존재하지 않음을 알 수 있다. 따라서 원하는 것이 증명되었다.

사실은, $h(x)$가 연속이라는 조건이 없어도 이 문제는 성립한다.
$B_n = [-1,1] - A_n$, $C_n = \{x|g(x)=1\}$ 으로 정의하면 다음을 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} h(x)dx &= \int_{A_n} h(x)dx + \int_{B_n} h(x)dx = \int_{A_n} f(nx)g(x)dx + \int_{B_n} f(nx)g(x)dx \\ &= \int_{A_n \cap C_n} f(nx)dx + \int_{B_n \cap C_n} f(nx)dx = \int_{C_n} f(nx)dx = 2 = \int_{A_n} f(nx)dx \end{aligned}$$

따라서 $\int_{A_n - C_n} f(nx)dx = 0$을 얻는다.

한편, $|x| \leqq 1$ 이므로 $|xf(nx)| \leqq |f(nx)|$이고,

$$0 \leqq \int_{A_n - C_n} |xf(nx)|dx \leqq \int_{A_n - C_n} |f(nx)|dx = \int_{A_n - C_n} f(nx)dx = 0$$

$\therefore \int_{A_n - C_n} |xf(nx)|dx = 0$을 얻고, 이로부터

$$0 \leqq \left| \int_{A_n - C_n} xf(nx)dx \right| \leqq \int_{A_n - C_n} |xf(nx)|dx = 0$$

이므로 $\left| \int_{A_n - C_n} xf(nx)dx \right| = 0$, 즉 $\int_{A_n - C_n} xf(nx)dx = 0$을 얻는다.

이제 두 번째 조건을 처리해보면 다음을 얻는다.

$$\int_{-1}^{1} xh(x)dx = \int_{C_n} xf(nx)dx + 0 = \int_{C_n} xf(nx)dx + \int_{A_n - C_n} xf(nx)dx$$

$$= \int_{A_n} xf(nx)dx = \int_{0}^{1} xf(nx)dx = -\frac{1}{32}$$

이므로 이제 단순한 계산을 통해서 $n = 16$을 얻는다.

이처럼 수리논술과 수능 수학 문제 풀이는 확연히 다르다. 문제를 잘 푼다고 해서 논술 능력이 뛰어난 것이 아니고, 역으로 논술 능력이 뛰어나다고 해서 문제를 잘 푸는 것이 아니다. 즉 문제풀이 능력과 논술 능력 모두 길러야 수리논술에서 성공할 수 있다.

한편, 기존의 수학 공부 방식으로 논술에서 얻을 수 있는 것은 바로 동기부여(Motivation)이다. 처음 예시에서 정답을 모른 채 논증을 하는 것과, f'의 값을 이미 예상하고 있는 상태에서 증명을 시작하는 것은 확연히 다르다. 즉 다음과 같은 구성을 따른다는 것이다.

step 1. 귀납적 추론, 그래프 등 모든 것을 발휘해 예상되는 답을 찾아낸다.

step 2. Claim(=예상되는 답)을 논리적으로 증명한다.

step 1은 이미 많은 학생들이 잘 해내고 있는 부분이므로 우리는 step 2만 해내면 된다. 따라서 본인이 평소 갖고 있는 수학 공부, 수학적 직관에 언제든지 논리성을 부여할 수 있도록 꼼꼼히 공부할 필요가 있다.

1

고등수학과
수리논술

I. 다항식

1. 항등식과 나머지정리

다항식 단원에서 가장 중요한 것은 나머지정리이다. 나머지정리의 기본이 되는 정리를 소개한다.

Theorem(Division Algorithm)

두 다항식 $A(x)$, $B(x)$가 주어져있을 때

(i) $0 \leq$($R(x)$의 차수)$<$($B(x)$의 차수)이면서 $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$가 되게 하는 두 다항식 $Q(x)$과 $R(x)$는 존재한다.

(ii) (i)에서 $Q(x)$와 $R(x)$는 유일하다.

(i)의 증명은 고교과정을 뛰어넘으므로 (ii)만 증명해보도록 하자.

Proof of (ii).

만일 $A(x) = B(x)Q_1(x) + R_1(x)$, $A(x) = B(x)Q_2(x) + R_2(x)$가 되게 하는 두 다항식 $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $R_1(x)$, $R_2(x)$가 있다고 해보자. 그러면

$$B(x)Q_1(x) + R_1(x) = B(x)Q_2(x) + R_2(x)$$

이고, 정리하면 $B(x)\{Q_1(x) - Q_2(x)\} = R_2(x) - R_1(x)$를 얻는다. 우변의 차수는 좌변보다 작으므로 $Q_1(x) - Q_2(x) = 0$이어야 하고, 따라서 $Q_1(x) = Q_2(x)$이고, 이로부터 $R_1(x) = R_2(x)$도 얻는다 □.

위 정리에서 (i)는 존재성, (ii)는 유일성을 이야기하고 있다는 것을 이해하자. 위처럼, 유일성을 보이는 문제는 2가지가 있다고 가정한 뒤, 서로 같음을 보이는 방식으로 증명한다.

이제 나머지정리를 소개한다.

Theorem(나머지 정리)

다항식 $P(x)$를 일차식 $x - \alpha$로 나누었을 때의 나머지를 R이라고 하면 $R = P(\alpha)$이다.

Proof.

Division Algorithm을 이용한다.

Division Alogirthm을 완벽하게 증명하지 못하였지만, 이를 이용하여 다항식의 핵심 정리인 나머지 정리를 증명하였다. 이처럼 무언가를 알고 있다고 가정한 후, 당면한 문제를 해결하는 능력이 중요하다.

2. 곱셈공식과 인수분해

Proposition(곱셈공식과 인수분해)

$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

Proof.

$(a+b)^3-3ab(a+b)=a^3+b^3$을 이용하자.

II. 방정식

1. 복소수

복소수에서는 켤레근에 대한 성질을 잘 이해하는 것이 중요하다.

Proposition(켤레의 성질)

임의의 복소수 z_1, z_2에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$

(ii) $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(iii) $\overline{\left(\frac{z_2}{z_1}\right)}=\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$(단, $z_1 \neq 0$)

Proof.

$z_1=a+bi,\quad z_2=c+di$라 하자. (단, a,b,c,d는 실수)

방금 증명한 켤레의 성질을 이용하여 다음을 증명해볼 수 있다.

Theorem(켤레근)

실수를 계수로 갖는 다항식 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$과 어떤 복소수 z에 대하여 $f(z) = 0$이라 하자. 그러면 $f(\overline{z}) = 0$이다.

Proof.

켤레의 성질 (i), (ii)를 이용한다.

2. 이차방정식

다음은 사람이라면 모두 알아야 할 정리이다.

Theorem(근의 공식)

$ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$의 두 근은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Proof.

3. 이차함수

다음은 이차함수 단원에서 자주 사용하는 명제들이다. 그림을 통해 확인하면 자명하므로, 결과만 다시 확인하고 넘어가도록 하자.

Proposition(이차함수의 성질)

$ax^2 + bx + c \geqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a > 0$ 이고 $b^2 - 4ac \leqq 0$

$ax^2 + bx + c \leqq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < 0$ 이고 $b^2 - 4ac \leqq 0$

III. 도형의 방정식

1. 평면좌표

다음은 기원전부터 존재해왔으나 꾸준히 사랑받고 있는 정리이다.

Theorem(중선정리)

삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때, 다음이 성립한다.

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{BM}^2 + \overline{AM}^2)$$

Proof.

삼각형 ABC를 일반성을 잃지 않도록 좌표평면에 올린다. $A(a, b)$, $B(-c, 0)$, $C(c, 0)$, $M(0, 0)$이라 두면 삼각형의 일반성을 잃지 않는다.

다음은 스튜어트 정리(Stewart's Theorem)라고 불리는 것으로, 중선정리의 일반화이다. 똑같은 방법으로 증명해볼 수 있다.

Theorem(Stewart)

삼각형 ABC에서 변 BC 위의 한 점을 D라고 할 때, 다음이 성립한다.

$$\overline{BD} \cdot \overline{AC}^2 + \overline{CD} \cdot \overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot (\overline{AD}^2 + \overline{CD} \cdot \overline{BD})$$

Proof.

Proposition(내분점과 외분점)

평면좌표 위의 두 점 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$를 각각 $m:n$으로 내분, 외분한 점을 각각 P, Q라고 할 때,

$$P(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}),\ Q(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n})$$

이 성립한다.

Proof.

$\boxed{\text{WANT}}$

위 공식을 이용하면 다음을 증명할 수 있다.

Proposition(삼각형의 무게중심)

삼각형 ABC의 좌표평면 상에서의 좌표를 각각 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$라 하자. 그러면 무게중심의 좌표 G는 다음과 같다.

$$G(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3})$$

Proof.

2. 직선의 방정식

먼저 수직과 관련된 성질을 증명해보자. (ii)의 경우, (i)을 이용하면 절반을 해결할 수 있다.

Proposition(수직과 기울기)

(i) 기울기가 각각 m, m'인 두 직선이 수직이면 $mm' = -1$이다.

(ii) 두 직선$ax+by+c=0, a'x+b'y+c'=0$ 이 수직이면 $aa'+bb'=0$이다.

Proof.

Theorem(점과 직선 사이의 거리)

좌표평면 위의 직선 $ax+by+c=0$과 밖의 점 $P(x_1, y_1)$ 사이의 거리는 수직거리로 정의된다. 이 때, 점과 직선 사이의 거리는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Proof

이를 이용하여 다음을 증명해볼 수 있다.

Proposition(직선과 직선 사이의 거리)

좌표평면 위의 두 직선 $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$의 거리는 다음과 같다.

$$d=\frac{|c-c'|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Proof.

3. 원의 방정식

접선과 관련된 주제들을 공부한다. (ii)의 경우 모두 평행이동을 잘 활용하면 된다.

Proposition(원과 기울기가 주어진 접선)

(i) 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm r\sqrt{m^2+1}$$

(ii) 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 어떻게 나타나겠는가?

Proof.

Proposition(원과 접점이 주어진 접선)

(i) 좌표평면에서 원 $x^2+y^2=r^2$에 접하고 접점이 $P(x_1, y_1)$인 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y=r^2$$

(ii) 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$에 접점이 $P(x_1, y_1)$인 접선의 방정식은

$$x_1x+y_1y+A\times\frac{x+x_1}{2}+B\times\frac{y+y_1}{2}+C=0$$

Proof.

Proposition(원과 극선)

좌표평면 위의 원 $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ 과 원 밖의 점 $P(x_1, y_1)$에 대하여 점 P에서 이 원에 그은 두 접선과 원의 교점을 각각 A, B라 하자. 이 때, 직선 AB의 방정식은 $x_1x+y_1y+A\times\frac{x+x_1}{2}+B\times\frac{y+y_1}{2}+C=0$ 이다.

Proof.

$\boxed{\text{WANT}}$

Theorem(아폴로니우스의 원)

평면 위의 두 정점 A, B와 두 양수 m, n에 대하여 $\overline{AP}$: $\overline{BP}$= $m:n$을 만족하는 점 P들의 집합은 A, B의 $m:n$ 외분점과 내분점을 지름의 각 끝점으로 하는 원이 된다.

Proof.

일반성을 잃지 않도록 좌표평면에 좌표를 둔다.

$\boxed{\text{WANT}}$

4. 도형의 이동

이 파트는 결과만 정리하고 넘어가도록 하자.

Proposition(도형의 이동)

도형의 방정식 $f(x,\ y)=0$이 주어졌다고 하자.

(i) x축 대칭 : $f(x,\ -y)=0$

(ii) $y=a$ 대칭 : $f(x,\ 2a-y)=0$

(iii) y축 대칭 : $f(-x,\ y)=0$

(iv) $x=a$ 대칭 : $f(2a-x,\ y)=0$

(v) $(0,0)$ 대칭 : $f(-x,\ -y)=0$

(vi) (a,b) 대칭 : $f(2a-x,\ 2b-y)=0$

(vii) $y=x$ 대칭 : $f(y,\ x)=0$

(viii) $y=-x$ 대칭 : $f(-y,\ -x)=0$

IV. 집합과 명제

1. 집합

집합과 명제 단원에서 쓰이는 증명은 수리논술의 서술에 그대로 적용되므로 매우 중요한 단원이다. 특히, 고난도 증명을 위해서는 집합과 명제에서 다룬 증명의 테크닉을 자주 쓰므로 확실하게 공부해두자.

가장 자주 쓰이는 사실은 집합의 상등, 즉 두 집합이 같다는 것을 보이는 것이다.

두 집합 A, B에 대하여 $A=B$의 정의는 부분집합을 이용하여 정의한다.

$$A=B \quad \Leftrightarrow \quad A \subset B \text{ 이고 } B \subset A$$

한편 $A \subset B$의 정의는 <u>모든 $a \in A$에 대하여 $a \in B$</u>임을 만족하는 것을 말한다. 따라서 두 집합의 상등은 다음과 같이 기술될 수 있다.

$$A=B \quad \Leftrightarrow \quad a \in A \text{ 이면 } a \in B\text{이고, } a \in B \text{ 이면 } a \in A$$

수리논술이 어렵게 출제되는 경우, 집합이 매우 어렵게 정의되는 경우가 있는데, 위처럼 집합을 통째로 생각하는 것이 아니라 '원소' 하나를 꺼내서 다루면 증명이 용이해진다.

[연습문제]
자연수 k에 대하여 집합 A_k를 $A_k=\{x|x \text{ 는 } k\text{의 배수}\}$라고 하자. $A_2 \cap A_3 = A_6$임을 증명하시오.

Proof.

[연습문제]
$A \subset B$이고 $B \subset C$이면 $A \subset C$임을 증명하시오.

Proof.

[연습문제]
(i) $A-B=\varnothing$일 때 $A\subset B$ 임을 증명하시오.
(ii) $A-B=\varnothing$이고 $B-A=\varnothing$이면 $A=B$임을 증명하시오.

Proof.
(i) 귀류법을 사용하자.

2. 명제

두 조건 p, q에 대하여 위의 논의에서 $P\subset Q$를 보이는 것은 $p\Rightarrow q$를 보이는 것과 완전히 같으며, 반대로 $Q\subset P$를 보이는 것은 $q\Rightarrow p$를 보이는 것과 완전히 같다.

[연습문제]
명제 $p\rightarrow q$가 참이면 이것의 대우명제도 참임을 증명하시오.

Proof.

다음은 귀류법을 활용하는 문제이다.

[연습문제]
$\sqrt{2}$가 무리수임을 증명하시오.

Proof.

3. 절대부등식

[연습문제]

(산술, 기하, 조화평균) $a, b > 0$일 때 다음을 증명하시오.

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \geqq \frac{2ab}{a+b}$$

Proof.

한편, n개로 일반화된 산술평균과 기하평균의 관계도 성립한다. 이는 여러가지 증명이 있는데, 여기서는 수학적 귀납법을 이용하여 증명해보겠다.

<u>Theorem(산술평균과 기하평균)</u>

임의의 자연수 n에 대하여 $a_n \geqq 0$일 때, 다음이 성립한다.

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

Proof.

[연습문제]
a, b, x, y가 실수일 때, 다음이 성립함을 증명하시오.

$$(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$$

Proof.

한편, 이 또한 n개로 일반화가 가능하다. 이 부등식을 증명하기 위해서 매우 기발한(!) 아이디어를 사용하므로, 기억해주면 유용하다.

Theorem(코시-슈바르츠 부등식)
임의의 자연수 n에 대하여 a_n, b_n이 실수일 때, 다음이 성립한다.

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

Proof.

실수 t에 대하여 $\sum_{k=1}^{n}(a_kt-b_k)^2 \geqq 0$을 생각하자.

위 기발한(!) 아이디어를 이용하여 적분 버전의 코시-슈바르츠 부등식도 증명할 수 있다.

[연습문제]
실수 전체 집합에서 적분가능한 두 함수 f, g에 대하여 다음을 증명하시오.

$$\left\{\int_a^b f(x)g(x)dx\right\}^2 \leqq \int_a^b \{f(x)\}^2dx \int_a^b \{g(x)\}^2dx$$

Proof.

실수 t에 대해 $(f(x)-tg(x))^2 \geqq 0$을 이용한다.

V. 함수

1. 여러가지 함수의 정의

간단한 연습문제를 통해 여러가지 함수의 정의를 복습해보자.

[연습문제]

실수 전체의 집합을 R이라 할 때, 함수 $f : R \to R$, $f(x) = x^3$이 일대일 대응 함수임을 증명하시오.

Proof.

일대일함수임을 먼저 증명하고, 이후에는 치역과 공역이 같음을 증명하면 된다.

[연습문제]

실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f : R \to R$에 대하여 $g : R \to R$와 $h : R \to R$을 다음과 같이 정의하자.

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$$

$$h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

$g(x)$는 우함수, $h(x)$는 기함수임을 증명하시오.

Proof.

$\boxed{\text{WANT}}$

위 연습문제에서 $f(x) = g(x) + h(x)$임을 알 수 있는데, 이는 모든 함수가 우함수와 기함수의 합으로 나타낼 수 있음을 의미한다.

함수와 관련된 연습문제는 아주 많다. 몇 가지만 소개하고, 다음 장으로 넘어가자.

[연습문제]
실수 전체 집합에서 정의된 함수 $f:R\to R$, $g:R\to R$에 대하여 f와 g가 일대일 대응 함수이면, $f\circ g$도 일대일 대응 함수임을 보이시오/

Proof.

[연습문제]
두 기함수 $f(x), g(x)$에 대하여 합성함수 $(f\circ g)(x)$도 기함수임을 증명하시오.

Proof.
$\boxed{\text{WANT}}$

[연습문제]
점 (a, a)에 대하여 대칭인 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 합성함수
$(f\circ g)(x)$도 점 (a, a)에 대하여 대칭인 함수임을 증명하시오.

Proof.
$\boxed{\text{WANT}}$

[연습문제]
함수 $f(x)=x+2\sin x$가 (π, π) 대칭임을 증명하시오.

Proof.
$\boxed{\text{WANT}}$

2. 유리함수, 무리함수

분수식의 경우, 문제에서 기술이 되었다면, 분모에 쓰인 수가 0이 아님을 암묵적으로 가정하고 시작하는 것이다.

유명한 등식인 가비의 리를 증명해보자. 이 연습문제에서도, 암묵적으로 $b, d, f, b+d+f$가 모두 0이 아니라는 것을 가정하고 있다.

[연습문제](가비의 리)

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$$

Proof.

다음은 유리함수에 대한 명제이다. 계산을 통해 쉽게 확인해볼 수 있다.

[연습문제]

$X=\{x>0\}$에서 정의된 함수 $f(x)=\frac{1}{x}$와 $0 \leqq t \leqq 1$인 실수 t에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오.

$$f(tx+(1-t)y) \leqq tf(x)+(1-t)f(y)$$

Proof.

한편 무리함수에 대해서도 다음과 같은 명제를 살펴볼 수 있다. 무리식의 경우도 $\sqrt{g(x)}$라는 식은 암묵적으로 $g(x) \geqq 0$임을 가정하고 있음을 명심하자.

[연습문제]

함수 $f(x)=\sqrt{x}$와 $0 \leqq t \leqq 1$인 실수 t에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오.

$$f(tx+(1-t)y) \geqq tf(x)+(1-t)f(y)$$

Proof.

이는 $y=\frac{1}{x}$, $y=\sqrt{x}$가 $x>0$에서 아래로 볼록, 위로 볼록 함수임을 의미한다.

VI. 순열과 조합

먼저, 가장 기초적인 공식들을 간단히 정리하자.

$$n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$$

$${}_nP_r = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$${}_nC_r = \frac{n \times (n-1) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!} = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

한편, 집합과 명제와 엮어서 생각할 수 있는 주제로, 포함 배제의 원리가 있는데, 이는 다음과 같다.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$
$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$$

이를 연습할 수 있는 대표적인 예제 하나를 소개한다.

Theorem(교란순열)

n명의 사람이 있고, 그들의 이름이 써진 모자 n개가 있다. 모자를 모두 회수한 뒤, 무작위로 다시 돌려주었을 때, 단 한 사람도 자기 자신의 모자를 돌려받지 않는 경우의 수 D_n은 다음과 같이 나타내어진다.

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}$$

Proof.

n개의 원소에 대하여 k개의 항을 선택하여 고정하고, 나머지 $n-k$개의 원소를 무작위로 배열하는 방법의 경우의 수는 다음과 같이 얻어진다.

I. 지수함수와 로그함수

1. 지수와 로그의 성질

일반적으로 두 양수 a, b와 실수 x, y에 대하여 다음이 성립한다. 이를 지수법칙(Exponential Rule)이라고 부른다.

$a^{x+y} = a^x a^y$ $\qquad$ $a^x \div a^y = a^{x-y}$

$(a^x)^y = a^{xy}$ $\qquad$ $(ab)^x = a^x b^x$

일반적으로 지수법칙은 증명할 수 없다.(정확히는, 유리수까지는 고교 수준으로 가능하지만, 실수범위까지 확장하는 일은 고교 과정을 뛰어넘는다.)
또한 이를 이용하여 로그를 정의했음을 기억하라. 실수 a, N에 대하여 $a>0$, $a \neq 1$, $N>0$일 때 다음으로 정의한다.

$$a^x = N \qquad \Leftrightarrow \qquad x = \log_a N$$

이 정의와 지수법칙을 이용하여 다음을 모두 증명할 수 있다.

Proposition(로그의 성질)

$a>0$, $a \neq 1$, $b>0$, $b \neq 1$, $c>0$, $c \neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때 다음이 성립한다.

(i) $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$

(ii) $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

(iii) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

(iv) l$\log_a M^k = k\log_a M$(단, k는 실수)

(v) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Proof.

II. 삼각함수

1. 사인법칙

Theorem(사인법칙)

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$의 길이를 각각 a, b, c라 하자. 외접원의 반지름을 R이라고 할 때, 다음이 성립한다.

$$2R=\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

Proof.

2. 코사인법칙

Theorem(코사인법칙)

$\triangle ABC$에서 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$의 길이를 각각 a, b, c라 하자. 그러면 다음이 성립한다.

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

Proof.

III. 수열

1. 등차수열과 등비수열의 합공식

합을 다루는 방식으로는 대표적으로 두 가지 경우가 있다. 등차수열의 경우는 양끝을 먼저 생각해주면 되고, 등비수열의 경우는 공비를 곱한 후 빼주면 합 공식을 얻을 수 있다.

[연습문제]

$a_n = a_1 + (n-1)d$로 주어진 등차수열 a_n에 대하여 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$으로 정의하자. 이 때, 다음을 증명하시오.

$$S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$$

Proof.

[연습문제]

$a_n = a_1 r^{n-1}$로 주어진 등비수열 a_n에 대하여 $S_n = a_1 + \cdots + a_n$으로 정의하자. 이 때, 다음을 증명하시오.

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r-1}$$

Proof.

비슷한 문제로, 멱급수(Power series)의 일반항을 구하는 문제를 소개한다.

[연습문제]

수열 $\{a_n\}$이 $7a_1 + 7^2 a_2 + \cdots + 7^n a_n = 3^n - 1$을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^{n-1}}$의 값을 구하시오.[2010, 3월 교육청]

Proof.

2. 수학적 귀납법

수리논술에서 가장 중요한 증명방법은 단연코 수학적 귀납법이다. 수학적 귀납법의 증명은 자연수 n에 대한 진술 $P(n)$을 증명할 때 쓰인다. 다음과 같은 단계를 따른다.

step 1. (Base case) $P(n_0)$의 진위를 판별한다.(n_0는 보통 1 or 2)

step 2. (Induction Hypothesis) $P(k)$를 가정하고, $P(k+1)$을 증명한다.

(step 2+@. $P(k)$를 가정하는 것에서 더 뛰어넘어, $P(n_0), \cdots, P(k-1), P(k)$를 가정하고, $P(k+1)$을 증명한다. 이를 strong induction이라 한다.)

귀납법을 이용하여 다음을 증명해보자.

[연습문제]

다음을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Proof.

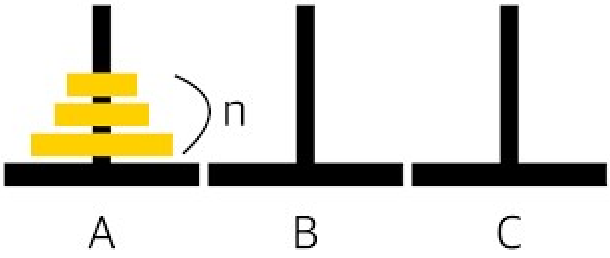
[연습문제]

$h>0$일 때, $n \geqq 2$인 자연수 n에 대하여 다음이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

$$(1+h)^n > 1+nh$$

Proof.

귀납법을 이용하여 다음 문제를 해결해볼 수 있다.



[연습문제](Hanoi Tower)
하노이탑 게임의 목적은 다음 두 가지 조건을 만족시키면서, 한 기둥에 꽂힌 원판들을 그 순서 그대로 다른 기둥으로 옮겨서 다시 쌓는 것이다. 그 규칙은 다음과 같다.
(i) 한 번에 하나의 원판만 옮길 수 있다.
(ii) 큰 원판이 작은 원판 위에 있어서는 안 된다.
A에 있는 원반 n개를 다른 한 기둥 C로 옮기는 최소한의 이동 횟수를 T_n이라고 정의하자. 예를 들어, $T_1=1$, $T_2=3$이다. T_n의 점화식을 구하고, 일반항을 구하시오.

Proof.
$T_n = 2T_{n-1}+1$
$T_n = 2^n - 1$

이처럼 수학적 귀납법의 경우, 문제가 직접적으로 출제되기 보다는, 문제 속 문제로 스스로 유추하여 풀어내는 방식으로 출제되는 경우가 많다.

I. 함수의 극한과 연속

1. 함수의 극한과 계산

함수의 극한에 대한 성질로 다음을 배웠을 것이다.

Proposition(함수의 극한의 성질)

$\lim_{x\to\alpha} f(x)=\alpha$, $\lim_{x\to a} g(x)=\beta$로 각각 수렴한다면 다음이 성립한다.

① $\lim_{x\to a} kf(x)=k\alpha$ (k는 상수)

② $\lim_{x\to a}\{f(x)\pm g(x)\}=\alpha\pm\beta$(복부호동순)

③ $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\alpha\beta$

④ $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\alpha}{\beta}$(단, $\beta\neq 0$)

이 정리의 증명은 고교과정을 넘으므로 생략한다.

이 정리의 핵심은 함수의 극한이 존재하면 극한과 연산의 순서를 바꿀 수 있다는 것이다. 수리논술을 서술할 때에 이 사실을 염두에 두고 서술하면 좋은 답안이 될 수 있다.

[연습문제]

두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여

$\lim_{x\to a}\{f(x)+2g(x)\}=7$, $\lim_{x\to a}\{2f(x)-g(x)\}=4$일 때, $\lim_{x\to a}\{f(x)+g(x)\}$를 구하시오.

Proof.

[연습문제]

두 함수 $f(x), g(x)$에 대하여 $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\gamma$이고 $\lim_{x\to a} g(x)=0$이면, $\lim_{x\to a} f(x)=0$임을 증명하시오.

Proof.

한편, 수리논술에서 정말 자주 쓰이는 것으로 샌드위치 정리가 있다.

<u>Theorem(샌드위치 정리 Squeeze Theorem)</u>

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 $x \to a$일 때 수렴한다고 가정하자.

① $f(x) \leq g(x)$이면 $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$

② $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$이고 $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l$이면 $\lim_{x \to a} h(x) = l$

이 또한 증명은 고교과정을 넘으므로 생략한다.

수리논술에서 “극한” 과 “부등식”이 주어진다면 거의 95% 이상 샌드위치 정리를 사용하는 문제라고 보면 된다. 이들을 활용하는 문제는 Part 2 이후 및 기출문제에서 자세히 다룬다.

2. 연속의 정의

[연습문제]

함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 연속이다 의 정의를 기술하시오.

3. 최대 최소의 정리와 사잇값의 정리

[연습문제]

최대 최소의 정리를 기술하시오.

[연습문제]

사잇값의 정리를 기술하시오.

사잇값의 정리를 활용하는 좋은 문제를 하나 소개한다.

[연습문제]
집합 $X=[0,1]$에 대하여 함수 $f:X\to X$가 연속함수라고 하자. 이 때, $f(k)=k$가 되게 하는 실수 k가 구간 $[0,1]$ 사이에 적어도 하나 존재함을 증명하시오.

Proof.
$f(0)=0, f(1)=1$인 경우와 그렇지 않은 경우로 나누어서 생각한다.

II. 미분법

1. 미분의 정의

[연습문제]
함수 $y=f(x)$가 $x=a$에서 미분가능하다 의 정의를 기술하시오.

Proposition(미분가능하면 연속이다)
어떤 함수 f가 실수 전체의 집합에서 정의되었다고 하자. f가 미분가능한 함수이면 연속함수임을 증명하시오.

Proof.

2. 미분법 공식

Proposition(미분법 공식_1)
미분가능한 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.
(i) $y=c$이면 $y'=0$
(ii) $y=cf(x)$ 이면 $y'=cf'(x)$
(iii) $y=f(x)\pm g(x)$ 이면 $y'=f'(x)\pm g'(x)$

Proof.

Proposition(미분법 공식_2)

미분가능한 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 다음이 성립한다.

(i) $y=x^n$(n은 자연수) 이면 $y'=nx^{n-1}$

(ii) $y=f(x)g(x)$ 이면 $y'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

Proof.

3. 롤의 정리와 평균값 정리

Theorem(롤의 정리)

Proof.

Theorem(평균값의 정리)

Proof.

$g(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$, $h(x)=f(x)-g(x)$라 하자.

평균값 정리와 귀류법을 이용하여 다음 문제를 해결해볼 수 있다.

[연습문제]
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=0$이면 f는 상수함수임을 증명하시오.

Proof.

또한, 위 연습문제의 확장으로 다음도 증명해볼 수 있다. 방법은 동일하다.

[연습문제]
모든 실수 x에 대하여 $f'(x)=a$ 이면 f는 일차함수임을 증명하시오.

Proof.

4. 도함수의 활용과 관련된 정리

<u>Proposition(증가, 감소와 미분)</u>
함수 $y = f(x)$가 어떤 구간에서 미분가능할 때, 그 구간에서 $f'(x) > 0$이면 $f(x)$가 증가한다.

Proof.

<u>Proposition(극대, 극소와 미분)</u>
함수 $y = f(x)$가 $x = a$에서 미분가능하고 $x = a$에서 극값을 가지면, $f'(a) = 0$이다.

Proof.

한편, 미분을 이용하여 어떤 부등식을 증명하는 것은 (특히 미적분 파트에서) 논술의 단골 주제이다. 매우 간단한 연습문제를 풀어보고 넘어간다.

[연습문제]
$x > 2$일 때, $x^3 + 16 > 12x$ 가 성립함을 증명하시오.

III. 적분법

1. 정적분의 정의

함수 $f(x)$가 주어졌을 때, $F'(x)=f(x)$가 되게 하는 F들 중 하나를 f의 부정적분(indefinite integral, primitive of f)라고 한다. 이러한 F를 찾을 수 있으면, f를 적분가능(integrable)하다고 한다.

함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(b)-F(a)$를 a에서 b까지의 f의 정적분(definite integral from a to b), 기호로 다음과 같이 나타낸다.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

위 정의로부터 다음은 자명하게 성립한다.

Proposition(정적분의 성질)

적분가능한 함수 $f(x)$에 대하여 $F(x)=\int_a^x f(t)dt$이면 다음이 성립한다.

(i) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

(iii) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$

(iv) $\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$

(v) $\dfrac{d}{dx}\int_a^x (x-t)f(t)dt = F(x)$

Proof.

2. 미적분의 기본정리

미적분의 기본정리를 기술하기 전에, 먼저 기호를 약속하도록 하자. 정적분 $\int_a^b f(x)dx$는 단순히 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(b)-F(a)$를 뜻하는 것이었다.

이제, 넓이와의 연결고리를 찾기 위해 $S(x)$라는 함수를 $x=a, x=x$, $y=f(x)$, x축으로 둘러싸인 부분의 넓이라 정의하자.

미적분의 기본정리는 다음과 같다.

Theorem(미적분의 기본정리, Fundamental theorem of Calculus)

함수 f가 $[a, b]$에서 연속이고, $f \geqq 0$이라고 하자. 그러면 다음이 성립한다.

(i) $\frac{d}{dx}S(x)=f(x)$

(ii) $S(b)=\int_a^b f(x)dx$

Proof.

I. 수열의 극한

1. 등비수열의 극한과 증명

다음의 결과는 모두가 알고 있지만, 증명하는 일은 쉽지 않을 것이다. 교과서는 이를 증명하기 위해 $r>1$인 경우, 적당한 양수 h에 대하여 $r=1+h$로 나타낼 수 있고, 수학I에서 귀납법을 이용하여 증명한 명제

$$r^n=(1+h)^n>1+nh$$

를 이용하여 $\lim_{n\to\infty} r^n=\infty$를 증명한 뒤에, 나머지를 증명한다.

[연습문제]

$$\lim_{n\to\infty} r^n=\begin{cases}(r>1) & \infty(\text{발산})\\ (r=1) & 1(\text{수렴})\\ (-1<r<1) & 0(\text{수렴})\\ (r\leqq -1) & \text{진동(발산)}\end{cases}$$ 을 증명하시오.

Proof.

2. 급수

Proposition(급수와 수열의 일반항의 관계)

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n=0$이다.

Proof.

이 명제의 역이 성립하지 않음은 잘 알고 있을 것이다. 즉

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \text{ 이면 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{이 수렴한다.}$$

가 성립하지 않을 수도 있다. 대표적인 반례 2개를 소개한다.

[연습문제]

$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ 과 $b_n = \dfrac{1}{n}$ 이 위의 반례가 됨을 설명하시오.

Proof.

II. 미분법

1. 지수함수, 로그함수의 극한과 미분

자연상수 e의 정의는 다음과 같다.

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

위 극한이 수렴함은 알려져 있다.(수렴성의 증명은 고교과정을 뛰어넘는다.)
이로부터 자연로그는 다음과 같이 정의된다.

$$\ln x = \log_e x$$

미적분을 배웠다면, 다음 명제들은 반드시 증명할 수 있어야 한다.

[연습문제]
다음을 증명하시오.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(x+1)}{x}=\frac{1}{\ln a} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$$

Proof.

[연습문제]
다음을 증명하시오.

$$\{e^x\}' = e^x \qquad \{a^x\}' = \ln a\, a^x$$

$$\{\ln x\}' = \frac{1}{x} \qquad \{\log_a x\}' = \frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$$

Proof.

2. 삼각함수의 극한과 미분

코사인 법칙을 이용하여 먼저 덧셈정리를 증명해보자.

[연습문제]

다음을 순서대로 증명하시오.

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta}$

Proof.

덧셈정리들을 이용하여 다음 공식들은 아주 쉽게 증명된다.

[연습문제]

다음을 증명하시오.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

$\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$ $\qquad$ $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$ $\qquad$ $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

Proof.

삼각함수의 극한의 증명은 단위원 안에 존재하는 호와 삼각형 2개의 넓이를 이용하여 샌드위치 정리를 쓰는 매우 비범한 방법을 사용한다. 증명 방법 자체가 중요한 것은 아니지만, 어떤 극한값을 기하적으로 증명할 때에 서술 방식이 중요하므로, 연습해두자.

Proposition(삼각함수의 극한)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Proof.

위를 이용하면 다음은 자명하게 얻을 수 있다.

[연습문제]

다음을 증명하시오.

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$ $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

Proof.

덧셈정리와 삼각함수의 극한을 이용하면 다음을 쉽게 증명할 수 있다.

[연습문제]

다음을 증명하시오.

$\{\sin x\}' = \cos x$ $\{\cos x\}' = -\sin x$

Proof.

3. 여러가지 미분법

몫의 미분법은 미분의 정의를 이용하여 다음 순서에 따라 증명가능하다.

[연습문제]

다음을 증명하시오.

$$\left\{\frac{1}{g(x)}\right\}' = -\frac{g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

Proof.

한편, 몫의 미분법에 의해 다항함수 미분공식 $\{x^n\}' = nx^{n-1}$이 n이 자연수에서만 성립한 것에서, 정수범위로까지 확장이 가능해진다.

[연습문제]

자연수 n에 대하여 $\{x^n\}' = nx^{n-1}$을 알고 있을 때, 정수 n에 대하여도 다음이 성립함을 증명하시오.

$$\{x^n\}' = nx^{n-1}$$

Proof.

몫의 미분법의 다른 활용으로는 다양한 삼각함수의 미분 공식을 유도할 수 있다는 점이다. 모두 아주 쉽게 증명이 가능하다. 직접 해보도록 하자.

[연습문제]
다음을 증명하시오.

$\{\tan x\}' = \sec^2 x$ $\{\cot x\}' = -\csc^2 x$

$\{\sec x\}' = \sec x \tan x$ $\{\csc x\}' = -\csc x \cot x$

Proof.

합성함수 미분법의 경우, 교과서에 증명이 수록되어 있지만 엄밀하게는 틀린 증명이기 때문에 논술에서 다룰 가치가 없다. 합성함수 미분법은 미분가능한 두 함수 $f(x)$, $g(x)$에 대하여 다음과 같이 정의됨을 기억하자.

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \times g'(x)$$

합성함수 미분법에 의해, 정수까지 확장했었던 미분공식 $\{x^n\}' = nx^{n-1}$은 유리수까지 확장가능해진다.

[연습문제]
정수 n에 대하여 $\{x^n\}' = nx^{n-1}$을 알고 있을 때, 유리수 r에 대하여도 다음이 성립함을 증명하시오.

$$\{x^r\}' = rx^{r-1}$$

Proof.

이제 실수로의 확장을 위해 다음을 증명하여보자.

[연습문제]
다음이 성립함을 증명하시오.

$$\{\ln|x|\}' = \frac{1}{x}$$

Proof.

양변에 로그를 취한 후 미분하는 방법인 “로그미분법”을 배운 바가 있을 것이다. 이를 이용하여 유리수까지 확장했었던 미분공식 $\{x^n\}' = nx^{n-1}$은 실수까지 확장가능해진다.

[연습문제]
실수 a에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오.

$$\{x^a\}' = ax^{a-1}$$

Proof.

다음은 역함수 미분법이다. 역함수 미분법은 실제로 대학 과정과 아주 긴밀한 과정이 있어 수리논술에서 자주 간접출제되는 주제이다.

[연습문제]
함수 $f(x)$의 역함수가 존재하고, x, y는 $y = f^{-1}(x)$의 관계로 주어졌다고 하자. 이 때, 다음을 증명하시오.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Proof.

역함수 미분법은 라이프니츠가 왜 미분을 분수식의 형태로 정의하였는가에 대한 타당성을 제시해준다.

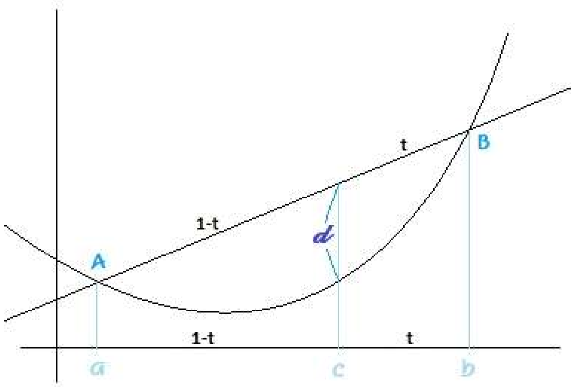
한편, 수학II에서 더욱 확장하여 미적분에서는 볼록성과 미분을 연결짓는다. 볼록의 정의를 알아보자.
I가 구간이고, f가 I에서 정의된 함수라고 하자. $0 \leq t \leq 1$인 임의의 실수 t와 I의 두 원소 $x, y \in I$에 대하여

$$f(tx + (1-t)y) \leqq tf(x) + (1-t)f(y)$$

를 만족하면 f는 I에서 아래로 볼록(convex)하다고 한다. 만일 부등호 방향이 바뀌어

$$f(tx + (1-t)y) \geqq tf(x) + (1-t)f(y)$$

를 만족하면 f는 I에서 위로 볼록(concave)하다고 말한다.
정의에 의해 f가 위로 볼록하다는 것은 $-f$가 아래로 볼록인 것과 완전히 같은 말임을 알 수 있다. 따라서 아래로 볼록에 대한 증명을 모두 할 수 있다면, 위로 볼록에 대한 증명도 모두 가능해진다.



이제 볼록성과 이계도함수의 관계를 알아보기 위해, 다음을 증명해보자.

<u>Proposition(평균변화율과 볼록성)</u>
다음은 두 명제는 필요충분조건이다.
(i) 함수 f는 열린 구간 (a,b)에서 아래로 볼록이다.
(ii) $a<c<x<d<b$일 때, $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqq \dfrac{f(d)-f(x)}{d-x}$ (즉 f의 기울기가 증가)

Proof.

이제 평균값 정리를 이용하여 위 명제와 f'의 관계를 알아보자.

Proposition(볼록성과 도함수)

함수 f가 열린 구간 $I=(a,b)$에서 미분가능할 때, 다음은 필요충분조건이다.

(i) 함수 f는 열린 구간 (a,b)에서 아래로 볼록이다.

(ii) I에서 f'이 증가함수이다.

Proof.

위 명제로부터 미적분 교과목의 결과를 얻을 수 있게 된다.

Proposition(볼록성과 이계도함수)

함수 f가 열린 구간 I에서 두 번 미분가능하다고 할 때, f가 I에서 아래로 볼록일 필요충분조건은 I에서 $f'' \geqq 0$인 것이다.

Proof.

III. 적분법

적분법에서 주로 나오는 것은 치환적분, 부분적분과 함께 부등식의 증명이다. 정적분을 이용한 연습문제들을 직접 증명해보고, 이 절을 마무리하자.

[연습문제]

치환적분을 이용하여 다음을 증명하시오.

(1) $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-x)+f(x)\,dx$

(2) $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)+f(2a-x)\,dx$

(3) $\int_{a-t}^{a+t} f(x)\,dx = \int_{a-t}^{a+t} f(2a-x)dx$, 특히 $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{2a} f(2a-x)dx$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx = \frac{\pi}{4}$

Proof.

[연습문제]

2 이상의 자연수 n에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오.

(1) $A_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$라 할 때, $A_n = \frac{n-1}{n}A_{n-2}$

(2) $B_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$라 할 때, $B_n = \frac{n-1}{n}B_{n-2}$

(3) $C_n = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \tan^n x\,dx$라 할 때, $C_n + C_{n-2} = \frac{1}{n-1}$

Proof.

[연습문제]
실수 전체에서 정의된 함수 $f(x)$와 $g(x)=f^{-1}(x)$에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오.

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{f(\alpha)}^{f(\beta)} g(x)dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha)$$

Proof.
부분적분..

[연습문제]
자연수 n에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오.

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}$$

Proof.

I. 경우의 수

경우의 수에서 나오는 기본 공식들은 논술에 잘 출제되지 않는다. 간단히 공식만 정리하고 넘어가겠다.

$$_{n}\Pi_{r} = n^{r}$$
$$_{n}H_{r} = {}_{n+r-1}C_{r}$$

이 단원에서 중요한 파트는 이항정리이다. 이항정리란 다음 전개식을 말한다.

$$(a+b)^{n} = \sum_{r=0}^{n} {}_{n}C_{r}a^{r}b^{n-r} = {}_{n}C_{0}a^{n} + {}_{n}C_{1}a^{n-1}b + \cdots + {}_{n}C_{n-1}ab^{n-1} + {}_{n}C_{n}b^{n}$$

항의 개수를 확장한 다항정리도 존재한다. 그 중, 3항 정리를 전개하면 다음과 같다.

$$(a+b+c)^{n} = \sum_{\substack{p+q+r=n \\ p \geq 0,\, q \geq 0,\, r \geq 0}} \frac{n!}{p!\,q!\,r!} a^{p}b^{q}c^{r}$$

이항정리에서 $a=x$, $b=1$을 대입하면 다음을 얻는다.

$$(x+1)^{n} = {}_{n}C_{0} + {}_{n}C_{1}x + \cdots + {}_{n}C_{n-1}x^{n-1} + {}_{n}C_{n}x^{n}$$

이를 이용하면 다음은 아주 쉽게 증명할 수 있을 것이다.

[연습문제]

자연수 n에 대하여 다음이 성립함을 증명하시오.

(1) $2^{n} = {}_{n}C_{0} + {}_{n}C_{1} + \cdots + {}_{n}C_{n}$

(2) $0 = {}_{n}C_{0} - {}_{n}C_{1} + {}_{n}C_{2} - \cdots + (-1)^{n}{}_{n}C_{n}$

(3) (n이 홀수일 때) $2^{n-1} = {}_{n}C_{1} + {}_{n}C_{3} + \cdots + {}_{n}C_{n}$

(n이 짝수일 때) $2^{n-1} = {}_{n}C_{0} + {}_{n}C_{2} + \cdots + {}_{n}C_{n}$

(4) ${}_{n}C_{1} + 2{}_{n}C_{2} + 3{}_{n}C_{3} + \cdots + n{}_{n}C_{n} = n \times 2^{n-1}$

(5) ${}_{n}C_{0} + \frac{{}_{n}C_{1}}{2} + \cdots + \frac{{}_{n}C_{n}}{n+1} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

Proof.

II. 확률

1. 용어 정리

올바른 서술을 위해서는 용어를 올바르게 사용하는 것이 고득점에 필수적이다. 따라서, 용어들을 모두 다시 정리하고, 확률의 정의를 다시 공부해보자.

시행 : 결과가 우연에 의해 결정되는 실험이나 관찰 ex) 주사위 던지기

표본공간 : 어떤 시행에 의해 일어날 수 있는 모든 결과의 집합

사건 : 표본공간의 부분집합. 시행의 결과.

통계적 확률 : 같은 시행을 n번 반복했을 때, 특정 사건 A가 일어난 횟수를 r_n이라 하자. n이 한없이 커짐에 따라서 상대도수 $\frac{r_n}{n}$이 어떤 일정한 값 p에 가까워지면 이 값 p를 사건 A의 통계적 확률로 정의한다. 즉

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{n}=p$$

수학적 확률 : 어떤 시행에서 표본공간 S의 각 원소가 일어날 가능성이 모두 같은 정도로 기대될 때, 사건 A가 일어날 확률을 $P(A)$로 표기하고, $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$로 정의한다. 이를 사건 A가 일어날 수학적 확률이라 정의한다.

어떤 사건 A가 일어날 수학적 확률이 p일 때, 시행 횟수 n을 충분히 크게 하면 사건 A가 일어나는 상대도수는 수학적 확률 p에 가까워짐이 알려져 있다.

위 용어들의 정의로부터 다음을 증명할 수 있다.

[연습문제]
유한집합인 표본공간 S의 임의의 사건 A를 생각하자. 다음 확률의 성질을 증명하시오.
(1) 임의의 사건 A에 대하여 $0\leq P(A)\leq 1$
(2) $P(S)=1$
(3) $\varnothing$는 사건이고, $P(\varnothing)=0$
(4) 임의의 사건 A에 대하여 $P(A^c)=1-P(A)$

Proof.

2. 조건부확률

표본공간 S의 두 사건 A, B에 대하여 $P(A) \neq 0$을 가정하자. 사건 A가 일어났을 때 사건 B가 일어날 확률을 사건 A가 일어났을 때의 사건 B의 조건부확률이라고 하며, 이를 기호로 $P(B|A)$로 나타낸다.

$$P(B|A) = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

다음은 베이즈 정리(Bayes Theorem)이라고 불리는 정리의 간단한 형태이다.

[연습문제]

다음을 증명하시오.

$$P(B|A) = \frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B) + P(B^c)P(A|B^c)}$$

Proof.

만일 $P(B|A) = P(B)$이면 A, B를 서로 독립인 사건이라고 하고, 만일 독립이 아니라면 종속이라고 한다. 만일 $P(B|A) = P(B)$이면 위 연습문제에 의해 $P(A|B) = P(A)$이므로 A, B가 독립이면 B, A가 독립이라고도 할 수 있다.

[연습문제]

다음을 증명하시오.

(1) 두 사건 A, B가 독립일 필요충분조건은 $P(A)P(B) = P(A \cap B)$이다.

(2) A와 B가 독립이면 A와 B^c, A^c와 B, A^c와 B^c도 독립이다.

Proof.

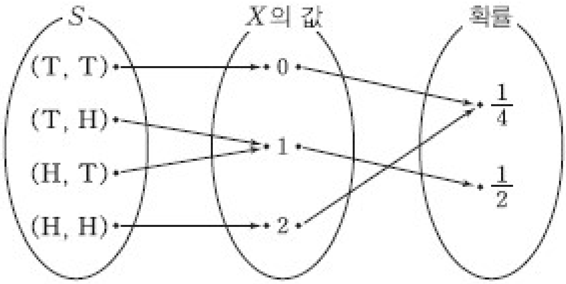
이항정리는 통계에서 한꺼번에 다루자.

III. 통계

1. 용어 정리

이또한 올바른 서술을 위해서는 용어를 올바르게 사용하는 것이 고득점에 필수적이다. 용어정리부터 시작한다.

예를 들어, 한 개의 동전을 2번 던지는 시행을 생각하자. 앞면이 나오는 횟수를 X라 하고, 앞면을 H, 뒷면을 T라고 하면 표본공간을 S라 할 때, 다음과 같은 대응을 생각할 수 있다.



위 그림을 토대로 용어를 정리해보자.

확률변수 : S에서 (X의 값)으로 대응되는 함수를 말한다. (단, (X의 값) $\subset R$)

이산확률변수 : 확률변수의 치역이 셀 수 있을 때, 즉 (X의 값)이 유한개이거나 셀 수 있는 확률변수

연속확률변수 : 확률변수의 치역이 셀 수 없는 확률변수

함수 $g: S \to$(X의 값)을 위 그림과 같이 정의하자. 즉,

$$g((T,T))=0,\ g((T,H))=g((H,T))=1,\ g((H,H))=2$$

을 만족하는 함수 g를 확률변수라고 부른다. 그런데, 위와 같은 함수 표현은 복잡하고, 결국 우리의 관심사는 함숫값(0, 1, 2)이므로 통계학자들은 전통적으로 함수 표현 대신 치역의 값 자체만으로 확률변수를 표기하기로 약속한다. 즉 X가 확률변수이고, 다음을 만족한다.

$$X((T,T))=0,\ X((T,H))=X((H,T))=1,\ X((H,H))=2$$

한편, (X의 값)$\to$확률 로 보내는 함수를 확률함수라 하고, 특별히 이산확률변수에 대한 확률함수는 확률질량함수, 연속확률변수에 대한 확률함수는 확률밀도함수라고 부른다. 함수 $P:$(X의 값)$\to$확률이 위 예시에 대한 확률함수라면 다음을 만족해야 한다는 것이다.

$$P(X=0)=P(X=2)=\frac{1}{4},\ P(X=1)=\frac{1}{2}$$

확률분포 : 확률변수 X가 가질 수 있는 값들을 x_i라 하자. 이 때, X가 x_i를 가질 확률 p_i의 대응관계 $P(X=x_i)=p_i$를 X의 확률분포라 한다.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n	합계
$\mathrm{P}(X=x_i)$	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n	1

평균, 분산 표준편차의 정의는 모두 알고 있을 것이다.

$$E(X) = \sum_{i=0}^{n} x_i p_i := m$$

$$V(X) = \sum_{i=0}^{n} (x_i - m)^2 p_i$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

연습문제로, 그 유명한 '제평평제'를 증명해보자.

[연습문제]
이산확률변수 X에 대하여 다음을 증명하시오.
(1) $V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$
(2) $\{E(X)\}^2 \leqq E(X^2)$

Proof.

다음은 평균, 분산, 표준편차에 대한 성질이다. 정의로 매우 쉽게 증명이 가능하다.

[연습문제]
이산확률변수 X에 대하여 다음을 증명하시오.
(1) $E(aX+b)=aE(X)+b$
(2) $V(aX+b)=a^2 V(X)$

Proof.

2. 이항분포

한 번의 시행에서 어떤 사건 A가 일어날 확률이 p, 일어나지 않을 확률이 $q=1-p$라 하자. n번의 독립시행에서 사건 A가 일어나는 횟수를 확률변수 X라 하면, X의 확률분포는 아래와 같이 나타날 것이다.

X	0	1	2	$\cdots$	k	$\cdots$	n	합계
$P(X=k)$				$\cdots$		$\cdots$		

위처럼 나타나는 분포를 이항분포라 하고, 기호로 $B(n, p)$로 나타낸다.

[연습문제]
위 표를 채우고, 합계가 1임을 증명하시오.

Proof.

이항분포의 평균, 분산, 표준편차를 유도하는 과정은 2017학년도 시립대 수리논술에 대놓고(!) 출제된 적이 있다. 철저하게 정의를 이용하고, 원하는 결과물이 나오도록 식을 조작하면 그만이다.

[연습문제]
확률변수 X가 이항분포 $B(n, p)$를 따를 때, 다음을 증명하시오.
(1) $E(X)=np$
(2) $V(X)=npq$

Proof.

3. 연속확률변수와 정규분포

연속확률변수의 평균, 분산, 표준편차는 수능에서 다루진 않으나, 수리논술에서 자주 출제되므로 소개한다.

$\alpha \leqq x \leqq \beta$의 모든 실수 값들을 가질 수 있는 연속확률변수 X의 확률밀도함수가 $f(x)$라고 하자. 그러면 다음과 같이 정의한다.

$$P(m \leqq X \leqq n) = \int_m^n f(x)dx$$

$$E(X) = \int_\alpha^\beta xf(x)\,dx$$

$$V(X) = \int_\alpha^\beta (x-m)^2 f(x)dx$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

적분기호 $\int$와 합의 기호 $\sum$가 본질적으로 같다는 것을 받아들이면 위 정의는 사실상 이산확률변수의 정의와 동일하다. 즉, 다음을 적분에 대하여도 증명해볼 수 있다.

[연습문제]
연속확률변수 X에 대하여 다음을 증명하시오.
(1) $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$
(2) $\{E(X)\}^2 \leqq E(X^2)$

Proof.

.

[연습문제]
연속확률변수 X에 대하여 다음을 증명하시오.
(1) $E(aX+b) = aE(X)+b$
(2) $V(aX+b) = a^2 V(X)$

Proof.

연속확률변수에 대한 연습문제를 하나 해결하고, 넘어가자.

[연습문제]

수직선 위의 두 점 $A(0), B(10)$과 선분 $\overline{AB}$ 위의 한 점을 찍는 시행을 할 때, 찍히는 점의 좌표를 확률변수 X라 하자. 확률변수 Y를 $Y=\sqrt{X}$로 정의할 때, 다음을 구하시오.

(1) X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면 $\frac{d}{dx}P(0 \leq X \leq x)=f(x)$를 증명하시오.

(2) $P(0 \leq Y \leq y)=P(X \leq y^2)$임을 증명하시오.

(3) 확률변수 Y의 확률밀도함수를 구하시오.

Solution.

연속확률변수 X와 두 상수 m, $\sigma>0$에 대하여 확률밀도함수가 다음과 같이 정의될 때,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

X의 확률분포를 정규분포라 정의하고, 기호로 $N(m, \sigma^2)$로 나타낸다.

이 확률밀도함수를 이용하여 평균과 분산을 계산하면 $E(X)=m$, $V(X)=\sigma^2$이 된다.(적분 과정은 고교 과정을 넘으므로 다루지 않는다.)

특별히 $m=0$, $\sigma=1$인 경우 X를 Z로 표기하고, 다음과 같은 확률밀도함수를 얻는다.

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

이는 당연히 $N(0, 1)$로 나타날 것인데, 이러한 분포를 표준정규분포라 한다.

4. 통계적 추정
용어정리는 필수이다.

모집단 : 조사하고자 하는 대상 전체
전수조사 : 모집단 전체를 조사하는 것
표본 : 모집단에서 추출한 일부분
표본조사 : 표본을 조사하는 것
임의추출 : 모집단의 각 자료가 같은 확률로 독립적으로 추출되는 것
추정 : 표본을 조사하여 얻은 정보로부터 모집단의 성질을 확률적으로 추측하는 것

확률변수 X에 대하여 모집단으로부터 얻은 평균, 분산, 표준편차를 각각 모평균, 모분산, 모표준편차라 하고 각각 m, σ^2, σ로 표기하기로 약속한다.
한편 모집단으로부터 임의추출한 크기가 n인 표본을 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이라 할 때, 이들은 제각각 X와 동일한 확률변수가 되고, 이들로부터 얻은 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라고 하고, 각각 $\overline{X}, S^2, S$로 표기하기로 약속한다. 계산은 다음과 같이 한다.

$$\overline{X}=\frac{1}{n}(X_1+X_2+\cdots+X_n)$$

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

여기서 표본분산을 구할 때, 왜 $n-1$로 나누는가 궁금할 수 있는데, 이는 모분산과의 오차를 줄이기 위한 것이다. 이는 수식으로 다음 명제와 나타내질 수 있다.

Proposition(표본분산과 $n-1$)

$$E(S^2)=\sigma^2$$

Proof.

즉, S^2의 기댓값이 모분산 σ^2이 나오도록 하려면 $n-1$로 나누어야 함을 알 수 있고, 위 결과로부터 $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$로 정의하는 것이 모분산에 대한 좋은 추정치(estimator)가 됨을 이해할 수 있다. 그래서 교과서에서는 통계적 추정 파트에서 n이 충분히 클 경우, σ와 S는 비슷하므로 σ를 모를 경우 S로 대체해서 사용해도 된다고 설명하는 것이다.

모평균 m은 항상 일정한 상수지만, $\overline{X}$는 추출된 표본 X_1, X_2, $\cdots$, X_n의 값에 따라 값이 정해지는 확률변수, 즉 정해지지 않은 값이다. 따라서 $\overline{X}$의 확률분포, 평균, 표준편차를 구할 수 있고, 이것이 실제로 통계적 추정에서 매우 중요하다.

X_1, X_2, $\cdots$, X_n이 모두 X와 완전히 같은 확률변수라는 것을 이용하여 다음을 증명해보자. (이 때, $V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=V(X_1)+\cdots+V(X_n)$이 성립함은 증명없이 받아들이자. 위 식이 성립하는 이유는 확률변수가 서로 독립(mutually independent)이기 때문인데, 이에 대한 정의는 고교 과정을 넘는다.)

[연습문제]
다음을 증명하시오.

(1) $E(\overline{X})=m$

(2) $V(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n}$

Proof.

$$E(\overline{X})=E\left(\frac{1}{n}(X_1+\cdots+X_n)\right)=\frac{1}{n}\times nm=m$$

$$V(\overline{X})=\frac{1}{n^2}V(X_1+X_2+\cdots+X_n)=\frac{1}{n^2}\times n\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

I. 이차곡선

이차곡선은 수리논술에서 정말 많이 출제된다. 주로 계산능력을 요구하는 문제들이므로, 정의와 여러 가지 성질과 관련된 증명을 해보면 이차곡선에 대한 대비가 된다.

[연습문제]
초점이 $F(p, 0)$이고 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식을 유도하시오.

Proof.

[연습문제]
초점이 $F(\pm c, 0)$이고 길이의 합이 $2a$인 타원의 방정식을 유도하시오.

Proof.

[연습문제]
초점이 $F(\pm c, 0)$이고 길이의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식을 유도하시오.

Proof.

쌍곡선과 관련하여 생각해볼 수 있는 추가적인 성질로는 점근선이 있다. 함수 $y=f(x)$가 $x \to a$ 혹은 $x \to \pm\infty$일 때 어떤 한 직선 $y=mx+n$으로 한없이 가까워지는 경우를 말한다. 이를 극한으로 표현하면 다음을 얻는다.

$$y=f(x)\text{의 점근선이 } y=mx+n\text{이다.} \Leftrightarrow \lim_{x \to a}\{f(x)-(mx+n)\}=0$$

이를 정의로 받아들이고, 다음을 연습해보자.

[연습문제]
쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 $x \to \pm\infty$의 점근선의 방정식이 $y=\pm\dfrac{b}{a}x$임을 증명하시오.

Proof.

아마 기하 교과서에서 원뿔을 적당한 각도로 자르면 포물선, 타원, 쌍곡선을 얻는 그림을 본 적이 있을 것이다. 이를 증명해보자.

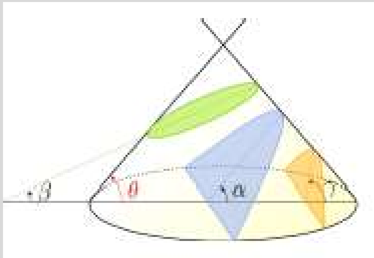
Theorem(원뿔과 이차곡선(단델린의 구))

원뿔에서 밑면과 모선이 이루는 각을 θ라 하고, 원뿔의 밑면과 자르는 평면과 이루는 각을 α, β, γ라 하자. 그러면 단면의 형태는 다음과 같다.

(1) $\theta = \alpha$ 이면 포물선

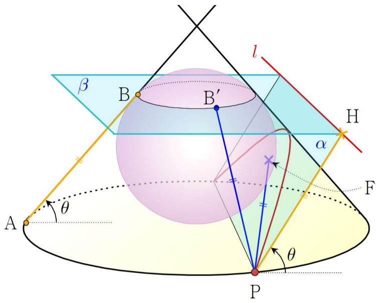
(2) $\theta > \beta$ 이면 타원

(3) $\theta < \gamma$ 이면 쌍곡선

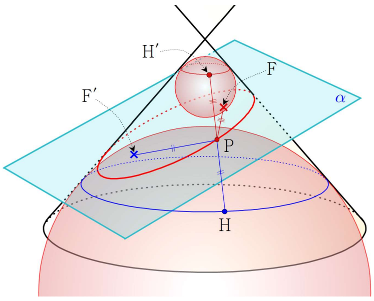


Proof.

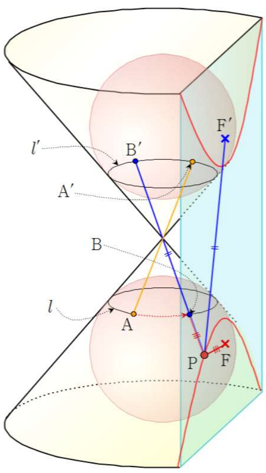
잘린 원뿔에 접하는 구를 아래와 같이 생각하자. 구와의 접점이 초점이 된다.



$\overline{PF} = \overline{PH}$



$\overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{HH'}$



$\overline{PF'} - \overline{PF} = \overline{AA'} = \overline{BB'}$

다음은 접선 공식이다.

[연습문제]

(1) 포물선 $y^2=4px$의 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{p}{m}$임을 증명하시오.

(2) (1)을 이용하여 접점이 (x_1, y_1)인 포물선 $y^2=4px$의 접선의 방정식은 $y_1y=2p(x+x_1)$임을 증명하시오.

Proof.

[연습문제]

(1) 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$임을 증명하시오.

(2) (1)을 이용하여 접점이 (x_1, y_1)인 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은 $\dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}=1$임을 증명하시오.

Proof.

[연습문제]

(1) 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 기울기가 m인 접선의 방정식은

$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ 임을 증명하시오.

(2) (1)을 이용하여 접점이 (x_1, y_1)인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 접선의 방정식은

$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$임을 증명하시오.

Proof.

다음은 극선의 방정식이다.

[연습문제]

극선이란, 곡선 밖의 점에서 그은 접선의 접점 2개를 이어 만든 직선을 말한다. 이차곡선 $y^2=4px$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점이 아닌 임의의 점 $P(x_1, y_1)$에서 그은 접선의 방정식은 각각 다음과 같음을 보이시오.

$$y_1y=2p(x+x_1),\quad \frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1,\quad \frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

Proof.

II. 평면벡터

벡터는 사실상 좌표와 같고, 이는 모두 고등수학에서 증명하였다. 즉, 기본적인 내용은 모두 증명이 가능하다.

고등수학과 차별점이 있는 내적 이야기만 하고 이 절을 마친다. 영벡터가 아닌 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 이 둘이 이루는 각을 θ라 하면, 내적 연산은 다음과 같이 정의된다.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

만일 두 평면벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 성분으로 각각 $\vec{a}=(a_1, a_2)$, $\vec{b}=(b_1, b_2)$로 나타나면 위 내적의 정의는 다음과 같이 표현된다.

Proposition(평면벡터의 내적과 성분)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$$

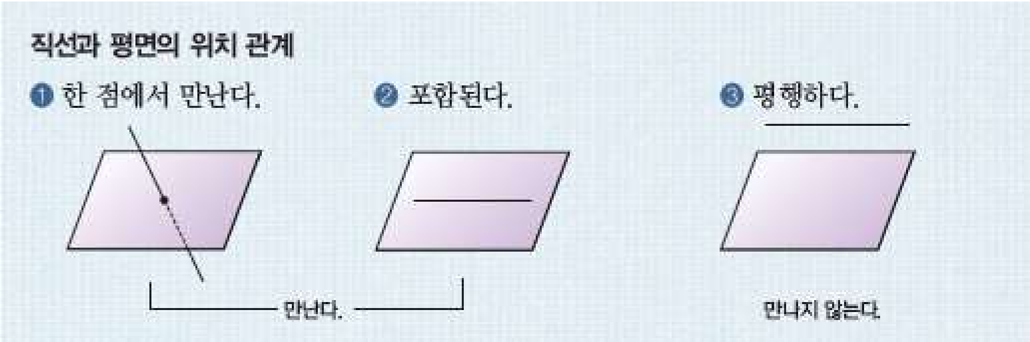
Proof.

III. 공간도형

교과서에서는 이외로 공간도형 단원에서 당연한 것을 증명하라는 연습문제가 쏟아지듯 등장한다. 이러한 문제들을 해결하기 위해서는 교과서에서 당연하다고 여기는 것들을 수학적으로 어떻게 정의되는지 완벽히 숙지할 필요가 있다.

1. 직선과 평면의 위치관계

직선과 평면의 위치관계에서 가장 중요한 것은 수직에 대한 정의이다. 공간에서 직선과 평면의 위치관계는 다음 3가지 경우 중 하나를 만족해야만 한다.



이제 공간에서 직선과 평면의 수직을 정의하자. 아래 그림과 같이 직선 l이 평면 α와 점 O에서 만나고, 평면 α 상에 존재하는 모든 직선들과 l이 수직일 때 직선과 평면이 서로 수직이라고 정의하고, $l \perp \alpha$로 표기한다.

[연습문제]
공간의 직선 l과 평면 α에 대하여 평면 α 위의 서로 다른 두 직선 m, n이 l과 각각 수직이면 $l \perp \alpha$임을 증명하시오.

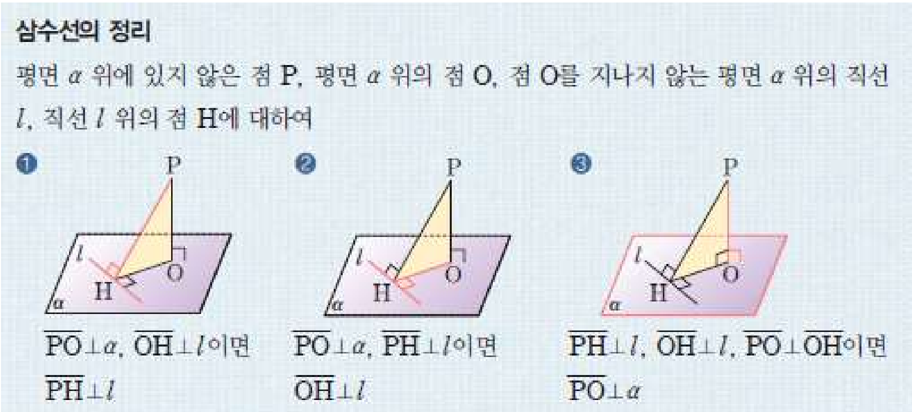
Proof.

다음은 아주 대표적인 예시이다.

[연습문제]
정사면체에서 꼬인 위치에 있는 두 직선이 서로 수직임을 증명하시오.

Proof.

직선과 평면의 위치관계의 최종 단계는 삼수선의 정리를 이해하고 증명하는 것이다.

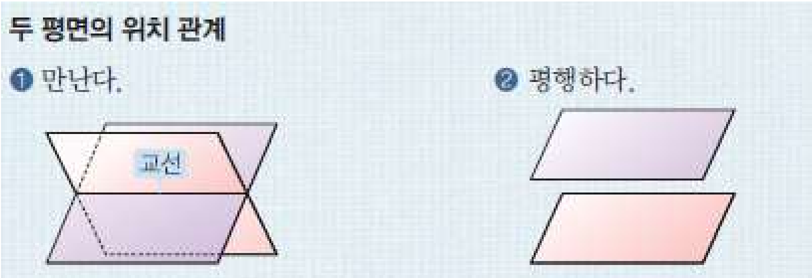


[연습문제]
삼수선의 정리를 증명하시오.

Proof.

2. 평면과 평면의 위치관계

평면과 평면의 위치관계는 다음 두 가지 경우 뿐이다.



다음 연습문제를 풀어보자. 두 직선이 평행하기 위해서는 서로 만나지 않는 두 직선이 한 평면 위에 존재하고 있음을 보이면 된다.

[연습문제]
서로 평행한 두 평면 α, β 다른 평면 γ와 만나서 생기는 교선을 각각 l, m이라 할 때, $l // m$임을 증명하시오.

Proof.

한편, 귀류법을 쓰면 논리적으로 당연해 보이는 것에 대한 서술이 명확해진다.

[연습문제]
평면 α 위에 있지 않은 점 P를 지나고 평면 α에 평행한 두 직선 l, m을 포함하는 평면 β는 평면 α와 평행함을 증명하시오.

Proof.