

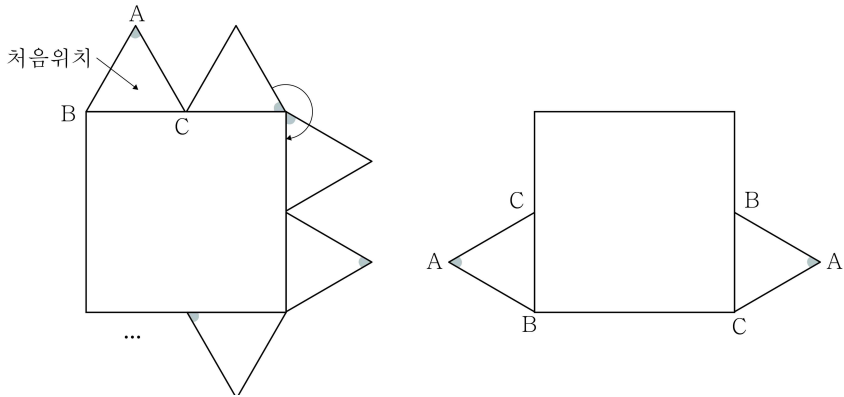
고지우의 난문현답

제 1 회

1. 2007년 6월 평가원
2. 2008년 10월 교육청
3. 2017년 9월 평가원
4. 2011년 9월 평가원
5. 2007년 7월 교육
6. 2014년 경찰대
7. 2015년 9월 교육청
8. 2015년 7월 교육청
9. 2009년 6월 평가원
10. 2009년 경찰대

1. 한 변의 길이가 2인 정사각형과 한 변의 길이가 1인 정삼각형 ABC가 있다. [그림 1]과 같이 정사각형 둘레를 따라 시계 방향으로 정삼각형 ABC를 회전시킨다. 정삼각형 ABC가 처음 위치에서 출발한 후 정사각형 둘레를 n 바퀴 도는 동안, 변 BC가 정사각형의 변 위에 놓이는 횟수를 a_n 이라 하자.

예를 들어 $n=1$ 일 때, [그림 2]와 같이 변 BC가 2회 놓이므로 $a_1=2$ 이다. 이때 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{3n-2}}{n}$ 의 값은?



- ① 8 ② 10 ③ 12
 ④ 14 ⑤ 16

2. 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$ 에 대하여 [보기]에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?
 (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

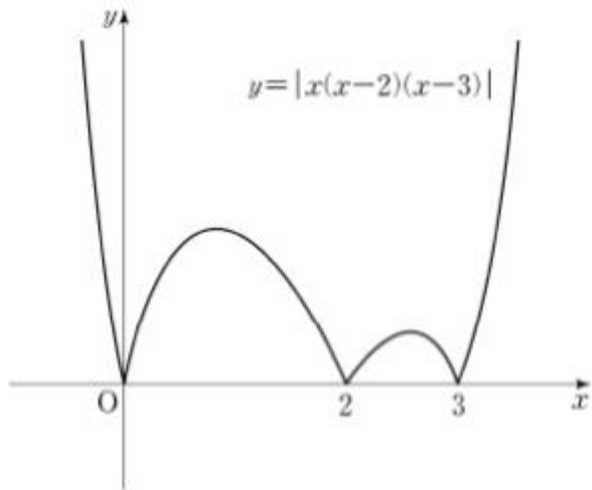
- ㄱ. $f(x)=x^2$ 이면 $\lim_{h \rightarrow 0} |f(2+h)-f(2-h)|=0$ 이다.
 ㄴ. $f(x)=[x]$ 이면 $\lim_{h \rightarrow 0} |f(2+h)-f(2-h)|=1$ 이다.
 ㄷ. $\lim_{h \rightarrow 0} |f(2+h)-f(2-h)|=0$ 이면 $f(x)$ 는 $x=2$ 에서 연속이다.

- ① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

3. 다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$ 에 대하여 $f(1)$ 의 최댓값은?

(가) 방정식 $f(x)=0$ 의 실근은 0, 2, 3뿐이다.
 (나) 실수 x 에 대하여 $f(x)$ 와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$ 라 할 때, 함수 $g(x)$ 는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

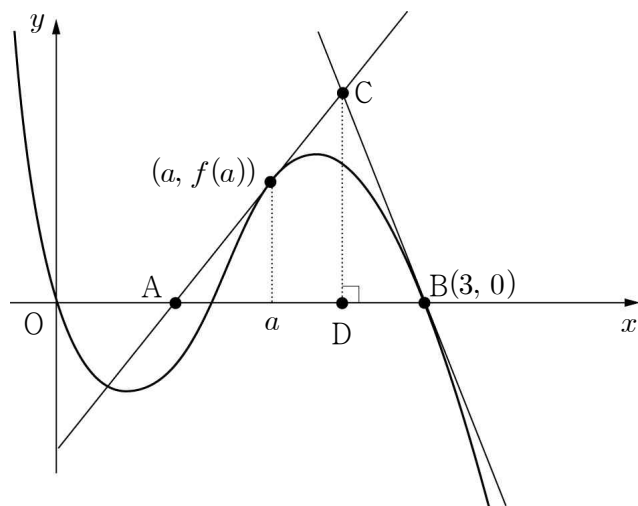
- ① $\frac{7}{6}$ ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{3}{2}$
 ④ $\frac{5}{3}$ ⑤ $\frac{11}{6}$



4. 함수 $f(x)=-3x^4+4(a-1)x^3+6ax^2$ ($a > 0$)과 실수 t 에 대하여 $x \leq t$ 에서 $f(x)$ 의 최댓값을 $g(t)$ 라 하자. 함수 $g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 미분가능 하도록 하는 a 의 최댓값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3
 ④ 4 ⑤ 5

5. 그림과 같이 삼차함수 $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ 의 그래프 위의 점 $(a, f(a))$ 에서 기울기가 양의 값인 접선을 그어 x 축과 만나는 점을 A, 점 $B(3, 0)$ 에서 접선을 그어 두 접선이 만나는 점을 C, 점 C에서 x 축에 수선을 그어 만나는 점을 D라 하고 $\overline{AD} : \overline{DB} = 3 : 1$ 일 때, a 의 값들의 곱은?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1
- ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

6. 학생 110명이 국어, 영어, 수학 시험을 보는데, 국어를 합격한 사람은 92명, 영어를 합격한 사람은 75명, 수학을 합격한 사람은 63명이고, 국어와 영어를 모두 합격한 사람은 65명, 국어와 수학을 모두 합격한 사람은 54명, 영어와 수학을 모두 합격한 사람은 48명이다. 세 과목 모두 합격한 학생 수의 최솟값은?

- ① 36 ② 37 ③ 38
- ④ 39 ⑤ 40

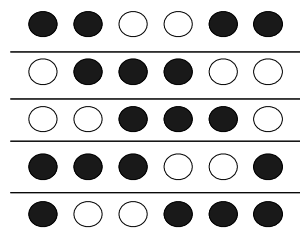
7. 두 실수 x, y 에 대하여
 $xy > 0, x + y = 3$
 일 때, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 의 최솟값은?

- ① 1 ② $\frac{4}{3}$ ③ $\frac{5}{3}$
 ④ 2 ⑤ $\frac{7}{3}$

8. 검은 바둑돌 ● 과 흰 바둑돌 ○을 일렬로 나열하였을 때
 이웃한 두 개의 바둑돌의 색이 나타낼 수 있는 유형은 다음과
 같이 4가지이다.

	●●	●○	○●	○○
	< A형 >	< B형 >	< C형 >	< D형 >

예를 들어, 6개의 바둑돌을 <A형> 2번, <B형> 1번, <C형> 1번,
 <D형> 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수는
 아래와 같이 5이다.



10개의 바둑돌을 <A형> 4번, <B형> 2번, <C형> 2번, <D형>
 1번 나타나도록 일렬로 나열하는 모든 경우의 수를 구하시오.
 (단, 검은 바둑돌과 흰 바둑돌은 각각 10개 이상씩 있다.)

9. A, B 두 사람이 하루에 한 번씩 탁구 경기를 하기로 하였다. 첫 경기부터 A가 이긴 횟수가 B가 이긴 횟수보다 항상 많거나 같도록 유지되면서 경기가 진행될 때, 처음 7일 동안 경기를 치른 결과, A가 네 번 이기고 B가 세 번 이기는 경우의 수를 구하시오.

10. 10보다 큰 자연수 n 에 대하여 집합 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ 의 두 부분집합 X 와 Y 를 택할 때, $n(X \cap Y) = 1$ 인 경우의 수는? (단, $n(A)$ 는 집합 A 의 원소의 개수)

① $\sum_{k=1}^n {}_n C_k 2^{n-k}$

② $\sum_{k=1}^n {}_n C_k 2^{n-k-1}$

③ $\sum_{k=1}^n n \cdot {}_n C_k 2^{n-k}$

④ $\sum_{k=1}^n k \cdot {}_n C_k 2^{n-k-1}$

⑤ $\sum_{k=1}^n k \cdot {}_n C_k 2^{n-k}$

추가 과제

1. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{2a_n}{a_n + 2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의될 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$ 의 값을 구하여라.

3. $0 < x < 4$ 일 때, 함수 $f(x) = [x^2 - 4x + 2]$ 가 불연속이 되는 모든 x 의 값의 합은?
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① 4 ② 8 ③ 12
④ 16 ⑤ 18

2. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 2^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의될 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} - 4}{a_n}$ 의 값은?

- ① 0 ② 1 ③ 2
④ 4 ⑤ 8

4. 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $f(x)$ 가 있다.

(가) $-1 \leq x \leq 1$ 일 때,	$f(x) = 3x^2 - 1$
(나) 모든 실수 x 에 대하여	$f(1-x) = f(1+x)$
(다) 모든 실수 x 에 대하여	$f(-x) = f(x)$

이때, $0 \leq x \leq 6$ 에서 함수 $y = [f(x)]$ 가 불연속이 되는 x 의 값의 개수를 구하여라.

(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

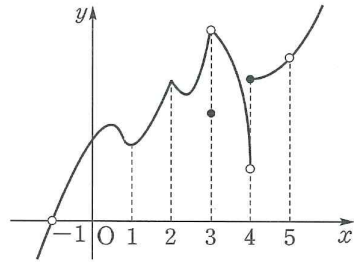
추가 과제

5. 다음 중 $x=0$ 에서 연속이지만 미분가능하지 않은 함수는?

- ① $f(x)=3$ ② $f(x)=|x|^3$
- ③ $f(x)=\frac{|x|}{x}$ ④ $f(x)=x+|x|$
- ⑤ $f(x)=\begin{cases} (x+1)^2 & (x \geq 0) \\ 2x+1 & (x < 0) \end{cases}$

7. 함수 $f(x)=[x] \cdot (x^2+ax+b)$ 가 $x=1$ 에서 미분가능할 때, 상수 a, b 에 대하여 a^2+b^2 의 값을 구하여라.
(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

6. 함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 구간 $(-1, 5)$ 에서 함수 $f(x)$ 에 대한 설명 중 옳지 않은 것은?



- ① 함수 $f(x)$ 가 불연속인 점은 2개다.
- ② 함수 $f(x)$ 가 미분가능하지 않은 점은 3개다.
- ③ $f'(x)=0$ 인 점은 2개다.
- ④ $f'(0)>0$ 이다.
- ⑤ $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 의 값이 존재한다.

8. 두 곡선 $y=x^3+ax$, $y=2(x^2+2)$ 가 한 점에서 접할 때, 상수 a 의 값은?

- ① -7 ② -5 ③ -3
- ④ 3 ⑤ 5

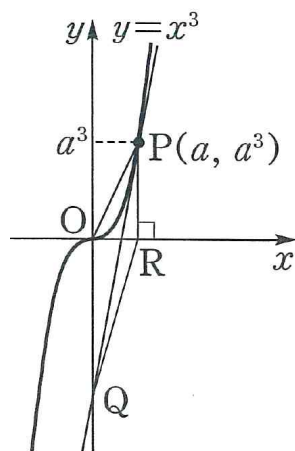
추가 과제

9. 두 곡선 $f(x)=x^3$, $g(x)=2ax^2-bx$ 가 점 $(1, 1)$ 에서 만나고, 이 점에서의 접선이 서로 수직일 때, 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값은?

- ① -3 ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{5}{3}$
 ④ -1 ⑤ $-\frac{1}{3}$

10. 곡선 $y=x^3$ 위의 점 $P(a, a^3)$ 에서의 접선과 y 축이 만나는 점을 Q , x 축에 내린 수선의 발을 R 라 할 때, 삼각형 OPQ 와 삼각형 PQR 의 넓이의 비는? (단, $a > 0$ 이고, O 는 원점이다.)

- ① $2 : 1$ ② $5 : 2$ ③ $3 : 1$
 ④ $3 : 2$ ⑤ $4 : 3$



11. 지우네 반 학생 35명 중에서 영어를 좋아하는 학생은 21명, 수학을 좋아하는 학생은 27명이다. 이때 영어와 수학을 모두 좋아하는 학생 수의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

12. 두 집합 X, Y 에 대하여 연산 Δ 를

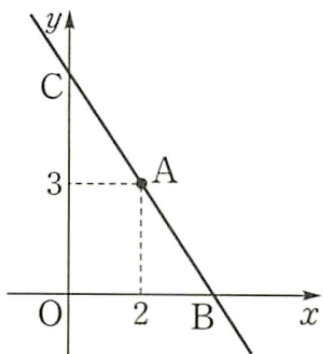
$$X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$$

로 약속할 때, 세 집합 A, B, C 가 $n(A \cup B \cup C) = 65$, $n(A \Delta B) = 36$, $n(B \Delta C) = 38$, $n(C \Delta A) = 32$ 를 만족시킨다. 이 때 $n(A \cap B \cap C)$ 를 구하여라.

추가 과제

13. 양수 x, y 에 대하여 $\left(x + \frac{2}{y}\right)\left(y + \frac{8}{x}\right)$ 은 $xy = a$ 일 때, 최솟값 b 를 갖는다. 이때 상수 a, b 에 대하여 $a+b$ 의 값을 구하여라.

14. 아래 그림과 같이 좌표평면 위의 점 $A(2, 3)$ 을 지나는 직선 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, 삼각형 OBC 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, $a > 0, b > 0$ 이다.)



15. 두 집합

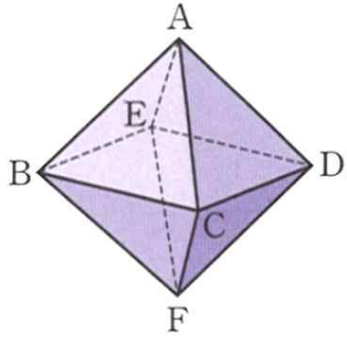
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ 에 대하여 $a \in A, b \in A$ 이고 $a < b$ 이면 $f(a) \leq f(b)$ 를 만족시키는 함수 $f: A \rightarrow B$ 중에서 $f(1)f(4) = 12$ 를 만족시키는 함수의 개수는?

- ① 60 ② 65 ③ 70
 ④ 75 ⑤ 80

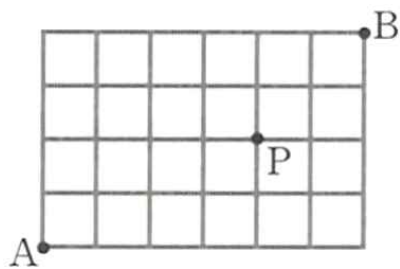
16. 다항식 $(a+b+c)^5$ 의 전개식에서 서로 다른 항의 개수를 구하여라.

추가 과제

17. 아래 그림과 같은 팔면체의 꼭짓점 A에서 출발하여 모서리를 따라 움직여 꼭짓점 F에 도착하는 방법의 수를 구하여라. (단, 한 번 지나간 꼭짓점은 다시 지나지 않는다.)



18. 아래 그림과 같은 도로망이 있다. A에서 출발하여 P를 거쳐 B까지 최단거리로 가는 방법의 수를 구하여라.



19. 원소가 6개인 집합을 4개 이상의 집합으로 분할하는 방법의 수를 구하여라.

20. 승객 6명이 타고 있는 버스가 세 정류장 A, B, C에 정차한다. 3개의 정류장 A, B, C 중에서 2개의 정류장에 모든 승객이 내리는 방법의 수를 구하여라. (단, 새로 타는 승객은 없다.)

추가 과제

21. 수열 $\{a_n\}$ 이 $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \frac{1}{2}$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n^2 a_n}$ 의 값을 구하여라.

23. 수열 $\{a_n\}$ 이 $a_n + a_{n+1} = n^2$ ($n=1, 2, 3, \dots$)을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+2} - a_n}{n+2}$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0
 ④ 1 ⑤ 2

22. 수열 $\{a_n\}$ 이 양의 무한대로 발산하고 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -2$ 일 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n + b_n}{a_n - 2b_n}$ 의 값을 구하여라.

24. 첫째항이 9인 수열 $\{a_n\}$ 이 모든 자연수 n 에 대하여 $a_n < a_{n+1}$, $\sum_{k=1}^n \sqrt{a_{k+1} - a_k} = 2\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)$ 을 만족시킬 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 의 값을 구하여라.

추가 과제

25. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x, y 에 대하여 $f(x+y) = f(x) + f(y) - 3xy$ 를 만족시키고 $f'(0) = -2$ 일 때, $f'(x)$ 를 구하면?

- ① $f'(x) = -2$ ② $f'(x) = -3x - 2$
 ③ $f'(x) = 2x - 2$ ④ $f'(x) = x^2 - 2$
 ⑤ $f'(x) = -x^2 - 2$

26. 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 임의의 실수 x, y 에 대하여

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - xy$$

를 만족시키고 $f'(1) = 3$ 일 때, $f(-2)$ 의 값은?

- ① -15 ② -10 ③ 8
 ④ 10 ⑤ 12

27. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여

$$f(x+3) = f(x), \int_1^4 f(x)dx = 2$$

를 만족시킬 때, 정적분 $\int_1^{13} f(x)dx$ 의 값을 구하면?

- ① 6 ② 8 ③ 10
 ④ 12 ⑤ 14

28. 연속함수 $f(x)$ 가 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) = f(x+4)$ 를

만족시킬 때, 다음 중 정적분 $\int_1^2 f(x)dx$ 와 그 값이 같은 것은?

- ① $\int_{2015}^{2016} f(x)dx$ ② $-\int_{2015}^{2016} f(x)dx$
 ③ $\int_{2016}^{2017} f(x)dx$ ④ $-\int_{2016}^{2017} f(x)dx$
 ⑤ $\int_{2017}^{2018} f(x)dx$

추가 과제

29. 함수 $f(x) = x + 2$ 에 대하여

$$\int_{-2}^2 \{f(x)\}^2 dx = k \left(\int_{-2}^2 f(x) dx \right)^2$$

일 때, 상수 k 의 값은?

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $\frac{5}{4}$
 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

30. 일차함수 $f(x)$ 에 대하여

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx = 3, \quad \int_{-1}^1 x^2f(x)dx = -2$$

가 성립할 때, $f(2)$ 의 값을 구하여라.

31. 다음 중 정의역이 $\{x \mid -2 \leq x < 1\}$ 인 함수 $y = x[x]$ 의 치역의 원소가 아닌 것은? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

- ① 0 ② 1 ③ 2
 ④ 3 ⑤ 4

32. 실수 전체의 집합의 부분집합 A 에 대하여 함수 f_A 를

$$f_A(x) = \begin{cases} 2 & (x \in A) \\ 1 & (x \notin A) \end{cases}$$

로 정의할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 데로 고른 것은?

[보 기]

- ㄱ. 집합 A 에 관계없이 함수 f_A 의 치역은 $\{1, 2\}$ 이다.
 ㄴ. $f_{A^c}(x) = 3 - f_A(x)$
 ㄷ. $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$

- ① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
 ④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

추가 과제

33. 수열 $\{a_n\}$ 이

$$a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

으로 정의되고 $a_3 = 10, a_{10} = 24$ 일 때, a_{15} 의 값은?

- ① 29 ② 30 ③ 32
④ 34 ⑤ 35

34. 등차수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $a_1 = 50, a_{10} = 23$ 일 때,
 $|a_1| + |a_2| + |a_3| + \dots + |a_{30}|$ 의 값은? ³⁴⁾

- ① 196 ② 234 ③ 478
④ 576 ⑤ 689

35. 7개의 문자 A, A, A, B, B, C, D를 일렬로 나열할 때, C와 D가 이웃하지 않도록 나열하는 방법의 수는?

- ① 60 ② 80 ③ 120
④ 200 ⑤ 300

36. 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow X$ 의 개수를 구하여라.

- | |
|---|
| (가) $f(3)$ 의 값은 홀수이다.
(나) $x < 3$ 이면 $f(x) > f(3)$ 이다.
(다) $x > 3$ 이면 $f(x) < f(3)$ 이다. |
|---|

추가 과제

37. $\left(x + \frac{1}{x^n}\right)^{10}$ 의 전개식에서 상수항이 존재하도록 하는 자연수 n 의 최댓값을 구하여라.

38. $(1+x) + (1+x)^2 + \dots + (1+x)^{10}$ 의 전개식에서 x 의 계수는?

- ① 11 ② 22 ③ 33
④ 44 ⑤ 55

39. 빨간 공 3개와 노란 공 4개가 들어 있는 주머니에서 임의로 한 개의 공을 꺼내어 색깔을 확인하고 다시 집어넣는 것을 1회 시행이라 하자. 빨간 공이 나오면 1점, 노란 공이 나오면 2점을 얻을 때, 5회의 시행에서 7점을 얻을 확률은?

- ① ${}_5C_1\left(\frac{3}{7}\right)\left(\frac{4}{7}\right)^4$ ② ${}_5C_2\left(\frac{3}{7}\right)^2\left(\frac{4}{7}\right)^3$ ③ ${}_5C_3\left(\frac{3}{7}\right)^3\left(\frac{4}{7}\right)^2$
④ ${}_5C_4\left(\frac{3}{7}\right)^4\left(\frac{4}{7}\right)$ ⑤ ${}_5C_5\left(\frac{4}{7}\right)^5$

40. 3부터 10까지의 자연수가 각각 하나씩 적힌 8개의 공이 들어있는 상자에서 임의로 한 개의 공을 꺼낼 때, 소수가 적힌 공이면 동전을 3번, 짝수가 적힌 공이면 동전을 4번 던진다. 이때 동전의 앞면이 3번 나올 확률을 구하여라.