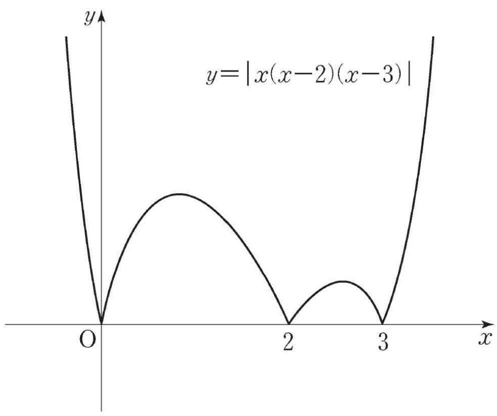
2018학년도 수능수학
『이젠, 이정환 실전력 극대화 수학이 대세입니다.』

교과서가 중요하다. 정말 많이 듣는 말입니다. 그런데 교과서가 왜 중요한 것인지, 중요하다고 하면 어떻게 교과서를 공부해야 하는지에 대해서 구체적인 이야기를 듣기는 어렵습니다. 반대로 교과서가 중요하다고 말을 하면서 실제로는 교과서를 무시하는 경우도 많습니다. 오늘 생각해볼 것은 이와 관련된 이야기입니다.

[문제]
다음 조건을 만족시키며 최고차항의 계수가 음수인 모든 사차함수 $f(x)$에 대하여 $f(1)$의 최댓값은? (4점)

2017(나) 9월/평가원 21

(가) 방정식 $f(x)=0$의 실근은 0, 2, 3 뿐이다.
(나) 실수 x에 대하여 $f(x)$와 $\lvert x(x-2)(x-3)\rvert$ 중 크지 않은 값을 $g(x)$라 할 때, 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.



[1]

정답률이 매우 낮았던 문항입니다. 이 문제를 소재로 하여 교과서가 중요하다는 말에 대해서 생각해보기로 하겠습니다.

어떤 수학문제를 해결하기 위해서는 문제 해결에 필요한 세 가지 요소를 갖고 있어야 합니다.

(1) 문제에 포함된 용어, 기호, 표현, 식에 대해서 알고 있어야 하고
(2) 문제해결에 필요한 개념, 공식, 계산법, 풀이절차를 정확하게 이해하고 있어야 하며
(3) 자신이 아는 ‘모든 것’을 동원하여 문제를 해결하는 절차, 과정을 계획하고 실행할 수 있어야 합니다.

(1)번 요소, 즉 문제에 포함된 용어, 기호, 표현, 식에 대해서부터 생각해보기로 하겠습니다. 최고차항, 계수, 음수, 사차함수와 같은 용어에 대해서는 아마도 거의 모든 수험생이 알고 있을 것입니다. 이 문제를 틀린 이유는 아예 처음부터 문제를 풀 생각이 없는 경우가 아니면 이런 용어를 몰라서 틀리는 경우는 없을 것입니다. $\lvert x(x-2)(x-3)\rvert$ 이라는 표현을 알지 못한 경

1) 문제 자체와 풀이과정에 대해서는 별도의 문서로 제공합니다. 문과 문항이지만 이과 수험생도 풀어볼 필요가 있는 문항입니다.

우도 거의 없을 것이지만 만약 이런 사례가 있다고 가정해봅시다.

교과서에는 우선 $y=x(x-2)(x-3)$의 그래프 개형을 어떻게 그리는 것인지에 대해서는 '예제 수준'의 문제에서 다루고 있습니다. 나아가서 $y=f(x)$의 그래프 개형을 알고 있을 때, $y=|f(x)|$의 그래프 개형을 어떻게 그릴 것인지도 '예제 수준'에서 다룹니다. 뿐만 아니라 이 문제에서는 $y=|x(x-2)(x-3)|$의 그래프 개형을 아예 제시되어 있기도 합니다.

따라서 (1)번 요소의 관점에서 이 문항을 해결하기 위해서는 '교과서'를 통해서 배울 수 있는 내용으로 충분합니다. 그럼 이렇게 반문할 수 있을 것입니다. "그 정도라면 교과서가 아닌 다른 수학 참고서나 인강 교재 등에서도 배울 수 있는 것 아닌가?" 네 맞습니다. 그런데 약간의 차이가 있습니다.

교과서에 있는 용어, 기호, 표현 등의 집합을 A라고 하고, 교과서가 아닌 참고서, 교재에 있는 용어, 기호, 표현의 집합을 B라고 한다면 $A \subset B$의 포함관계에 있습니다. 가령 교과서에는 문제의 소재로 간단하게만 다루는 $[x]$기호에 대해서 $x-[x]$와 같은 표현처럼 지나치게 많은 표현을 수록한 참고서도 있습니다. 그리고 이것은 우리 현실에서는 매우 당연합니다. 교과서와 같은 수준, 범위에 한정할 것이면 굳이 그런 책을 만들 이유가 없기 때문이기도 하고, 사실 그런 수준에서는 학교의 내신 시험과 같은 '좁은 범위'에서 지엽적인 소재까지 대비해야 하는 시험을 대비하기에 부족함이 있는 것이 엄연한 현실이기도 합니다.

약간의 차이가 이해되나요? 수능은 명백하게 출제범위를 A로 제한하고 있습니다.[2] 더 나아가서는 $B-A$, 즉 교과서에는 없고 특정 참고서, 교재에 있는 내용은 출제를 '금지'하는 것이 원칙입니다. 간단히 말해서 $B-A$에 있는 내용은 평가원이 출제 과정에서 모니터링을 못하는 사태가 발생하지 않는 이상[3] 출제되지 않습니다.

$B-A$에 해당하는 내용이 많은 것도 아니고, 시험에 나오지 않는다고 해도 공부해서 손해는 아니라고 생각한다면 수학적 내용으로는 '부등식의 영역'에서 배우는 '이익을 최고로 할 때'의 생산량과 같은 문제가 왜 중요한 것인지를 전혀 이해하지 못하는 것과 마찬가지입니다. 이익을 많이 얻기 위해서는 무조건 많이 생산하면 된다. 이런 것과 완전히 성격이 같은 어리석은 생각일 뿐입니다.

결국 문제 해결에 필요한 (1)번 요소의 관점에서 우리는 이런 결론을 내릴 수 있습니다. 교과서로 충분하며, 그 수준과 범위를 뛰어넘는 공부는 시험을 대비하는 공부로는 필요하지 않다.

(2)번 요소, 즉 문제 해결에 필요한 개념, 공식, 계산법, 풀이절차에 대해서 생각해봅시다. 21번 문항을 소재로 한다면 다음과 같은 내용이 여기에 해당할 것입니다.

---

2) 여기서 EBS 연계교재라는 변수가 있습니다. 이에 대해서는 EBS 연계교재의 학습을 말씀드릴 때 구체적으로 살펴보도록 하겠습니다.

3) 그리고 잘 아시는 것처럼 이런 모니터링 때문에 좋은 문제의 출제에 방해가 될 정도라고 스스로 평가할 만큼 신경을 쓰고 출제합니다.

ⅰ) $f(x)=0$의 실근은 $0,2,3$뿐 이라는 것을 이용하여 $y=f(x)$의 개형을 생각한다.
ⅱ) $f(x)$와 $|x(x-2)(x-3)|$ 중 크지 않은 값이라는 표현을 이해, 해석한다.
ⅲ) $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하려면 어떤 조건이 필요한가를 생각한다.

그리고 여기서 내린 결론을 갖고 문제 해결에 필요한 나머지 계산을 마무리해야 합니다. 이때 어떤 계산이 필요할 것인지에 대해서는 문제만 본 상태에서 알기는 어려우며 문제를 해결해가는 과정에서 파악해야 할 것입니다.

교과서에는 ⅰ), ⅱ), ⅲ)에 대해서는 특별한 내용은 없습니다. 교과서가 중요하다고 하면서 교과서를 무리하는 가장 큰 이유도 여기에 있습니다. 교과서만 보아서는 뭐 어떻게 해야 할지 도통 알 수가 없다. 교과서만 보고 이것이 가능하려면 수학적으로 특별한 재능이 필요하다. 교과서에는 이런 내용이 있는 그대로는 없기 때문에 소위 '행간'을 읽어야 하는데 이렇게 하기 위해서는 수학 실력을 어느 정도 갖추고 교과서를 보아야 한다 등등.

과연 그럴까요?

ⅰ)은 교과서에 의하면 우선은 $f(x)=x(x-2)(x-3)h(x)$라고 표현되는데, 다항식의 차수와 최고차항이 제시되어 있으며 $h(x)=0$의 근이 $0,2,3$ 중의 하나임을 알 수 있습니다. 그리고 이때 만약 $h(x)=0$의 근이 0이라면, 즉 $f(x)=x^2(x-2)(x-3)$이라면 이제 이 그래프 개형은 충분히 그릴 수 있습니다.

ⅱ)는 용어로 표현하면 '부등식'에 관한 표현입니다. 따라서 $p(x)=|x(x-2)(x-3)|$이라고 하면, $g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\le p(x)) \\ p(x) & (f(x)>p(x)) \end{cases}$와 같이 나타낼 수 있습니다. 특히 연속성이나 미분가능성을 묻는 교과서 예제 문항으로 $f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\le 0) \\ ax+b & (x>0) \end{cases}$ 과 같은 함수 표현은 흔하게 등장하는 표현입니다.

ⅲ)은 미분가능성을 판단하기 위해서는 연속이면서 평균변화율의 좌 극한값 = 평균변화율의 우 극한값이어야 하고, 미분가능성 판단에 대한 기본예제로 주어지는 문제를 이해하는 것으로 충분합니다.[4)]

제가 말씀드리고 싶은 것이 짐작되나요? 네. 문제해결에 필요한 (1)번 요소와 같은 성격의 문제가 여기서도 발생합니다. 21번 문제를 해결하기 위해서는 교과서에 있는 내용으로 충분하다. 물론 교과서가 아닌 참고서, 교재 등을 통해서도 가능하다. 그런데 역시 교과서에 있는 개념, 공식, 계산법, 풀이절차 등의 집합을 A라고 하고, 참고서, 인강 교재에 있는 내용의 집합을 B라고 하면, $A\subset B$입니다.

4) 여기서 기출문제의 학습 필요성이 이야기될 필요가 있는데, 이는 '기출문제를 어떻게 학습해야 하는가'를 말씀드릴 때 자세히 이야기하도록 하겠습니다.

그런데 (1)번 요소와 다르게, (2)번 요소에 이르면 $B-A$에 속하는 내용의 '양'이 크게 차이가 납니다. 용어, 기호, 표현 등에서는 사실 완전히 내신대비용 교재이거나 하지 않는 이상 $B-A$에 속하는 내용은 매우 미미합니다. 그런데 공식, 계산법 등에서는 '수능 전문 교재'라고 해도 $B-A$에 속하는 내용은 매우 많습니다. 보통 '개념을 심화 학습한다.'는 식으로 치장되고 있는데 A를 공부하는데 필요한 노력의 몇 배를 들여야 B를 공부할 수 있는 경우가 많습니다.[5)]

단지 노력이 더 필요하다면 남보다 몇 배 노력해서 해결한다고 할 수 있습니다. 그런데 시험에서 가장 중요한 경쟁력은 가장 기본적인 내용을 정확하게 알고 적용하는 것입니다. 특히 난이도가 높은 문제일수록 이것이 중요합니다. 개념, 공식, 계산법 등을 B수준에서 공부하게 되면 문제를 해결할 방법을 생각하는 과정에서 머릿속이 지나치게 복잡하질 가능성이 커집니다. 안정적인 문제 해결을 오히려 방해하게 될 가능성만 커집니다.

어떤 문제를 보았을 때 교과서에 있는 개념, 공식, 계산법을 떠올리는 것이 아니라 특정한 성격의 문제를 해결하는데 적용하는 방법부터 떠오른다면 바람직한 것이 아닙니다. 이것은 기출문제의 경우도 마찬가집니다. 그럼에도 풀 수 있는 문제는 시간을 최대한 단축시켜야 한다는 이유로 교과서의 수준을 뛰어넘는 내용에 대한 학습의 필요성이 강조되는 경우가 많습니다. 그럴듯하지만 조금만 생각해보면 잘못된 이야기임을 알 수 있습니다.

문제를 해결하는데 시간을 단축하는 것은 문제해결에 필요한 논리적 과정을 생략하거나 비약하는 것을 통해서가 아니라 기본개념, 공식,. 계산법을 '반복하는 횟수'의 증가로 가능한 것입니다. 그런데 A가 아닌 B 중심의 학습을 하게 되면 반복횟수는 그만큼 줄어들 수밖에 없습니다. 그래서 문제해결 과정에서 우왕좌왕하게 되고 결국 문제 해결에 필요한 시간은 더 길어질 뿐입니다.

교과서만 보아서는 도저히 알 수 없다는 말은 사실은 혼자서 스스로 고민하고 깨우치고, 시행착오를 경험하면서 공부하기 싫다는 것일 뿐입니다. 무엇이 '공부'의 옳은 방법인가를 여기서 말씀드릴 생각은 없습니다. 시험에 대비하는 공부 자체가 싫은 것인데, 굳이 싫은 방법으로 공부할 필요가 없을 것입니다. 어떤 방법이든 시험에서 좋은 점수를 받을 수 있다면 암기식이든, 기계적이든 열심히 노력하면 될 것입니다.[6)]

어떤 문제를 해결하기 위해서 필요한 마지막 (3)번 요소를 생각해보겠습니다. 수능에서는 이러한 능력, 즉 알고 있는 것을 적용하여 문제를 해결하는 능력 그 자체'가 없다면 상위권, 최상위권은 특별하게 운이 좋은 경우만 가능합니다. 사실 '문제를 해결하는 능력 그 자체'가 중요하다고는 누구나 인정합니다. 그런데 '문제를 해결하는 능력은 쉽게 변하지 않으니까' 능력이 변하지 않아도 1등급 이상을 맞힐 수 있어야 한다고 생각하는 경향이 있습니다. 과연 가능할까요?

---

5) 이런 이유 때문에 많은 '양'의 문제를 통해서 교과서에서 배운 것을 적용하여 익히는 것이 중요한 시기에 '개념정리'를 해야 한다고 문제를 푸는 것은 소홀히 하게 되는 경우를 너무도 자주 봅니다.

6) 이런 의미에서 최근 수능의 난이도에서는 목표가 2,3등급이라면 공부 방법을 따질 필요는 없다고 생각합니다. 어떤 방법이든 '열심히' 하면 될 것이라고 생각합니다. 그런데 평가원이 수능 난이도를 '높일' 의도를 갖고 있음을 고려하면 이제는 적어도 2등급 이상을 목표로 하면 무엇이 효율적인지를 고민할 필요가 있습니다.

짐작할 수 있겠지만 단연코 불가능합니다. 결과적으로 1등급 이상이 되는 경우는 있습니다. 간단합니다. ‘시험 당일의 운’이 좋았을 뿐입니다. 만약 누군가 그런 방법을 알고 있다면, 가령 그런 학원 또는 그런 인강이 있다면 당연히 수강생 대부분이 1등급 이상이어야 합니다. ‘능력으로 해결하는 것’이 아니라, ‘알기만 하면’ 해결이 된다면 ‘같은 선생님’에게 배우면 대부분 1등급 이상이 되어야 할 것이기 때문입니다.

실상은 어떤가요? 굳이 제가 말씀드리지 않아도 여러분이 잘 알 것입니다. 그리고 그러한 결과가 의미하는 ‘객관적 사실’은 단 하나입니다. 결국 문제를 해결하는 능력 자체가 길러져야 한다.

어떻게 하면 문제를 해결하는 능력 자체를 키울 수 있을까요? 수험생이 되면 단지 열심히 하다보면 그럴 수 있다고 생각할 만큼 한가한 처지에 있지는 않을 것입니다. 이에 대해서는 우선은 결론부터 말씀드리겠습니다. 교과서에 ‘있는’ 개념, 공식, 계산법‘만’을 이용하여 교과서에 ‘없는’ 문제를 푸는 것을 반복하면 됩니다.

교과서가 중요하다는 말에 대한 잘못된 오해는 ‘그러므로’ 교과서만 열심히 공부하면 된다는 생각입니다. 그렇지 않습니다. 교과서‘만’으로는 문제의 수준과 양이 부족합니다. 그래서 교과서를 뛰어넘은 많은 양의 문제를 다루어야 합니다.7)

21번 문항은 비슷한 성격과 수준의 문항이 기출문제로 출제된 것이 여러 번 있습니다. 핵심은 그런 문제를 ‘교과서’를 기준으로 해서, 교과서에 있는 개념, 공식, 계산법으로 풀어보는 것을 반복해야 한다는 것입니다. 그렇지 않고 ‘기출문제’를 해결하는데 필요한 어떤 방법을 ‘더 배워서’ 해결하고 있다면 21번 수준의 문항을 해결하는 능력으로 발전하는 것이 아니라, ‘기출문제집’에 실려 있는 21번 문제를 풀 수 있을 뿐입니다. 즉 이전에 출제가 되었던 문제를 풀 수 있을 뿐, ‘앞으로’ 출제될 문제를 푸는 것을 보장해주는 것이 절대 아닙니다.8)

어떤 문제를 해결하기 위해서는 문제에 포함된 용어, 기호, 표현을 이해하고 있어야 하고 문제해결에 필요한 개념, 공식, 계산법, 풀이절차 등을 알아야 하는데 이것은 일종의 시험범위라고 할 수 있습니다. 이 시험범위가 ‘교과서’라는 것은 결정되어진 ‘객관적 사실’입니다. 학문적으로 다른 의견이 있거나 말거나, 교육적으로 가치가 있거나 말거나 이것은 시험공부의 관점에서는 논란의 여지가 없는 단순한 ‘사실’일 뿐입니다. 이런 의미에서 교과서는 정확하게 시험범위와 일치하는 유일한 교재입니다.

뿐만 아니라 난이도 높은 문제를 해결하기 위해서 반드시 필요한 문제를 해결하는 능력 자체의 변화는 교과서를 기준으로 해서 적절한 방법과 양의 문제를 교과서를 뛰어넘는 수준으로 풀어야 합니다. 중요한 것은 이때 유일한 ‘기준’은 교과서가 되어야 한다는 것입니다. 그렇게 문제를 풀어가면서 ‘교과서에 있는 내용’에 대한 경험, 시행착오, 더 깊은 이해른 늘려가는 것이 유일한

7) 소위 말하는 ‘양치기’와는 다릅니다.

8) 이와 관련해서는 좀 더 생각해볼 내용은 좀 있습니다. 다만 이런 내용은 ‘기출문제 공부법’에서 자세히 다루도록 하겠습니다.

수능학습의 ‘정도’입니다.

한 마디로 교과서는 수능학습의 유일한, 그리고 가장 적합한 수능학습의 기본교재이며 ‘객관적인’ 기준인 것입니다.

그렇다면 교과서를 ‘어떻게 공부해야 하는가’에 대해서는 이어지는 다음 글을 통해서 말씀드릴 것을 약속드리면서 글을 줄이겠습니다.

(참고) 이어지는 계획된 글

1편. 교과서는 유일한 수능학습의 기준이다.
2편. 대체 교과서를 어떻게 공부해야 하는가?
3편. 기출문제를 통해서 무엇을 얻을 것인가?
4편. EBS 연계교재를 어떻게 공부할 것인가?
5편. 모의고사를 어떻게 활용할 것인가?