존재성에 관한 논술형 문제

작성자 : 나카렌

주의 사항 : 각 페이지의 문제를 해결한 뒤에 다음 페이지로 넘어가십시오. $n+1$**페이지에는** n**페이지의 문제의 스포일러가 담겨 있습니다. (단,** $n \le 3$**)**

수학의 한 특징을 들라고 하면, 수학적 내용을 정당화, 또는 증명하는 과정은 논리적으로 엄밀해야 한다는 것이 있다. 그렇기 때문에, 어떤 수학적 대상에 대하여 논의를 전개하려면 먼저 그런 대상이 "진짜로 있다"는 것을 확인해야 한다. 연속성을 공부하면서 배운 최대·최소의 정리(닫힌 구간에서 연속함수는 최댓값과 최솟값을 가진다), 중간값의 정리(어떤 구간에서 한 함수가 연속일 때, 그 구간의 양 끝점에서의 값들 사이에 있는 실수가 함숫값이 되는 순간이 존재한다), 미적분을 공부하면서 배운 평균값의 정리 등이 "진짜로 있음"을 보장해 주는 도구의 예이다. 그런데 과연 이런 것을 철저하게 확인하여야 할까? 다음의 사례를 보면서 생각해 보자.

함수 $f(x)$가 실수 전체에서 연속이고 미분가능하다고 하자. 이 때, $L(t,f)$를 $x \ge t$에서 $f(x)$의 최댓값, $S(t,f)$를 $x \ge t$에서 $f(x)$의 최솟값이라고 하자.
(1) 실수 a에 대하여 $t \ge a$일 때 항상 $L(t,f) = f(t)$이면 $x \ge a$일 때에 극댓점이 존재하지 않는다.
(2) 역으로 $x \ge a$일 때 극댓점이 존재하지 않으면 $t \ge a$일 때 항상 $L(t,f) = f(t)$이다.

증명) (1) $t \ge a$일 때 항상 $L(t,f) = f(t)$이고 $x \ge a$일 때에 극댓점 $(b, f(b))$가 존재한다고 가정하자. 그러면 충분히 작은 양수 e에 대하여 $f(b-e) < f(b)$가 성립한다. 이에서

$$L(b-e,f) \ge f(b) > f(b-e) = f(b-e)$$

이고 이는 모순이다. 따라서 $t \ge a$일 때 항상 $L(t,f) = f(t)$이면 $x \ge a$에 극댓점이 존재하지 않는다.
(2) 일반적으로 어떤 구간에서의 연속함수의 최댓값은 그 구간의 끝점의 값이거나 그 구간 내의 극댓값 중의 하나이다. 따라서 $x \ge a$일 때에 극댓점이 존재하지 않으면 $t \ge a$인 임의의 t에 대하여 $x \ge t$에서의 최댓값은 구간의 끝점인 $x = t$에서의 값이다. 따라서 $x \ge a$일 때 극댓점이 존재하지 않으면 $t \ge a$일 때 항상 $L(t,f) = f(t)$이다.

위의 증명에는 문제가 없어 보인다. 하지만, 위의 명제에는 반례가 존재하며, 그 중 한 예가 $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$이다.

문제 1 위의 $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$가 위의 (2)의 반례임을 보이고, 위의 (2)의 증명에서 틀린 곳을 찾아라.

존재성에 관한 논술형 문제

작성자 : 나카렌

주의 사항 : 각 페이지의 문제를 해결한 뒤에 다음 페이지로 넘어가십시오. $n+1$페이지에는 n페이지의 문제의 스포일러가 담겨 있습니다. (단, $n \leq 3$)

앞의 **문제** 1을 통하여, 최댓값이 "진짜로 있는지"의 여부 때문에 문제가 발생할 수 있음을 알았을 것이다. 이제, 이와 같은 상황에 대하여 좀 더 생각해 보자.

문제 2 임의의 연속함수 $f(x)$에 대하여 $L(t,f)$는 항상 존재하는가? 존재한다면 존재함을 보이고, 존재하지 않는다면 존재하지 않는 예를 들어라.

문제 3 임의의 연속함수 $f(x)$에 대하여 $S(t,f)$는 항상 존재하는가? 존재한다면 존재함을 보이고, 존재하지 않는다면 존재하지 않는 예를 들어라.

존재성에 관한 논술형 문제

작성자 : 나카렌

주의 사항 : <u>각 페이지의 문제를 해결한 뒤에</u> 다음 페이지로 넘어가십시오. $n+1$페이지에는 n페이지의 문제의 스포일러가 담겨 있습니다. (단, $n \leq 3$)

문제 2와 **문제 3**을 통하여, 어떤 형태의 구간에서는 연속함수의 최댓값(과 최솟값)이 경우에 따라 있을 수도 있고 없을 수도 있다는 것을 알았을 것이다. 그렇다면, 연속함수의 최댓값이 반드시 확실하게 존재하는 특정한 형태의 구간이 있으면 좋을 거라는 생각이 들 것이다. 바로 그 답이 닫힌 구간이며, 닫힌 구간에서는 항상 연속함수가 최댓값을 가진다는 것을 여러분이 연속을 공부하면서 배웠을 것이다. 바로 이런 맥락에서, 수학에서는 "진짜로 있는지"의 문제에 대하여 관심이 있다.

한편, 원래의 명제를 다시 가져오면 다음과 같다.

> 함수 $f(x)$가 실수 전체에서 연속이고 미분가능하다고 하자. 이 때, $L(t,f)$를 $x \geq t$에서 $f(x)$의 최댓값, $S(t,f)$를 $x \geq t$에서 $f(x)$의 최솟값이라고 하자.
> (1) 실수 a에 대하여 $t \geq a$일 때 항상 $L(t,f) = f(t)$이면 $x \geq a$일 때에 극댓점이 존재하지 않는다.
> (2) 역으로 $x \geq a$일 때 극댓점이 존재하지 않으면 $t \geq a$일 때 항상 $L(t,f) = f(t)$이다.

위에서 (2)는 거짓인 명제가 되었지만, 그래도 조금 미련이 남을 수 있다. 틀렸다는 건 알겠는데 왠지 맞는 말 같기도 하기 때문이다. 그렇다면 위의 (2)를 조금 수정하면 되지 않을까? 최댓값과 비슷하면서, 더 많은 경우에서 "진짜로 있는" 무언가를 생각하면 되지 않을까? 수학자들도 비슷한 생각을 했고, 그러한 개념을 생각해 내었다.

> $U(t,f)$를 다음과 같이 정의하자. $x \geq t$일 때 항상 $f(x) \leq k$가 성립하는 k값들 중 최솟값을 $U(t,f)$라고 한다.

문제 4 $L(t,f)$가 존재하면 $U(t,f) = L(t,f)$임을 보여라.

문제 5 앞에서 살펴본 $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$에 대하여, $U(1,f)$을 구하라.

문제 6 $f(x) = x^2$에 대하여 $U(1,f)$는 존재하는가?

작성자 : 나카렌

주의 사항 : <u>각 페이지의 문제를 해결한 뒤에 다음 페이지로 넘어가십시오.</u> $n+1$페이지에는 n페이지의 문제의 스포일러가 담겨 있습니다. (단, $n \le 3$)

$L(t,f)$가 존재하지 않아도 $U(t,f)$가 존재할 수 있다는 것을 문제 5를 통하여 확인했지만, 그럼에도 $U(t,f)$가 항상 존재하는 것은 아니다. $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$일 때가 있기 때문이다. 그런데, 생각해 보면 이런 경우만 제외하면 $U(t,f)$는 항상 존재한다는 것을 직관적으로 알 수 있다. $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$가 아니라는 것은, $x \to \infty$이더라도 $f(x)$가 넘어가지 않는 어떤 선이 있다는 의미이다. 즉, 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < M$인 M이 존재한다는 이야기가 된다.

질문 7 모든 실수 x에 대하여 $f(x) < M$인 M이 존재하면 $U(t,f)$는 항상 존재하는가? 그렇다면 이를 증명할 수 있는가?

이번에는 **문제**가 아니라 **질문**이다. 한번 생각해 보라는 것이지, 해결해 내고자 노력하지 않아도 된다는 것이다. 왜냐하면, 위의 질문은 수백 년간 함수를 연구하는 수학자들이 고민한 질문이었기 때문이다.

우선 $U(t,f)$가 존재한다면 M보다는 작거나 같음을 알 수 있다. 이제 상수함수 $y = k$ (단, $k \le M$)를 생각하고 실수 k를 점점 줄여 가면서, 실수 k를 천천히 아래로 움직이면서 $y = f(x)$의 그래프에 가까이 가 보면, 분명 어느 순간에서는 $x \ge t$일 때 항상 $f(x) \le k$이지만 k가 아주 조금만 더 작아져도 $f(x) \le k$가 성립하지 않게 되는 실수 k가 있을 것이다. 실수가 빈틈없이 y축을 메우고 있기 때문에…….

따라서 수학자들은 실수만이 가지는 고유한 성질(물론, 위에서 말했듯이 실수가 빈틈없이 수직선을 메우고 있다는 것이다)을 수학적 언어로 명료하게 서술해 내면, 위의 **질문** 7을 해결할 수 있다는 것을 알게 되었다. 그리고 이것을 이용하면 그 이전까지는 직관적으로 생각할 수밖에 없었던 극한, 연속, 미적분을 엄밀하게 할 수 있다는 것도 알게 되었다.

하지만, 실수만이 가지는 고유한 성질을 수학적 언어로 명료하게 서술하고, 이를 이용하여 극한, 연속, 미적분을 엄밀하게 재구성하는 것은 상당한 수학적 내공을 필요로 하며, 수학 자체를 파헤치는 사람이 아니라면, 즉 수학을 이용하기만 하면 되는 입장이라면, 그런 내용을 반드시 알아야 할 필요성은 없다. 그렇기에 대개 그런 내용은 대학교 전공 수학 과정에서 다루며, 고등 학교 과정에서는 다루지 않는다.

이번 글을 통하여 왜 수학에서는 "진짜로 있는지"의 문제, 존재성의 문제에 관심이 있는지를 살펴 보았다. 이를 통하여 논리적으로 명확하게, 엄밀하게 증명을 하려면 존재성을 고려하여야 하는 때가 있다는 것도 알았다. 한편, 존재성을 고려하는 것은 때로는 대학교 수준의 수학적 내공을 요구하는 때도 있다. 그렇기에, 고등 학교 과정에서 배우는 최대·최소의 정리 등을 이용하여 존재성을 보일 수 있으면 보이고, 그렇지 않은 경우에는 직관적으로 이해하고 넘어가는 융통성을 발휘하는 것이 좋을 것이다. 이 글을 통하여 수학적 개념과 수학에 대한 이해가 깊어질 수 있기를 바란다.