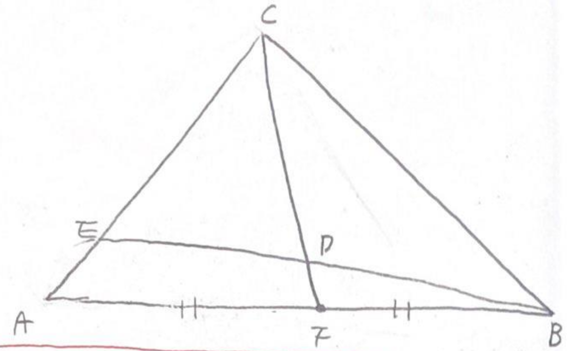
삐꾸 좌표축 (평면 위 기울어진 좌표축)

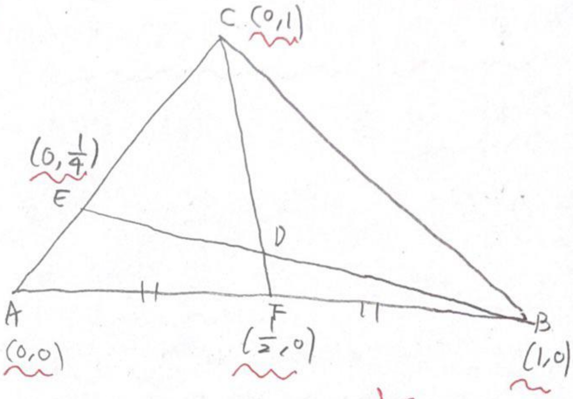


문제:

$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$ 라고 하고 E가 $\overline{AC}$를 1:3으로 내분할 때 $\overrightarrow{AD}$를 $m\vec{a}+n\vec{b}$로 표현해라.

빈 공간에 나름 잘 풀었는가? 어렵지 않았을 것이다. 뭐 정석적인 방법이나 그 유명한 메넬라우스나 시소 정리(나는 모른다.)로 잘 풀었으리라 믿는다 EBS 수능 평면 벡터 step 1으로 자주나오고 문제집에도 자주 나온다. 이제 삐꾸 좌표축에 대해 설명하겠다

나는 이렇게 풀었다



특이하게 좌표를 잡았다. 이 좌표는 $\overline{AB}$를 x축처럼, $\overline{AC}$를 y축처럼 생각해 잡은 좌표이다. 좌표의 의미는 예를 들어 (2,3)이면 $2\vec{a}+3\vec{b}$로 표현할 수 있다. 따라서 $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(0,1)$, $E(0,\frac{1}{4})$, $F(\frac{1}{2},0)$ 처럼 표현이 가능하다. D는 $\overline{EB}$와 $\overline{CF}$의 교점이다. 따라서 이렇게 식을 세울수 있다.

$\overline{EB}$: $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$

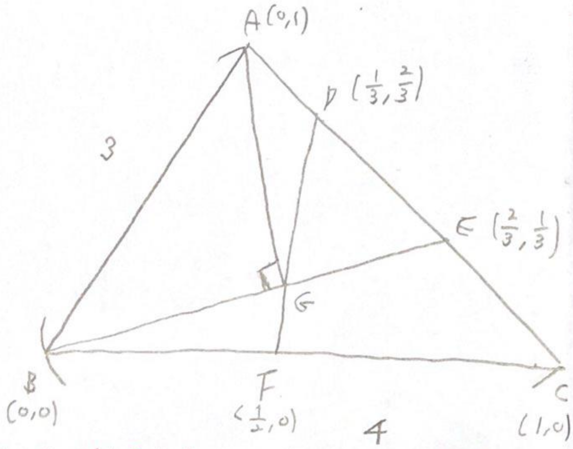
$\overline{CF}$: $y=-2x+1$

D는 $\overline{EB}$, $\overline{CF}$의 교점이므로 $(\frac{3}{7},\frac{1}{7})$이다.

따라서 $\vec{AD} = \frac{3}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b}$ 로 표현이 가능하다. 자신이 구한 답과 같은가? 신기한가? 이상한가? 증명은 대학교 선형대수학을 약간 쓰면 된다. 우리는 수험생이므로 이와 같은 방법을 의심없이 잘 쓰도록 하자. 이를 쓰면 삼각형, 평행사변형, 정육면체 등등 메넬라우스나 시소정리 쓰기 애매할 때 잘 써먹히는 보편적 풀이이다. 어따 써먹을까? 나오긴 할까? 의심이 되겠지만 옛날 기출에 나온 적도 있고 당장 19년도 사관학교 1차 시험에 27번으로 나왔다!!!

4페이지에 있는 19년도 사관학교 1차 시험 27번을 혼자 풀어보도록 하자. //

19년도 사관 1차시험 27번 삐꾸좌표축 이용 풀이



나중에 도형 문제에 꼭 표시할 점, 선, 보조선, 각 등에 대해 칼럼을 쓸 예정이지만 일단 수직은 우선 표시해야 한다. (19년도 6평 16번 참고)

△ABC가 전혀 특별한 삼각형이 아니다 우리는 제2코사인 법칙을 공식적으로 모르는 상황이므로 이등변 삼각형이나 직각삼각형 등 특별한 삼각형이 나와야 대처가 가능하다 따라서 이문제는 평면벡터로 풀라는 거다. 선분, 벡터 전환은 29번에 접근하기 위한 기본적인 태도이고 이 문제에서 아예 굳이 $\vec{AG}\cdot\vec{BE}=0$ 이라는 표현을 쓴 거 보면 평면 벡터로 풀라는거다.

따라서 $\vec{BC}$를 $\vec{a}$로 $\vec{BA}$를 $\vec{b}$로 두고 삐꾸 좌표축을 도입해 좌표를 표시하면 $A(0,1)$, $B(0,0)$, $C(1,0)$, $D(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, $E(\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, $F(\frac{1}{2}, 0)$ 으로 표시 가능하다. G는 $\overline{BE}$ 위에 있으므로 $G(\frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t)$ 로 표현가능하다 $(0<t<1)$ 따라서 $G = \frac{2}{3}t\vec{a} + \frac{t}{3}\vec{b}$ 이다

$\vec{AG}\cdot\vec{BE}=0$ 조건을 이용해 보자

$$\left(\frac{2}{3}t, \frac{1}{3}t-1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = 0 \Rightarrow$$ 틀린 풀이

$$4t + t - 3 = 0 \qquad t = \frac{3}{5}$$

삐꾸 좌표축을 처음 사용하면 위와 같은 실수를 하기 쉽다. 조심하자!!!

아 미안하다!!! 사실 G의 삐꾸 좌표를 G가 $\overline{BE}$, $\overline{DF}$의 교점임을 이용해 구할 수 있었다

$\overline{BE}$: $y = \frac{x}{2}$

$\overline{DF}$: $y = -4x + 2$

$G(\frac{4}{9}, \frac{2}{9})$ 이다.

이제 $\vec{AG} \cdot \vec{BE} = 0$ 조건을 이용해보자.

$$\left(\frac{4}{9}\vec{a} - \frac{7}{9}\vec{b}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}\right) = 0$$

$|\vec{a}|^2 = 16 \quad |\vec{b}|^2 = 9 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = 12\cos\theta$
$(\theta = \angle ABC)$

$$8|\vec{a}|^2 - 10\vec{a} \cdot \vec{b} - 7|\vec{b}|^2 = 0$$

$$65 - 10\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{13}{2}$$

$$12\cos\theta = \frac{13}{2} \quad \cos\theta = \frac{13}{24}$$

$p = 24$, $q = 13$ $\quad 24 + 13 = 37$

$\boxed{\therefore 37}$ //

이와 같다. 여기에서 왜 굳이 $\vec{BC} = \vec{a}$로 $\vec{BA} = \vec{b}$로 왜 두는지 의문이 생길 수 있다 충분히 $\vec{CB} = \vec{a}$, $\vec{CB} = \vec{b}$ 이런 식으로도 배꾸 좌표축을 잡을 수 있었을 텐데 말이다.

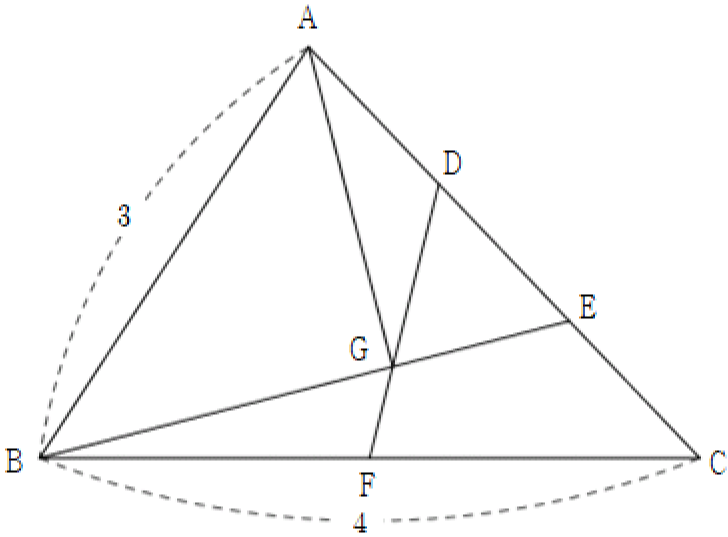
그에 대한 내 대답은 $\cos\angle ABC$를 알아야 하고 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 길이는 아는 반면 $\overline{CA}$ 길이는 모르기 때문이다. 이상이다. 좀더 체화하고 싶으면 가지고 있는 기출문제집에서 평면벡터 관련 문제로 연습하면 된다 2문제 정도 더 보면 완전 체화 가능하다

여기 까지다. 수고하셨습니다. //

19학년도 사관학교 1차 27번

그림과 같이 $\overline{AB}=3$, $\overline{BC}=4$인 삼각형 ABC에서 선분 AC를 $1:2$로 내분하는 점을 D, 선분 AC를 $2:1$로 내분하는 점을 E라 하자. 선분 BC의 중점을 F라 하고, 두 선분 BE, DF의 교점을 G라 하자. $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE}=0$일 때, $\cos(\angle ABC)=\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

0.



1.