제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\log 4+\log 25$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. $\lim_{x \to 1}(3x^2+2)$ 의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

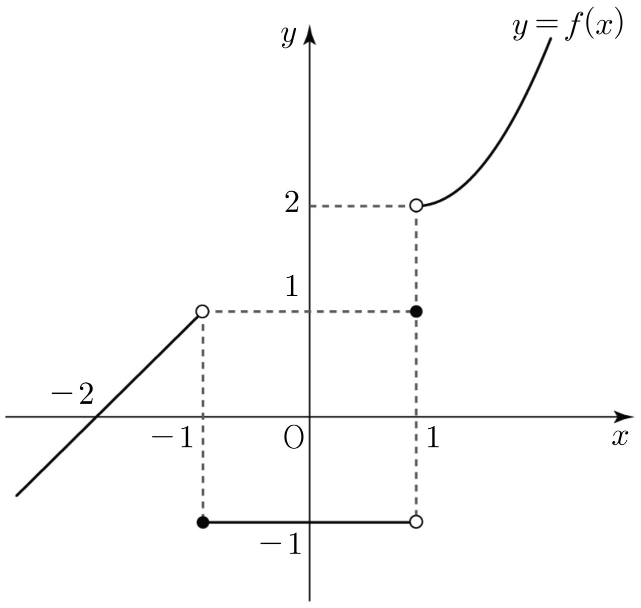
3. $\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{81}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. $\cos \frac{2}{3}\pi$ 의 값은? [3점]

① $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{x \to -1-} f(x) + \lim_{x \to 1+} f(x)$ 의 값은? [3점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

6. 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{4}$ 이고, 넓이가 8π 인 부채꼴의 반지름의 길이는? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

7. 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여

$$a_{n+1} = 2a_n + 1$$

을 만족시킨다. $a_4 = 31$ 일 때, a_2 의 값은? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

8. 1이 아닌 두 양수 a, b에 대하여

$\log_2 a = \log_8 b$

가 성립할 때, $\log_a b$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

9. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여

$a_3 = 4a_1 + 3a_2$

일 때, $\frac{a_6}{a_4}$의 값은? [3점]

① 10 ② 12 ③ 14 ④ 16 ⑤ 18

10. 삼각형 ABC에서

$$\frac{2}{\sin A} = \frac{3}{\sin B} = \frac{4}{\sin C}$$

일 때, $\cos C$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{4}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

11. 첫째항이 $\frac{1}{5}$ 이고 공비가 양수인 등비수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_4 = 4a_2$일 때, $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{3}{13}\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$을 만족시키는 자연수 n의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

12. $0 \le x < 2\pi$일 때, x에 대한 부등식

$$\sin^2 x - 4\sin x - 5k + 5 \ge 0$$

이 항상 성립하도록 하는 실수 k의 최댓값은? [3점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

13. 자연수 n 에 대하여 좌표평면 위의 점 $(n,\ 0)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 1 인 원을 O_n 이라 하자.
점 $(-1,\ 0)$ 을 지나고 원 O_n 과 제1 사분면에서 접하는 직선의 기울기를 a_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{5} {a_n}^2$ 의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{23}{42}$ ③ $\frac{25}{42}$ ④ $\frac{9}{14}$ ⑤ $\frac{29}{42}$

14. $0 \le x < \pi$ 일 때, x 에 대한 방정식

$$\sin nx = \frac{1}{5} \quad (n \text{ 은 자연수})$$

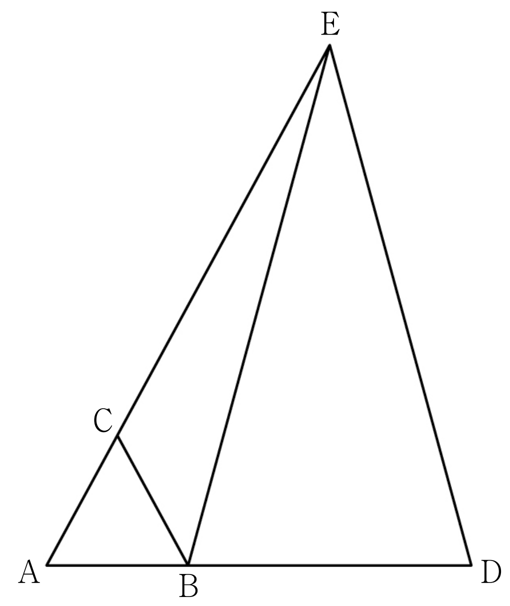
의 모든 해의 합을 $f(n)$ 이라 하자. $f(2)+f(5)$ 의 값은? [4점]

① $\frac{3}{2}\pi$ ② 2π ③ $\frac{5}{2}\pi$ ④ 3π ⑤ $\frac{7}{2}\pi$

15. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 정의된
함수 $f(x)=-\log_3(mx+5)$ 에 대하여
$f(-1)<f(1)$ 이 되도록 하는 모든 정수 m 의 개수는? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. 그림과 같이 한 변의 길이가 1 인 정삼각형 ABC 에서
선분 AB 의 연장선과 선분 AC 의 연장선 위에 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CE}}$ 가 되도록 두 점 D, E 를 잡는다.
$\overline{\mathrm{DE}}=\sqrt{13}$ 일 때, 삼각형 BDE 의 넓이는? [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $\sqrt{14}$

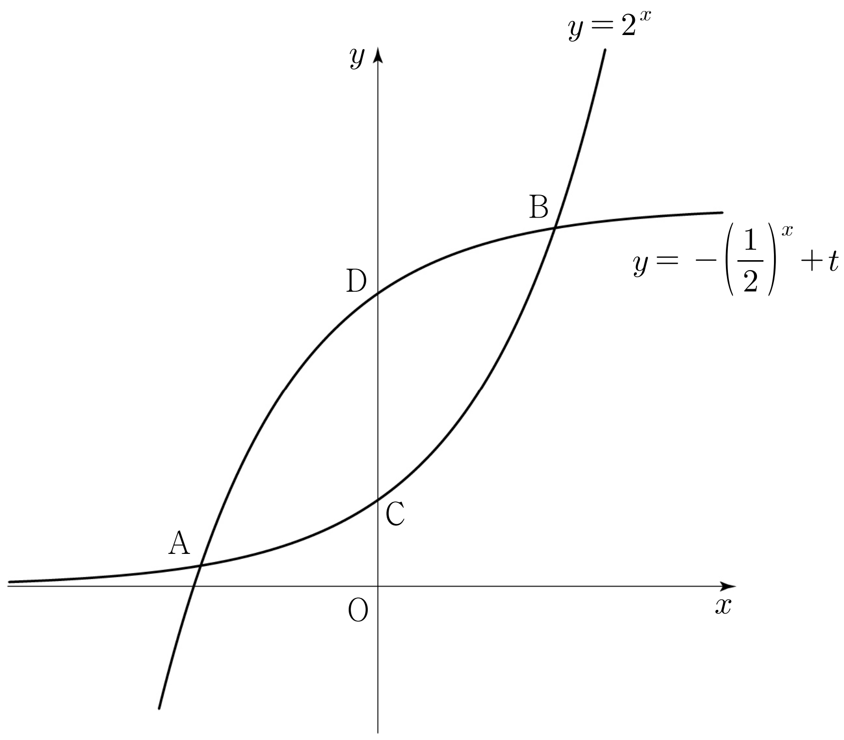
17. 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_7 = 37$ (나) 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k \le \sum_{k=1}^{13} a_k$이다.

$\sum_{k=1}^{21} \left| a_k \right|$의 값은? [4점]

① 681 ② 683 ③ 685 ④ 687 ⑤ 689

18. 그림과 같이 2보다 큰 실수 t에 대하여 두 곡선 $y = 2^x$과 $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + t$가 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 두 곡선 $y = 2^x$, $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x + t$가 y축과 만나는 점을 각각 C, D라 하자. <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, O는 원점이다.) [4점]

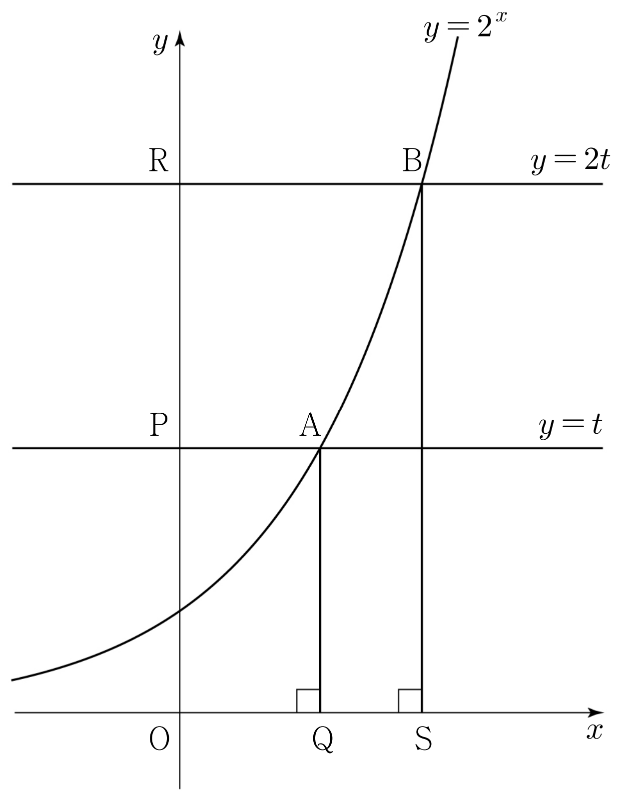


<보 기>

ㄱ. $\overline{\mathrm{CD}} = t - 2$
ㄴ. $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{DB}}$
ㄷ. 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{t-2}{t}$배이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

19. 그림과 같이 실수 t $(1 < t < 100)$에 대하여 점 $\mathrm{P}(0,\ t)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 A, 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 하자. 점 $\mathrm{R}(0,\ 2t)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 S라 하자. 사각형 ABRP의 넓이를 $f(t)$, 사각형 AQSB의 넓이를 $g(t)$라 할 때, $\dfrac{f(t)}{g(t)}$의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 t의 값의 곱은? [4점]



① 2^{11}　② 2^{12}　③ 2^{13}　④ 2^{14}　⑤ 2^{15}

20. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad \cdots\cdots \quad (\bigstar)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> $(\bigstar)$에서
> $S_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ 이라 하자.
>
> (i) $n=1$일 때,
> $S_1=\boxed{\text{(가)}}=T_1$이므로 $(\bigstar)$이 성립한다.
>
> (ii) $n=m$일 때,
> $(\bigstar)$이 성립한다고 가정하면 $S_m=T_m$이다.
>
> $n=m+1$일 때, $(\bigstar)$이 성립함을 보이자.
> $S_{m+1}=S_m+\dfrac{1}{2m+1}+\boxed{\text{(나)}}$,
> $T_{m+1}=T_m+\boxed{\text{(다)}}+\dfrac{1}{2m+1}+\dfrac{1}{2m+2}$ 이다.
> $S_{m+1}-T_{m+1}=S_m-T_m$이고,
> $S_m=T_m$이므로 $S_{m+1}=T_{m+1}$이다.
> 따라서 $n=m+1$일 때도 $(\bigstar)$이 성립한다.
>
> (i), (ii)에 의하여
> 모든 자연수 n에 대하여 $(\bigstar)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $a+\dfrac{g(5)}{f(14)}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{7}{2}$　② $\dfrac{9}{2}$　③ $\dfrac{11}{2}$　④ $\dfrac{13}{2}$　⑤ $\dfrac{15}{2}$

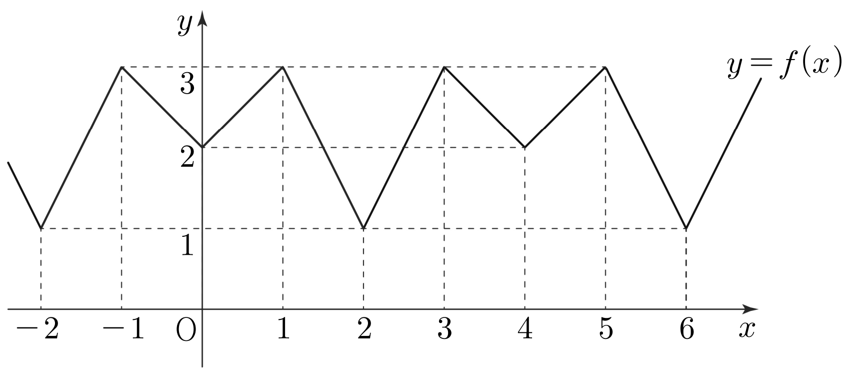
21. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=\begin{cases} x+2 & (0 \le x < 1) \\ -2x+5 & (1 \le x \le 2) \end{cases}$

(나) 모든 실수 x에 대하여
$f(-x)=f(x)$이고 $f(x)=f(x+4)$이다.

n이 자연수일 때, 함수 $y=\log_{2^n}(x+2n)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 a_n이라 하자. $a_1+a_2+a_3$의 값은? [4점]

① 532 ② 535 ③ 538 ④ 541 ⑤ 544



단답형

22. $3^4 \times 9^{-1}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 네 수 x, 7, y, 13이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $x+2y$의 값을 구하시오. [3점]

24. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n - b_n) = 10, \ \sum_{n=1}^{6}(2a_n - 2b_n) = 56$$

일 때, $a_6 - b_6$의 값을 구하시오. [3점]

25. $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여 $\tan\theta = -\frac{4}{3}$일 때,

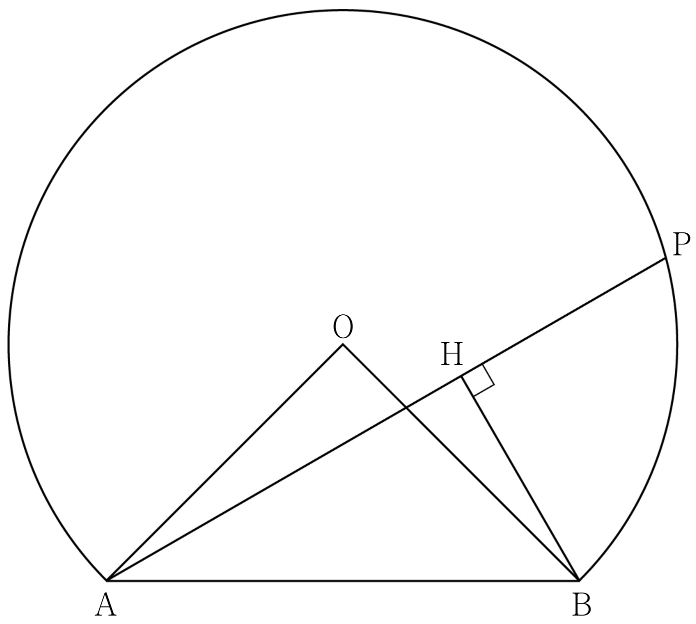
$5\sin(\pi + \theta) + 10\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$의 값을 구하시오. [3점]

26. 지수함수 $y = 5^x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 b만큼 평행이동하면

함수 $y = \frac{1}{9} \times 5^{x-1} + 2$의 그래프와 일치한다.

$5^a + b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [4점]

27. 그림과 같이 반지름의 길이가 2 이고 중심각의 크기가 $\frac{3}{2}\pi$ 인 부채꼴 OBA 가 있다. 호 BA 위에 점 P 를 $\angle \mathrm{BAP} = \frac{\pi}{6}$ 가 되도록 잡고, 점 B 에서 선분 AP 에 내린 수선의 발을 H 라 할 때, $\overline{\mathrm{OH}}^2$ 의 값은 $m + n\sqrt{3}$ 이다. $m^2 + n^2$ 의 값을 구하시오. (단, m, n 은 유리수이다.) [4점]



28. x 에 대한 부등식

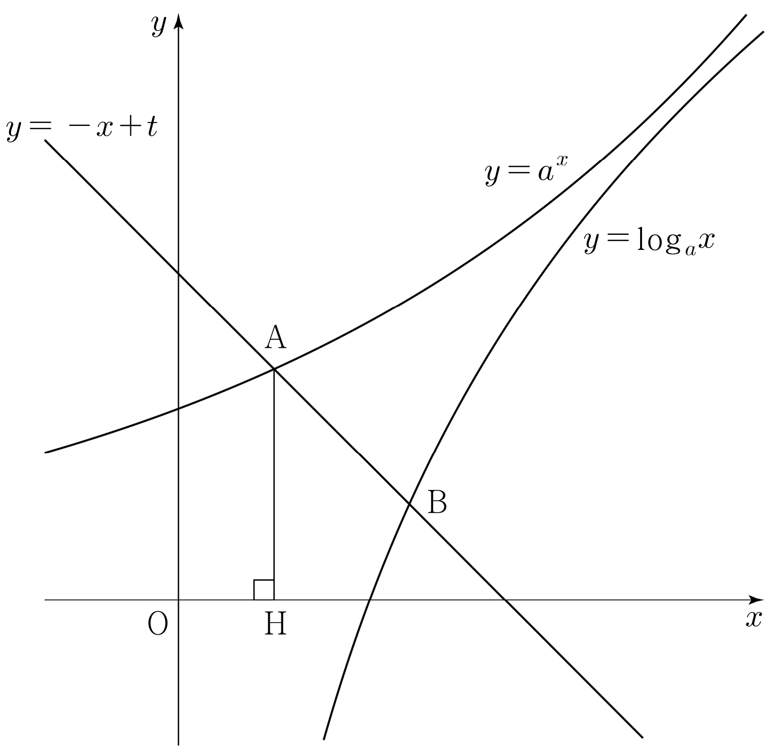
$$\left(\frac{1}{4}\right)^x - (3n+16) \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 48n \le 0$$

을 만족시키는 정수 x 의 개수가 2 가 되도록 하는 모든 자연수 n 의 개수를 구하시오. [4점]

29. 그림과 같이 1보다 큰 두 실수 a, t에 대하여 직선 $y=-x+t$가 두 곡선 $y=a^x$, $y=\log_a x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 점 A에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 할 때, 세 점 A, B, H는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\overline{\mathrm{OH}} : \overline{\mathrm{AB}} = 1 : 2$
(나) 삼각형 AOB의 외접원의 반지름의 길이는 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이다.

$200(t-a)$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]



30. 이차함수 $f(x)=x^2+2x+2$와 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x<0) \\ |f(-x)-t| & (x \geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 모든 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$$\lim_{t \to \alpha-} h(t) \neq \lim_{t \to \alpha+} h(t)$$

인 모든 실수 α를 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 α_1, α_2, $\cdots$, α_m (m은 자연수)라 할 때, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\{4\alpha_k \times h(\alpha_k)\}$의 값을 구하시오. [4점]

* 확인 사항
○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.