01

[풀이1]
유리수인 지수의 정의와 거듭제곱근의 정의에 의하여
$3\times 27^{\frac{1}{3}} = 3\times \sqrt[3]{27} = 3\times 3 = 9$
답 ③

[풀이2]
지수법칙에 의하여
$3\times 27^{\frac{1}{3}} = 3\times (3^3)^{\frac{1}{3}} = 3\times 3 = 9$
답 ③

02

[풀이]
집합 A에 속하거나 집합 B에 속하는 원소는 1, 2, 4이므로
$A\cup B = \{1,\ 2,\ 4\}$
따라서 구하는 값은 $1+2+4=7$이다.
답 ④

03

[풀이]
수열의 극한에 대한 기본 성질에 의하여
$$\lim_{n\to\infty}\frac{8^{n+1}-4^n}{8^n+3} = \lim_{n\to\infty}\frac{8-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+3\times\left(\frac{1}{8}\right)^n} = \frac{8-0}{1+3\times 0} = 8$$
답 ②

04

[풀이]
함수 f에 의하여 X의 원소 1이 Y의 원소 2에 대응하므로
$f(1)=2$
함수 g에 의하여 Y의 원소 2가 Z의 원소 6에 대응하므로
$g(2)=6$
합성함수의 정의에 의하여
$\therefore\ g(f(1)) = g(2) = 6$
답 ③

05

[풀이]
두 사건 A와 B가 서로 독립이므로
두 사건이 서로 독립일 필요충분조건에 의하여
$\mathrm{P}(A\cap B) = \mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$
$$\therefore\ \mathrm{P}(B) = \frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{6}$$
답 ①

06

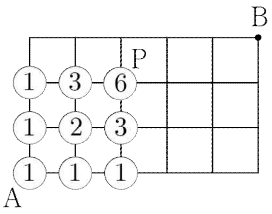
[풀이]
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
p가 q이기 위한 필요조건이므로
$q \Rightarrow p$ 즉, $Q\subset P$
조건 q에서 주어진 일차방정식의 해집합을 구하면
$Q=\{3\}$
$3\in P$이므로 조건 p에서 주어진 이차방정식에 $x=3$을 대입하면
$3^2+2\times 3-a=0$
풀면
$\therefore\ a=15$
답 ①

07

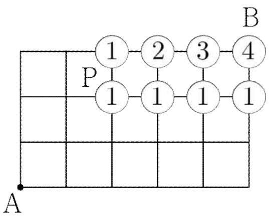
[풀이1]
오른쪽으로 한 칸 가는 것을 →, 위로 한 칸 가는 것을 ↑로 표현하자.
A지점에서 P지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 →, →, ↑, ↑을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다.
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$\frac{4!}{2!2!} = 6$
P지점에서 B지점까지 최단 거리로 가는 경우의 수는 →, →, →, ↑을 일렬로 나열하는 순열의 수와 같다.
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여
$\frac{4!}{3!} = 4$
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$6\times 4 = 24$
답 ⑤

[풀이2]

A지점에서 P지점까지 최단거리로 갈 때, A지점에서 각 교차로까지 최단거리로 가는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여



P지점에서 B지점까지 최단거리로 갈 때, P지점에서 각 교차로까지 최단거리로 가는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여



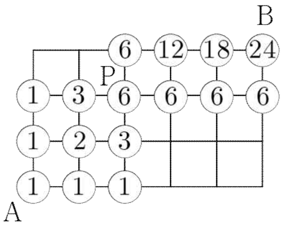
곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6\times4=24$

답 ⑤

[풀이3]

A지점에서 출발하여 P지점을 지나 B지점까지 최단거리로 갈 때, A지점에서 각 교차로까지 최단거리로 가는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여



구하는 경우의 수는 24이다.

답 ⑤

08

[풀이]

$8=5+1+1+1$

$=4+2+1+1$

$=3+3+1+1$

$=3+2+2+1$

$=2+2+2+2$

이므로

$\therefore\ P(8,\ 4)=5$

답 ②

09

[풀이]

$x\to0-$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to0-}f(x)=1$

$x\to1+$일 때, $f(x)$는 1보다 큰 값을 가지면서 1에 한없이 가까워지므로

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$

$\therefore\ \lim_{x\to0-}f(x)+\lim_{x\to1+}f(x)=1+1=2$

답 ⑤

10

[풀이]

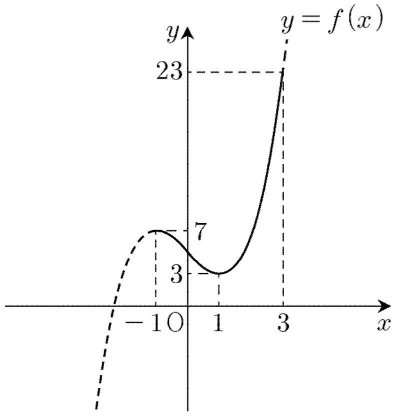
함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서 $x=-1$ 또는 $x=1$

x		-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	
$f'(x)$		0	$-$	0	$+$	$+$	
$f(x)$		7	↘	3	↗	23	

구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는



구간 $[-1,\ 3]$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 최솟값 3을 갖는다.

답 ③

11

[풀이]

$x=-1$에서의 함수 $f(x)$의 함숫값을 구하면

$f(-1)=(-1)^3+1=0$

구하는 값을 a로 두면

$g^{-1}(f(-1))=g^{-1}(0)=a$

역함수의 성질에 의하여
$g(a)=0$ 즉, $a-4=0$
풀면
$a=4$
$\therefore\ (g^{-1}\circ f)(-1)=4$
답 ④

12

[풀이]
주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라고 하면
'p: $a\ge\sqrt{3}$'이므로 '$\sim p$: $a<\sqrt{3}$'
'q: $a^2\ge 3$'이므로 '$\sim q$: $a^2<3$'
$p\to q$의 대우는 $\sim q\to\sim p$이므로
주어진 명제의 대우는 다음과 같다.
'$a^2<3$이면 $a<\sqrt{3}$이다.'
답 ②

13

[풀이]
문제에서 주어진 유리함수를
$$y=\frac{k}{x-p}+q(k\neq 0)$$
의 꼴로 나타내면
$$y=\frac{4x-5}{x-1}=\frac{4(x-1)-1}{x-1}=\frac{-1}{x-1}+4$$
(즉, $k=-1$, $p=1$, $q=4$)
문제에서 주어진 유리함수의 두 점근선은 각각
$x=1$, $y=4$
이 두 점근선의 교점의 좌표는 $(1,\ 4)$이므로
$a=1$, $b=4$
$\therefore\ a+b=5$
답 ⑤

14

[풀이]
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $f(x)$는 $x=3$에서 연속이어야 한다.
함수의 연속에 대한 정의에 의하여
$$\lim_{x\to 3}f(x)=f(3)$$
이므로
$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+a}{x-3}=b \qquad \cdots ㉠$$
함수의 극한에 대한 성질에 의하여
$$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+a)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+a}{x-3}\times\lim_{x\to 3}(x-3)$$
$$=b\times 0=0$$
이므로
$$\lim_{x\to 3}(x^2-5x+a)=a-6=0\text{에서 } a=6 \qquad \cdots ㉡$$
㉡을 ㉠에 대입하면
$$b=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-2)(x-3)}{x-3}$$
$$=\lim_{x\to 3}(x-2)=1$$
$\therefore\ a+b=7$
답 ④

[참고]
함수 $f(x)$의 방정식은
$f(x)=x-2$
$f(x)$는 다항함수(일차함수)이므로 실수 전체의 집합에서 연속이다.

15

[풀이]
문제에서 주어진 이차방정식의 좌변을 인수분해하면
$(x-2)(x-12)=0$
풀면
$x=2$ 또는 $x=12$
등차수열 $\{a_n\}$의 공차가 양수이므로 $a_3<a_8$이다.
$a_3=2$, $a_8=12$
등차수열의 합의 공식에 의하여
$$\therefore\ \sum_{n=3}^{8}a_n=a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8$$
$$=\frac{a_3+a_8}{2}\times 6=42$$
답 ②

[참고1]
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여
$a_3+a_8=-\dfrac{-14}{1}=14$이다.

[참고2]
시그마의 값을 다음과 같이 구해도 좋다.
등차수열 $\{a_n\}$에 대하여
$a_3+a_8=a_4+a_7=a_5+a_6=14$(대칭성)

이므로

$$\sum_{n=3}^{8} a_n = 14 \times 3 = 42$$

[참고3]
일반항 a_n을 유도하여, 시그마 값을 구해도 좋다.
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(>0)$로 두면
$a_3 = a_1 + 2d = 2$, $a_8 = a_1 + 7d = 12$
a_1, d에 대한 연립방정식을 풀면
$a_1 = -2$, $d = 2$
일반항 a_n은
$a_n = 2n - 4$ (단, $n \geq 1$)
시그마의 성질과 자연수의 거듭제곱의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \sum_{n=3}^{8} a_n = \sum_{n=3}^{8}(2n-4) = 2\sum_{n=3}^{8} n - \sum_{n=3}^{8} 4$$

$$= 2\sum_{n=1}^{8} n - 2\sum_{n=1}^{2} n - \sum_{n=3}^{8} 4$$

$$= 2 \times \frac{8 \times 9}{2} - 2 \times (1+2) - 4 \times 6$$

$$= 42$$

16

[풀이1]
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이다.
함수의 연속에 대한 정의에 의하여

$$\lim_{x \to -2+} f(x) = f(-2)$$

이므로

$$\lim_{x \to -2+} 2x = -4 = 4 - 2a + b \text{ 즉, } b = 2a - 8 \quad \cdots ㉠$$

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2a - 8 & (x \leq -2) \\ 2x & (x > -2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하다.

$$\lim_{x \to -2-} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2-} \frac{(x^2 + ax + 2a - 8) - (-4)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2-} \frac{(x+2)(x-2+a)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2-} (x - 2 + a) = a - 4$$

$$\lim_{x \to -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2+} \frac{2x - (-4)}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to -2+} \frac{2(x+2)}{x+2} = 2$$

$x=-2$에서 함수 $f(x)$의 미분계수가 존재해야하므로

$$\lim_{x \to -2-} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2+} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2}$$

즉, $a - 4 = 2$ 풀면 $a = 6$ $\cdots ㉡$
㉡을 ㉠에 대입하면 $b = 4$
$\therefore$ $a + b = 6 + 4 = 10$
답 ⑤

[참고1]
함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 4 & (x \leq -2) \\ 2x & (x > -2) \end{cases}$$

[풀이2]
두 함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$가 다음과 같다고 하자.
$g_1(x) = x^2 + ax + b$, $g_2(x) = 2x$
함수 $f(x)$는

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x) & (x \leq -2) \\ g_2(x) & (x > -2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로
함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 연속이다.
$g_1(-2) = g_2(-2)$ 즉, $2a - b = 8$ $\cdots ㉠$
두 함수 $g_1(x)$, $g_2(x)$의 도함수는
$g_1{}'(x) = 2x + a$, $g_2{}'(x) = 2$
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로
함수 $f(x)$는 $x=-2$에서 미분가능하다.
$g_1{}'(-2) = g_2{}'(-2)$ 즉, $a - 4 = 2$ $\cdots ㉡$
㉠, ㉡을 연립하면
$a = 6$, $b = 4$
$\therefore$ $a + b = 6 + 4 = 10$
답 ⑤

[참고2]

함수의 연속에 대한 조건 :

$\lim_{x \to -2+} f(x) = f(-2)$([풀이1])

$\Leftrightarrow$

$g_1(-2) = g_2(-2)$([풀이2])

함수의 미분가능성에 대한 조건 :

$\lim_{x \to -2-} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x \to -2+} \dfrac{f(x)-f(-2)}{x+2}$

([풀이1])

$\Leftrightarrow$

$g_1{}'(-2) = g_2{}'(-2)$([풀이2])

17

[풀이]

시각 t에서의 점 P의 속도를 v라고 하면

$v(t) = \dfrac{dx}{dt} = 3t^2 - 12 = 3(t+2)(t-2)$

점 P의 운동 방향이 바뀔 때, $v=0$이다.

$v(t)=0$이면 $t=2(\because t>0)$

$t=2$일 때, 점 P의 운동 방향이 바뀌므로

$t=2$일 때, 점 P는 원점에 위치한다.

$x(2) = k - 16 = 0$

풀면

$\therefore \ k = 16$

답 ④

18

[풀이]

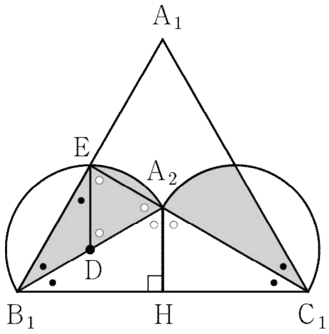
내심의 정의에 의하여 점 A_2는 삼각형 $A_1B_1C_1$의 내심이다.

정삼각형의 내심은 무게중심과 일치하므로

점 A_2는 정삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심이다.

(정삼각형의 외심, 내심, 무게중심은 모두 일치한다.)

점 A_2에서 선분 B_1C_1에 내린 수선의 발을 H, 선분 B_1A_2를 지름으로 하는 반원의 중심을 D, 이 반원이 선분 A_1B_1과 만나는 두 점 중에서 B_1이 아닌 점을 E라고 하자.



(단, ●는 30°, ○는 60°이다.)

이등변삼각형 $A_2B_1C_1$에 대하여 $\overline{A_2B_1} = \overline{A_2C_1}$이므로, 그림 R_1에서 새롭게 그려진 두 반원은 서로 합동이다.

그리고 이등변삼각형의 성질에 의하여 직선 A_2H는 밑면 B_1C_1을 수직이등분한다. 즉, 점 H는 선분 B_1C_1의 중점이다.

직각삼각형 A_2B_1H에서 삼각비의 정의에 의하여

$\cos(\angle A_2B_1H) = \dfrac{\overline{B_1H}}{\overline{A_2B_1}}$

즉, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{\overline{A_2B_1}}$이므로 $\overline{A_2B_1} = 2$

선분 B_1A_2는 반원의 지름이므로

$\angle A_2EB_1 = 90°$

삼각형 B_1A_2E의 세 내각의 합은 180°이므로

$\angle B_1A_2E = 180° - (\angle A_2EB_1 + \angle EB_1A_2)$

$= 180° - (90° + 30°) = 60°$

원의 정의에 의하여 $\overline{DA_2} = \overline{DE}$이므로

이등변삼각형 DA_2E에서

$\angle A_2ED = 60° = \angle DA_2E (= \angle B_1A_2E)$

삼각형 A_2ED의 세 내각의 합은 180°이므로

$\angle EDA_2 = 180° - (\angle DA_2E + \angle A_2ED)$

$= 180° - (60° + 60°) = 60°$

삼각형 A_2ED의 세 내각이 모두 같으므로

삼각형 A_2ED는 정삼각형이다.

이제 수열 $\{a_n\}$을 다음과 같이 정의하자.

a_n=(그림 R_n에서 새롭게 그려진  모양의 도형의 넓이)

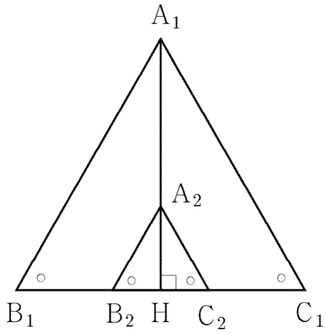
삼각형의 넓이와 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$\dfrac{a_1}{2}$=(부채꼴 DA_2E의 넓이)+(삼각형 EB_1D의 넓이)

$= \pi \times \overline{DA_2}^2 \times \dfrac{60}{360} + \dfrac{1}{2} \times \overline{DB_1} \times \overline{DE}$

$\times \sin(180° - 120°)$

$=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$



두 직선 A_1B_1, A_2B_2가 서로 평행하므로

$\angle A_2B_2H=60^\circ=\angle A_1B_1H$(동위각)

두 직선 A_1C_1, A_2C_2가 서로 평행하므로

$\angle A_2C_2H=60^\circ=\angle A_1C_1H$(동위각)

삼각형 $A_2B_2C_2$의 세 내각의 합은 180°이므로

$\angle C_2A_2B_2=180^\circ-(\angle A_2B_2H+\angle A_2C_2H)$

$=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$

삼각형 $A_2B_2C_2$의 세 내각이 모두 같으므로

삼각형 $A_2B_2C_2$는 정삼각형이다.

점 A_2는 삼각형 $A_1B_1C_1$의 무게중심이므로

$\overline{A_1A_2}:\overline{A_2H}=2:1$

서로 닮음인 두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$의 닮음비는

$\overline{A_1H}:\overline{A_2H}=3:1$(두 삼각형의 높이의 비)

두 삼각형 $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$의 넓이의 비는 $9:1$이다.

$a_2=\frac{1}{9}a_1$

같은 방법으로 2 이상의 자연수 n에 대하여

$a_{n+1}=\frac{1}{9}a_n$

수열 $\{a_n\}$의 귀납적 정의는

$a_1=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{9}a_n(n\geq 1)$

$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로, 등비급수의 합의 공식에 의하여

$$\therefore \lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{6\pi+9\sqrt{3}}{16}$$

답 ①

[참고1]

다음과 같은 방법으로 a_1의 값을 구해도 좋다.

삼각형의 넓이와 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$\frac{a_1}{2}=$(반원의 넓이)$-$(호 B_1E와 현 B_1E로 둘러싸인 두 활꼴 중에서 작은 활꼴의 넓이)

$$=\pi\times\overline{DA_2}^2\times\frac{180}{360}-\left\{\pi\times\overline{DE}^2\times\frac{120}{360}-\frac{1}{2}\times\overline{DB_1}\times\overline{DE}\times\sin(180^\circ-120^\circ)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

이므로

$a_1=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

[참고2]

다음과 같은 방법으로 a_1의 값을 구해도 좋다.

삼각형의 넓이와 부채꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$\frac{a_1}{2}=$(삼각형 B_1A_2E의 넓이)$+$(호 A_2E와 현 A_2E로 둘러싸인 두 활꼴 중에서 작은 활꼴의 넓이)

$$=\frac{1}{2}\times\overline{B_1E}\times\overline{EA_2}+\pi\times\overline{DA_2}^2\times\frac{60}{360}-\frac{1}{2}\times\overline{DA_2}\times\overline{DE}\times\sin60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

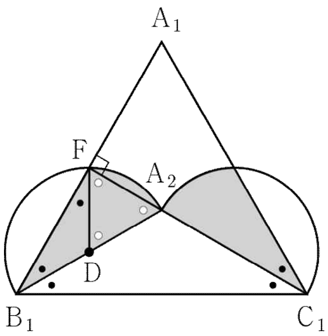
이므로

$a_1=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

[참고3]

아래 그림에서 삼각형 A_2FD가 정삼각형임을 다음과 같은 방법으로 보여도 좋다.

선분 B_1A_2를 지름으로 하는 원의 중심을 D, $\angle A_1C_1B_1$의 이등분선과 선분 A_1B_1이 만나는 점을 F라고 하자. 이등변삼각형의 성질에 의하여 직선 C_1F는 밑변 A_1B_1을 수직이등분한다. 이때, 무게중심의 정의에 의하여 점 A_2는 선분 C_1F 위에 있다.



$\angle A_2FB_1 = 90^\circ$ 이므로

점 F는 선분 B_1A_2를 지름으로 하는 반원의 호 위에 있다.

원의 정의에서 $\overline{B_1D} = \overline{DF}$ 이므로

이등변삼각형 B_1DF에서

$\angle DFB_1 = 30^\circ (= \angle DB_1F)$

삼각형 B_1DF의 꼭짓점 D에서의 외각은

$\angle FDA_2 = \angle DFB_1 + \angle DB_1F = 60^\circ$

원의 정의에서 $\overline{DF} = \overline{DA_2}$ 이므로

이등변삼각형 DA_2F의 성질에 의하여

$\angle DA_2F = \angle DFA_2 = 60^\circ$

삼각형 A_2FD의 세 내각이 모두 같으므로

삼각형 A_2FD는 정삼각형이다.

19

[풀이]

$(x+a^2)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$a^2n (= {}_nC_1(a^2) = {}_nC_{n-1}(a^2))$이다.

$(x^2-2a)(x+a)^n = x^2(x+a)^n - 2a(x+a)^n$에서

$x^2(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $\boxed{{}_nC_3} \times a^3$이고,

$(\because (x+a)^n$에서 x^{n-3}의 계수는 ${}_nC_3a^3 (= {}_nC_{n-3}a^3))$

$2a(x+a)^n$을 전개하면 x^{n-1}의 계수는 $2a^2n$이다.

$(\because (x+a)^n$에서 x^{n-1}의 계수는 ${}_nC_1a (= {}_nC_{n-1}a))$

따라서 $(x^2-2a)(x+a)^n$의 전개식에서 x^{n-1}의 계수는

$\boxed{{}_nC_3} \times a^3 - 2a^2n$

이다. 그러므로

$a^2n = \boxed{{}_nC_3} \times a^3 - 2a^2n$

이다. 이 식을 정리하면

$a^2n = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \times a^3 - 2a^2n$

양변을 양수 a^2n으로 나누면

$1 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{6} \times a - 2$ 즉, $3 = \dfrac{(n-1)(n-2)}{6} \times a$

양변을 $\dfrac{(n-1)(n-2)}{6}$으로 나누어

a를 n에 관한 식으로 나타내면

$a = \dfrac{18}{\boxed{(n-1)(n-2)}}$

이다.

$n=4$일 때, $a = \dfrac{18}{3\times2} = 3$(자연수○)

$n=5$일 때, $a = \dfrac{18}{4\times3} = \dfrac{3}{2}$(자연수×)

$n=6$일 때, $a = \dfrac{18}{5\times4} = \dfrac{9}{10} < 1$(자연수×)

$n=7$일 때, $a = \dfrac{18}{6\times5} = \dfrac{3}{5} < 1$(자연수×)

⋮

$n \geq 6$일 때, $(n-1)(n-2) \geq 20$이고, $a<1$이므로

a는 자연수가 아니다.

여기서 a는 자연수이고 n은 4 이상의 자연수이므로

$n = \boxed{4}$

이다.

(가): ${}_nC_3$, (나): $(n-1)(n-2)$, (다): 4

두 함수 $f(n)$, $g(n)$의 방정식은

$f(n) = {}_nC_3$, $g(n) = (n-1)(n-2)$

$\therefore\ f(4) + g(4) = {}_4C_3 + 3\times2 = 4+6 = 10$

답 ①

20

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

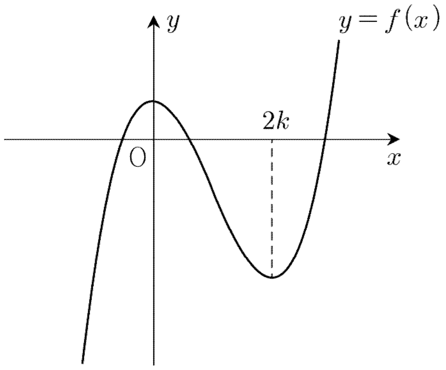
$f'(x) = x^2 - 2kx = x(x-2k)$

$f'(x) = 0$에서 $x=0$ 또는 $x=2k$

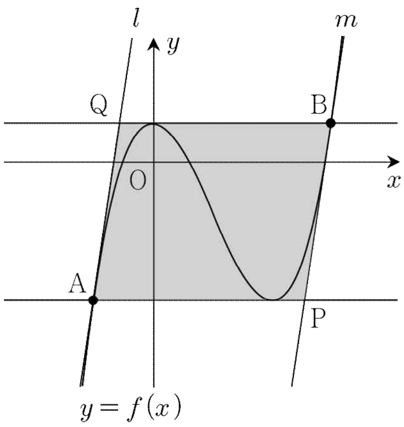
x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2k$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

극댓값: $f(0) = 1$, 극솟값: $f(2k) = 1 - \dfrac{4}{3}k^3$

함수 $f(x)$의 그래프는



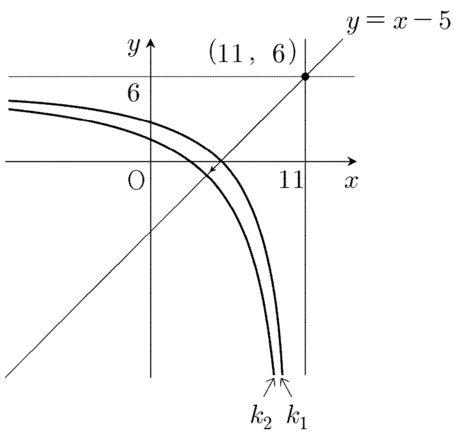
곡선 $y=f(x)$에 접하고 기울기가 $3k^2$인 접선의 방정식을 유도하자.
접점의 좌표를 $(t,\ f(t))$로 두면
$f'(t)=t^2-2kt=3k^2$ 즉, $t^2-2kt-3k^2=0$
좌변을 인수분해하면
$(t-3k)(t+k)=0$
풀면
$t=3k$ 또는 $t=-k$
두 접점 A, B의 좌표를 각각
$\mathrm{A}\left(-k,\ 1-\frac{4}{3}k^3\right)$, $\mathrm{B}(3k,\ 1)$
로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.
이때, 다음이 성립한다.
(점 A의 y좌표)=(함수 $f(x)$의 극소점의 y좌표)
(점 B의 y좌표)=(함수 $f(x)$의 극대점의 y좌표)



접선의 방정식을 구하면
l: $y=3k^2(x+k)+1-\frac{4}{3}k^3$
m: $y=3k^2(x-3k)+1$
곡선 $y=f(x)$의 극소점 $\left(2k,\ 1-\frac{4}{3}k^3\right)$에서의 접선이 직선 m과 만나는 점을 P, 곡선 $y=f(x)$의 극대점 $(0,\ 1)$에서의 접선이 직선 l과 만나는 점을 Q라고 하자.
직선 l의 방정식과 직선 $y=1$의 방정식을 연립하여
점 Q의 좌표를 구하면 $\mathrm{Q}\left(-\frac{5}{9}k,\ 1\right)$이므로
(평행사변형 APBQ의 밑변의 길이)
$=\overline{\mathrm{BQ}}=3k-\left(-\frac{5}{9}k\right)=\frac{32}{9}k$
(평행사변형 APBQ의 높이)
=|곡선 $y=f(x)$의 극대점과 극소점의 y좌표의 차|
$=\frac{4}{3}k^3$
사각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
(평행사변형 APBQ의 넓이)
$=\frac{32}{9}k\times\frac{4}{3}k^3=24$ 즉, $k^4=\frac{81}{16}=\left(\frac{3}{2}\right)^4$
$k>0$이므로
$\therefore\ k=\frac{3}{2}$
답 ③

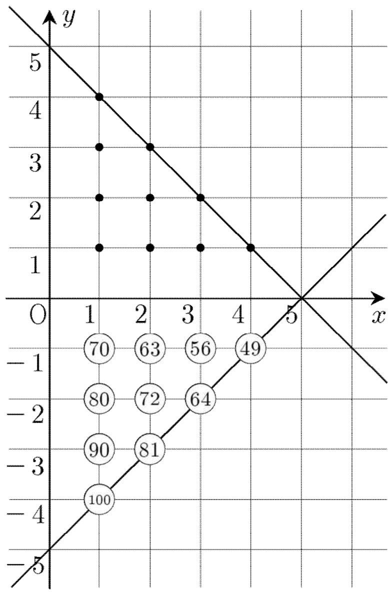
21

[풀이1]
k가 k_1의 값을 가질 때의 함수 $f(x)$의 그래프와 k가 k_2의 값을 가질 때의 함수 $f(x)$의 그래프를 한 평면 위에 그리면 아래와 같다. (단, $k_2>k_1\geq 36$)

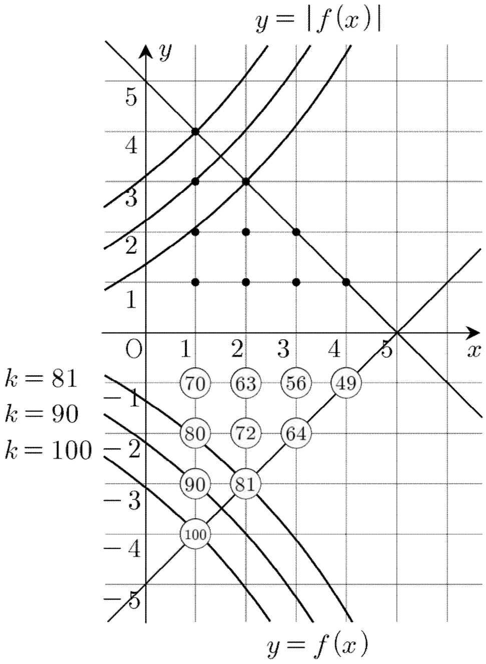


즉, $k(\geq 36)$의 값이 클수록 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(11,\ 6)$에서 멀어진다. 이때, 점 $(11,\ 6)$은 유리함수 $f(x)$의 두 점근선의 교점이다.
아래 그림처럼 연립부등식
$x>0,\ y>0,\ y\leq -x+5$ …(*)
가 나타내는 영역에 속하는 격자점의 개수는 10이다.
이 10개의 격자점을 x축에 대하여 대칭이동시킨 점 각각에 대하여
$k=(x-11)(y-6)$ (←문제에서 주어진 유리함수)
으로 두고, k의 값을 구하면 아래 그림과 같다.
(※ 격자점은 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 말한

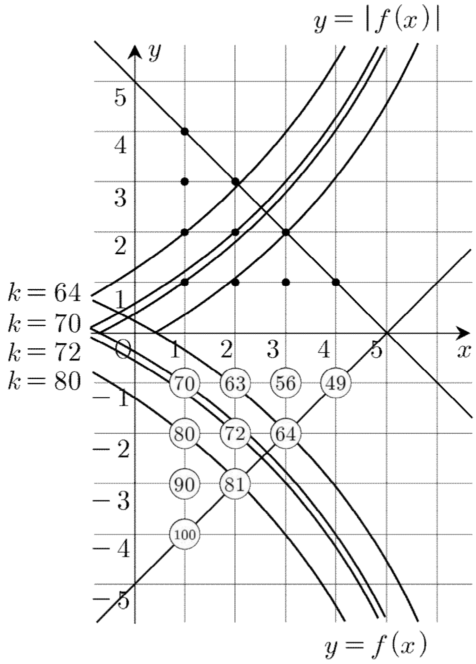
다.)



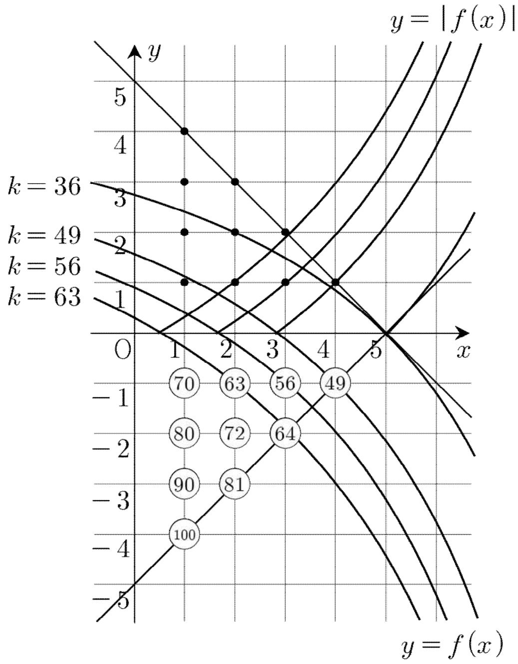
영역 $(*)$에 속하는 격자점 중에서
문제에서 주어진 연립부등식이 나타내는 영역에 속하는 점의 개수를 $g(k)$라고 하자.
k의 값을
$100 \to 90 \to 81 \to 80 \to 72 \to 70 \to 64 \to 63 \to 56 \to 49 \to 36$
로 변화시키면서, 두 함수
$f(x)$, $|f(x)|$
의 그래프를 그리고, $g(k)$의 값에 대하여 생각하자.



위의 그림에서
$k > 90$일 때, $g(k)$의 값은 0 또는 1이다.
$81 \le k \le 90$일 때, $g(k)$의 값은 2 또는 3이다.



위의 그림에서
$72 < k < 81$일 때, $g(k)$의 값은 3 또는 4이다.
$64 \le k \le 72$일 때, $g(k)$의 값은 5 또는 6 또는 7이다.



위의 그림에서
$k < 64$일 때, $g(k)$의 값은 5 이상이다.
따라서 $g(k)$의 값이 2 이상 4 이하가 되는 k의 범위는
$72 < k \le 90$
이 범위에 속하는 자연수 k의 개수는
$90 - 72 = 18$
답 ①

[참고]

$k=36$일 때, 문제에서 주어진 유리함수의 방정식은

$f(x)=\dfrac{36}{x-11}+6$

직선 $y=-x+5$와 함수 $f(x)$의 방정식을 연립하면

$-x+5=\dfrac{36}{x-11}+6$

양변에 $x-11(\neq 0)$을 곱하여 정리하면

$x^2-10x+25=0$

좌변을 인수분해하면

$(x-5)^2=0$ 풀면 $x=5$(중근)

따라서 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(5,\ 5)$에서

그은 접선은 $y=-x+5$이다.

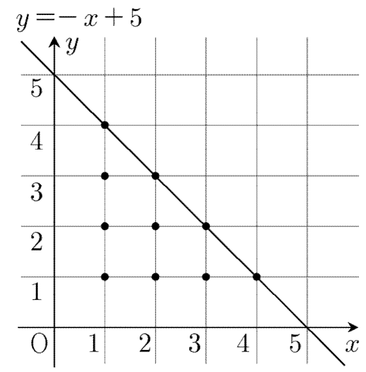
[풀이2]

아래 그림처럼 연립부등식

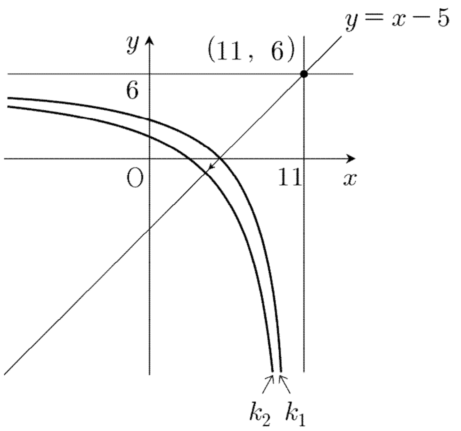
$x>0,\ y>0,\ y\leq -x+5$ $\cdots(*)$

가 나타내는 영역에 속하는 격자점의 개수는 10이다.

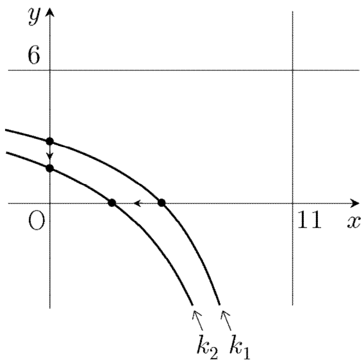
(※ 격자점은 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 말한다.)



k가 k_1의 값을 가질 때의 함수 $f(x)$의 그래프와 k가 k_2의 값을 가질 때의 함수 $f(x)$의 그래프를 한 평면 위에 그리면 아래와 같다. (단, $k_2>k_1\geq 36$)



즉, $k(\geq 36)$의 값이 클수록 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(11,\ 6)$에서 멀어진다. 이때, 점 $(11,\ 6)$은 유리함수 $f(x)$의 두 점근선의 교점이다.



함수 $f(x)$의 그래프의 x절편, y절편은 각각

$(x\text{절편})=11-\dfrac{k}{6}$, $(y\text{절편})=6-\dfrac{k}{11}$

위의 그림처럼 $k(\geq 36)$의 값이 클수록

함수 $f(x)$의 그래프와 x축의 교점은 왼쪽으로 움직이고,

함수 $f(x)$의 그래프와 y축의 교점의 아래쪽으로 움직인다.

이제 함수 $f(x)$의 그래프의 x절편에 따른 구분을 하자.

함수 $f(x)$의 그래프의 x절편이 속하는 구간을 각각

$(x\text{절편})\leq 0$ $(k\geq 66)$ $\cdots$(경우1)

$0<(x\text{절편})\leq 1$ $(60\leq k<66)$ $\cdots$(경우2)

$1<(x\text{절편})\leq 2$ $(54\leq k<60)$ $\cdots$(경우3)

$2<(x\text{절편})\leq 3$ $(48\leq k<54)$ $\cdots$(경우4)

$3<(x\text{절편})\leq 4$ $(42\leq k<48)$ $\cdots$(경우5)

$4<(x\text{절편})\leq 5$ $(36\leq k<42)$ $\cdots$(경우6)

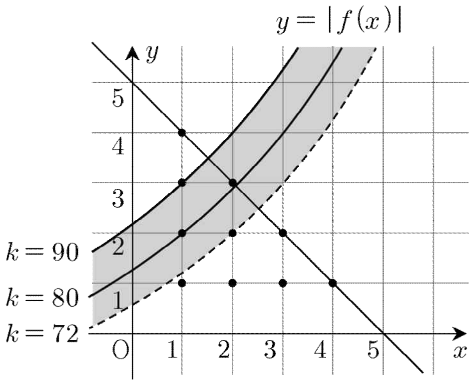
으로 구분하자.

영역 $(*)$에 속하는 격자점 중에서

문제에서 주어진 연립부등식이 나타내는 영역에

속하는 점의 개수를 $g(k)$라고 하자.

(경우1)



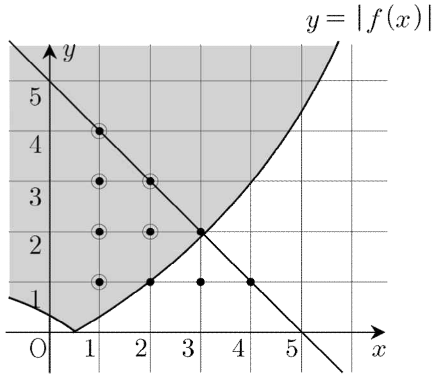
위의 그림의 어두운 영역에 함수 $|f(x)|$의 그래프가 속하면 $g(k)$가 가지는 값은 2 또는 3 또는 4이다.

함수 $|f(x)|$의 그래프가 지나는 점과

k의 값, $g(k)$의 값의 대응관계는 다음과 같다.

점 $(1,\ 5)$ $\leftrightarrow$ $k=110$ $\leftrightarrow$ $g(k)=1$

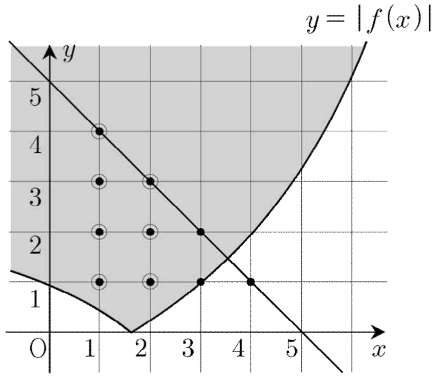
점 $(1,\ 3) \leftrightarrow k=90 \leftrightarrow g(k)=2$
점 $(2,\ 3) \leftrightarrow k=81 \leftrightarrow g(k)=3$
점 $(1,\ 2) \leftrightarrow k=80 \leftrightarrow g(k)=4$
점 $(2,\ 2) \leftrightarrow k=72 \leftrightarrow g(k)=5$
점 $(1,\ 1) \leftrightarrow k=70 \leftrightarrow g(k)=6$
다시 말하면 k의 값이 커질 때,
함수 $|f(x)|$의 그래프는 다음과 같은 순서대로
영역 $(*)$에 속하는 격자점과 만난다.
$(1,\ 5) \to (1,\ 3) \to (2,\ 3) \to (1,\ 2) \to (2,\ 2) \to (1,\ 1)$
$2 \le g(k) \le 4$인 k의 범위는 $72 < k \le 90$이다.
참고로 다음과 같은 필요충분조건이 성립한다.
$g(k)=2 \Leftrightarrow |f(1)| \le 3,\ |f(2)| > 3$
$g(k)=3 \Leftrightarrow 2 < |f(1)|,\ |f(2)| \le 3$
$g(k)=4 \Leftrightarrow 1 < |f(1)| \le 2,\ |f(2)| > 2$
(경우2)



$|f(1)| = \frac{k}{10} - 6,\ |f(2)| = \frac{k}{9} - 6$에서

$0 \le |f(1)| < \frac{3}{5} < 1,\ \frac{2}{3} \le |f(2)| < \frac{4}{3} < 2$

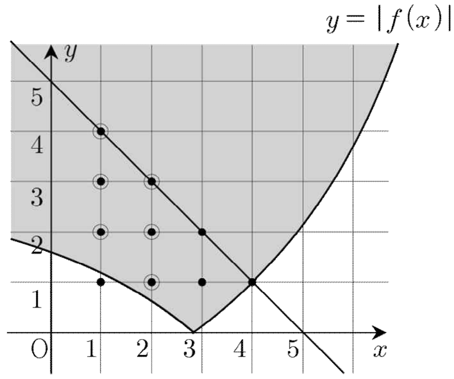
이므로 $g(k)$의 값은 4 보다 크다.
위의 그림에서 '점 ◉'은 문제에서 주어진 부등식의 영역에 항상 속한다.
(경우3)



$|f(1)| = 6 - \frac{k}{10},\ |f(2)| = \frac{k}{9} - 6$에서

$0 < |f(1)| \le \frac{3}{5} < 1,\ 0 \le |f(2)| < \frac{2}{3} < 1$

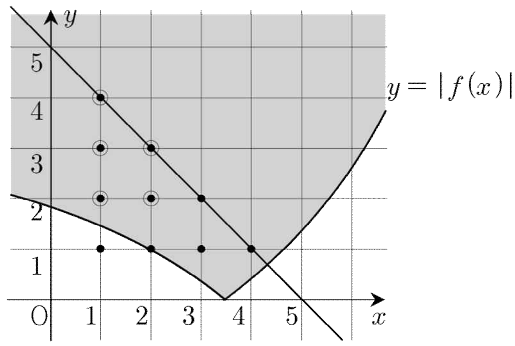
이므로 $g(k)$의 값은 4 보다 크다.
위의 그림에서 '점 ◉'은 문제에서 주어진 부등식의 영역에 항상 속한다.
(경우4)



$|f(1)| = 6 - \frac{k}{10},\ |f(2)| = 6 - \frac{k}{9}$에서

$\frac{3}{5} < |f(1)| \le \frac{6}{5} < 2,\ 0 < |f(2)| \le \frac{2}{3} < 1$

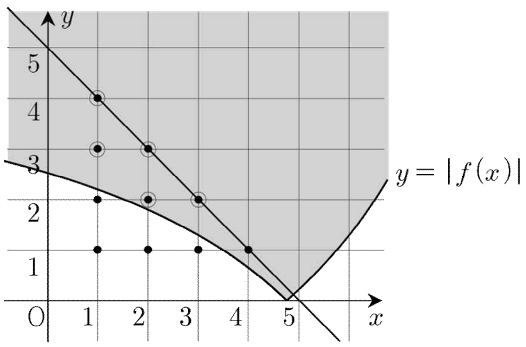
이므로 $g(k)$의 값은 4 보다 크다.
위의 그림에서 '점 ◉'은 문제에서 주어진 부등식의 영역에 항상 속한다.
(경우5)



$|f(1)| = 6 - \frac{k}{10},\ |f(2)| = 6 - \frac{k}{9}$에서

$1 < \frac{6}{5} < |f(1)| \le \frac{9}{5} < 2,\ \frac{2}{3} < |f(2)| \le \frac{4}{3} < 2$

이므로 $g(k)$의 값은 4 보다 크다.
위의 그림에서 '점 ◉'은 문제에서 주어진 부등식의 영역에 항상 속한다.
(경우6)



$|f(1)| = 6 - \frac{k}{10}$, $|f(2)| = 6 - \frac{k}{9}$, $|f(3)| = 6 - \frac{k}{8}$

$1 < \frac{9}{5} < |f(1)| \le \frac{12}{5} < 3$,

$1 < \frac{4}{3} < |f(2)| \le 2$,

$\frac{3}{4} < |f(2)| \le \frac{3}{2} < 2$

이므로 $g(k)$의 값은 4 보다 크다.

위의 그림에서 '점 ◉'은 문제에서 주어진 부등식의 영역에 항상 속한다.

이상에서 $g(k)$의 값이 2 이상 4 이하가 되는 k의 범위는

$72 < k \le 90$

이 범위에 속하는 자연수 k의 개수는

$90 - 72 = 18$

답 ①

[풀이3]

아래 그림처럼 연립부등식

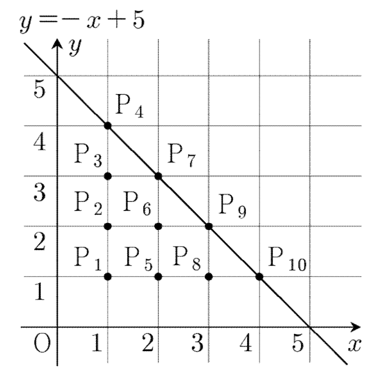
$x > 0$, $y > 0$, $y \le -x + 5$

가 나타내는 영역에 속하는 격자점의 개수는 10이다.

이 10개의 격자점을 각각 아래 그림과 같이

P_1, P_2, P_3, $\cdots$, P_{10}으로 두자.

(※ 격자점은 x좌표, y좌표가 모두 정수인 점을 말한다.)



문제에서 주어진 연립부등식에서

$$\left|\frac{k}{x-11} + 6\right| \le y \text{ (단, } k \ge 36\text{)} \qquad \cdots (*)$$

10개의 격자점을 (*)에 대입하여

k의 범위를 구하면 다음과 같다.

$P_1(1, 1)$: $\left|\frac{k}{-10} + 6\right| \le 1$에서 $50 \le k \le 70$

$P_2(1, 2)$: $\left|\frac{k}{-10} + 6\right| \le 2$에서 $40 \le k \le 80$

$P_3(1, 3)$: $\left|\frac{k}{-10} + 6\right| \le 3$에서 $36 \le k \le 90$

$P_4(1, 4)$: $\left|\frac{k}{-10} + 6\right| \le 4$에서 $36 \le k \le 100$

$P_5(2, 1)$: $\left|\frac{k}{-9} + 6\right| \le 1$에서 $45 \le k \le 63$

$P_6(2, 2)$: $\left|\frac{k}{-9} + 6\right| \le 2$에서 $36 \le k \le 72$

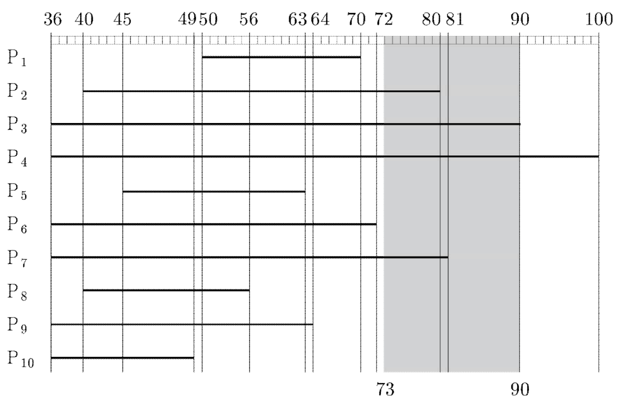
$P_7(2, 3)$: $\left|\frac{k}{-9} + 6\right| \le 3$에서 $36 \le k \le 81$

$P_8(3, 1)$: $\left|\frac{k}{-8} + 6\right| \le 1$에서 $40 \le k \le 56$

$P_9(3, 2)$: $\left|\frac{k}{-8} + 6\right| \le 2$에서 $36 \le k \le 64$

$P_{10}(4, 1)$: $\left|\frac{k}{-7} + 6\right| \le 1$에서 $36 \le k \le 49$

위의 자료를 표로 정리하자.



위의 표에서 k의 범위는 $72 < k \le 90$이다.

이 범위에 속하는 자연수 k의 개수는

$90 - 72 = 18$

답 ①

22

[풀이]

조합의 수에 의하여

$${}_6C_4 = {}_6C_2 = \frac{6 \times 5}{1 \times 2} = 15$$

($\because$ $0 \le r \le n$일 때, ${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$)

답 15

23

[풀이]

함수 $f(x)$의 도함수는

$f'(x)=25x^4+9x^2+1$

$\therefore\ f'(1)=35$

답 35

24

[풀이]

$B=\{1,\ 2,\ 3\}$, $C=U-(A\cup B)$로 두자.

문제에서 주어진 조건은

$A\cap B=\varnothing$

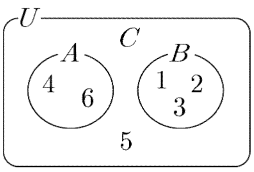
이므로

$1\notin A$, $2\notin A$, $3\notin A$

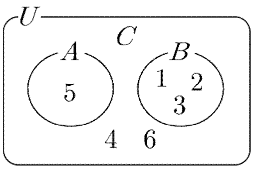
4, 5, 6은 각각 집합 A의 원소이거나, 집합 C의 원소이다.

이때, $A\cap C=\varnothing$ 이다.

예를 들어 $4\in A$, $5\in C(5\notin A)$, $6\in A$이면



예를 들어 $4\in C(4\notin A)$, $5\in A$, $6\in C(6\notin A)$이면



곱의 법칙에 의하여 모든 집합 A의 개수는

$2\times2\times2=8$이다.

답 8

25

[풀이]

로그의 성질과 정의에 의하여

$\log_3\frac{9}{2}+\log_3 6=\log_3\frac{9}{2}\times6=\log_3 27=3$

답 3

26

[풀이1]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(\neq0)$이라고 하자.

등비수열의 정의에 의하여

$a_3=a_2\times r$, $a_6=a_5\times r=a_4\times r^2$

이를 문제에서 주어진 등식에 대입하면

$r-r^2=\frac{1}{4}$ 정리하면 $r^2-r+\frac{1}{4}=0$

좌변을 인수분해하면

$\left(r-\frac{1}{2}\right)^2=0$ 풀면 $r=\frac{1}{2}$

일반항 a_n은

$a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n\geq1)$

$a_5=\frac{3}{16}$이므로 $p=16$, $q=3$

$\therefore\ p+q=19$

답 19

[풀이2]

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 $r(\neq0)$이라고 하자.

일반항 a_n은

$a_n=3\times r^{n-1}(n\geq1)$

이므로

$a_2=3r$, $a_3=3r^2$, $a_4=3r^3$, $a_6=3r^5$을

문제에서 주어진 등식에 대입하면

$r-r^2=\frac{1}{4}$ 정리하면 $r^2-r+\frac{1}{4}=0$

좌변을 인수분해하면

$\left(r-\frac{1}{2}\right)^2=0$ 풀면 $r=\frac{1}{2}$

일반항 a_n은

$a_n=3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(n\geq1)$

$a_5=\frac{3}{16}$이므로 $p=16$, $q=3$

$\therefore\ p+q=19$

답 19

27

[풀이1]

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시키면 함수

$y=\sqrt{a(x+4)+b}+c+3$

의 그래프와 일치한다. 이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시키면 함수

$y=\sqrt{a(-x+4)+b}+c+3$

의 그래프와 일치한다. 이 함수의 방정식을 정리하면
$y=\sqrt{-ax+4a+b}+c+3$
문제에서 주어진 조건에 의하여
이 함수의 그래프와 함수
$y=\sqrt{-2x+9}+6$
의 그래프가 일치하므로
$-a=-2,\ 4a+b=9,\ c+3=6$
연립방정식을 풀면
$a=2,\ b=1,\ c=3$
$\therefore\ a+b+c=6$
답 6

[풀이2]
함수 $y=\sqrt{-2x+9}+6$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시키면 함수
$y=\sqrt{2x+9}+6$
의 그래프와 일치한다. 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동시키면 함수
$y=\sqrt{2(x-4)+9}+6-3$
의 그래프와 일치한다. 이 함수의 방정식을 정리하면
$y=\sqrt{2x+1}+3$
문제에서 주어진 조건에 의하여 이 함수의 그래프는 함수
$y=\sqrt{ax+b}+c$
의 그래프와 일치하므로
$a=2,\ b=1,\ c=3$
$\therefore\ a+b+c=6$
답 6

28

[풀이1]
주머니에 흰 공과 검은 공만이 들어 있으므로
$n=3-m$(단, $m=0,\ 1,\ 2,\ 3$)
문제에서 주어진 조건에 의하여
$2m\ge n=3-m$ 풀면 $m\ge 1$
즉, 순서쌍 $(m,\ n)$은 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 0)$이다.
(1) 흰 공 1개, 검은 공 2개를 꺼낼 확률을 p_1이라고 하자.
수학적 확률의 정의에 의하여
$$p_1=\frac{{}_3C_1\times{}_4C_2}{{}_7C_3}=\frac{18}{35}$$
(2) 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 p_2라고 하자.
수학적 확률의 정의에 의하여
$$p_2=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$$
(3) 흰 공 3개, 검은 공 0개를 꺼낼 확률을 p_3이라고 하자.
수학적 확률의 정의에 의하여
$$p_3=\frac{{}_3C_3\times{}_4C_0}{{}_7C_3}=\frac{1}{35}$$
조건부 확률의 정의에 의하여
구하는 확률은
$$\frac{q}{p}=\frac{p_2}{p_1+p_2+p_3}=\frac{\frac{12}{35}}{\frac{18}{35}+\frac{12}{35}+\frac{1}{35}}=\frac{12}{31}$$
$\therefore\ p=31,\ q=12,\ p+q=43$
답 43

[풀이2]
주머니에 흰 공과 검은 공만이 들어 있으므로
$n=3-m$(단, $m=0,\ 1,\ 2,\ 3$)
문제에서 주어진 조건에 의하여
$2m\ge n=3-m$ 풀면 $m\ge 1$
즉, 순서쌍 $(m,\ n)$은 $(1,\ 2)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 0)$이다.
(1) 흰 공 0개, 검은 공 3개를 꺼낼 확률을 p_0이라고 하자.
수학적 확률의 정의에 의하여
$$p_0=\frac{{}_3C_0\times{}_4C_3}{{}_7C_3}=\frac{4}{35}$$
(2) 흰 공 2개, 검은 공 1개를 꺼낼 확률을 p_2라고 하자.
수학적 확률의 정의에 의하여
$$p_2=\frac{{}_3C_2\times{}_4C_1}{{}_7C_3}=\frac{12}{35}$$
여사건의 확률의 정의와 조건부 확률의 정의에 의하여
구하는 확률은
$$\frac{q}{p}=\frac{p_2}{1-p_0}=\frac{\frac{12}{35}}{1-\frac{4}{35}}=\frac{12}{31}$$
$\therefore\ p=31,\ q=12,\ p+q=43$
답 43

[참고]
확률의 덧셈정리와 확률의 곱셈정리를 사용하여
$p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_3$의 값을 구할 수도 있다.
확률의 덧셈정리와 확률의 곱셈정리에 의하여

$$p_0=\underbrace{\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}}_{\bullet\to\bullet\to\bullet}=\frac{4}{35}$$

$$p_1=\underbrace{\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}}_{\circ\to\bullet\to\bullet}+\underbrace{\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}}_{\bullet\to\circ\to\bullet}+\underbrace{\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{3}{5}}_{\bullet\to\bullet\to\circ}=\frac{18}{35}$$

$$p_2=\underbrace{\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}}_{\circ\to\circ\to\bullet}+\underbrace{\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}}_{\circ\to\bullet\to\circ}+\underbrace{\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}\times\frac{2}{5}}_{\bullet\to\circ\to\circ}=\frac{12}{35}$$

$$p_3=\underbrace{\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}}_{\circ\to\circ\to\circ}=\frac{1}{35}$$

29

[풀이1]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(\neq 0)$라고 하자.

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$b_1=a_1$

$b_2=b_1+a_2=a_1+a_2$

$b_3=b_2-a_3=a_1+a_2-a_3$

$b_4=b_3+a_4=a_1+a_2-a_3+a_4$

$b_5=b_4+a_5=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5$

$b_6=b_5-a_6=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6$

$b_7=b_6+a_7=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7$

$b_8=b_7+a_8=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8$

$b_9=b_8-a_9$

$=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8-a_9$

$b_{10}=b_9+a_{10}$

$=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8-a_9+a_{10}$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$b_{10}=a_{10}$으로 두고, 이 등식을 간단히 하면

$a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8-a_9=0$

등차수열의 정의에 의하여

$a_2-a_3=a_5-a_6=a_8-a_9=-d$

이므로, 다시 등식을 간단히 하면

$a_1+a_4+a_7-3d=0$

등차중앙의 정의에 의하여

$2a_4=a_1+a_7$이므로, 다시 등식을 간단히 하면

$3a_4-3d=0$ 즉, $a_4=a_1+3d=d$

정리하면

$a_1=-2d$

등차수열의 정의와 등차중앙의 정의를 이용하여

b_{10}, b_8을 d에 대한 식으로 표현하자.

$b_{10}=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8-a_9+a_{10}$

$=a_1+a_2+d+a_5+d+a_8+d$

$=a_1+3a_5+3d=4a_1+15d=7d(\because a_1=-2d)$

$b_8=a_1+a_2-a_3+a_4+a_5-a_6+a_7+a_8$

$=a_1+a_2+d+a_5+d+a_8$

$=a_1+3a_5+2d=4a_1+14d=6d(\because a_1=-2d)$

$\dfrac{q}{p}=\dfrac{b_8}{b_{10}}=\dfrac{6d}{7d}=\dfrac{6}{7}$이므로 $p=7$, $q=6$

$\therefore\ p+q=13$

답 13

[풀이2]

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 $d(\neq 0)$라고 하자.

문제에서 주어진 귀납적 정의에 의하여

$b_1=a_1$

$b_2=b_1+a_2=2a_1+d$

$b_3=b_2-a_3=a_1-d$

$b_4=b_3+a_4=2a_1+2d$

$b_5=b_4+a_5=3a_1+6d$

$b_6=b_5-a_6=2a_1+d$

$b_7=b_6+a_7=3a_1+7d$

$b_8=b_7+a_8=4a_1+14d$

$b_9=b_8-a_9=3a_1+6d$

$b_{10}=b_9+a_{10}=4a_1+15d$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$b_{10}=a_{10}$

이므로

$4a_1+15d=a_1+9d$

정리하면

$a_1=-2d$

$\dfrac{q}{p}=\dfrac{b_8}{b_{10}}=\dfrac{4a_1+14d}{4a_1+15d}=\dfrac{6d}{7d}=\dfrac{6}{7}$

이므로 $p=7$, $q=6$

$\therefore\ p+q=13$

답 13

30

[풀이1]

평행이동의 관점에서 $\alpha=0$으로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두자.

함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$h(x)=x^3+ax^2+bx+c$

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=3x^2+2ax+b$

조건 (가), (나)에서

$h(0)=0$, $h'(0)=0$, $h'(\beta)=0$

이므로

$h(0)=c=0$, $h'(0)=b=0$,

$h'(\beta)=3\beta^2+2a\beta+b=0$

위의 세 식을 연립하면

$a=-\dfrac{3}{2}\beta$, $b=0$, $c=0$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x^3-\dfrac{3}{2}\beta x^2$

이제 함수 $g(x)$의 방정식을

$g(x)=2x^2+dx+e$

함수 $g(x)$의 도함수는

$g'(x)=4x+d$

조건 (가), (나)에서

$g'(0)=-16$, $g'(\beta)=16$

이므로

$g'(0)=d=-16$, $g'(\beta)=4\beta+d=16$

위의 두 식을 연립하면

$d=-16$, $\beta=8$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x^3-12x^2$

$\therefore\ g(\beta+1)-f(\beta+1)=g(9)-f(9)=-h(9)=243$

답 243

[참고1]

부정적분을 이용하여 함수 $h(x)$의 방정식을 유도해도 좋다.

조건 (가), (나)에서

$h(0)=0$, $h'(0)=0$, $h'(\beta)=0$

이므로

$h'(x)=3x(x-\beta)=3x^2-3\beta x$

부정적분을 구하면

$h(x)=x^3-\dfrac{3}{2}\beta x^2+C$(단, C는 적분상수)

$h(0)=C=0$이므로 함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x^3-\dfrac{3}{2}\beta x^2$

조건 (가), (나)에서

$g'(0)=-16$, $g'(\beta)=16$

이므로

$g'(x)=4x-16$($\because g'(0)=-16$)

$g'(\beta)=4\beta-16=16$에서 $\beta=8$

따라서 함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=x^3-12x^2$

[풀이2]

$h(x)=f(x)-g(x)$로 두면

함수 $h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이다.

조건 (가), (나)에서

$g'(\alpha)\neq g'(\beta)$이므로 $\alpha\neq\beta$이다.

왜냐하면 일차함수 $g'(x)$는 일대일대응이기 때문이다.

조건 (가), (나)에서

$h(\alpha)=0$, $h'(\alpha)=0$, $h'(\beta)=0$

인수정리에 의하여

$h(x)=(x-\alpha)Q(x)$

(단, $Q(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수)

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=Q(x)+(x-\alpha)Q'(x)$

$h'(\alpha)=Q(\alpha)=0$,

$h'(\beta)=Q(\beta)+(\beta-\alpha)Q'(\beta)=0$

인수정리에 의하여 함수 $Q(x)$의 방정식을

$Q(x)=(x-\alpha)(x-\gamma)$

함수 $Q(x)$의 도함수는

$Q'(x)=2x-\alpha-\gamma$

이므로

$h'(\beta)=(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)+(\beta-\alpha)(2\beta-\alpha-\gamma)=0$

정리하면

$(\beta-\alpha)(3\beta-\alpha-2\gamma)=0$

$\beta\neq\alpha$이므로 $\gamma=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ (단, $\alpha\neq\beta$)

이제 함수 $g(x)$의 방정식을

$g'(x)=4x+k$

($\because$ 이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로 $g(x)$의 최고차항의 계수는 4이다.)

조건 (가), (나)에서

$g'(\alpha)=-16$, $g'(\beta)=16$

이므로

$g'(\alpha)=4\alpha+k=-16$

$g'(\beta)=4\beta+k=16$

위의 두 등식의 양변을 변변히 빼면

$\beta-\alpha=8$

$\therefore\ g(\beta+1)-f(\beta+1)$

$=-h(\beta+1)=-(\beta-\alpha+1)^2\left(1+\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$=-9^2\times(-3)=243$

답 243

[참고2]

함수 $h(x)$의 방정식을 다음과 같이 유도해도 좋다.

$h(\alpha)=0$, $h'(\alpha)=0$이므로 인수정리에 의하여

함수 $h(x)$의 방정식을

$h(x)=(x-\alpha)^2(x-\gamma)$

함수 $h(x)$의 도함수는

$h'(x)=(x-\alpha)(3x-\alpha-2\gamma)$

$h'(\beta)=0$이므로

$h'(\beta)=(\beta-\alpha)(3\beta-\alpha-2\gamma)=0$

풀면

$\gamma=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$ ($\because\ \alpha\neq\beta$)

함수 $h(x)$의 방정식은

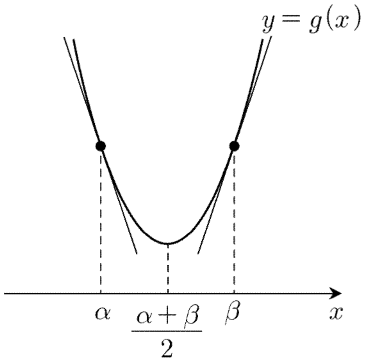
$h(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ (단, $\alpha\neq\beta$)

[참고3]

이차함수와 삼차함수의 그래프가 가지고 있는 성질을 이용하여 두 함수 $h(x)$, $g(x)$의 방정식을 빠르게 유도할 수도 있다.

조건 (가), (나)에서

$g'(\alpha)=-16$, $g'(\beta)=16$



이차함수 $g(x)$의 대칭축은 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$이므로

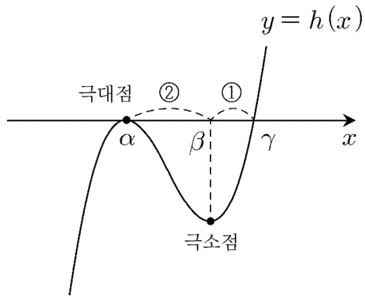
함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=2\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)^2+c$(단, c는 상수)

조건 (가), (나)에서

$h(\alpha)=0$, $h'(\alpha)=0$, $h'(\beta)=0$

함수 $h(x)$의 그래프는



(단, $h(\gamma)=0$)

내분점의 공식에 의하여

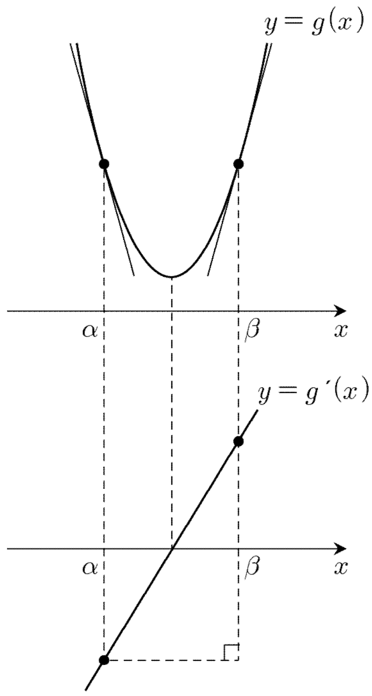
$\beta=\dfrac{\alpha+2\gamma}{3}$이므로 $\gamma=\dfrac{3\beta-\alpha}{2}$

함수 $h(x)$의 방정식은

$h(x)=(x-\alpha)^2\left(x-\dfrac{3\beta-\alpha}{2}\right)$ (단, $\beta>\alpha$)

[참고4]

$\beta-\alpha$의 값을 다음과 같은 방법으로 구해도 좋다.



이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 2이므로

일차함수 $g'(x)$의 최고차항의 계수는 4이다.

일차함수 $g'(x)$의 기울기는 4이므로

$\dfrac{g'(\beta)-g'(\alpha)}{\beta-\alpha}=4$ 즉, $\dfrac{16-(-16)}{\beta-\alpha}=4$

$\therefore\ \beta-\alpha=8$