안녕하세요. 매스매지션입니다.

제가 예전에 쓰고 묵혀놨던 칼럼을 올려봅니다.

공부하는 데 도움이 되셨으면 좋겠네요!

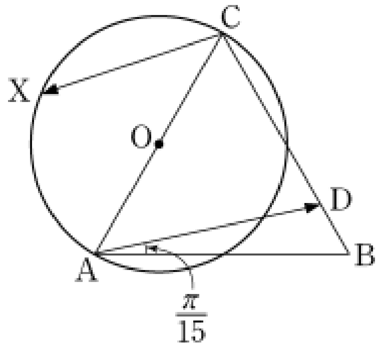
만일 해설에 오류가 있다면 살포시 쪽지 하나남겨주세요^^

by 매스매지션

주제는 '내적의 본질'입니다.

- 출처 : 한국교육과정 평가원 2011 수능 수리가형 홀수형 22번 문제 -

**22.** 그림과 같이 평면 위에 정삼각형 ABC와 선분 AC를 지름으로 하는 원 O가 있다. 선분 BC 위의 점 D를 $\angle DAB = \frac{\pi}{15}$가 되도록 정한다. 점 X가 원 O 위를 움직일 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CX}$의 내적 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CX}$의 값이 최소가 되도록 하는 점 X를 점 P라 하자. $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, $p$와 $q$는 서로소인 자연수이다.) [4점]



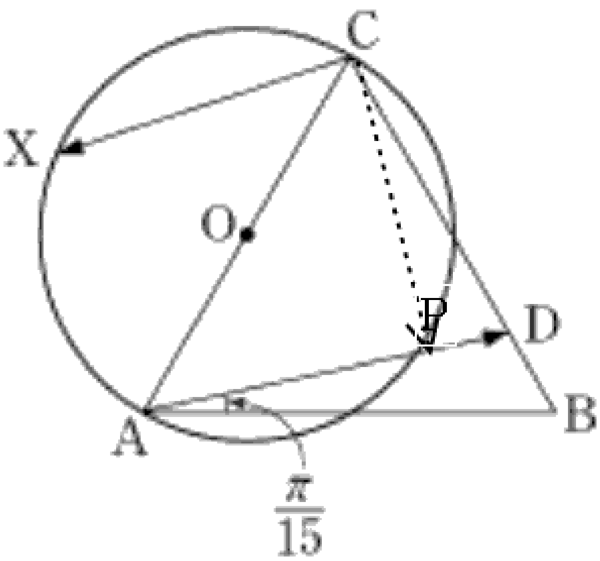
- 출처 : 한국교육과정 평가원 2011 수능 수리가형 홀수형 22번 문제 -

\-----

이 문제는 '내적'의 정의를 제대로 알고 있는지를 묻고 있습니다.

또한 그림에서 '원의 지름'이 표시되면, 어떤 '작업'을 해야만 할지를 알려주는 문제입니다.

원이 주어지고 '지름'이 표시되어 있다면 아래 그림과 같은 조작을 하여 직각삼각형을 만들어 보시기 바랍니다. (99수능 자연21번 참고)




$\angle APC = 90^\circ$ 가 됩니다.

다음,

이 문제는 내적과 관련된 문제이므로, 머릿속에 있는 내적의 개념을 꺼내봅시다.

$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\Theta$ 내적의 정의

'크기크기코사인쎄타'

구구절절 외우는 식이죠.

위 식에 괄호만 살짝 쳐보겠습니다.

$(|\vec{A}| \cos\Theta) \cdot |\vec{B}|$ 와 같습니다.

즉 A와 B의 내적이란,

'B**직선**에 대한 A의 정사영의 길이' x 'B선분'의 크기 로도 해석 할 수 있습니다.

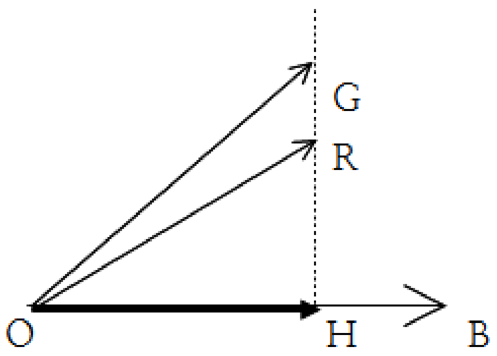
정사영의 정의에는 '각도'가 포함이 되어 있습니다만............

위에서 제가 '각도'를 언급 했었나요? No!!

이 말은 임의의 벡터들의 내적 값을 비교할 때, 사이각($\theta$)을 몰라도 **수직으로 찍힌 부분의 길이만 안다면** 내적의 값을 비교하는 것이 가능하다는 이야깁니다.

말이 좀.. 어렵다고요?!!!

자, 아래 그림을 보면 쉽게 의미가 와닿으실겁니다.




그림을 보시면 임의의 세 벡터 $\overrightarrow{OG}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OB}$에 대하여

$\overrightarrow{OR}$ 과 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각과, $\overrightarrow{OG}$와 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각은 서로 다릅니다.

각각의 각도를 $\theta_1$ 과 $\theta_2$ 라고 가정해봅시다. (정확한 각도는 뭔지 모름)

($\overrightarrow{OR}$과 $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각 $=\theta_1$ / $\overrightarrow{OG}$와$\overrightarrow{OB}$가 이루는 각 = $\theta_2$)

따라서 다음과 같은 식이 성립합니다.

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OR}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta_1$$
$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OG}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta_2$$

그런데, 식 순서만 살짝 바꿔주면 동일한 식으로 표현 할 수 있습니다.

$$\overrightarrow{OR} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OB}| \times (|\overrightarrow{OR}|\cos\theta_1) = |\overrightarrow{OB}| \times |\overrightarrow{OH}|$$
$$\overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OB}| \times (|\overrightarrow{OG}|\cos\theta_2) = |\overrightarrow{OB}| \times |\overrightarrow{OH}|$$

결론적으로 **내적 값은 같아집니다.**

따라서 이 문제가 여러분에게 전하고 있는 메세지는 다음과 같습니다.

**"각도가 달라도 정사영이 같다면 내적은 같다."**

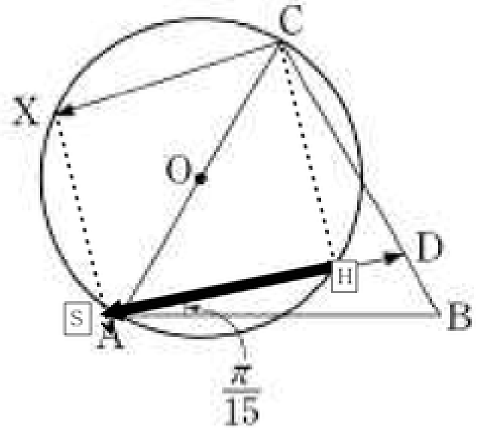
그러면 다시 문제로 돌아가서...

$\overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{AD}$ 의 값을 구해야 하는데....

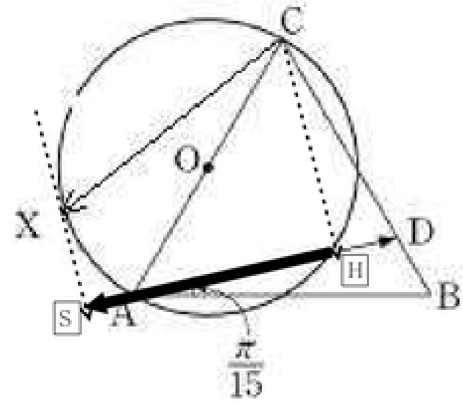
$\overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{AD}$ 에서, $\overrightarrow{CX}$ 벡터는 X의 위치가 변함에 따라 그 크기도 변한다는 것을 알 수 있습니다. 그러나 AD의 크기는 일정하죠.

그러면 $\overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{AD}$ 값에 영향을 주는것은 오로지 $\overrightarrow{CX}$ 임을 알 수 있습니다.
정확히 말하면 C도 고정되어있으니 X의 위치가 중요한 변수임을 알 수 있겠네요.

아래 두 그림을 비교해보죠.




[case1]




[case2]

그림을 보시면 $\overrightarrow{CX}$ 의 길이가 달라질수록(=X의 위치가 변할수록) 정사영의 길이인 'SH'의 길이가 달라집니다.

첫 번째 그림의 X의 위치보다, 두 번째 그림의 X의 위치가 C로부터 더 멀리 떨어져 있습니다.

즉 C로부터 가장 멀리떨어진 지점은 A지점이 되겠죠.

이 때 $\overrightarrow{CX}$의 정사영인 SH의 길이를 생각하면

첫 번째 그림의 SH의 길이보다 두 번째 그림의 SH의 길이가 더 길다는 것을 알 수 있습니다.

이제. 두 번째 중요한 key point를 말씀드리겠습니다.

**“내적은 부호를 가진다.”**

위의 그림을 보시면 $\overrightarrow{AD}$ 와 $\overrightarrow{CX}$ 의 정사영벡터는 방향이 반대입니다.

이 말은 내적을 할 때 반드시 −1을 곱해 주어야 한다는 사실을 의미합니다. (cos(180)= −1 이므로)

즉 $\overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{AD} = |\overline{SH}| \times |\overrightarrow{AD}| \times (-1)$ 식을 세워야 합니다.

그런데 문제에서 요구하길, '내적의 값이 최소가 되도록'이라고 했으므로..

$\overrightarrow{CX} \cdot \overrightarrow{AD}$ 가 '최소'이기 위해서는 $|\overline{SH}| \times |\overrightarrow{AD}|$ 가 최대여야 합니다.

왜냐구요?! 방향이 다른 이유로 (−1)을 곱하고 시작하기 때문이죠.

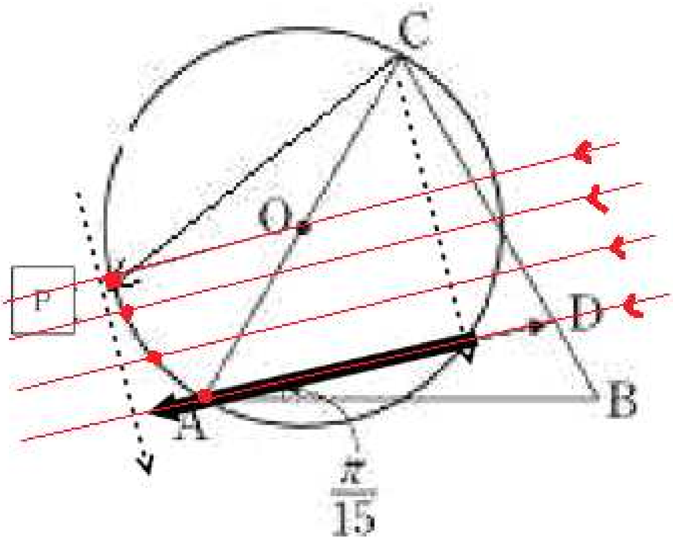
또한 $|\overline{SH}| \times |\overrightarrow{AD}|$ 식에서 AD는 일정하므로 값에 영향을 주는 것은 결국 SH입니다.

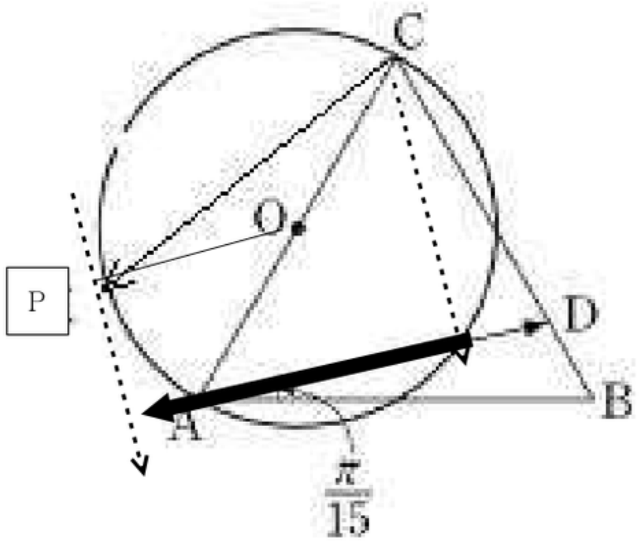
따라서 SH값만 '최대'값을 가지면 됩니다.

방금전 그림에서, SH값이 최대이기 위해서는(=제일 긴 값을 가지려면) AD와 평행한 가상의 선을 그어서 가장 긴 그림자(SH)를 만드는 지점을 찾아야 한다는 사실을 알 수 있습니다.

생각해 봤더니 가상의 평행선이 중심O를 지날 때 SH가 가장 길게 됩니다.

SH가 가장 길도록 하는 지점, 그 순간의 점의 위치를 P라고 놓겠습니다. (아래 그림 참고)




그렇다면 이제, X=P로 간주하여 $\angle PCA$ 를 구하는 문제로 바뀌었습니다.

이 각은 어떻게 구해야 할까요?

'원주각'의 개념을 떠올려 보시면 쉽게 구하실수 있습니다.

$\angle PCA$ 를 구하라는 말은 $\frac{1}{2}\angle POA$ 를 구하라는 말과 같습니다.
OP와 AD는 평행하므로 $\angle OAD$와 $\angle AOP$는 '엇각' 관계이므로 같습니다.
또한 ABC가 정삼각형이라고 했으므로
$\angle OAD = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{15}$ 가 됩니다.
즉 $\angle OAD = \frac{4\pi}{15}$ 가 되는 것이죠.

고로, $\angle ACP$ 는 $\frac{1}{2}\times\frac{4\pi}{15} = \frac{2\pi}{15}$ 가 됩니다.

문제에서 요구하는 것은 $\angle ACP = \frac{q}{p}\pi$ 이므로
답은 15+2 = 17 이 됩니다.^^

<+@>

(1) 벡터의 내적의 정의를 '정사영'의 개념으로 이해해보자!

(2) 벡터의 내적은 각도에 따라 '부호'를 가진다.

따라서 대소비교 or 최댓값 최소값과 관련된 문제에 응용되어 출제가 될 수 있다.