제 2 교시

2020학년도 대학수학능력시험 대비 에셈 모의고사 0회 문제지

수학 영역
(가 형)

홀수형

성명	

수험 번호					—				

○ 자신이 선택한 유형('가' 형/'나' 형)의 문제지인지 확인하시오.

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

다보탑은 개성에 있을 수도 있었다.

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험번호를 쓰고, 또 수험번호, 문형(홀수/짝수), 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 시험이 시작되기 전까지 표지를 넘기지 마시오.

찌르꼬.(761141)

제 2 교시

수학 영역(가형)

홀수형

5지선다형

1. 두 벡터 $\vec{a}=(4,2)$, $\vec{b}=(2,-1)$에 대하여 벡터 $2\vec{a}-\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

2. $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x+x^2)}{\sin x}$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{1}{4}$

3. 좌표공간의 두 점 $\mathrm{A}(2,0,-5)$, $\mathrm{B}(1,1,0)$에 대하여 선분 AB를 $2:3$으로 외분하는 점의 좌표가 (a,b,c)이다. $ab-c$의 값은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

4. 두 사건 A와 B는 서로 독립이고

$$P(A)=\frac{2}{5},\ P(A\cap B^C)=\frac{3}{10}$$

일 때, $P(A\cup B)$의 값은? (단, B^C은 B의 여사건이다.) [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{11}{20}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{13}{20}$ ⑤ $\frac{7}{10}$

5. 초점이 F인 포물선 $y^2 = ax\,(a > 0)$위의 점 A에서 직선 $x = -\frac{a}{4}$에 내린 수선의 발을 H라 하자. 선분 AF와 HF의 길이가 4일 때, a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

6. 이산확률변수 X에 대하여

$$\mathrm{P}(X=k) = {}_{48}\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{48-k} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots\ 48)$$

일 때, $\mathrm{E}(X^2)$ 의 값은? [3점]

① 155 ② 153 ③ 151 ④ 149 ⑤ 147

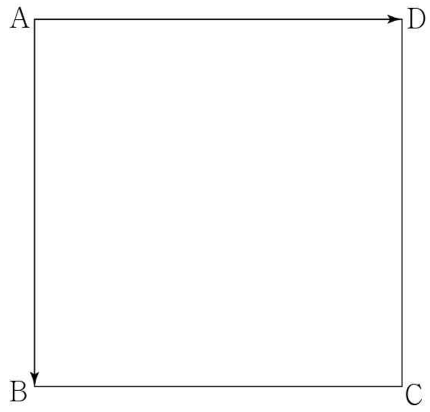
7. 곡선 $\ln x - \ln y = e^y - xe^x$ 위의 점 $(1, 1)$에서의 접선의 기울기는? [3점]

① $\frac{3e+1}{e}$ ② $\frac{2e+1}{e}$ ③ $\frac{3e+2}{e+1}$ ④ $\frac{3e+1}{e+1}$ ⑤ $\frac{2e+1}{e+1}$

8. 자연수 6을 자연수로 분할하는 방법의 수와 자연수 a를 짝수인 자연수로 분할하는 방법의 수가 같을 때, a의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12 ④ 14 ⑤ 16

9. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 ABCD에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$라 하고, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=2\vec{a}+\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\vec{a}+2\vec{b}$라 하자. 삼각형 APQ의 넓이는? [3점]



① 3 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

10. 함수 $f(x)=a\ln(1+bx^2)$에 대하여

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt\right)\right)=6$$

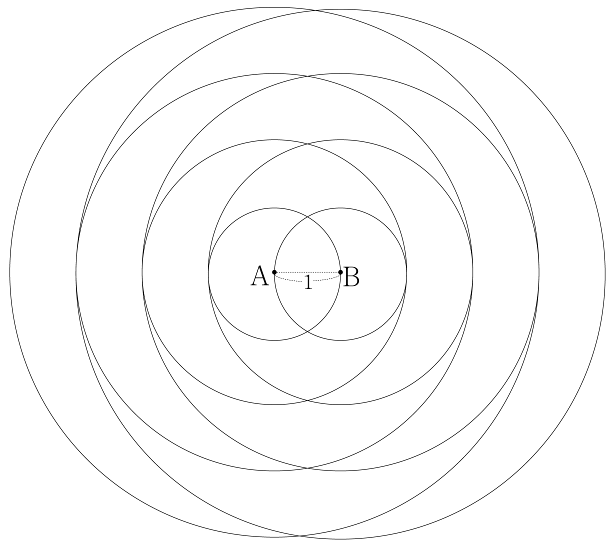
일 때, $f'(1)=3$이다. $a+b$의 값은? (단, a와 b는 양수이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

11. 함수 $f(x)=e^x\ln 2x$와 상수 k에 대하여 방정식 $f'(x)=k$의 실근의 개수가 1개일 때, k의 값은? [3점]

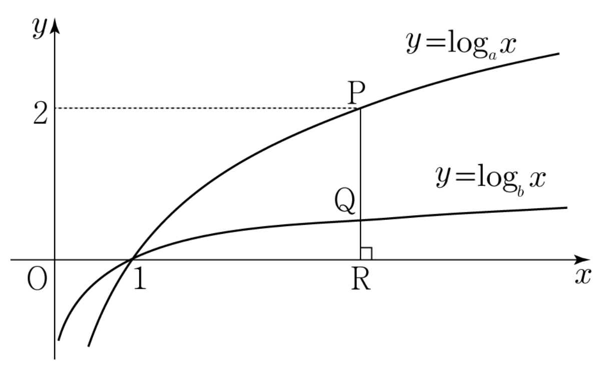
① 2 ② $\sqrt{e}$ ③ e ④ $2\sqrt{e}$ ⑤ $4\sqrt{e}$

12. 다음 그림과 같이 길이가 1인 선분 AB에 대하여 중심이 점 A이고 반지름이 1, 2, 3, 4인 원 A_1, A_2, A_3, A_4가 있고, 중심이 점 B이고 반지름이 1, 2, 3, 4인 원 B_1, B_2, B_3, B_4가 있다. 원 A_1, A_2, A_3, A_4중 하나를 선택하고, 원 B_1, B_2, B_3, B_4중 하나를 선택할 때, 한 원이 다른 원에 내접하거나 내부에 포함되는 경우의 수는? [3점]



① 10 ② 11 ③ 12 ④ 13 ⑤ 14

13. 그림과 같이 두 곡선 $y=\log_a x$, $y=\log_b x$이 있다. 곡선 $y=\log_a x$위의 점 P를 지나고 x축에 수직인 직선이 곡선 $y=\log_b x$와 만나는 점을 Q, x축과 만나는 점을 R라 하자. $\overline{\mathrm{PQ}}=3\overline{\mathrm{QR}}$이고, 점 P의 y좌표가 2다. $ab=32$일 때, 점 P에서의 접선의 기울기와 점 Q에서의 접선의 기울기의 차는? [3점]



① $\frac{1}{16\ln 2}$ ② $\frac{1}{8\ln 2}$ ③ $\frac{3}{16\ln 2}$ ④ $\frac{1}{4\ln 2}$ ⑤ $\frac{5}{16\ln 2}$

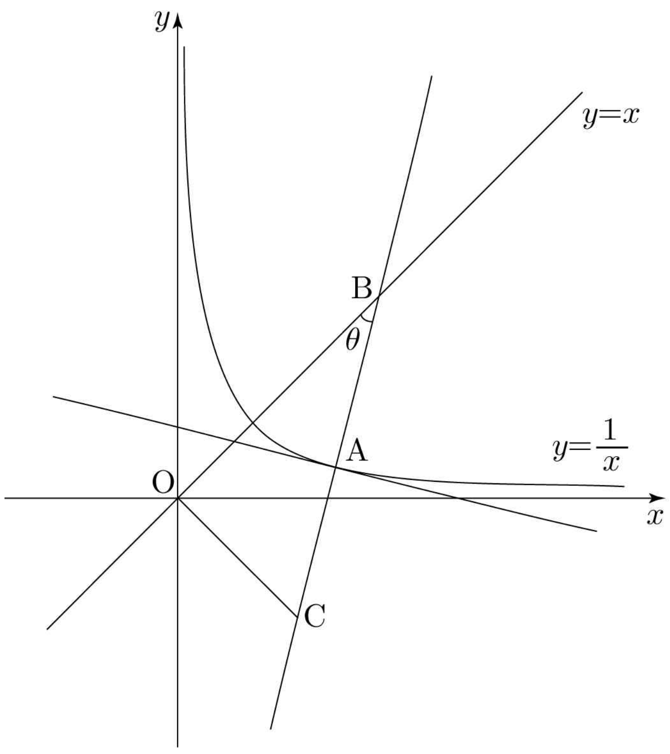
14. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x<0$일 때, $f(x)=e^x$이고, $x\geq 0$일 때, $f(x)$는 이차함수의 일부분이다.
> (나) 함수 $f(x)$의 극값을 갖게하는 x값을 α라 할 때, $f(\alpha)=2$다.

$|f(x)|=2$를 만족시키는 모든 x값들의 합은? [4점]

① 8 ② 9 ③ 10 ④ 11 ⑤ 12

15. 그림과 같이 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 점 A에서의 접선을 l이라 하자. 점 A를 지나고 l과 수직인 직선을 m이라 할 때 직선 $y=x$와 m이 만나는 점을 B라 하자. $\angle \mathrm{OBA}=\theta$일 때 $\tan\theta=\frac{3}{5}$이고, 선분 OC는 직선 $y=x$와 수직이다. 삼각형 OBC의 넓이는? (단, 점 A의 x좌표는 1이 아니다.) [4점]



① $\frac{11}{4}$ ② 3 ③ $\frac{13}{4}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{15}{4}$

16. 다음은

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 {}_n\mathrm{C}_k = n(n+1)2^{n-2}$$

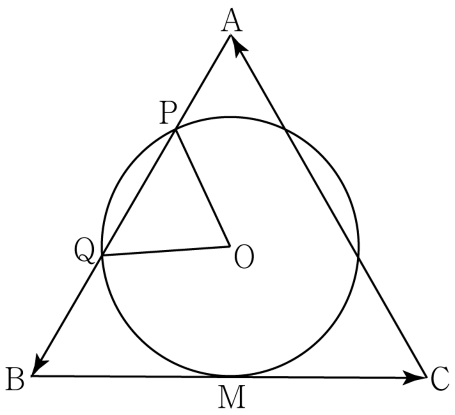
임을 증명하는 과정이다.

> $(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n} x^k {}_nC_k$ 이다.
>
> 양변을 x에 관하여 미분하면,
>
> $n(x+1)^{n-1}=\sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k x^{k-1}$ ⋯ ①
>
> 이고, 양변을 x에 관하여 미분하면,
>
> $n(n-1)(x+1)^{n-2}=\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\,{}_nC_k x^{k-2}$ ⋯ ②
>
> 이다. ① 에 $x=1$을 대입하면
>
> $\boxed{(가)}=\sum_{k=1}^{n} k\,{}_nC_k$ ⋯ ③
>
> 이고, ②에 $x=1$을 대입하면
>
> $\boxed{(나)}=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\,{}_nC_k=\boxed{(다)}-\boxed{(가)}$
>
> 이므로
>
> $\sum_{k=0}^{n} k^2 {}_n\mathrm{C}_k=n(n+1)2^{n-2}$
>
> 이 성립한다.

(가), (나), (다)에 알맞은 식을 차례로 $f(n), g(n), h(n)$이라 할 때, $\frac{g(12)}{f(6)\times h(7)}$의 값은? [4점]

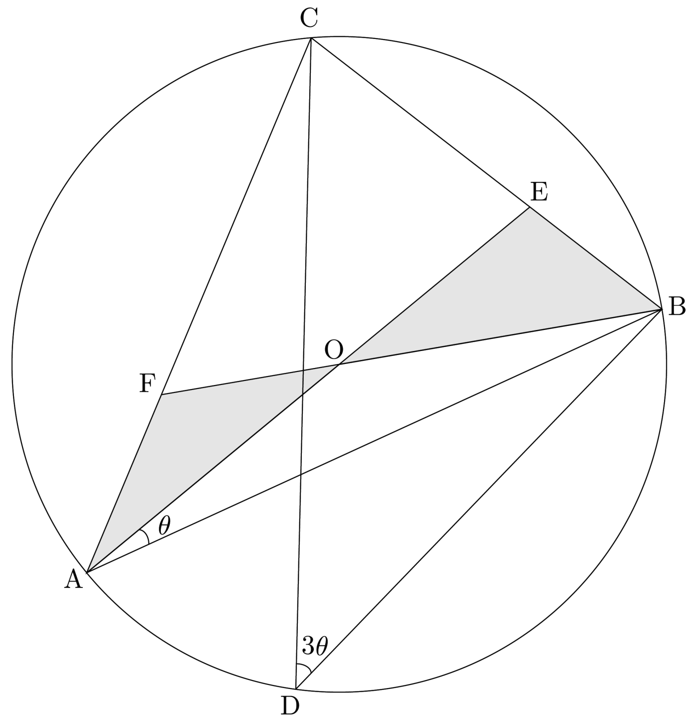
① $\frac{11}{28}$ ② $\frac{3}{7}$ ③ $\frac{13}{28}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{15}{28}$

17. 그림과 같이 정삼각형 ABC가 있고, 선분 BC에 접하는 중심이 O인 원이 있다. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CA}=\vec{c}$라 할 때, $(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{c})=-18$이다. 선분 BC와 원의 접점을 M이라 할 때, $\overline{BM}=\overline{CM}$이고, 삼각형 OBC의 넓이가 6이다. 원과 선분 AB가 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, $|\overrightarrow{PQ}|^2$의 값은? [4점]



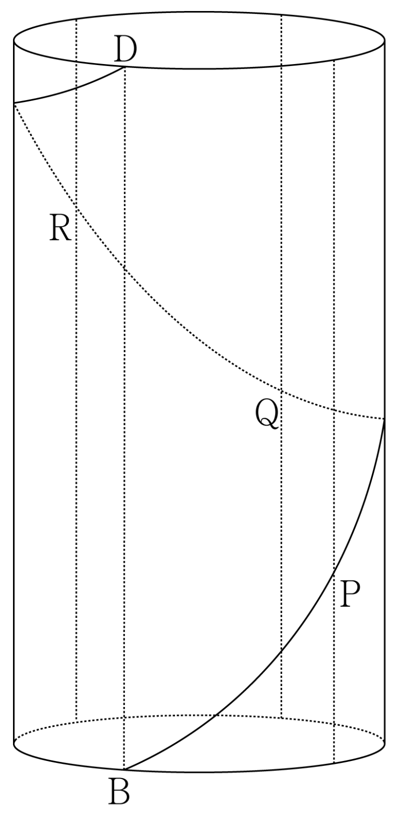
① $12\sqrt{3}-15$　② $14\sqrt{3}-15$　③ $12\sqrt{3}-17$　④ $14\sqrt{3}-17$　⑤ $12\sqrt{3}-13$

18. 그림과 같이 삼각형 ABC에 외접하는 원이 있고, 원 위의 임의의 점 D와 선분 BC로 이루어진 삼각형 DBC가 있다. 원의 중심을 O라고 할 때 삼각형 OBE의 넓이를 $S(\theta)$, 삼각형 OAF의 넓이를 $T(\theta)$라 하자. $\lim_{\theta \to 0+} \frac{S(\theta)}{T(\theta)}$의 값은? [4점]



① $\frac{1}{4}$　② $\frac{1}{2}$　③ 1　④ 2　⑤ 4

19. 선분 AB의 길이가 8이고, 선분 AD의 길이가 4π인 직사각형 ABCD가 있다. 선분 BD를 4등분할 때 생기는 세 점을 점 B와 가까운 것부터 차례로 P, Q, R라 하자. 원기둥 높이가 8이 되도록 직사각형 ABCD를 접어서 그림과 같은 원기둥을 만들었을 때, 삼각형 BQR와 삼각형 BQD가 이루는 이면각을 θ라 하자. $\cos\theta$의 값은? [4점]



① $\frac{2}{\sqrt{5}}$ ② $\frac{2}{\sqrt{6}}$ ③ $\frac{2}{\sqrt{7}}$ ④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ⑤ $\frac{2}{3}$

20. $x=0$을 제외한 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $g(x)$에 대하여

$$x^2(g(x)+g'(x)-2)=(x^2+4)(x-1)$$

이고, 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$에 대하여

$$x\ln f(x)-\int_0^x \ln f(t)dt=\int_0^x tg(t)dt$$

일 때 $\frac{\{f(2)\}^2}{f'(2)}+\frac{f'(2)}{g(2)}$의 값은? (단, $f(1)=\sqrt{e}$, $g(1)=5$이다.)

[4점]

① $5e^2$ ② $10e^2$ ③ $15e^2$ ④ $20e^2$ ⑤ $25e^2$

21. 함수 $f(x)=px^2+2x+\dfrac{2}{p}\ln(x^2)$와 함수 $g(x)$에 대하여

$$\int_0^x g(x-y)dy=\int_0^1 f(x+qy)dy$$

이고, 함수

$$h(x)=g(x+m)-g(m)$$

이다. $g'(x)=0$을 만족시키는 x값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$이라고 할 때, 함수 $g(x)$와 $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $h(x)+h(-x)=0$
(나) $m=-\dfrac{1}{2}$일 때, $g'(1)=0$

$m=-\dfrac{1}{2}$일 때, $q-p\sum_{k=1}^{n}\alpha_k$의 값은? (단, p와 q는 양수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

단답형

22. ${}_2\Pi_3$의 값을 구하시오. [3점]

23. 부등식 $2^{(\log_2 x)^2+2}<4^{3(\log_2 x-1)}$을 만족시키는 x값의 범위가 $a<x<b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

24. $xyz=1000$을 만족시키는 정수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하시오. [3점]

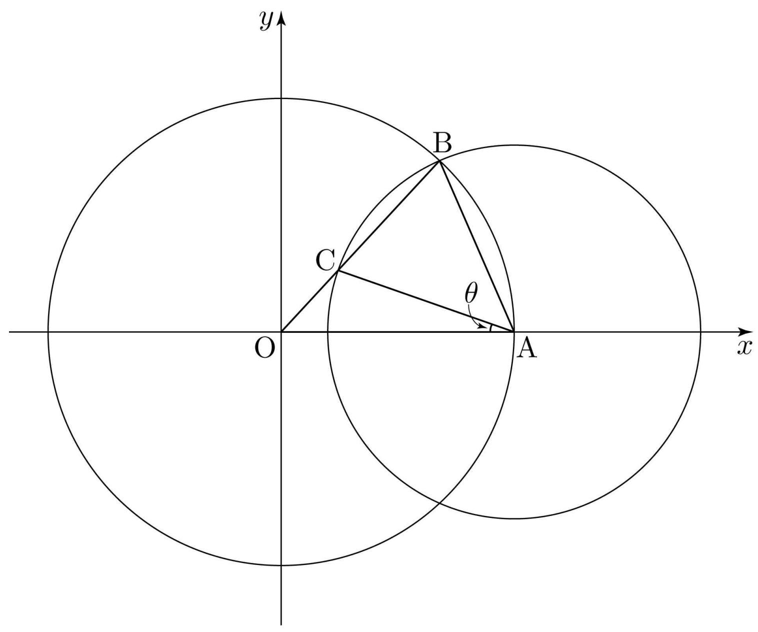
25. 평균이 m이고, 표준편차가 σ인 정규분포를 따르는 확률변수 X가 있다. 닫힌구간 $[1, 4]$에서 정의된 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(t)$에 대하여 함수

$$G(t)=\mathrm{P}(X \le f(t))$$

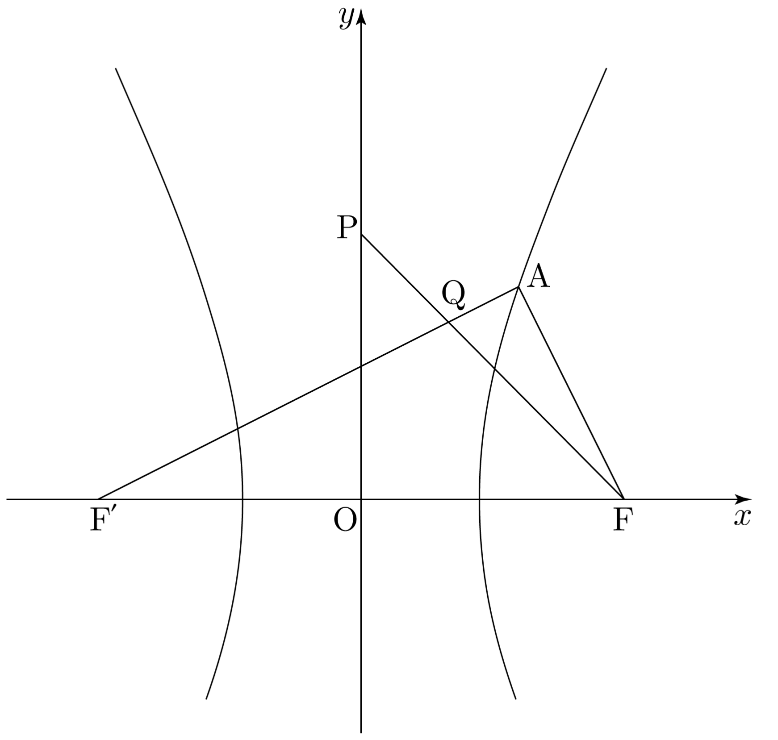
이고, $t=2$일 때, $G(t)$는 최솟값 $\frac{1}{2}$를 가지고, $t=4$일 때, $G(t)$는 최댓값 0.9772를 가진다. $\sigma-G(1)$의 값을 오른쪽 표준정규분포표를 이용하여 구하면 $\frac{q}{p}$가 된다. $q-p$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [3점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.5	0.1915
1.0	0.3413
1.5	0.4332
2.0	0.4772

26. 그림과 같이 좌표평면 위에 중심이 O이고 반지름의 길이가 10인 원 C_1과 이 원이 x축과 만나는 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 8인 원 C_2가 있다. 두 원 C_1과 C_2가 만나는 두 점 중 제1사분면에 있는 점을 B라 할 때 선분 OB가 원 C_2가 만나는 점을 C라 하자. $\angle \mathrm{CAO}=\theta$일 때 $\cos\theta=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. [4점]



27. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c, 0)$, $\mathrm{F}'(-c, 0)$인 쌍곡선 $C_1 : \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$과 점 $\mathrm{P}(0, c)$가 있다. 원 $x^2 + y^2 = c^2$과 C_1의 교점 중 제1사분면에 있는 점을 A, 제2사분면에 있는 점을 B, 제3사분면에 있는 점을 C, 제4사분면에 있는 점을 D라고 하고, 선분 AF′과 선분 PF의 교점을 Q라고 하자. 삼각형 AQF의 둘레의 길이가 $\dfrac{8\sqrt{5}+10\sqrt{2}}{3}$이고, $\overline{\mathrm{PQ}} : \overline{\mathrm{QF}} = 1 : 2$이라고 할 때, 사각형 ABCD의 넓이를 구하시오. (단, c는 자연수이다.) [4점]



28. 그림과 같이 1이 적힌 카드가 1장, 2가 적힌 카드가 2장, 3이 적힌 카드가 3장, 4가 적힌 카드가 4장씩 총 10장의 카드가 있다. 이때, 세 학생 A, B, C가 다음과 같은 규칙으로 카드놀이를 한다.

(가) A, B, C가 각각 1장의 카드를 동시에 선택한다.
  (단, 카드에 적혀있는 숫자의 합이 9이다.)
(나) A, B, C 또는 A, C, B의 순서대로 앉는다.
(다) 서로 카드에 적혀있는 숫자를 비교한다.

학생 A가 옆사람과 카드를 비교할 때, A의 카드에 적힌 숫자가 B의 카드에 적힌 숫자보다 더 클 확률을 $\dfrac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

1	2	2	3	3	3	4	4	4	4

29. 좌표공간에 구 $S : (x+3)^2+y^2+z^2=4$와 평면 $\alpha : 2x-2y+z+9=0$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. 구 S 위를 움직이는 점 P와 원점 O에 대하여 직선 OP는 구 S와 접한다. 점 P에서 평면 α에 내린 수선의 발 H에 대하여 선분 PH의 길이가 최대일 때의 점 H를 X, 선분 PH의 길이가 최소일 때의 점 H를 Y라 하자. 원 C 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $|\overrightarrow{XQ}+\overrightarrow{YQ}|$의 최댓값은 $a\sqrt{3}+b\sqrt{5}$이다. $9(a-b)$의 값을 구하시오. (단, a와 b는 유리수이다.) [4점]

30. 최고차항의 계수가 3인 사차함수 $f(x)$와 자연수 p에 대하여 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수

$$g(x)=\begin{cases} f(x-p) & (x>p) \\ f(f(x)) & (0 \le x \le p) \end{cases}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(x)=g(-x) \ge 0$
(나) $g(p)=0$
(다) 함수 $|g(x)-3|$의 미분가능하지 않은 점은 6개다.

$g'(x)=0$을 만족시키는 x값을 작은 수부터 크기순으로 나열한 것을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$이라 할 때 $\sum_{k=1}^{n} g(\alpha_k)=m$이다. $m+n-p-\alpha_2$의 값을 구하시오. (단, m은 정수이다.) [4점]