

수학 영역 (가형)

홀수형

| | |
|----|--|
| 성명 | |
|----|--|

| | | | | | | | | | |
|-------|--|--|--|--|--|---|--|--|--|
| 수험 번호 | | | | | | - | | | |
|-------|--|--|--|--|--|---|--|--|--|

- 자신이 선택한 유형(가형/나형)의 문제지인지 확인하십시오.
- 문제지의 해당란에 성명과 수험 번호를 정확히 쓰십시오.
- 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하십시오.

너의 미소가 영원히 빛을 잃어 가지 않게

- 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하십시오.
- 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하십시오.
- 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하십시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.
- 계산은 문제지의 여백을 활용하십시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

2021학년도 한달음 모의고사 가형 1회

한양대학교 수학교육과 소모임 한달음

출제위원 : 류원형, 박기태 (17학번)

고은서, 공창주, 김범석, 한상훈 (19학번)

심성국, 윤세인, 이가은, 홍어진 (20학번)

편집위원 : 고은서, 김범석, 한상훈

해설위원 : 공창주, 류원형, 한상훈

본 모의고사에 대한 저작권은 한양대학교 수학교육과 소모임 '한달음'에 있으며 저작권자의 허락 없이 복제, 각색하여 2차적 저작물 작성 등으로 이용하는 일체의 행위는 금지됩니다.

한달음 모의고사에 대한 문의와 문제지 또는 해설지에 오류 및 오타를 발견하셨다면

카카오톡 오픈 채팅방 '<https://open.kakao.com/o/sRm320Fc>' (오른쪽 QR코드)

으로 문의바랍니다.

(한달음 메일 주소 : handaleum123@naver.com)



제 2 교시

수학 영역(가형)

한달음

5지선다형

1. $\log_2 50 - 4\log_4 5$ 의 값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+2} + 3^{n+1}}{5^n + 1}$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{1}{25}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ 1 ④ 5 ⑤ 25

3. ${}_4H_5 + {}_5H_4$ 의 값은? [2점]

- ① 118 ② 122 ③ 126 ④ 130 ⑤ 134

4. 두 사건 A, B 가 서로 독립이고

$$P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cup B^c) = \frac{1}{2}$$

일 때, $P(B)$ 의 값은? (단, A^c 은 A 의 여사건이다.) [3점]

- ① $\frac{3}{8}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5}{8}$ ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{7}{8}$

5. 함수 $f(x) = a \sin\{b(x+\pi)\}$ 의 주기가 π 이고, 곡선

$y = f(x)$ 가 점 $\left(\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)$ 을 지날 때, $a+b$ 의 값은?

(단, $b > 0$) [3점]

- ① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

6. $\left(x + \frac{1}{x^2}\right)^4 \left(\frac{x}{3} + a\right)^3$ 의 전개식에서 x 의 계수가 $\frac{2}{27}$ 일 때,

상수 a 의 값은? [3점]

- ① $-\frac{5}{6}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{2}{3}$ ⑤ $\frac{7}{6}$

7. 두 실수 a, b 에 대하여 곡선 $e^y \ln x + ae^{2y} = b$ 위의 점

$(e, 0)$ 에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{3e}$ 일 때, $a+b$ 의 값은? [3점]

- ① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

8. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b 라 하자. $a < b$ 일 때, a 가 b 의 약수일 확률은? [3점]

- ① $\frac{4}{15}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{2}{5}$ ④ $\frac{7}{15}$ ⑤ $\frac{8}{15}$

9. $0 \leq x < 12$ 일 때, 부등식

$$2\cos^2\frac{\pi}{3}x \leq 1 - \sin\frac{\pi}{3}x$$

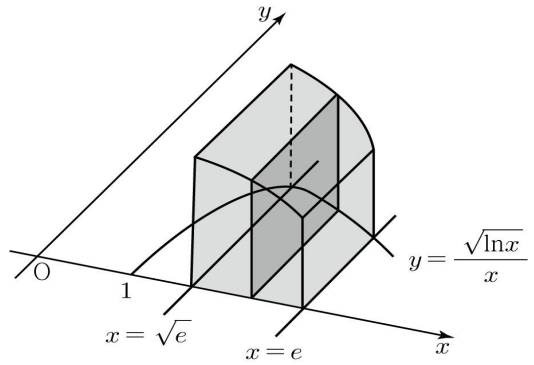
를 만족시키는 모든 정수 x 의 개수는? [3점]

- ① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

10. 그림과 같이 곡선 $y = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ 와 x 축 및 두 직선 $x = \sqrt{e}, x = e$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다.

이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점]

- ① $\frac{\sqrt{e}-2}{e}$ ② $\frac{3\sqrt{e}-4}{2e}$ ③ $\frac{2\sqrt{e}-2}{e}$
 ④ $\frac{3\sqrt{e}-3}{2e}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{e}-2}{2e}$



11. 첫째항이 1인 등비수열 $\{a_n\}$ 과 모든 자연수 n 에 대하여 $\log_2|a_n|$ 의 값이 정수이다.

$$\sum_{n=1}^m \log_2|a_n| > 7$$

을 만족시키는 자연수 m 의 최솟값이 4일 때, $\log_2|a_{11}|$ 의 값은? [3점]

- ① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

12. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$xf'(x) - f(x) = \frac{2x^3}{x^2+1}$$

를 만족시킨다. $f'(1) = 1 + \ln 2$ 일 때, $\int_0^1 f(x) dx$ 의 값은?

[3점]

- ① $-\frac{1}{2} + \ln 2$ ② $-\frac{1}{4} + \ln 2$ ③ $-\frac{1}{2} + 2\ln 2$
 ④ $-\frac{1}{4} + 2\ln 2$ ⑤ $-\frac{1}{2} + 3\ln 2$

13. 숫자 1, 1, 1, 2, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 6개의 카드가 들어있는 주머니에서 임의로 3장의 카드를 동시에 꺼내 카드에 적힌 서로 다른 수의 개수를 확률변수 X 라 한다. 예를 들어, 1, 1, 3이 적힌 카드를 뽑은 경우 $X=2$ 이다. $E(X)$ 의 값은?

[3점]

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ 2 ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

14. 확률변수 X 는 정규분포 $N(m, 2^2)$ 를 따르고, 확률변수 X 의 확률밀도함수는 $f(x)$ 이다.

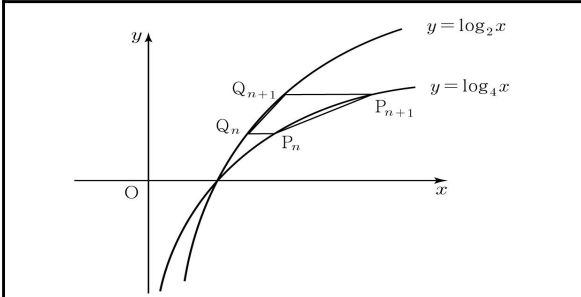
$$f(12) = f(a), \quad f(18) < f(12) < f(14)$$

일 때, 자연수 m 에 대하여 $P(X \geq a+1)$ 의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구한 것은? (단, $a \neq 12$) [4점]

| z | $P(0 \leq Z \leq z)$ |
|-----|----------------------|
| 0.5 | 0.1915 |
| 1.0 | 0.3413 |
| 1.5 | 0.4332 |
| 2.0 | 0.4772 |

- ① 0.0668 ② 0.1587 ③ 0.3085
 ④ 0.6826 ⑤ 0.8185

15. 첫째항이 4이고 공비가 4인 등비수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 점 P_n 을 $P_n(a_n, \log_4 a_n)$ 이라 하고 점 P_n 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 곡선 $y = \log_2 x$ 와 만나는 점을 Q_n 이라 하자. 다음은 사각형 $Q_n P_n P_{n+1} Q_{n+1}$ 의 넓이 b_n 을 구하는 과정이다.



모든 자연수 n 에 대하여 점 P_n 을 지나고 x 축에 평행한 직선이 y 축과 만나는 점을 R_n 이라 할 때, 사각형 $Q_n P_n P_{n+1} Q_{n+1}$ 의 넓이는 사각형 $R_n P_n P_{n+1} R_{n+1}$ 의 넓이에서 사각형 $R_n Q_n Q_{n+1} R_{n+1}$ 의 넓이를 뺀 값과 같다. 점 R_n 의 y 좌표는 $\log_4 a_n$ 이므로

$$\overline{R_n R_{n+1}} = \boxed{\text{(가)}}$$

이다. 사각형 $R_n P_n P_{n+1} R_{n+1}$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \boxed{\text{(가)}} \times (a_n + a_{n+1})$$

이고, 점 Q_n 의 x 좌표는 $\boxed{\text{(나)}}$ 이므로

사각형 $R_n Q_n Q_{n+1} R_{n+1}$ 의 넓이는

$$\frac{3}{2} \times \boxed{\text{(가)}} \times \boxed{\text{(나)}}$$

이다. 따라서 사각형 $Q_n P_n P_{n+1} Q_{n+1}$ 의 넓이 b_n 은

$$b_n = 2^{n-1} \times \boxed{\text{(다)}}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p , (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$ 이라 할 때, $p + \frac{f(6)}{g(4)}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{11}{7}$ ② $\frac{18}{11}$ ③ $\frac{131}{77}$ ④ $\frac{136}{77}$ ⑤ $\frac{141}{77}$

16. 실수 전체의 집합에서 이계도함수를 갖고 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) > 0$ 인 함수 $f(x)$ 가

$$f(1) = 1, \quad f(4) = 2, \quad \int_1^4 f(x) dx = 4$$

를 만족시킨다. 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때,

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx \text{의 값은? [4점]}$$

- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

17. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4\}$ 에 대하여 X 에서 X 로의 모든 함수 f 중에서 임의로 하나를 선택할 때, 이 함수가 다음 조건을 만족시킬 확률은? [4점]

(가) $f(1) \leq f(2) \leq f(4)$
 (나) $f(3) \leq f(1)f(2)$

- ① $\frac{13}{64}$ ② $\frac{7}{32}$ ③ $\frac{15}{64}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{17}{64}$



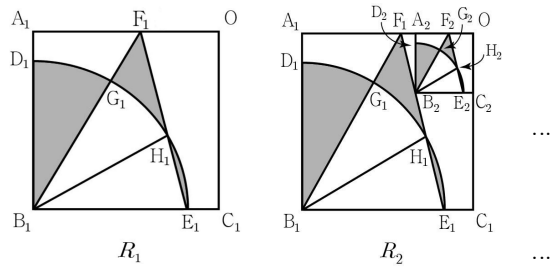
18. 그림과 같이 한 변의 길이가 $3 + \sqrt{3}$ 인 정사각형 $OA_1B_1C_1$ 에서 중심이 B_1 이고 반지름의 길이가 4인 원과 두 선분 A_1B_1 과 B_1C_1 이 만나는 점을 각각 D_1, E_1 라 하자. 선분 OA_1 위에 있는 점 F_1 를 $\angle F_1B_1E_1 = \frac{\pi}{3}$ 이고 $\angle B_1F_1E_1 = \frac{\pi}{4}$ 가 되도록 잡고, 두 선분 B_1F_1 과 E_1F_1 이 호 D_1E_1 와 만나는 두 점을 각각 G_1, H_1 라 하자. 부채꼴 $B_1D_1G_1$ 의 내부와 두 선분 F_1G_1, F_1H_1 과 호 G_1H_1 로 둘러싸인 부분과 선분 E_1H_1 과 호 E_1H_1 로 둘러싸인 부분인  모양의 도형에 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자.

그림 R_2 에서 선분 OA_1 위에 있는 점 A_2 , 선분 E_1F_1 위에 있는 점 B_2 , 선분 OC_1 위에 있는 점 C_2 를 꼭짓점으로 하는 정사각형 $OA_2B_2C_2$ 를 그리고, 그림 R_1 을 얻은 것과 같은 방법으로 정사각형 $OA_2B_2C_2$ 에  모양의 도형을 그리고 색칠하여 얻은 그림을 R_2 라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{3\sqrt{3} - 2 + 2\pi}{2}$ ② $\frac{3\sqrt{3} - 3 + 2\pi}{2}$ ③ $\frac{9\sqrt{3} - 8 + 6\pi}{4}$
 ④ $\frac{9\sqrt{3} - 9 + 6\pi}{4}$ ⑤ $\frac{10\sqrt{3} - 9 + 6\pi}{4}$

19. 함수 $f(x) = \int_{\sqrt{\pi}}^x x \sin(t^2) dt$ 에 대하여 <보기>에서

옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

$$\text{ㄱ. } \int_{\sqrt{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2) dx < \sqrt{\pi} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{ㄴ. } f'\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) > \sqrt{2\pi} - \sqrt{\pi}$$

ㄷ. $f''(c) < -\sqrt{2}$ 인 실수 c 가 열린구간 $\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\pi}\right)$ 에 적어도 하나 존재한다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

20. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 은 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}a_n & (a_n \geq 1) \\ \{3 + (-1)^{a_n}\}^{n-2} & (a_n < 1) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_m = 1$ 을 만족시키는 자연수 m 의 최솟값이 9가 되도록 하는 모든 a_1 의 값의 합은? [4점]

- ① 300 ② 310 ③ 320 ④ 330 ⑤ 340

21. 실수 전체의 집합에서 증가하고 미분가능한 함수 $f(x)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 하자. 함수 $h(x)$ 가 $h(2) = 0$ 인 이차함수일 때, 모든 실수 x 에 대하여

$$\int_0^{f(x)} f'(g(t)) dt = \int_x^1 h(t) e^{-2t} dt$$

이다. $f'(1) = \frac{2}{e}$ 일 때, $f(4)$ 의 값은? [4점]

- ① $-6e^{-4} + 4e^{-2}$ ② $-6e^{-4} + 2e^{-2}$ ③ $-4e^{-4} + 2e^{-2}$
 ④ $-4e^{-4} + 4e^{-2}$ ⑤ $-4e^{-4} + 6e^{-2}$

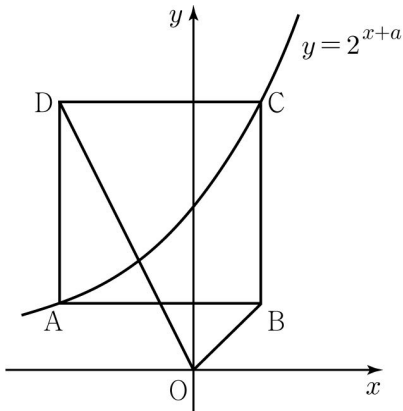
단답형

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{1 - \cos x}$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_n + a_{n+1} = 4n$ 일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. $x = 1$ 에서 $x = e$ 까지의 곡선 $y = \frac{1}{8}x^2 - \ln x$ 의 길이가 $pe^2 + q$ 이다. $\frac{q}{p}$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.)
[3점]

25. 그림과 같이 넓이가 4인 정사각형 ABCD에 대하여 두 점 A, C가 곡선 $y = 2^{x+a}$ (a 는 상수) 위에 있다. 직선 AB가 x 축에 평행하고 $\overline{OD} = \frac{4\sqrt{5}}{3}$ 일 때, 선분 OB의 길이가 k 이다. $90k^2$ 의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 두 점 A, C는 각각 제 2사분면, 제 1사분면 위에 있다.)
[3점]



26. 원 C에 내접하는 사각형 ABCD가 $\overline{AB} \times \overline{AD} = 3$, $\cos(\angle BCD) = -\frac{1}{3}$, $\overline{CD} = \frac{7}{3}$ 을 만족시킨다. 이 사각형의 넓이가 $\frac{16\sqrt{2}}{9}$ 일 때, 원 C의 넓이가 S이다. $\frac{40}{\pi} \times S$ 의 값을 구하시오. [4점]

27. 어느 공장에서 생산되는 에어컨 1개의 무게는 평균이 m , 표준편차가 σ 인 정규분포를 따른다고 한다. 이 공장에서 생산되는 에어컨 중 n_1 개를 임의추출하여 구한 에어컨 무게의 표본평균이 \bar{x}_1 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 $79.02 \leq m \leq 80.98$ 이었다. 또 이 공장에서 생산하는 에어컨 중 n_2 개를 다시 임의추출하여 구한 에어컨 무게의 표본평균이 \bar{x}_2 일 때, 모평균 m 에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간이 다음과 같다.

$$\frac{15}{16}\bar{x}_1 - 0.84 \leq m \leq \frac{15}{16}\bar{x}_1 + 0.84$$

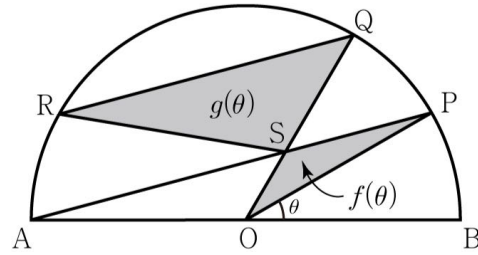
n_1, n_2 가 50이하의 자연수일 때, $\sigma + \bar{x}_2$ 의 값을 구하시오. (단, 에어컨 무게의 단위는 kg 이고, Z 가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(|Z| \leq 1.96) = 0.95$ 로 계산한다.)

[4점]

28. 그림과 같이 길이가 2인 선분 AB를 지름으로 하는 반원의 호 AB 위에 점 P가 있다. 호 AP 위에 점 Q를 호 BP의 길이와 호 PQ의 길이가 같도록 잡는다. 호 AQ 위에 점 R를 직선 AP와 직선 RQ가 평행하도록 잡는다. 선분 AB의 중점을 O라 할 때, 선분 OQ와 선분 AP의 교점을 S라 하자. $\angle POB = \theta$ 라 할 때, 삼각형 PSO의 넓이를 $f(\theta)$, 삼각형 QRS의 넓이를 $g(\theta)$ 라 하자.

$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{g(\theta)}{f(\theta)} = k$ 일 때, $18k$ 의 값을 구하시오. (단, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$)

[4점]



29. 일렬로 12개의 칸이 있는 진열대에 다섯 종류의 인형 A, B, C, D, E를 이 순서대로 왼쪽부터 넣으려고 한다. 한 칸에는 한 개의 인형만 넣을 수 있고 빈칸이 없도록 넣을 때, 다음 조건을 만족시키도록 인형을 진열하는 경우의 수를 구하시오. (단, 다섯 종류의 인형을 모두 진열해야 하고 인형은 종류별로 충분히 있다.) [4점]

- (가) 7번째 칸에 인형 C가 있다.
 (나) 인형 A의 개수와 인형 D의 개수의 합은 4 이상이다.
 (다) 인형 B의 개수와 인형 E의 개수의 합은 4 이상이다.

30. $x = 1$ 에서 최소이고 $f(1) > 0$ 인 이차함수 $f(x)$ 와 자연수 k 에 대하여 함수 $g(x)$ 를

$$g(x) = \ln f(x) + kx$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $g''\left(\frac{5}{4}\right) = 0$
 (나) 곡선 $y = |g'(x)|$ 와 직선 $y = \alpha$ 의 서로 다른 교점의 개수가 3이 되도록 하는 모든 α 를 작은 수부터 크기순으로 나열하면 α_1, α_2 이다.

$g(1) = 1$ 일 때, $\alpha_1 + \alpha_2 + g(3) = p + \ln q$ 이다. $p + q$ 의 값을 구하시오. (단, p 와 q 는 유리수이다.) [4점]

* 확인 사항

- 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.